

# Planimetria

część 1

**Wiktor Persak**

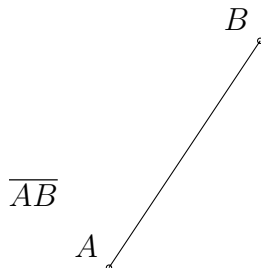
*I Liceum Ogólnokształcące w Bydgoszczy im. Cypriana Kamila Norwida*

# Spis treści

# 1 Definicje

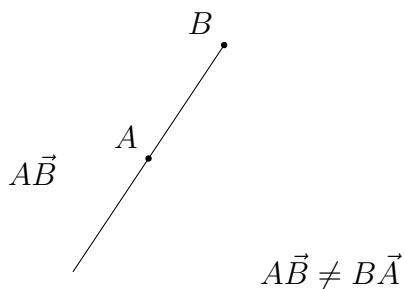
## 1.1 Odcinek

Odcinkiem o końcach  $A$  i  $B$  nazywamy zbiór składający z punktu  $A$  i  $B$  oraz wszystkich punktów leżących między punktami  $A$  i  $B$ .



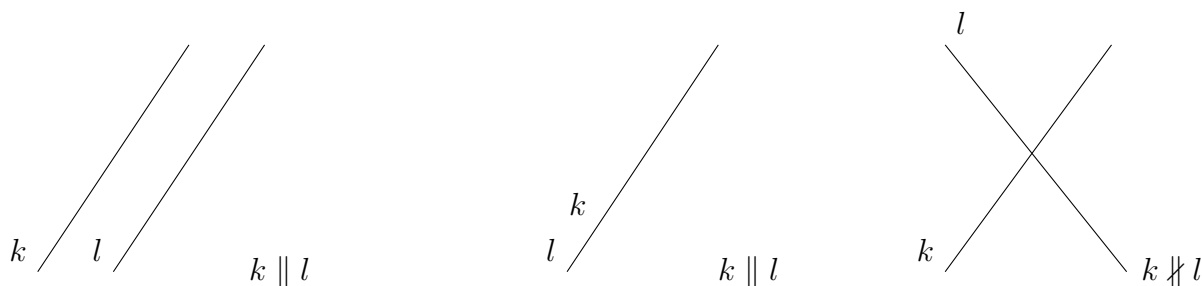
## 1.2 Półprosta

Jeżeli  $A$  i  $B$  są różnymi punktami, to półprostą o początku  $A$  przechodzącą przez  $B$  nazywamy zbiór składający się z punktu  $A$  i wszystkich punktów leżących po tej samej stronie punktu  $A$  co punkt  $B$ .



## 1.3 Proste równoległe

Dwie proste  $k$  i  $l$  nazywamy równoległymi, wtedy i tylko wtedy, gdy nie mają żadnego punktu wspólnego lub gdy są równe.



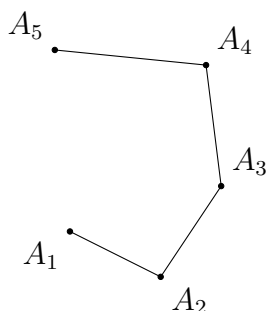
## 1.4 Odległość

Liczbę  $|\overline{AB}|$  nazywamy odległością odcinka  $\overline{AB}$  albo odległością między punktami  $A$  i  $B$ .  
 $AB = d(A, B)$  - odległość między punktami  $A$  i  $B$

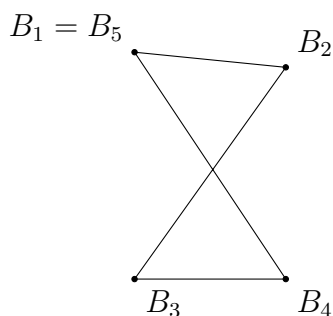
## 1.5 Łamana

Dane są punkty:  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ .

Łamaną nazywamy figurę złożoną z odcinków  $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$ .

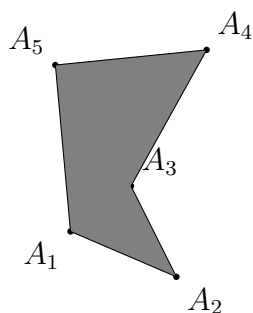


Łamaną nazywamy zamkniętą, gdy  $A_1 = A_n$ .



## 1.6 Wielokąt

Wielokątem nazywamy część płaszczyzny ograniczoną łamaną zamkniętą wraz z tą łamaną.



