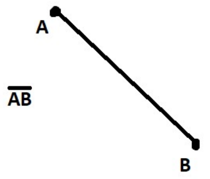
DEFINICJE

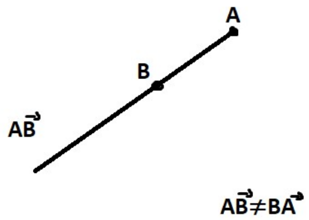
1.Odcinek

Odcinkiem o końcach A i B nazywamy zbiór składający z punktu A i B oraz wszystkich punktów leżącymi między punktami A i B.



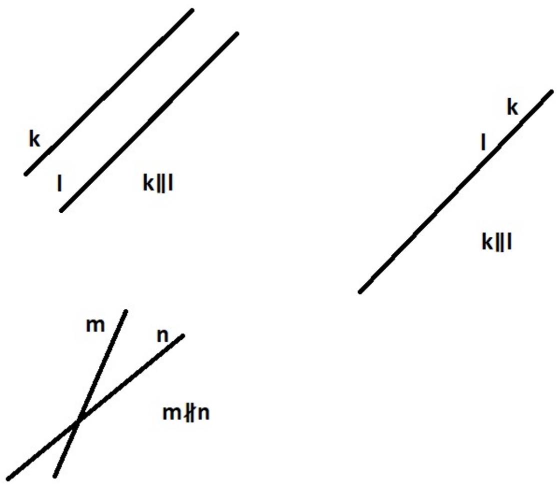
2. Półprosta

Jeżeli A i B są różnymi punktami, to półprostą o początku A przechodzącą przez B nazywamy zbiór składający się z punktu A i wszystkich punktów leżących po tej samej stronie punktu A co punkt B.



3. Prostych równoległych

Dwie proste k i l nazywamy równoległymi, wtedy i tylko wtedy, gdy nie mają żadnego punktu wspólnego lub gdy są równe.



4. Odległości

Liczbę $|\overline{AB}|$ nazywamy odległością odcinka $\overline{AB}$ albo odległością między punktami A i B.

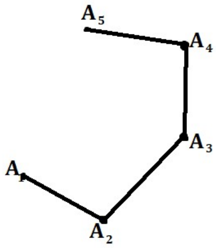
$AB = d(A,\ B)$ - odległość między punktami AB

5. Łamanej

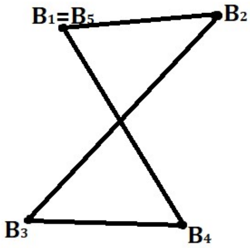
Dane są punkty

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$

Łamaną nazywamy figurę złożoną z odcinków $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, …, $\overline{A_{n-1}A_n}$

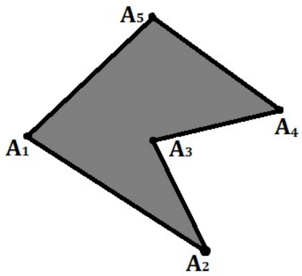


Łamaną nazywamy zamkniętą, gdy $A_1=A_n$.



6. Wielokąta

Wielokątem nazywamy część płaszczyzny ograniczoną łamaną zamkniętą wraz z tą łamaną.



7. Okręgu

Okręgiem o środku O i promieniu r nazywamy zbiór punkt płaszczyzny, których odległość od punktu O wynosi r.

$$o(O,r) = \{X \in \Pi : OX = r\}$$

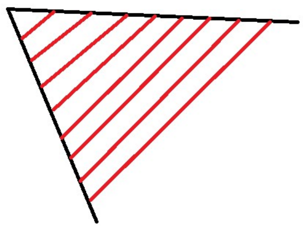
8. Koło

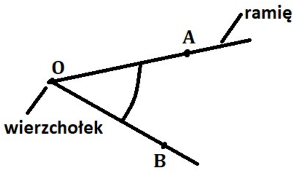
Kołem o środku O i promieniu r nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od środka jest mniejsza bądź równa r.

$$o(O,r) = \{X \in \Pi : OX \leq r\}$$

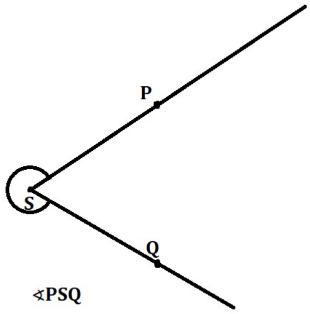
9. Kąta

Kątem nazywamy dwie półproste o wspólnym początku wraz z jednym z dwóch obszarów, na które te półproste dzielą płaszczyznę.



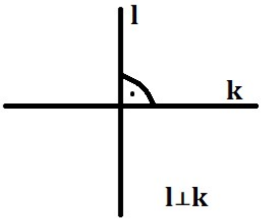


∢AOB



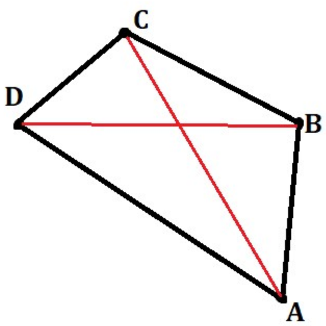
10. Prostych prostopadłych

Proste, które przecinają się pod kątem prostym nazywamy prostopadłymi.



11. Przekątnej

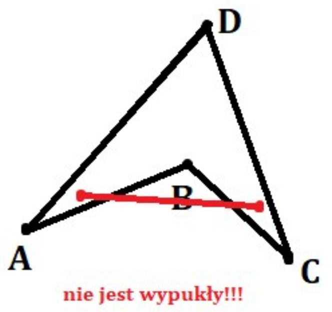
Przekątną wielokąta jest odcinkiem wielokąta łączącym wierzchołki wielokąta, który nie jest bokiem.



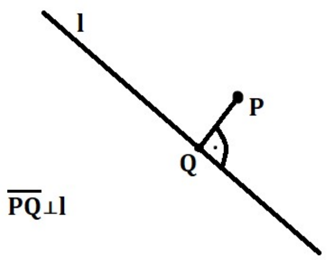
12. Figury wypukłej

Figurę nazywamy wypukłą, wtedy i tylko wtedy, gdy każdy odcinek o końcach w tej figurze zawiera się w tej figurze.

Figura F jest wypukła $\Leftrightarrow \bigwedge_{A,B} (A, B \in F \Rightarrow \overline{AB} \subset \mathrm{F})$.



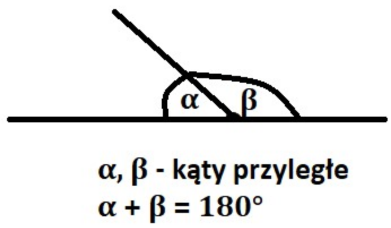
13. Odległości punktu od prostej



Odległością od punktu P od prostej l nazywamy długość odcinka $\overline{PQ}$.

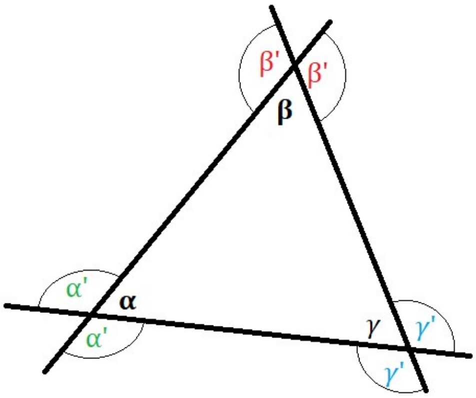
$$d(P, l) = PQ$$

14. Kąta przyległego



15. Kąta zewnętrznego

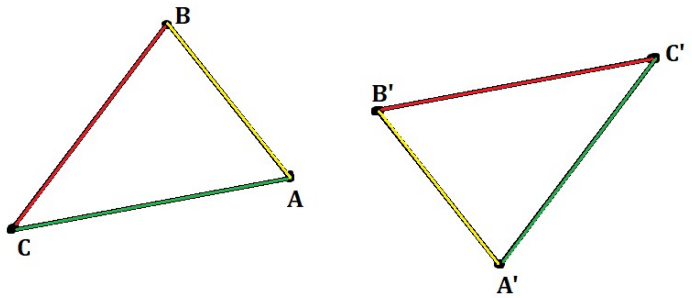
Kątem zewnętrznym wielokąta wypukłego nazywamy każdy kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego wielokąta.



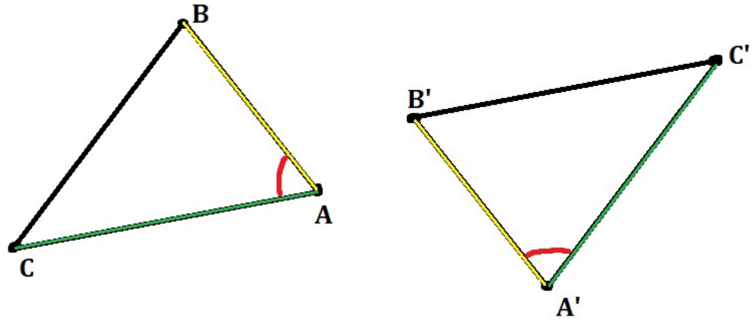
16. Trójkątów przystających
Dwa trójkąty nazywamy przystającymi, wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same miary kątów i długości boków.
$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$
Cechy przystawania trójkątów:

1. **bok-bok-bok(BBB):**

   Jeżeli $AB = A'B',\ BC = B'C',\ AC = A'C'$ to $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

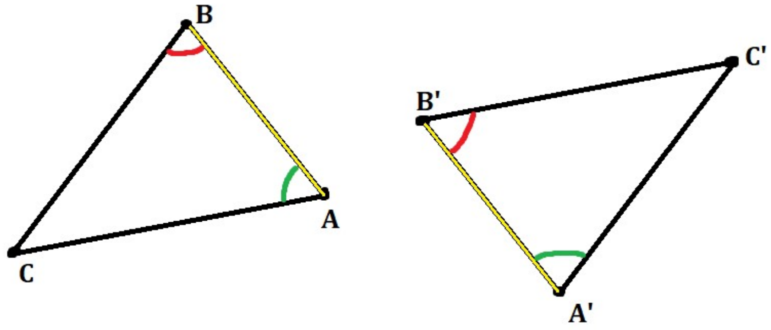


2. **bok-kąt-bok(BKB):**
   Jeżeli $AB = A'B',\ AC = A'C',\ \sphericalangle A = \sphericalangle A' to\ \Delta ABC \equiv A'B'C'$.



3. **kąt-bok-kąt(KBK):**

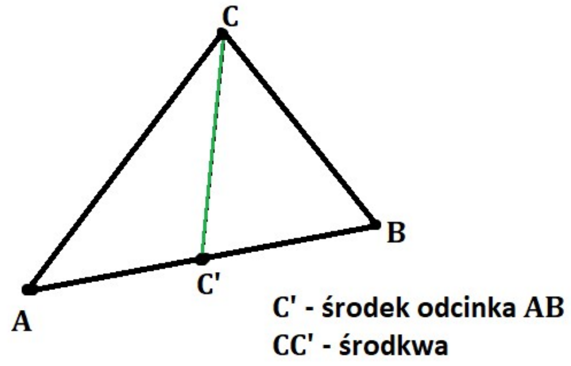
   Jeżeli $AB = A'B',\ \sphericalangle A = \sphericalangle A',\ \sphericalangle B = \sphericalangle B'$ to $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$



17. Symetralna odcinka
Symetralną niezerowego odcinka nazywamy prostą prostopadłą do tego odcinka przechodzącą przez jego środek.

18. Środkowa boku

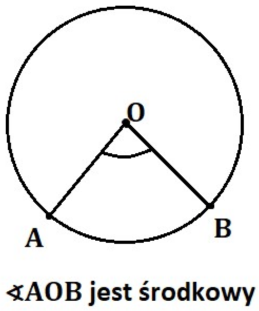
Środkową boku nazywamy odcinek łączący wierzchołek z środkiem przeciwległego boku.



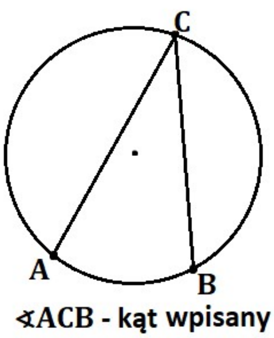
19. Okręgu opisanego

Okręgiem opisanym na wielokącie nazywamy okrąg do którego należą wszystkie wierzchołki tego wielokąta.