## 1.7 Okrąg

Określamy o środku  $O$  i promieniu  $r$  nazywamy zbiór punkt płaszczyzny, których odległość od punktu  $O$  wynosi  $r$ .

$$o(O, r) = \{X \in \Pi : OX = r\}$$

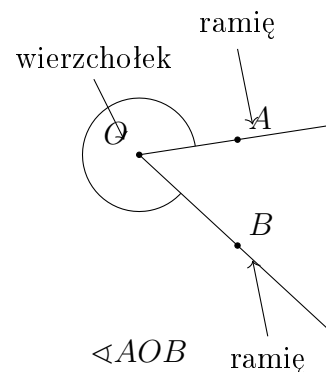
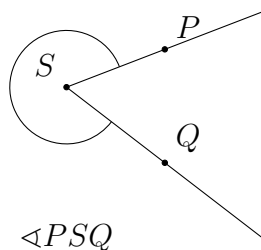
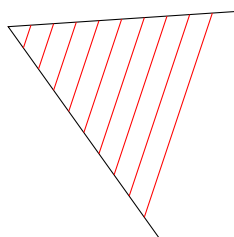
## 1.8 Koło

Kołem o środku  $O$  i promieniu  $r$  nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od środka jest mniejsza bądź równa  $r$ .

$$o(O, r) = \{X \in \Pi : OX \leq r\}$$

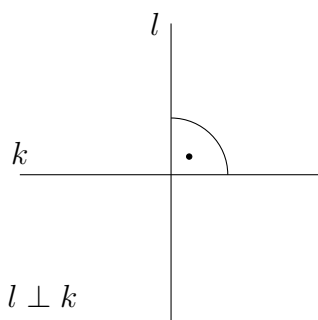
## 1.9 Kąt

Kątem nazywamy dwie półproste o wspólnym początku wraz z jednym z dwóch obszarów, na które te półproste dzielą płaszczyznę.



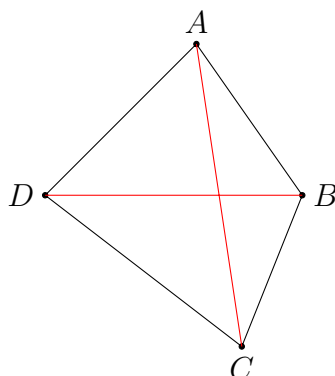
## 1.10 Proste prostopadłe

Proste, które przecinają się pod kątem prostym nazywamy prostopadłymi.



## 1.11 Przekątna

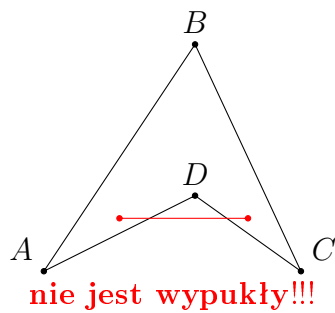
Przekątną wielokąta jest odcinkiem wielokąta łączącym wierzchołki wielokąta, który nie jest bokiem.



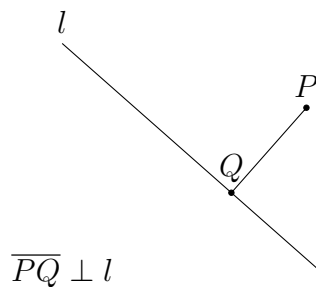
## 1.12 Figura wypukła

Figurę nazywamy wypukłą, wtedy i tylko wtedy, gdy każdy odcinek o końcach w tej figurze zawiera się w tej figurze.

Figura  $F$  jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy  $\forall_{A,B} (A, B \in F \implies \overline{AB} \subset F)$ .



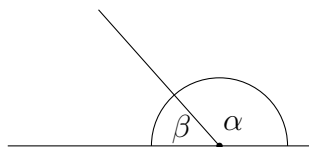
### 1.13 Odległości punktu od prostej



Odległością od punktu P od prostej l nazywamy długość odcinka  $\overline{PQ}$ .

$$d(P, l) = PQ$$

### 1.14 Kąt przyległy

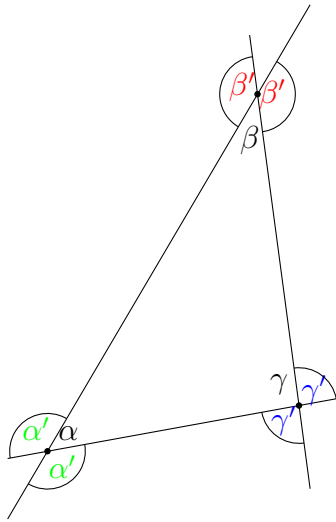


$$\alpha, \beta - \text{kąty przyległe}$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

### 1.15 Kąta zewnętrznego

Kątem zewnętrznym wielokąta wypukłego nazywamy każdy kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego wielokąta.