20. Kąt środkowy



21. Kąt wpisany

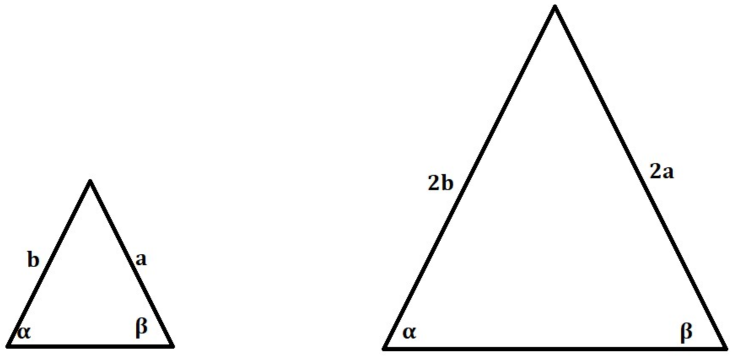


22. Okręgu wpisanego

Okręgiem wpisanym w wielokąt wypukły nazywamy okrąg, który jest styczny do wszystkich prostych zawierających boki wielokąta, którego środek jest wewnątrz wielokąta.

23. Podobieństwa trójkątów

Dwa trójkąty nazywamy podobnym, jeżeli mają równe kąty i boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta

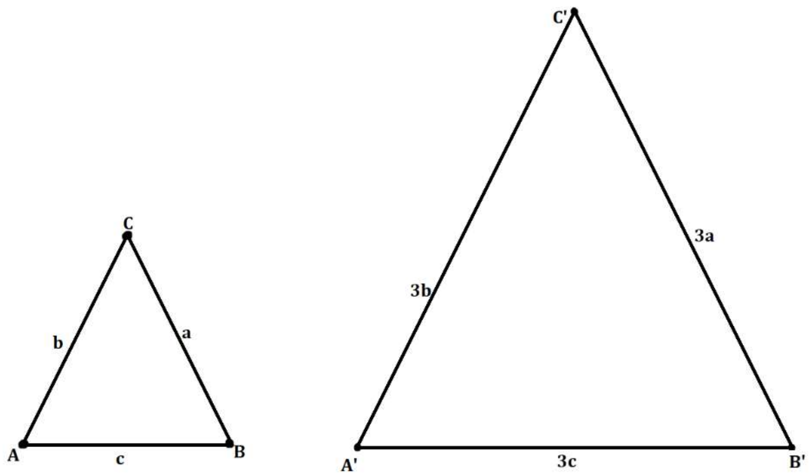


$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Cechy podobieństwa trójkątów:

1. **bok-bok-bok(BBB):**

Jeżeli $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$, to $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.



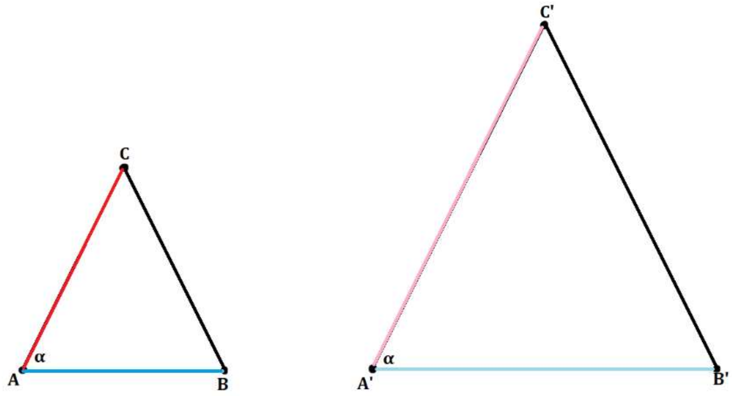
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{1}{3}$$

Wówczas

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

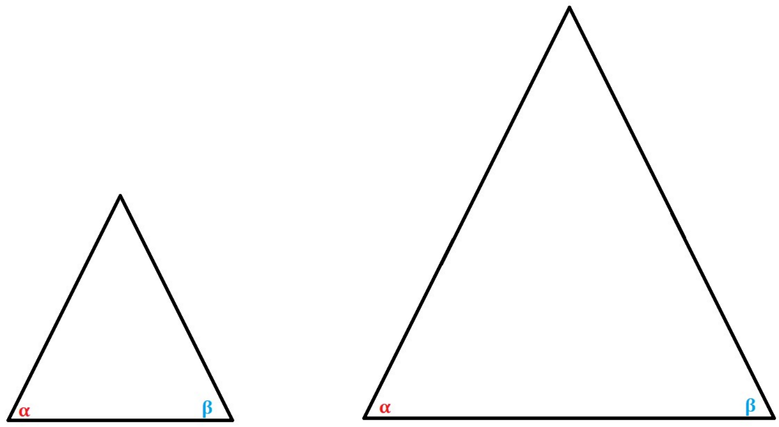
2. **bok-kąt-bok(BKB):**

Jeżeli $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CA}{C'A'}$ oraz $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, to $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



3. kąt-kąt(KK):

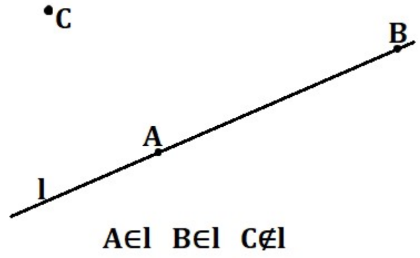
Jeżeli $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ oraz $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, to $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



<u>AKSJOMATY – twierdzenia, które nie wymagają dowodu</u>

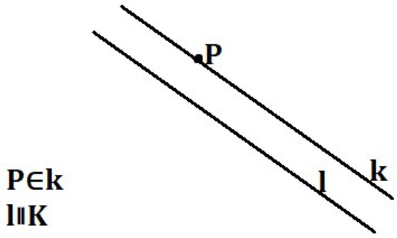
Aksjomat 1.

Przez 2 różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.



Aksjomat 2. (Euklidesa)

Jeżeli dany jest punkt P i prosta l to istnieje dokładne jedna prosta przechodząca przez punkt P i równoległa do prostej l.



Aksjomat 3. (odległości)

Każdemu odcinkowi $\overline{AB}$ przyporządkowana jest liczba nieujemna $|\overline{AB}|$ taka, że:

(1) $|\overline{AB}| = 0 \Leftrightarrow A = B$
(2) $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| \geq |\overline{AC}|$, dla dowolnych punktów $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$.

Aksjomat 4. (O współliniowości punktów)
Punkty A, B i C leżą na jednej prostej, wtedy i tylko wtedy, gdy :
$AC = AB + BC$ lub $AC = |AB - BC|$.

$AC = AB + BC$

$AC = AB - BC$

$AC = BC - AB$

$AC = AB - BC$

$AC = BC - AB$

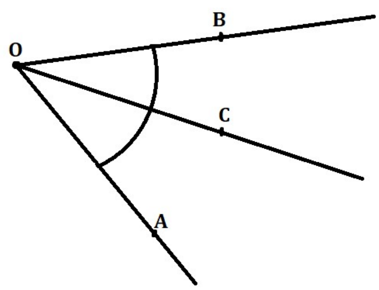
$AC = BC + AB$

Aksjomat 5. (O nie współliniowości punktów)
Punkty A, B i C nie leżą na jednej prostej, wtedy i tylko wtedy, gdy:
$|AB - BC| < AC < AB + BC$ – nierówność trójkąta

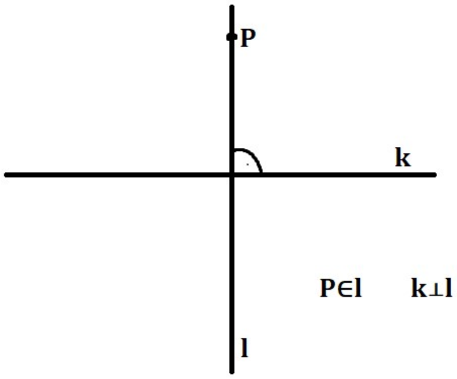
Aksjomat 6. (O mierzeniu kątów – addytywność miary kąta)
Każdemu kątowi przyporządkowana jest liczba α w następujący sposób:

1. $0 \leq \alpha \leq 360°$
2. $\alpha = 0°$ ⇔ kąt jest zerowy
3. $\alpha = 180°$ ⇔ kąt jest półpełny
4. Jeśli półprosta OC leży wewnątrz ∢AOB, to:

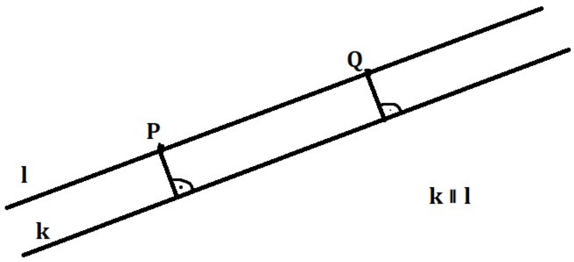
$|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle AOC| + |\sphericalangle COB|$,
gdzie $|\sphericalangle AOB|$ to miara kąta.



Aksjomat 7. (O prostopadłości)
Jeżeli dany jest punkt P i prosta l, to istnieje dokładnie jedna prosta k przechodząca przez P i prostopadła do prostej l.



Aksjomat 8.
Jeżeli punkty P i Q leżą na prostej l, a prosta l jest równoległa do prostej k , to $d(P,k) = d(Q,k)$.



Aksjomat 9. (trójkąta prostokątnego)

Niech trójkąty ΔABC i $\Delta A'B'C'$ będą trójkątami prostokątnymi o kątach prostych o wierzchołkach C i C'. Wówczas jeżeli zachodzi jeden z poniższych warunków:

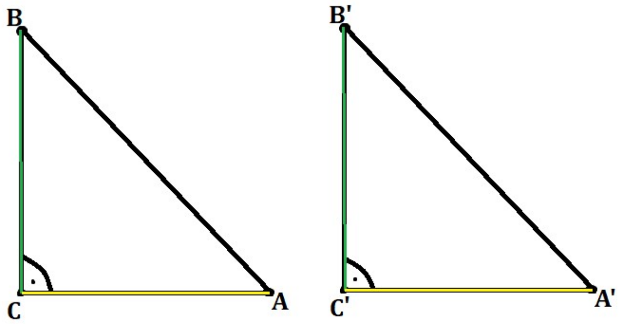
(1) $CA = C'A'$ i $CB = C'B'$

(2) $CA = C'A'$ i $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle A'|$

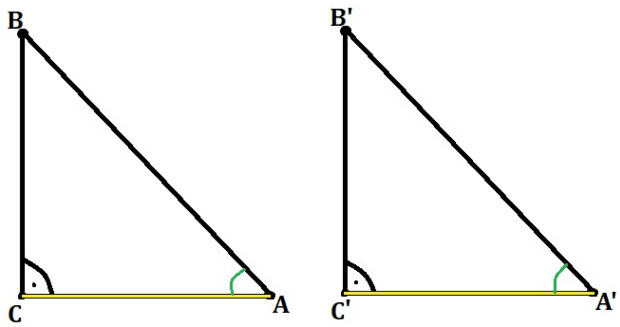
(3) $AB = A'B'$ i $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle A'|$

towarzyszące kąty odpowiadające mają równe miary, a wszystkie odpowiadające sobie boki mają równe długości.

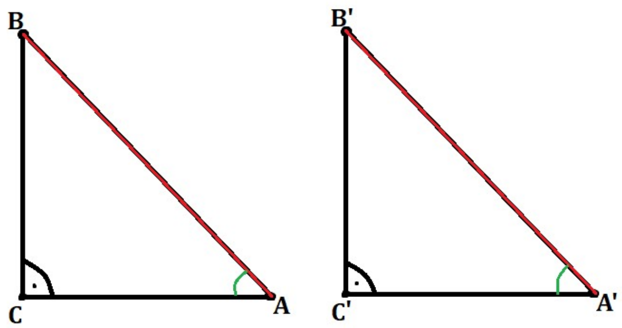
(1)



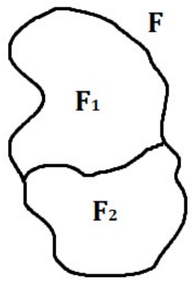
(2)



(3)



Aksjomat 10. (o addytywności pola powierzchni)
Jeżeli pewna figura składa się z dwóch części to jej pole jest równe sumie pól tych części.



[F] - pole figury

$[F] = [F_1]+[F_2]$

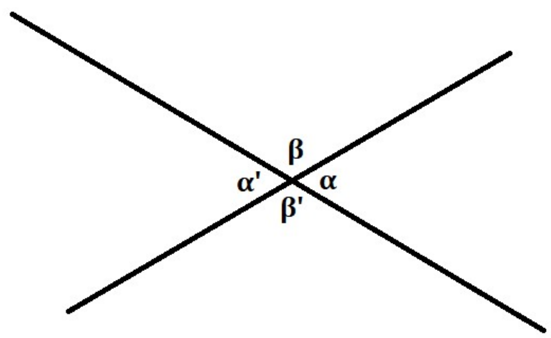
Aksjomat 11. (o polu kwadratu)
Pole kwadratu o boku a wynosi a^2.

TWIERDZENIA

Twierdzenie 1.
Dwie nierównoległe proste mają dokładnie jeden punkt wspólny.
Dowód:
Proste mają jeden punkt wspólny, gdyż nie są równoległe. Gdyby miały jeszcze jeden punkt wspólny to z **Aksjomatu 1.** Musiały by być równe, czyli równoległe. Otrzymaliśmy więc sprzeczność.
q.e.d.

Twierdzenie 2. (o przychodności równoległości)
Jeżeli $k \parallel l$ i $l \parallel m,$ to $k \parallel m.$
Dowód:
Załóżmy, nie wprost, że $k \nparallel m$ to z **Twierdzenia 1.** Proste k i m przecinają się w punkcie P. Prosta k przechodzi przez P i jest równoległa l. Prosta m przechodzi przez P i jest równoległa l. **Z aksjomatu 2. (Euklidesa)** $k = m$, czyli $k \parallel m$ – sprzeczność.
q.e.d.

Twierdzenie 3. (o kątach wierzchołkowych)
Kąty wierzchołkowe mają taką samą miarę.
Dowód:



Z **aksjomatu 6.3** wiemy, że:
$\alpha + \beta' = 180°$
$\alpha' + \beta' = 180°$
Odejmując stronami otrzymujemy:
$\alpha = \alpha'$
q.e.d.

Twierdzenie 4.
Jeżeli prosta l jest prostopadła do prostej m i prosta k jest prostopadła do m, to proste k i l są równoległe.
Dowód:
Załóżmy nie wprost, że $k \nparallel l$. Z **Tw. 1.** Prosta l i k mają dokładnie jeden punkt wspólny P:
$P \in l$ i $P \in k$
Wtedy proste l i k są prostopadłe do prostej m i przechodzą przez punkt P. Co jest sprzeczne z **aksjomatem 7.**
q.e.d.

Twierdzenie 5.

Iloczyn dwóch figur wypukłych jest figurą wypukłą.

Dowód:

Niech F_1, F_2 będą figurami wypukłymi oraz niech $A, B \in F_1 \cap F_2$.

Stąd $A, B \in F_1$ i $A, B \in F_2$

Wówczas $\overline{AB} \subset F_1$ oraz $\overline{AB} \subset F_2$(bo F_1, F2 są wypukłe)

Zatem $\overline{AB} \in F_1 \cap F_2$.

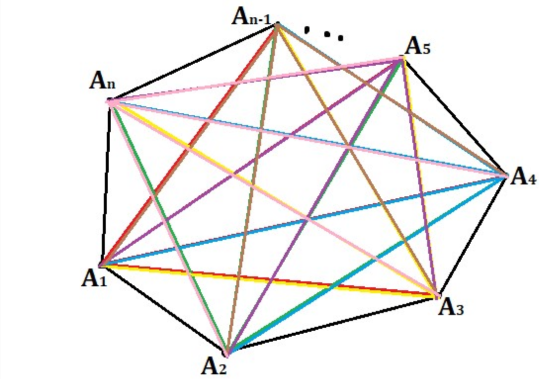
q.e.d.

Twierdzenie 6. (o przekątnych wielokąta)

Liczba przekątnych n-kąta wyraża się wzorem:

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Dowód:



Z wierzchołka A_1 można poprowadzić n-3 przekątnych.

Z wierzchołka A_2 można poprowadzić n-3 przekątnych.

…

Z wierzchołka A_n można poprowadzić n-3 przekątnych.

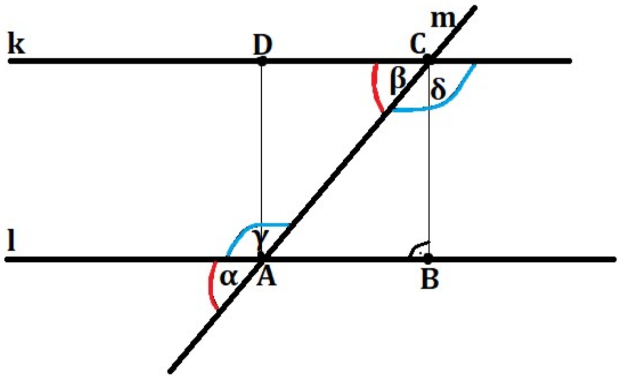
Zatem przeprowadziliśmy n(n-3) przekątnych. Ale każdą przekątną policzyliśmy 2 razy, wobec tego liczba wszystkich przekątnych wynosi

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

q.e.d.

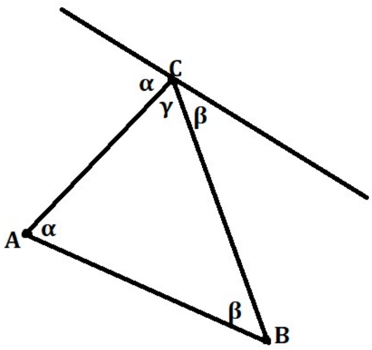
Twierdzenie 7. (o kątach naprzemianległych)
Kąty odpowiadające mają równe miary; kąty naprzemianległe mają równe miary.

Dowód:
Niech:
$k \parallel l$ oraz
$m \nparallel k$



Niech $\overline{AD} \perp l$ i $\overline{BC} \perp l$
Z **Tw. 3. (o kątach wierzchołkowych)** wiemy, że
$\sphericalangle BAC = \alpha$
Z **Aksjomatu 8.** $\boldsymbol{AD = BC}$
Oczywiście $AB = CD$
Z **Aksjomatu 9. (trójkąta prostokątnego)**
$\alpha = \beta$
Zatem z **Aksjomatu 6.3.**
$\gamma = \delta$
q.e.d.

Twierdzenie 8. (o sumie kątów trójkąta)
Suma miar kątów dowolnego trójkąta wynosi 180°.
Dowód:

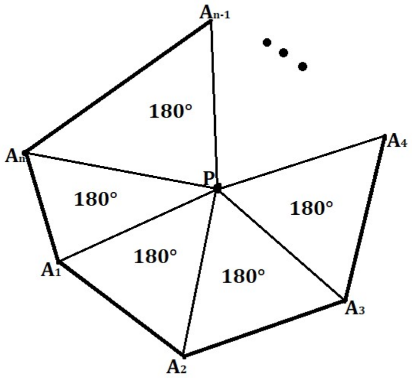


Z **Aksjomatu 2.** (Euklidesa) wiemy, że istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez punkt C i równoległa do $\overline{AB}$. Z **Tw. 7. (o kątach naprzemianległych)** oraz **Aksjomatu 6.3** i **6.4** :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

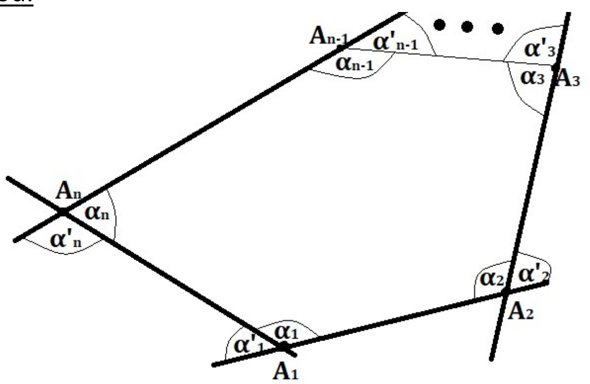
q.e.d.

Twierdzenie 9. (o sumie kątów wielokąta)
Suma miar kątów dowolnego n-kąta wypukłego wynosi $(n-2) \cdot 180°$.
<u>Dowód:</u>



Z **Tw. 8. (o sumie kątów trójkąta)** mamy, że suma kątów wewnętrznych wszystkich trójkątów wynosi 180°. Wobec tego suma kątów wewnętrznych tego wielokąta wynosi $(n-2) * 180°$.
<u>q.e.d.</u>

Twierdzenie 10. (o sumie kątów zewnętrznych wielokąta)
Suma miar kątów zewnętrznych n-kąta wypukłego wynosi 720°.
<u>Dowód:</u>

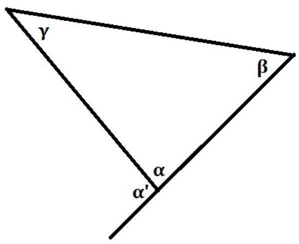


$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \cdots + \alpha'_n =$
$= (180° - \alpha_1) + (180° - \alpha_2) + (180° - \alpha_3) + \cdots + (180° - \alpha_n) =$
$= 180°\mathrm{n} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n)$
Zatem z **Tw. 9 (o sumie kątów wielokąta)**
$= 180°\mathrm{n} - 180°(\mathrm{n} - 2) = 360°$
Stąd
$2 \cdot 360° = 720°$
<u>q.e.d.</u>

Twierdzenie 11. (o kącie zewnętrznym trójkąta)
Kąt zewnętrzny dowolnego trójkąta jest równy sumie kątów do niego nieprzylegających.

$$\alpha' = \beta + \gamma$$

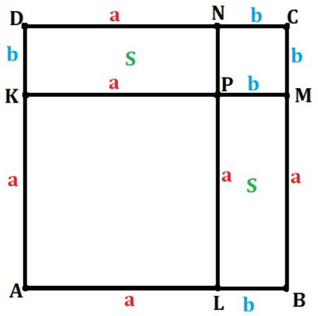
Dowód:



$$L = \alpha' = 180^{\circ} - \alpha = \beta + \gamma$$

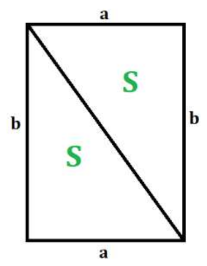
q.e.d.

Twierdzenie 12. (pole prostokąta)
Pole prostokąta o bokach a i b wynosi ab.
Dowód:



$[ABCD] = [ALPK] + [PMCN] + [LBMP] + [KPND]$
Z **aksjomatu 11. i 10.** otrzymujemy
$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2S$
$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2S$
$2ab = 2S$
$ab = S$
q.e.d.

Twierdzenie 13. (pole trójkąta prostokątnego)
Pole trójkąta prostokątnego jest równe połowie iloczynu jego przyprostokątnych.
<u>Dowód:</u>



Wniosek z **Tw. 12.**

$2S = ab$

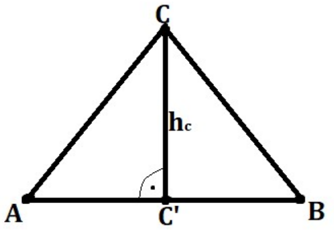
$S = \frac{ab}{2}$

<u>q.e.d.</u>

Twierdzenie 14. (pole trójkąta)
Pole dowolnego trójkąta jest równe połowie iloczynu jego boku i opuszczonej na ten bok wysokości.