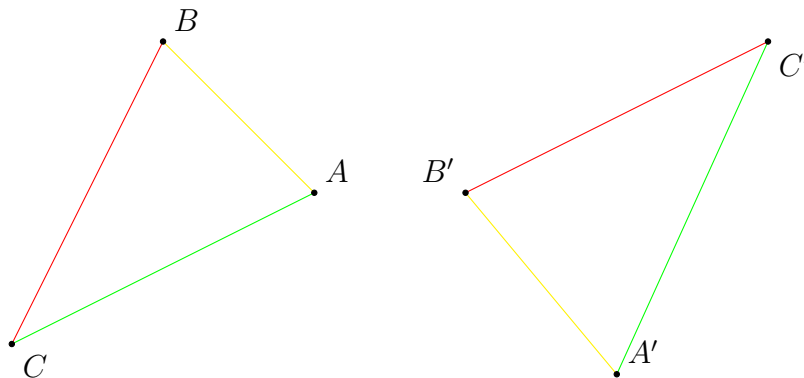
## 1.16 Trójkątów przystających

Dwa trójkąty nazywamy przystającymi, wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same miary kątów i długości boków.

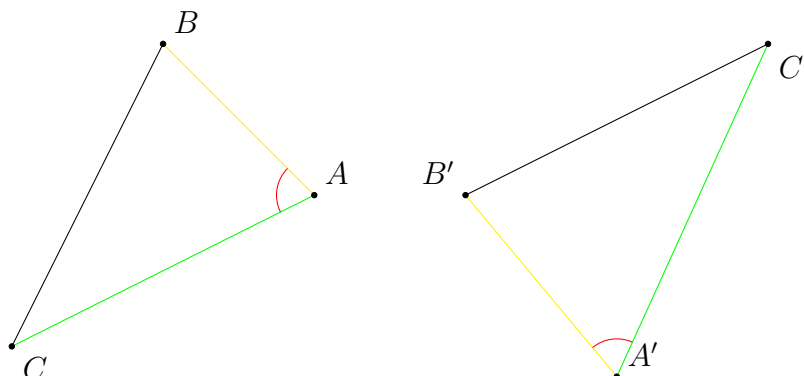
$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Cechy przystawiania trójkątów:

- bok-bok-bok(BBB):  
Jeżeli  $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$ ,  $AC = A'C'$  to  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .

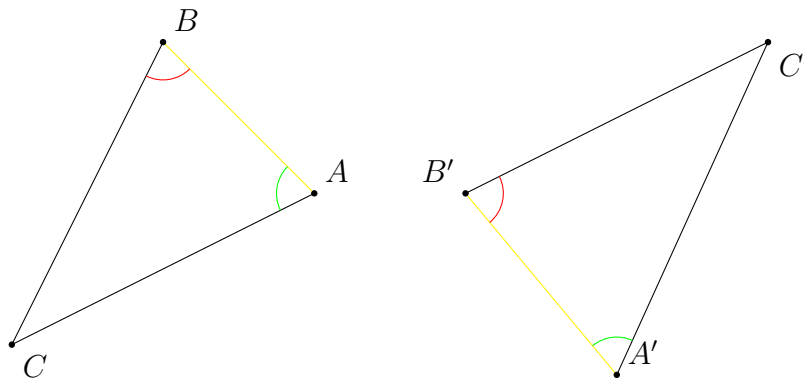


- bok-kąt-bok(BKB):  
Jeżeli  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$ ,  $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$  to  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .



- kąt-bok-kąt(KBK):

Jeżeli  $AB = A'B'$ ,  $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ ,  $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$  to  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .

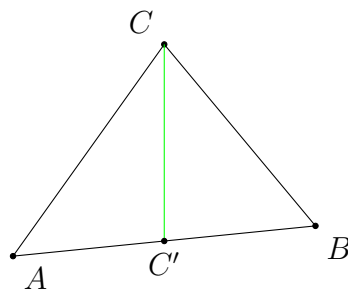


### 1.17 Symetralna odcinka

Symetralną niezerowego odcinka nazywamy prostą prostopadłą do tego odcinka przechodzącą przez jego środek.

### 1.18 Środekowa boku

Środekową boku nazywamy odcinek łączący wierzchołek z środkiem przeciwległego boku.



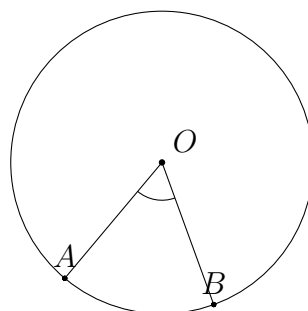
$C'$  - środek odcinka AB

$CC'$  - środkowa odcinka AB

### 1.19 Okrąg opisany

Okręgiem opisanym na wielokącie nazywamy okrąg do którego należą wszystkie wierzchołki tego wielokąta.