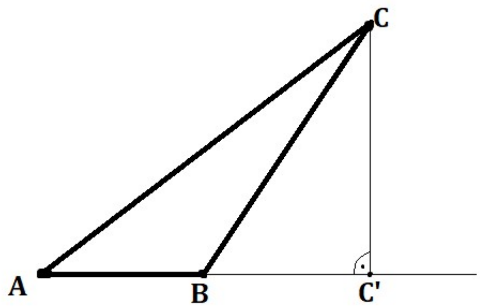
$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

<u>Dowód:</u>
1° Niech ΔABC będzie ostrokątny



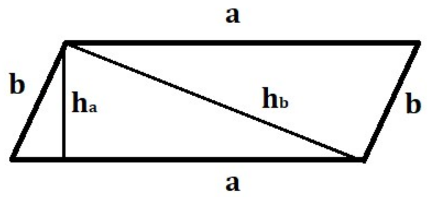
$|AB| = c$; $|CC'| = h_c$
Z **aksjomat 10. (o addytywności pola powierzchni) i Tw. 12**
$S = [ABC] = [AC'C] + [CC'B] =$
$= \frac{1}{2}AC'^{h_c} + \frac{1}{2}C'Bh_c = \frac{1}{2}h_c(AC' + C'B) = \frac{1}{2}AB\ h_c = \frac{1}{2}ch_c$
<u>q.e.d.</u>

2° Niech ΔABC będzie rozwartokątny

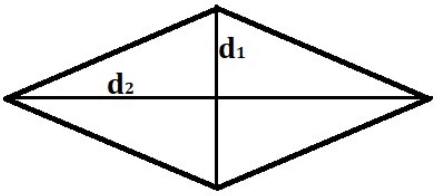


$|CC'| = h$
Z **aksjomat 10. (o addytywności pola powierzchni)**
$[ACC'] = [ABC] + [BC'C]$
Stąd
$[ABC] = [AC'C] - [BC'C] =$
$= \frac{1}{2}AC'h - \frac{1}{2}BC'h = \frac{1}{2}h(AC' - BC') = \frac{1}{2}h \cdot AB$
<u>q.e.d.</u>

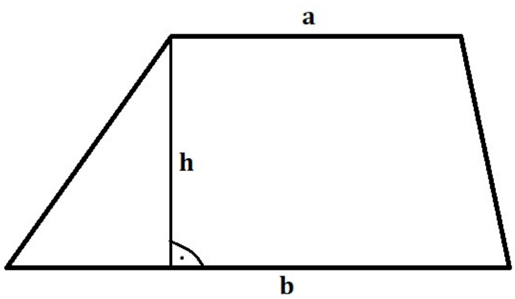
Twierdzenie 15. (o polach czworokątów)
1) Pole równoległoboku
$S = ah_a = bh_b$



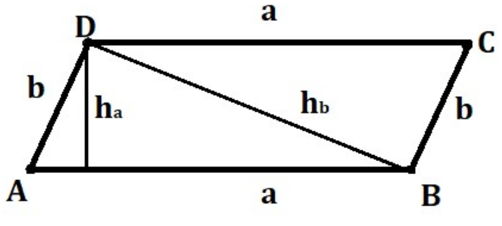
2) Pole rombu
$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$



3) Pole trapezu
$S = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

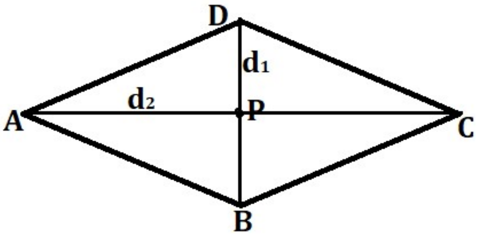


Dowód:
1) Pole równoległoboku



Z **aksjomatu 10. (o addytywności pola powierzchni)**
$[ABCD] = [ABD] + [BDC]$
Zatem z **Tw. 14 (o polu trójkąta)**
$= \frac{1}{2} ah_a + \frac{1}{2} ah_a =$
$= ah_a$

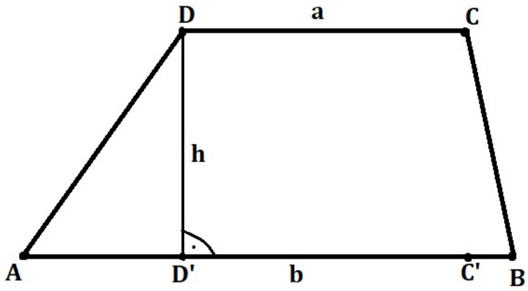
2) Pole rombu



Z **aksjomatu 10. (o addytywności pola powierzchni)** i **Tw. 14(o polu trójkąta)**

$$[ABCD] = [ACD] + [ABC] =$$
$$= \frac{1}{2}PD \cdot AC + \frac{1}{2}PB \cdot AC = \frac{1}{2}AC \cdot (DP + PB) =$$
$$= \frac{1}{2}d_1 d_2$$

3) Pole trapezu

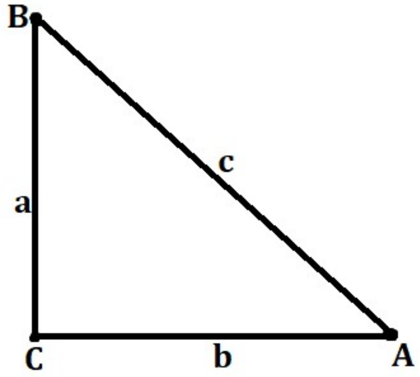


Z **aksjomatu 10. (o addytywności pola powierzchni)** i **Tw. 13** i **14**

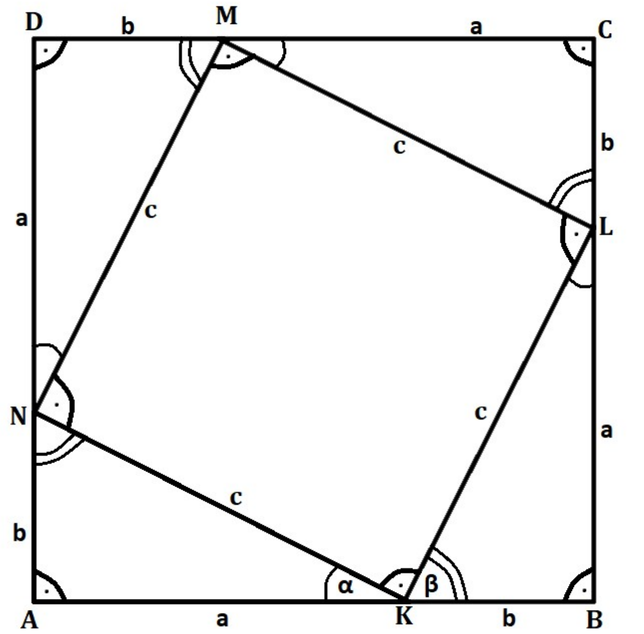
$$[ABCD] = [AD'D] + [D'C'CD] + [C'BC] =$$
$$= \frac{1}{2}AD' \cdot h + D'C' \cdot h + \frac{1}{2}C'B \cdot h =$$
$$= \frac{1}{2}h \cdot (AD' + 2 \cdot D'C' + C'B) = \frac{1}{2}h \cdot (a + b)$$

q.e.d.

Twierdzenie 16. (Pitagorasa)
Jeżeli trójkąt jest prostokątny to suma kwadratów przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej.



$a^2 + b^2 = c^2$
<u>Dowód:</u>



Niech
$AK = BL = CM = DN = a$
$KB = LC = MD = NA = b$
$NK = KL = LM = MN = c$

Z **aksjomatu 9.1(trójkąta prostokątnego):**
$\sphericalangle AKN = \sphericalangle BLK = \sphericalangle CML = \sphericalangle DNM = \alpha$
$\sphericalangle ANK = \sphericalangle LKB = \sphericalangle MLC = \sphericalangle DMN = \beta$

Z **aksjomatu 6.4** i **6.3**
$\alpha + \sphericalangle NKL + \beta = 180°$

ale $\alpha + \beta = 90°$

Stąd $\sphericalangle NKL = 90°$

Analogicznie dowodzimy, że pozostałe kąty czworokąta KLMN są proste

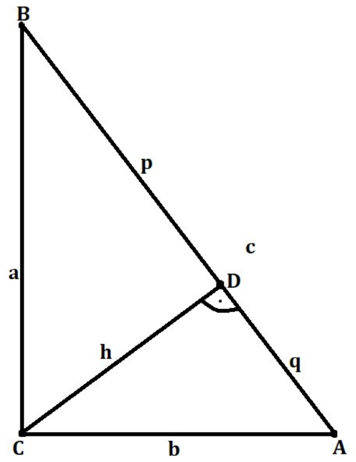
Z **aksjomatu 10**:
$[ABCD] = [KLMN] + 4[NAK]$

Stąd

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2}$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

q.e.d.

Twierdzenie 17. (związki miarowe w trójkącie prostokątnym)
W dowolnym trójkącie prostokątnym prawdziwe są równości
(1) $h^2 = pq$ (2) $a^2 = pc$ (3) $b^2 = qc$



<u>Dowód:</u>

Z **Tw. 16 (Pitagorasa)**
$$\begin{cases} h^2 + p^2 = a^2 \\ h^2 + q^2 = b^2 \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$

Z (1) i (2) do (3):
$h^2 + p^2 + h^2 + q^2 = c^2$
$2h^2 + p^2 + q^2 = (p+q)^2$
$2h^2 + p^2 + q^2 = p^2 + q^2 + 2qp$
$2h^2 = 2qp$
$\underline{(4)\ \ h^2 = qp}$

Z (4) do (1):
$qp + p^2 = a^2$
$p(p+q) = a^2$
$\underline{pc = a^2}$

Z (4) do (2):
$pq + q^2 = b^2$
$q(p+q) = b^2$
$\underline{qc = b^2}$

<u>Dowód:</u>
Łatwo zauważyć, że $\Delta BDC \sim \Delta ADC \sim \Delta ABC$ cecha **KK:**
Stąd
$\frac{h}{p} = \frac{q}{h}$
$\underline{h^2 = pq}$
$\frac{a}{p} = \frac{c}{a}$
$\underline{a^2 = pc}$

$$\frac{b}{q} = \frac{c}{b}$$

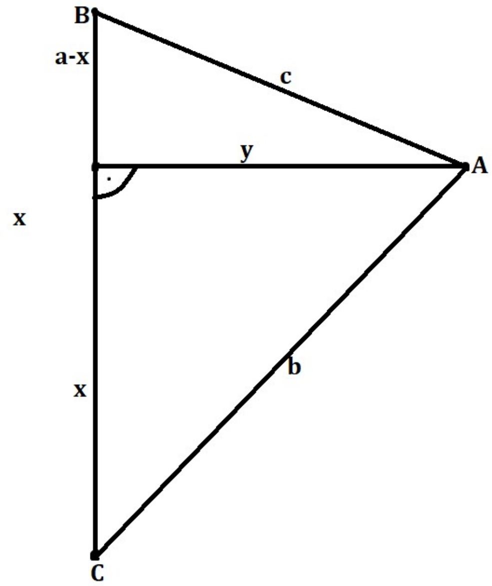
$\underline{b^2 = qc}$

<u>*q.e.d.*</u>

Twierdzenie 18. (Tw. Odwrotne od Tw. Pitagorasa)
Jeżeli boki trójkąta ABC spełniają równość
$a^2 + b^2 = c^2$,
to trójkąt ABC jest prostokątny o kącie prostokątnym w wierzchołku C.

<u>Dowód(nie wprost)</u>:
Załóżmy, że $a^2 + b^2 = c^2$ i trójkąt ABC nie jest prostokątny.

1) Niech ΔABC jest ostrokątny

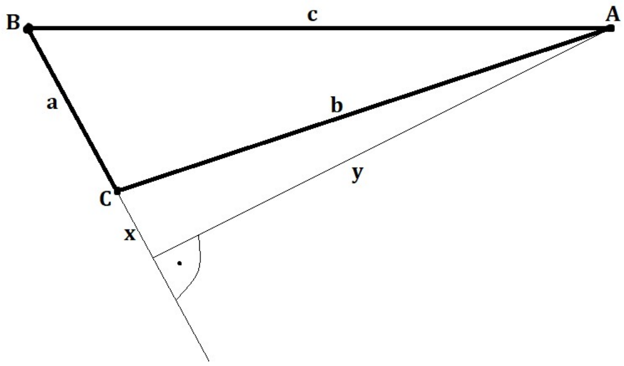


Z **Tw. 16 Pitagorasa**:
$$\begin{cases} (a-x)^2 + y^2 = c^2 \\ x^2 + y^2 = b^2 \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$

Z (3) do (1):
$(a-x)^2 + y^2 = a^2 + b^2$
$a^2 - 2ax + x^2 + y^2 = a^2 + b^2$
$-2ax + x^2 + y^2 = b^2$

Z (2):
$-2ax + b^2 = b^2$
$-2ax = 0$
$x = 0$ - sprzeczność

2) Niech ΔABC jest rozwartokątny, gdzie $\sphericalangle C > 90°$



Z **Tw. 16 Pitagorasa**:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = b^2 \\ (a + x)^2 + y^2 = c^2 \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$

Z (1) i (3) do (2):

$a^2 + 2ax + x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + a^2$

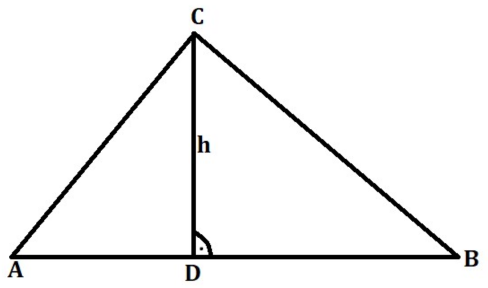
$2ax = 0$

$x = 0$ – sprzeczność

<u>*q.e.d.*</u>

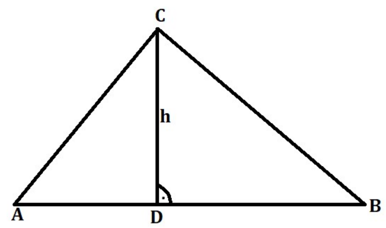
Twierdzenie 19. (pons asinorum)
Dwa boki trójkąta są równe, wtedy i tylko wtedy, gdy kąty leżące naprzeciwko tych boków są równe.
<u>Dowód:</u>

1) ($\Longrightarrow$) Załóżmy, że dwa boki są równe – AB=BC .



Z **Tw. 16 Pitagorasa**
$AD^2 = AC^2 - h^2$ oraz $DB^2 = CB^2 - h^2$
Stąd
$AD = BD$
Z cechy **BKB**
$\Delta ADC \equiv \Delta DCB$
Zatem
$\sphericalangle A = \sphericalangle B$

2) ($\Longleftarrow$) Załóżmy, że $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.



Niech CD będzie dwusieczną kąta $\sphericalangle C$
Stąd
$\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$
Stąd na podstawie cechy **KBK**
$\Delta ADC \equiv \Delta DCB$

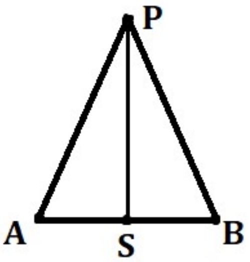
Zatem AC=CB

<u>*q.e.d.*</u>

Twierdzenie 20. (O symetralnej)
Niech A i B będą różnymi punktami. Równość $AP = BP$ zachodzi, wtedy i tylko wtedy, gdy punkt leży na symetralnej.

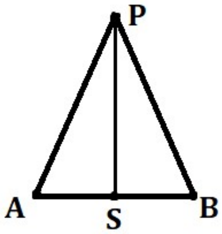
<u>Dowód:</u>

1) ($\Longrightarrow$) Załóżmy, że $AP = BP$.



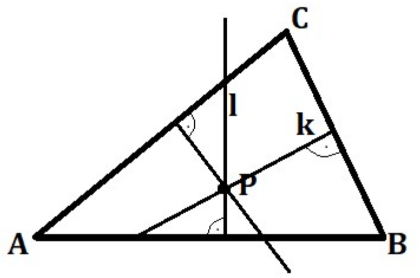
Niech SP jest środkową $\overline{AB}$
Z cechy **BBB**
$\Delta ASP \equiv \Delta SBP$
Stąd $\sphericalangle ASP = \sphericalangle PSB$
Ale $\sphericalangle ASP + \sphericalangle PSB = 180°$
Więc $\sphericalangle ASP = 90°$, co oznaczam że $\overline{PS} \perp \overline{AB}$, co oznacza, że $\overline{PS}$ jest symetralną odcinka $\overline{AB}$.

2) ($\Longleftarrow$) Załóżmy, że punkt P leży na symetralnej odcinka $\overline{AB}$.



Z cechy **BKB**
$\Delta ASP \equiv \Delta SBP$
Zatem AP=BP
<u>*q.e.d.*</u>

Twierdzenie 21. (O symetralnych w trójkącie)
Symetralne trzech boków dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
<u>Dowód:</u>



Niech l będzie symetralną odcinka $\overline{AB}$ a k symetralną odcinka $\overline{BC}$
Wówczas niech $l \cap k = \{P\}$
Stąd P$\in$ l oraz $P \in k$
Z **Tw. 20 (O symetralnej)**
$PA = PB$
$PB = PC$
Stąd $PA = PC$
Z **Tw. 20 (O symetralnej)**
$P \in$ symetralnej $\overline{AC}$
Zatem punkt P jest punktem przecięcia symetralnych $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$.
<u>q.e.d.</u>

Twierdzenie 22.
Na każdym trójkącie można opisać okrąg.
<u>Dowód:</u>
Z dowodu **Tw. 21 (O symetralnych w trójkącie)** wynika, że punkt przecięcia się symetralnych boków trójkąta jest równooddalony od wszystkich jego wierzchołków. Jest więc środkiem okręgu opisanego na trójkącie.
<u>q.e.d.</u>

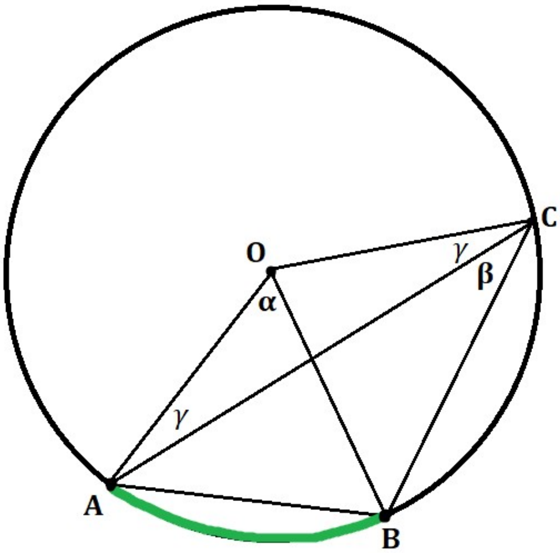
Twierdzenie 23. (O kątach w kole)

(1) Kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany jest od niego dwa razy większy.
(2) Kąty wpisane oparte na tych samych łukach są równe.
(3) Kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty.
(4) Kąty wpisane oparte na uzupełniających się łukach dają w sumie $180°$.

Dowód:

(1)

$1°$ Niech $\sphericalangle ABO + \sphericalangle OBC > 90°$



Z **Tw. 19 (pons asinorum)**

$\sphericalangle ABO = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$

$\sphericalangle OBC = \gamma + \beta$

$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABO - \gamma = 90° - \frac{\alpha}{2} - \gamma$

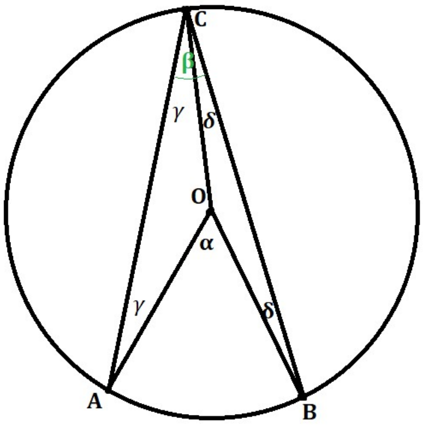
Z ΔABC i **Tw 8 (o sumie kątów trójkąta) i Aksjomatu 6.**

$\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = 180°$

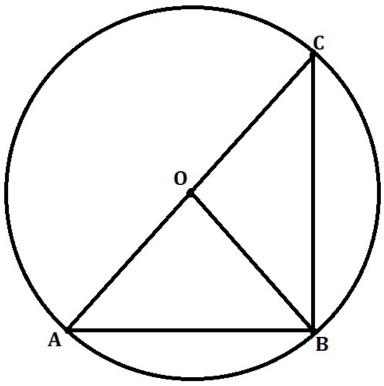
$\left(90° - \frac{\alpha}{2} - \gamma\right) + \left(90° - \frac{\alpha}{2} + \gamma + \beta\right) + \beta = 180°$

$2\beta = \alpha$

$2°$ Niech $\sphericalangle ABO + \sphericalangle OBC < 90°$

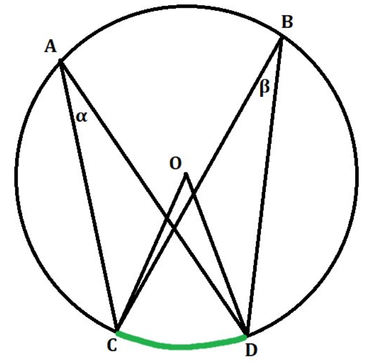


Z **Aksjomatu 6. (O addytywności kątów)**
$\beta = \gamma + \delta$
Z **Tw. 19. (pons asinorum)**
$\sphericalangle AOC = 180° - 2\gamma$
$\sphericalangle BOC = 180° - 2\delta$
Z **Aksjomatu 6.**
$360° = \alpha + \sphericalangle AOC + \sphericalangle BOC$
$360° = \alpha + (180° - 2\gamma) + (180° - 2\delta)$
$\alpha = 2\beta$
3° Niech $\sphericalangle ABO + \sphericalangle OBC = 90°$



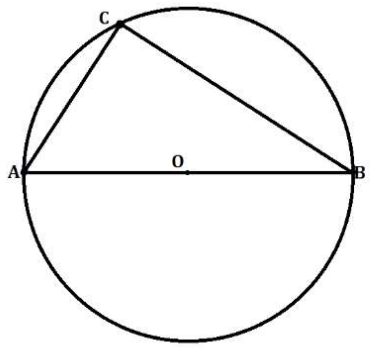
Z **Tw. 11**
$\alpha = 2\beta$
q.e.d.

(2)



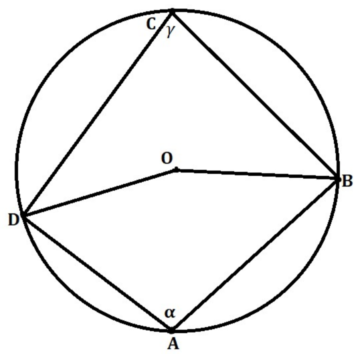
Z **Tw. 23.1.**
$\sphericalangle COD = 2\alpha$
$\sphericalangle COD = 2\beta$
Stąd
$2\alpha = 2\beta$
$\alpha = \beta$
q.e.d.

(3)



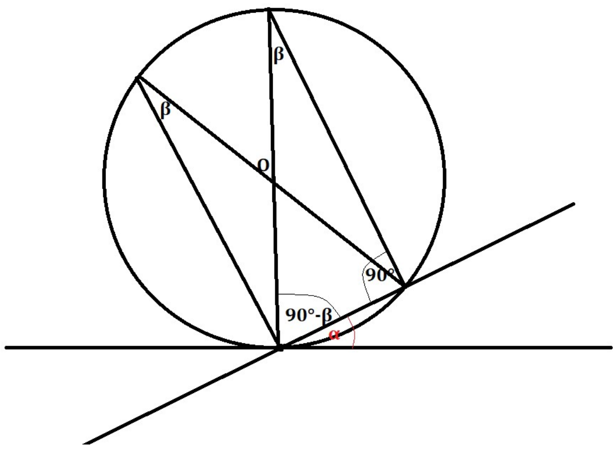
$\sphericalangle AOB = 180°$
Z **Tw. 23.1.**
$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \frac{1}{2}180° = 90°$
q.e.d.

(4)



Z **Aksjomatu 6. (O addytywności kątów)**
$\sphericalangle DOB + \sphericalangle BOD = 360°$

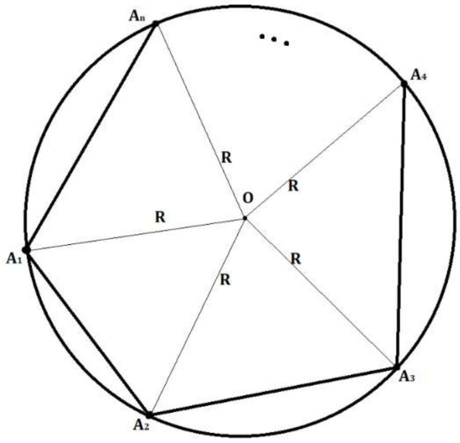
Z **Tw. 23.1.**
$\sphericalangle DOB = 2\gamma$
$\sphericalangle BOD = 2\alpha$
Zatem
$2\alpha + 2\gamma = 360°$
$\alpha + \gamma = 180°$
q.e.d.

Twierdzenie. 24 (O kącie między styczną i sieczną)
Kąt między styczną do okręgu i sieczną przechodzącą przez punkt styczności jest równy kątowi opartego na tym samym łuku co łuk wyznaczony przez sieczną i znajduje się po drugiej stronie niż ten łuk.
Dowód:


Z **Aksjomatu 6. (O addytywności kątów)**
$90° - \beta + \alpha = 90°$
$\alpha = \beta$
q.e.d.