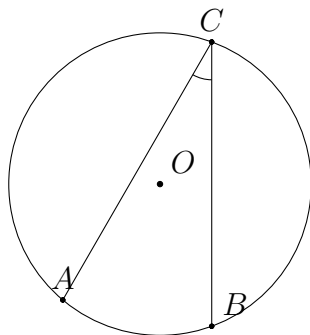
### 1.20 Kąt środkowy



Kąt  $\sphericalangle AOB$  jest środkowy.



## 1.21 Kąt wpisany



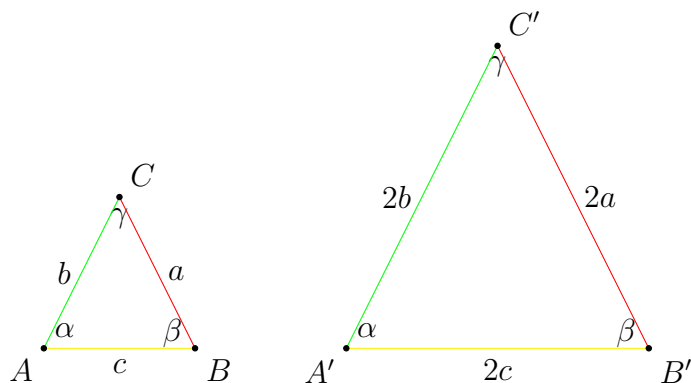
Kąt  $\sphericalangle ACB$  jest wpisany.

## 1.22 Okrąg opisany

Określenie: Okręgiem wpisanym w wielokąt wypukły nazywamy okrąg, który jest styczny do wszystkich prostych zawierających boki wielokąta, którego środek jest wewnątrz wielokąta.

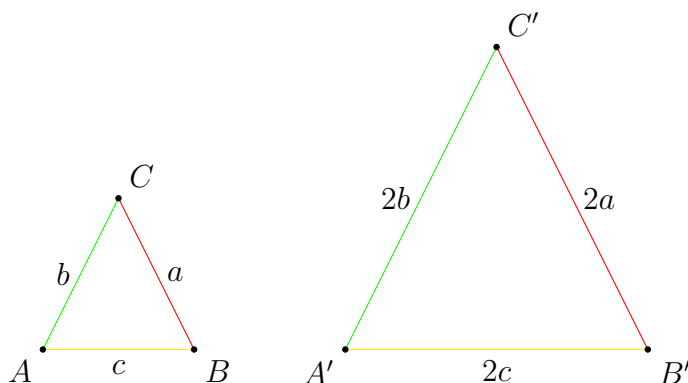
## 1.23 Podobieństwa trójkątów

Dwa trójkąty nazywamy podobnymi, jeżeli mają równe kąty i boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta



$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  Cechy podobieństwa trójkątów:

- bok-bok-bok(BBB):  
Jeżeli  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$ , to  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

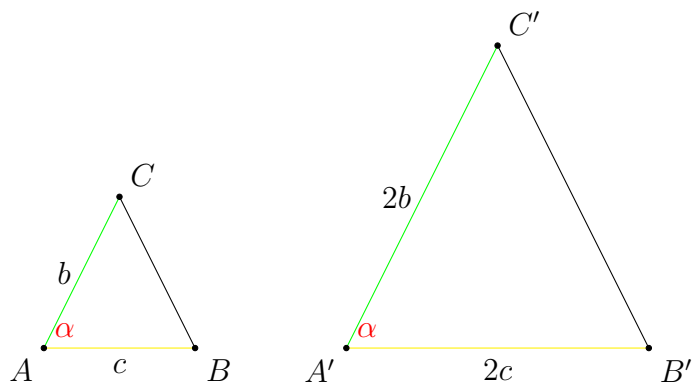


$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{1}{2}$$

Wówczas:

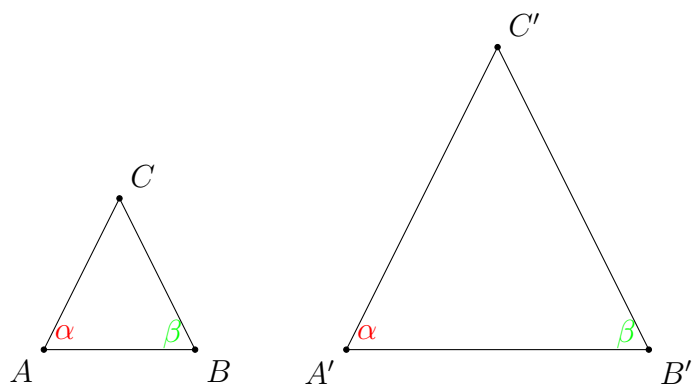
$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

- bok-kąt-bok(BKB): Jeżeli  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CA}{C'A'}$  oraz  $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ , to  $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ .



- kąt-kąt(KK):

Jeżeli  $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$  oraz  $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ , to  $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ .



## 2 Aksjomaty

**Aksjomat 1.** Przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.