Twierdzenie 25. (O okręgu opisanym na wielokącie)
Na wielokącie wypukłym można opisać okrąg, wtedy i tylko wtedy, gdy symetralne wszystkich jego boków przecinają się w jednym punkcie.
Dowód:

1) ($\Longrightarrow$) Załóżmy, że na wielokącie można opisać okrąg

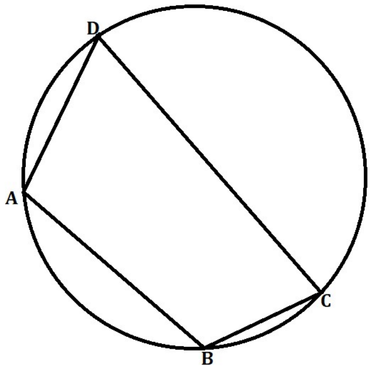


Łatwo zauważyć, że
$OA_1 = OA_2$ i $OA_2 = OA_3$ i … i $OA_n = OA_1$
Czyli z **Tw. 20. (O symetralnej)**
$O \in sym.\overline{A_1A_2}$ i $O \in sym.\overline{A_2A_3}$ i … i $O \in sym.\overline{A_nA_1}$
Zatem
$sym.\overline{A_1A_2} \cap sym.\overline{A_2A_3} \cap \ldots \cap sym..\overline{A_nA_1} = \{O\}$

2) ($\Longleftarrow$) Niech symetralne boków A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 przecinają się w punkcie O.
$OA_1 = OA_2$ i $OA_2 = OA_3$ i … i $OA_n = OA_1$
Zatem O jest środkiem okręgu opisanego na wielokącie $A_1A_2A_3 \ldots A_n$.
q.e.d.

Twierdzenie 26. (O okręgu opisanym na czworokącie)
Na czworokącie wypukłym można opisać okrąg, wtedy i tylko wtedy, gdy suma przeciwległych kątów jest równa $180°$.
<u>Dowód:</u>

1) ($\Longrightarrow$) Załóżmy, że na czworokącie ABCD można opisać okrąg.

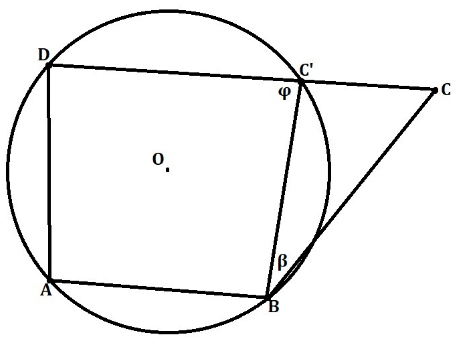


Z **Tw. 23.4**
$\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180°$
$\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180°$

<u>*q.e.d.*</u>

2) ($\Longleftarrow$) Załóżmy, że w czworokącie ABCD $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180°$ oraz $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180°$
Przypuśćmy, że na czworokącie ABCD nie można opisać okręgu, tzn. zajdzie 1 z 2 przypadków.

$1°$



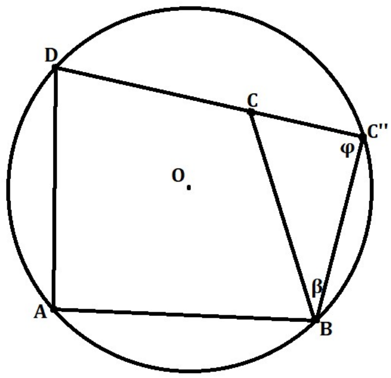
Na czworokącie $ABC'D$ jest opisany okrąg.
Z części **(1) Tw. 26.** wiemy, że
$\sphericalangle A + \varphi = 180°$

Ale z założenia wiemy, że
$\varphi = \sphericalangle C$

Ale z **Tw. 11(O kącie zewnętrznym trójkąta)**
$\varphi = \sphericalangle C + \beta$

Stąd
$\varphi > \sphericalangle C$ – sprzeczność

2°



Na czworokącie $ABC''D$ jest opisany okrąg.
Z części **(1) Tw. 26.** wiemy, że
$\sphericalangle A + \varphi = 180°$

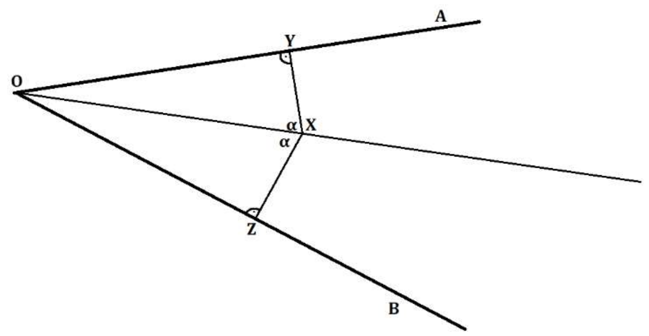
Ale z założenia wiemy, że
$\varphi = \sphericalangle C$
Ale z **Tw. 11(O kącie zewnętrznym trójkąta)**
$\sphericalangle C = \varphi + \beta$

Stąd
$\varphi > \sphericalangle C$ – sprzeczność

Wobec tego nasze przypuszczenie, że na czworokącie $ABCD$ nie można opisać okręgu doprowadza nas do sprzeczności w każdym przypadku. Zatem na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.
q.e.d.

Twierdzenie 27. (O dwusiecznej)
Punkt X leży na dwusiecznej kąta, wtedy i tylko wtedy, gdy jest w tej samej odległości od ramion.
<u>Dowód:</u>

1) ($\Longrightarrow$) Załóżmy, że punkt X leży na dwusiecznej kąta AOD.



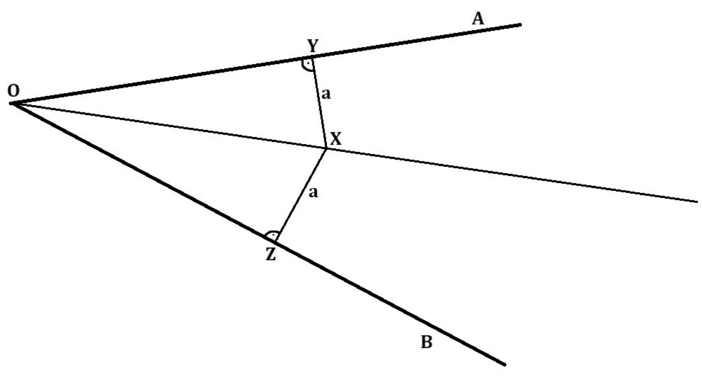
Łatwo zauważyć, że
$\sphericalangle OXY = \sphericalangle OXZ$

Zatem z cechy **KBK**
$\Delta OYX \equiv \Delta OZX$

Zatem
$XZ = XY$

q.e.d.

2) ($\Longleftarrow$) Załóżmy, że $d(X,\ pr.OA) = d(X,\ pr.OB)$, czyli $XZ = XY$

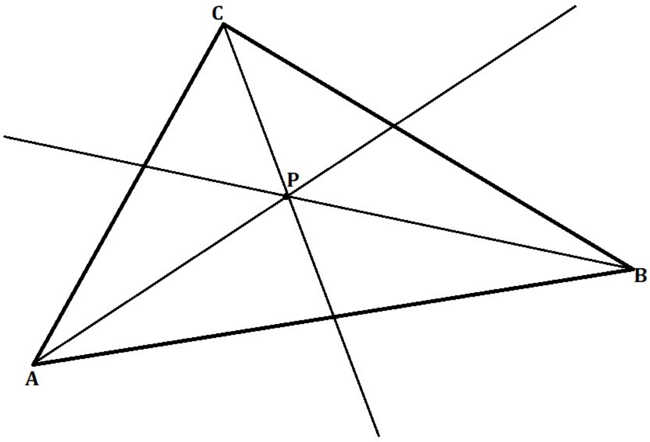


Z **Tw. 16 (Pitagorasa)**
$OY^2 = OX^2 - a^2 = OX^2 - a^2 = OZ^2$
Zatem
$OY = OZ$

Wobec tego z cechy **BKB**
$\Delta OYX \equiv \Delta OZX$

Zatem, wszystkie miary kątów muszą być sobie równe , co oznacza, że punkt X leży na dwusiecznej.
q.e.d.

Twierdzenie 28. (O dwusiecznych w trójkącie)
Dwusieczne kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
Dowód:



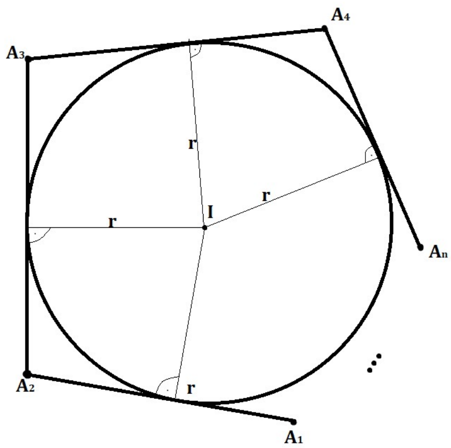
Niech dwusieczne kątów dwóch kątów (A i B) przecinają się w punkcie P.
Z **Tw. 27 (O dwusiecznej)** wiemy, że
$d(P, pr.\ AB) = d(P, pr.\ AC)$
oraz
$d(P, pr.\ AB) = d(P, pr.\ BC)$
Stąd
$d(P, pr.\ BC) = d(P, pr.\ AC)$
Zatem z **Tw. 27** punkt P należy do dwusiecznej kąta C
q.e.d.

Twierdzenie 29. (O okręgu wpisanym w trójkąt)
W każdy trójkąt można wpisać okrąg.

Dowód:
Z dowodu **Tw. 28** wynika, że punkt przecięcia się dwusiecznych kątów trójkąta jest środkiem okręgu wpisanego.
q.e.d.

Twierdzenie 30. (O okręgu wpisanym w wielokąt)
W wielokąt możemy wpisać okrąg, wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne wszystkich jego kątów przecinają się w jednym punkcie.
Dowód:

1) ($\Longrightarrow$) Załóżmy, że w wielokąt $A_1A_2A_3 \dots A_n$ można wpisać okrąg.



Stąd
$d(I, pr. A_1A_2) = d(I, pr. A_2A_3) = \cdots = d(I, pr. A_nA_1)$

Z **Tw. 27(O dwusiecznej)**
$I \in dw. \sphericalangle A_1$ i $I \in dw. \sphericalangle A_2$i $I \in dw. \sphericalangle A_3$i … i $I \in dw. \sphericalangle A_n$

Zatem dwusieczne kątów tego czworokąta przecinają się w punkcie I. Czyli jest on środkiem okręgu wpisanego.

2) ($\Longleftarrow$) Niech dwusieczne boków A_1A_2, A_2A_3, …, $A_nA_1$przecinają się w punkcie I.
Z **Tw. 27(O dwusiecznej)**

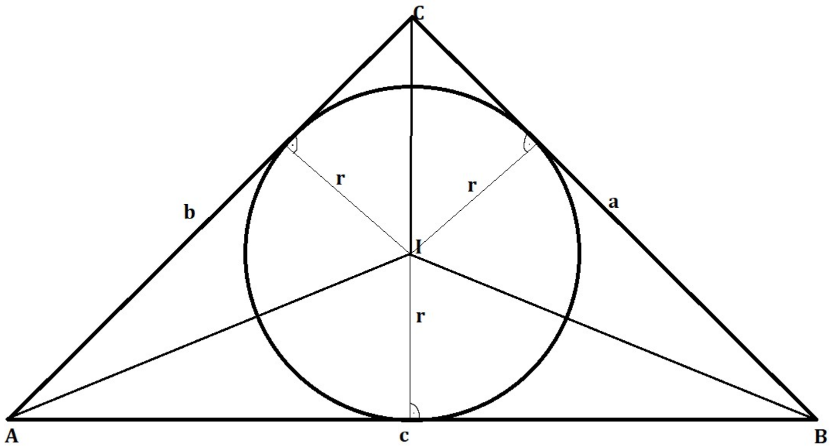
$d(I, pr. A_1A_2) = d(I, pr. A_2A_3) = \cdots = d(I, pr. A_nA_1)$

Zatem I jest środkiem okręgu wpisanego w wielokąt $A_1A_2A_3 \dots A_n$.

q.e.d.

Twierdzenie 31.
Pole dowolnego trójkąta wyznacza się wzorem
$s = r \cdot p,$
gdzie $2p$ to obwód

<u>Dowód:</u>

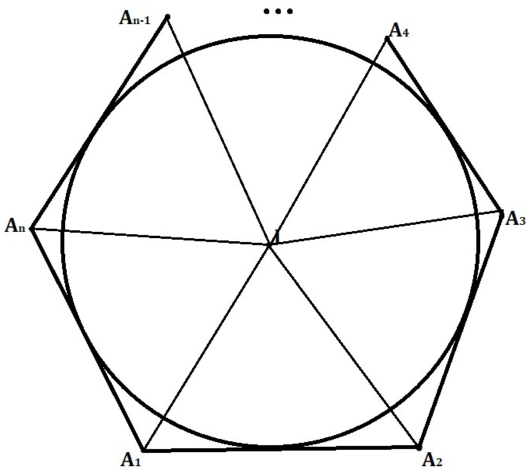


Z **Aksjomatu 10. (O addytywności pola powierzchni)**
$$[ABC] = [AIB] + [BIC] + [CIA] =$$
$$= \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = \frac{1}{2}r(a + b + c) =$$
$$= \frac{1}{2}r \cdot 2p = r \cdot p$$
<u>*q.e.d.*</u>

Twierdzenie 32.
W dowolnym trójkącie zachodzi równość
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$
<u>Dowód:</u>
Z **Tw. 31** oraz **Tw. 14 (pole trójkąta):**
$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = r \cdot p$$
Stąd
$h_a = \frac{2S}{a}$ i $h_b = \frac{2S}{b}$ oraz $h_c = \frac{2S}{c}$
Zatem
$$L = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{a + b + C}{2S} = \frac{2p}{2S} = \frac{2p}{2r \cdot p} = \frac{1}{r} = P.$$
<u>*q.e.d.*</u>

Twierdzenie 33.
Jeżeli w wielokąt wypukły $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_{n-1}A_n$ można wpisać okrąg jego pole wyraża się wzorem $S = p \cdot r$.

Dowód:



Niech w wielokąt $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_{n-1}A_n$ można było wpisać okrąg.

Z **Aksjomatu 10. (O addytywności pola powierzchni):**

$[A_1A_2A_3A_4 \ldots A_{n-1}A_n] = [A_1IA_2] + [A_2IA_3] + [A_3IA_4] + \cdots + [A_{n-1}IA_n] + [A_nIA_1] =$

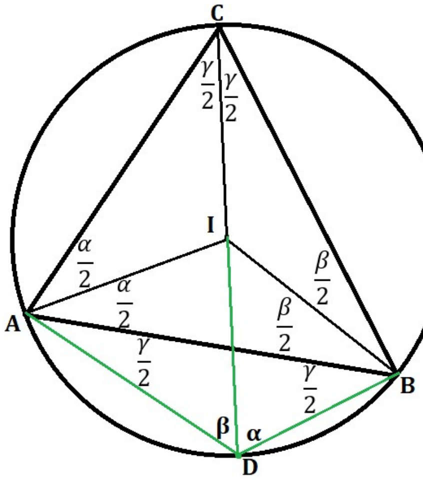
$= \frac{|A_1A_2| \cdot r}{2} + \frac{|A_2A_3| \cdot r}{2} + \frac{|A_3A_4| \cdot r}{2} + \cdots + \frac{|A_{n-1}A_n| \cdot r}{2} + \frac{|A_nA_1| \cdot r}{2} =$

$= \frac{r}{2} \cdot (|A_1A_2| + |A_2A_3| + |A_3A_4| + \cdots + |A_{n-1}A_n| + |A_nA_1|) =$

$\frac{r}{2} \cdot 2p = p \cdot r.$

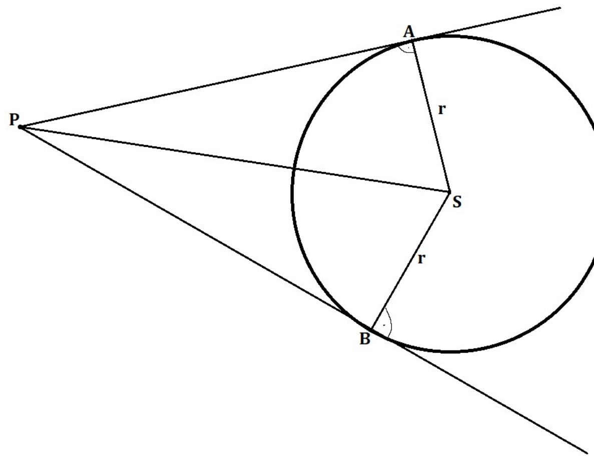
q.e.d.

Twierdzenie 34. (o trójliściu)
Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąta ABC oraz prosta CI przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie D.
Wówczas
$AD = ID = BD$
<u>Dowód:</u>



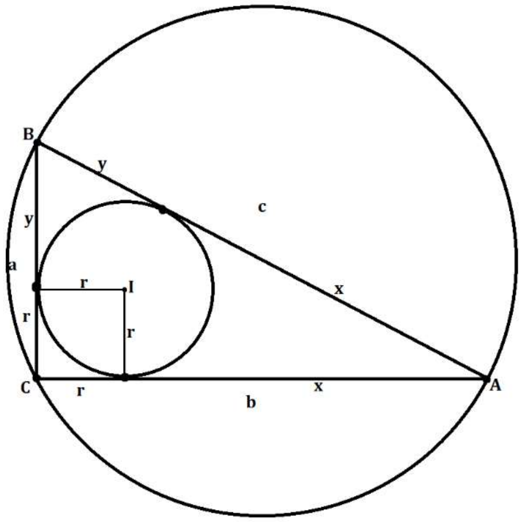
Z **Tw. 8 (O sumie kątów trójkąta)**
$\sphericalangle AID = 180° - \beta - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}$
Z ΔABC:
$\sphericalangle AID = \alpha + \gamma - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle IAD$
Zatem z **Tw. 19 (pons asinorum)** ΔAID jest równoramienny, czyli
$AD = DI$
Skoro $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DBA$ to z **Tw. 19** ΔADB jest równoramienny, czyli
$AD = DB$
<u>*q.e.d.*</u>

Twierdzenie 35. (Zasadnicze twierdzenie)
Jeżeli punkt P leży na zewnątrz okręgu to istnieją dokładnie dwie proste styczne do tego okręgu i przechodzące przez punkt P. Ponadto odcinki wyznaczone na tych prostych przez punkt P i punkty styczności są równe.
<u>Dowód:</u>



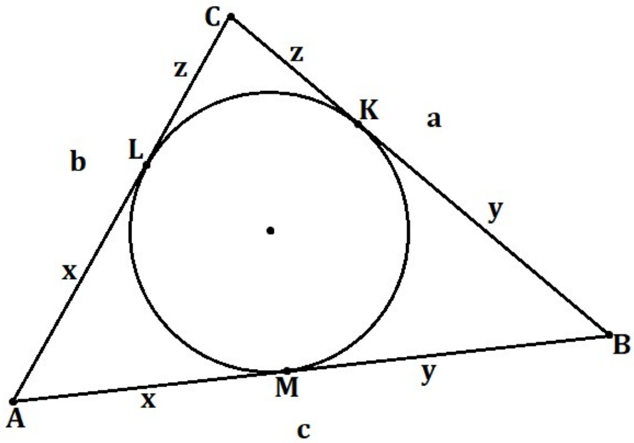
Z **Tw. 16 (Pitagorasa)**
$AP^2 = PS^2 - r^2$
$BP^2 = PS^2 - r^2$
Stąd
$AP = BP$
<u>*q.e.d.*</u>

Twierdzenie 36.
Suma przyprostokątnych dowolnego trójkąta prostokątnego jest równa sumie średnic okręgu opisanego na nim i okręgu wpisanego w nim.
<u>Dowód:</u>



$a + b = y + r + x + r =$
$= 2r + (x + y) = 2r + c = 2r + 2R$
<u>q.e.d.</u>
Wniosek:
$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

Twierdzenie 37.
Niech okrąg wpisany w trójkąt ABC będzie styczny do $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, odpowiednio w punktach M, K, L.
Wówczas $AM = AL = p - a$, $BM = BK = p - b$, $CK = CL = p - c$.
<u>Dowód:</u>



Z **Tw. 35 (Zasadnicze twierdzenie)**
$AM = AL$ i $BM = BK$ i $CK = CL$

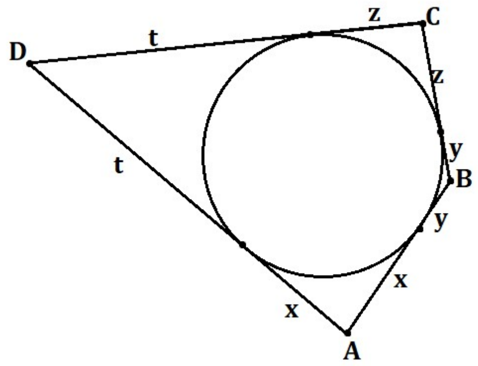
Niech $AM = x$, $BM = y$, $CK = z$
Wówczas
$$\begin{cases} x + y = c \\ y + z = a \\ z + x = b \end{cases}$$
Odejmując (3) od sumy (1) i (2) otrzymujemy:
$x + y + y + z - z - x = c + a - b$
$2y = c + a - b$
$2y = c + a + b - 2b$
$2y = 2p - 2b$
$\underline{y = p - b}$

Odejmując (1) od sumy (2) i (3) otrzymujemy:
$y + z + z + x - x - y = a + b - c$
$2x = a + b + c - 2c$
$2x = 2p - 2c$
$\underline{x = p - c}$

Odejmując (2) od sumy (1) i (3) otrzymujemy:
$x + y + z + x - y - z = c + b - a$
$2x = a + b + c - 2a$
$2x = 2p - 2a$
$\underline{x = p - a}$
<u>*q.e.d.*</u>

Twierdzenie 38. (O okręgu wpisanym w czworokąt)
W czworokąt można wpisać okrąg, wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych boków są równe.
<u>Dowód:</u>

1) ($\Longrightarrow$) Załóżmy, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

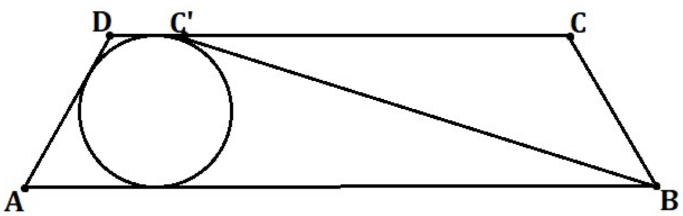


Z **Tw. 35 (Zasadnicze twierdzenie):**
$AB + CD = x + y + z + t$
oraz
$AB + CD = BC + AD$

<u>*q.e.d.*</u>

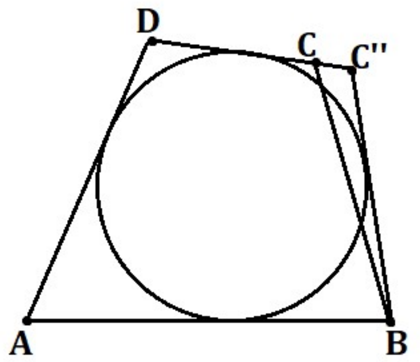
2) ($\Longleftarrow$) Załóżmy, że w czworokącie $ABCD$ zachodzi równość (1) $AB + CD = AD + BC.$

<u>Dowód(nie wprost):</u>
Załóżmy, że w czworokąt ABCD nie można wpisać okręgu. Mogą wówczas zajść dwa przypadki.
1°



Wówczas w czworokąt $ABC'D$ można wpisać okrąg
Zatem z pierwszej części dowodu
(2) $AB + C'D = AD + BC'$
Odejmując stronami (1) i (2) otrzymujemy
$CD - CD' = BC - BC'$
$CC' + BC' = BC$
Otrzymaliśmy równość trójkąta, że
$CC' + BC' > BC$
Zatem sprzeczność.

2°

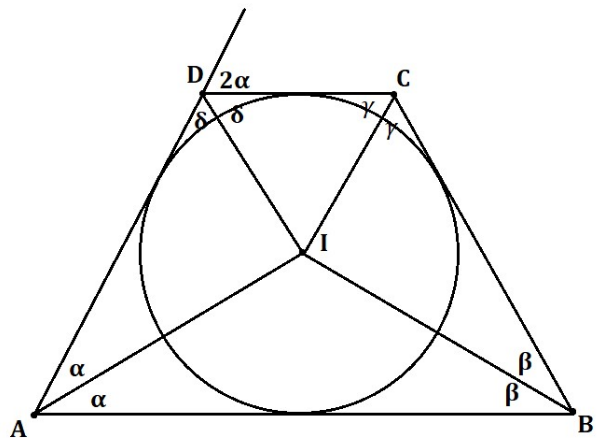


Wówczas w czworokąt $ABC''D$ jest wpisany okrąg. Stąd:
$(3) AB + C''D = AD + BC''$

Odejmując stronami równość (1) i (3) otrzymujemy
$C''D - CD = BC'' - BC$
$CC'' + BC = BC''$
Otrzymaliśmy sprzeczność z nierównością trójkąta, że
$CC'' + BC > BC''$.

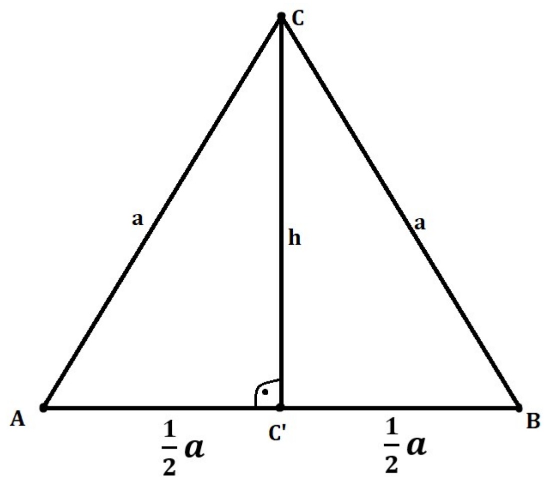
Zatem nasze przypuszczenie, że w czworokąt $ABCD$ nie można wpisać okręgu prowadzi nas do sprzeczności. Zatem w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.
q.e.d.

Twierdzenie 39.
W trapez $ABCD$ można wpisać okrąg o środku I.
Wówczas $\sphericalangle AID = \sphericalangle BIC = 90°$
Dowód:



Z **Aksjomatu 6. (O mierzeniu kątów)**
$2\alpha + 2\delta = 180°$
$\alpha + \delta = 90°$
Stąd $\sphericalangle AID = 180° - (\alpha + \delta) = 180° - 90° = 90°$
Analogicznie udowadniamy, że
$\sphericalangle BIC = 90°$
q.e.d.

Twierdzenie 40.
W trójkącie równobocznym o boku a i wysokości h, pole wyraża się wzorami:
$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ oraz $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
<u>Dowód:</u>



Z $\Delta ACC'$ i **Tw. 16 (Pitagorasa)**:

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2 = a^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 + h^2 = a^2$$

$$\frac{3}{4}a^2 = h^2$$

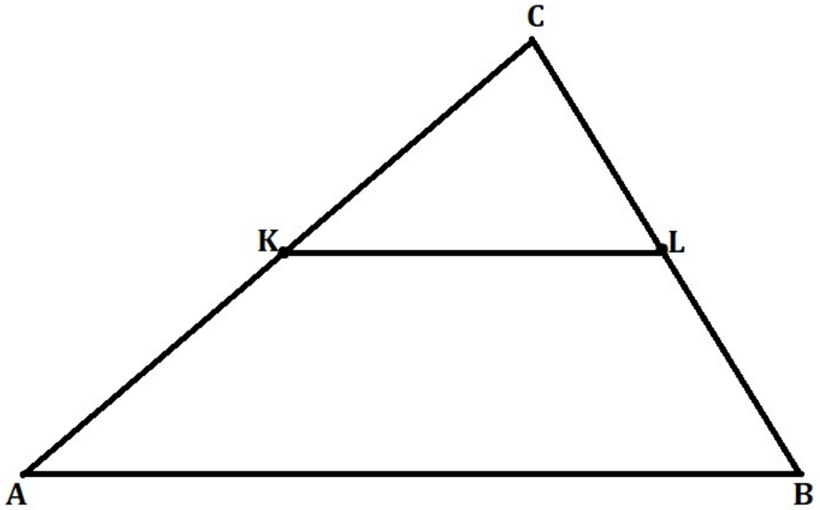
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Stąd

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{2\sqrt{3}}{4}a^2$$

<u>*q.e.d.*</u>

Twierdzenie 41.
Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i jest od niego dwa razy krótszy.



$\overline{KL} \parallel \overline{AB}$ oraz $KL = \frac{1}{2}AB$

<u>Dowód:</u>

Zauważmy, że

$\frac{CK}{CA} = \frac{1}{2}$ oraz $\frac{CL}{CB} = \frac{1}{2}$

Stąd

$$\frac{CK}{CA} = \frac{CL}{CB}$$

Zatem z cechy podobieństwa **BKB**:

$\Delta CKL \sim \Delta CAB$

Stąd

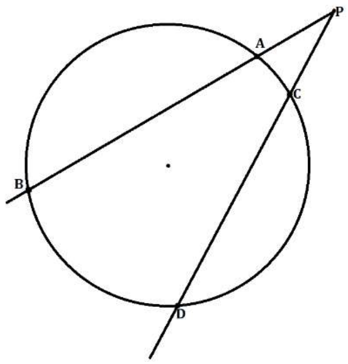
$\frac{KL}{AB} = \frac{1}{2}$ oraz $\sphericalangle BAC = \sphericalangle LKC$

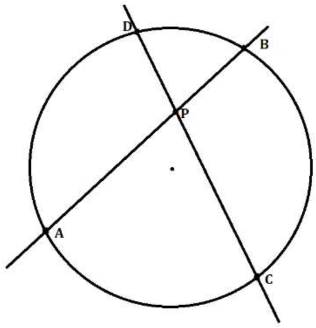
Czyli

$KL = \frac{1}{2}AB$ oraz $\overline{KL} \parallel \overline{AB}$

<u>*q.e.d.*</u>

Twierdzenie 42. (O siecznych)

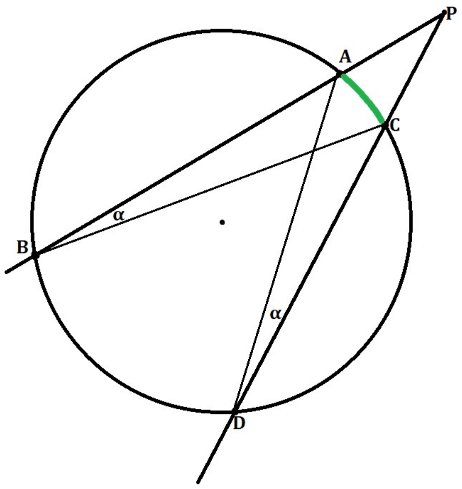




$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

<u>Dowód:</u>

1 ° Punkt P leży poza okręgiem



$\Delta PBC \sim \Delta PAD$ KK

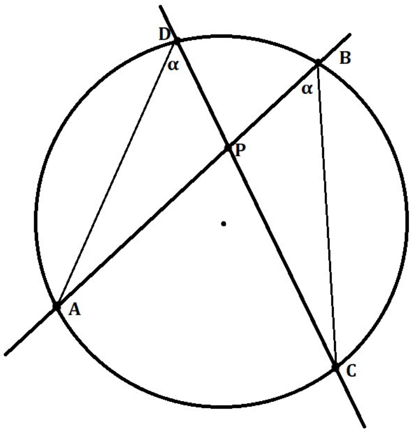
Zatem

$$\frac{PB}{PC} = \frac{PD}{PA}$$

Stąd

$$PB \cdot PA = PD \cdot PC$$

2° Punkt P leży w okręgu



$\Delta PBC \sim \Delta PAD$ KK

Zatem

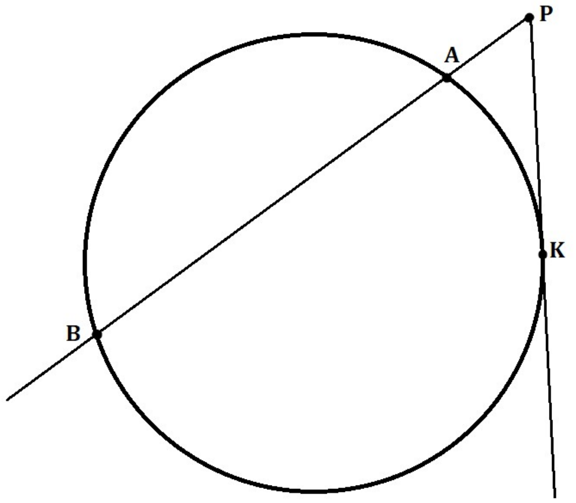
$$\frac{PB}{PC} = \frac{PD}{PA}$$

Stąd

$$PB \cdot PA = PD \cdot PC$$

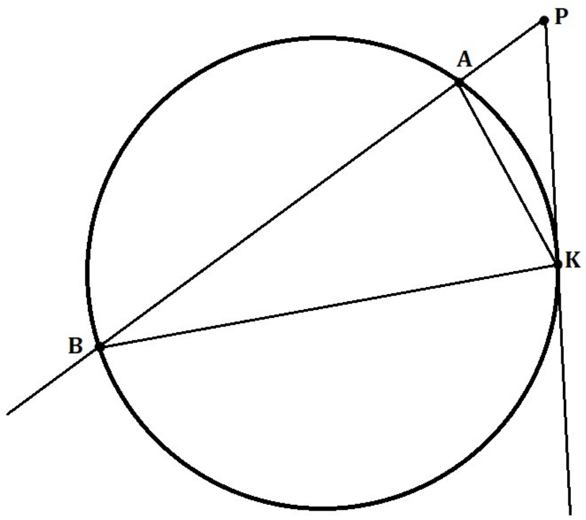
q.e.d.

Twierdzenie 43. (O siecznej i stycznej)



$PA \cdot PB = PK^2$

Dowód:



$\Delta PBK \sim \Delta PAK$ (KK) (bo $\sphericalangle PBK = \sphericalangle PKA$ – **Tw. 24 (O kącie między styczną i sieczną)**)

$\frac{PB}{PK} = \frac{PK}{PA}$

Stąd

$PK^2 = PB \cdot PA$

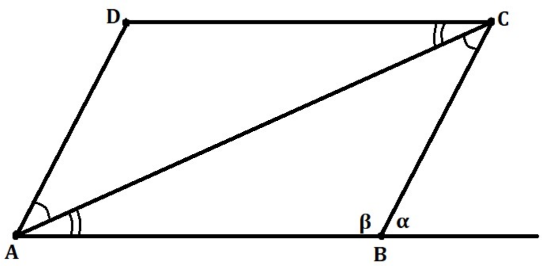
q.e.d.

Twierdzenie 44. (O równoległoboku)
Jeżeli czworokąt jest równoległobokiem to spełnia on warunki:

a) przeciwległe boki są równe,
b) przeciwległe kąty są równe,
c) kąty wewnętrzne przy jednym boku dopełniają się do 180°,
d) przekątne przecinają się w połowie.

<u>Dowód:</u>

a)



Z cechy **KBK**:
$\Delta ABC \equiv \Delta ADC$

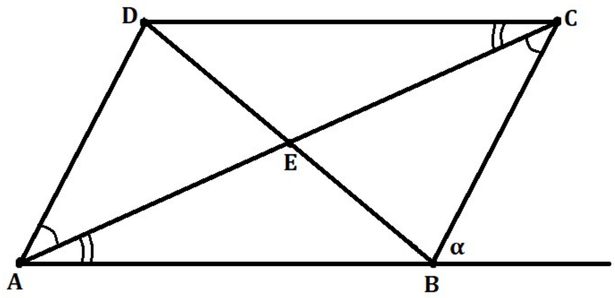
Stąd
$AB = CD$ i $AD = BC$
<u>*q.e.d.*</u>

b)
z <u>a)</u> $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$

analogicznie
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$
<u>*q.e.d.*</u>

c)
Łatwo zauważyć
$\alpha + \beta = 180°$
<u>*q.e.d.*</u>

d)



z <u>a)</u> $AB = CD$
Zatem z cechy **BKB:**
$\Delta AEB \equiv \Delta ECD$

Czyli
$AE = EC$ i $DE = EB$
<u>q.e.d.</u>

Twierdzenie 45.
Jeżeli w czworokącie zachodzi co najmniej jeden z warunków:
a) przeciwległe boki są równe,
b) przeciwległe kąty są równe,
c) kąty wewnętrzne leżące naprzeciwko są równe,
d) przekątne połowią się
to ten czworokąt jest równoległobokiem.