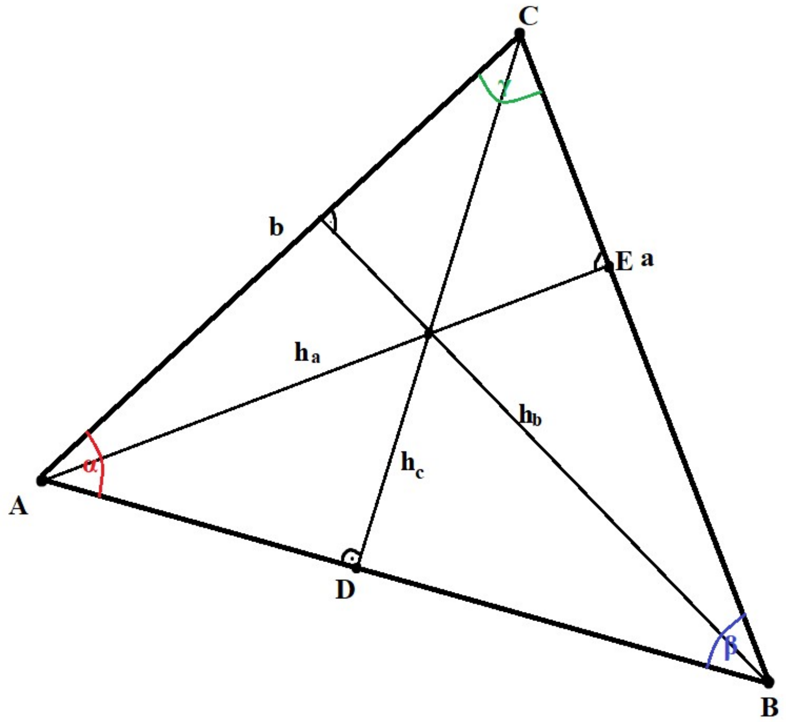
Wiktor Persak 2e

Twierdzenie 1. (Twierdzenie Sinusów)

W dowolnym trójkącie zachodzi równość:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$



<u>Dowód:</u>

Z ΔADC i ΔBDC:

$sin\ \alpha = \frac{h_c}{b}$ i $sin\ \beta = \frac{h_c}{a}$

Stąd

$h_c = sin\ \alpha \cdot b$ oraz $h_c = sin\ \beta \cdot a$

Wobec tego

$sin\ \alpha \cdot b = sin\ \beta \cdot a$

Zatem

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Z ΔAEC i ΔAEB:

$\sin y = \frac{h_a}{b}$ i $sin\ \beta = \frac{h_a}{c}$

Stąd

$h_a = b \cdot \sin \gamma$ oraz $h_a = c \cdot \sin \beta$

Zatem

$$\frac{b}{\sin\ \beta} = \frac{c}{\sin\ \gamma}$$

q.e.d.

Twierdzenie 2. (Twierdzenie uogólnione Sinusów)

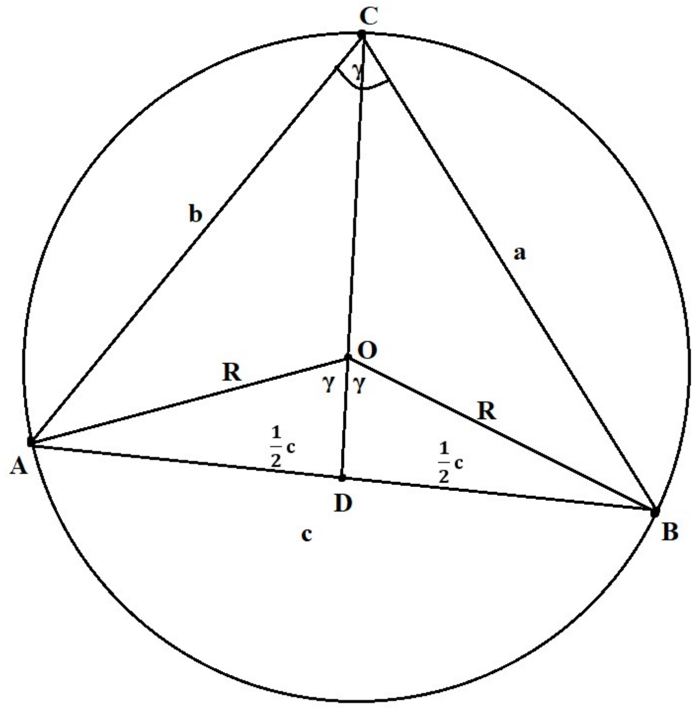
W dowolnym Trójkącie prawdziwe są równości:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}=2R$$

gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

<u>Dowód:</u>

1° Niech ΔABC będzie ostrokątny



Kąt $\sphericalangle AOB = 2\gamma$ jest środkowy, oparty na tym samym łuku co kąt wpisany $\sphericalangle ACB$. Trójkąt ΔAOB jest równoramienny, więc OD jest jednocześnie środkową boku i dwusieczną$\sphericalangle AOB$.

Stąd

$$\sphericalangle AOD = \gamma$$

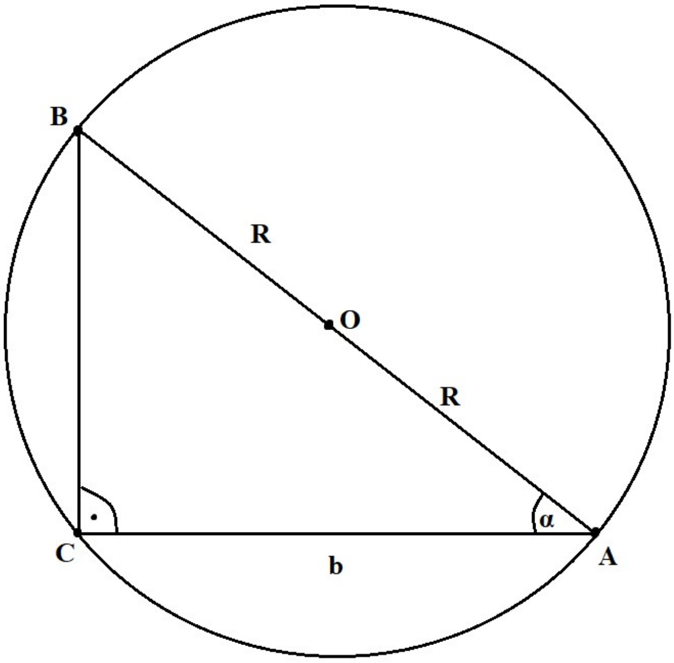
Z Twierdzenia 1.(Sinusów):

$$\sin\gamma = \frac{\frac{1}{2}c}{R}$$

$$\sin\gamma = \frac{c}{2R}$$

$2R = \frac{c}{\sin\gamma}$.

2° Niech ΔABC będzie prostokątny

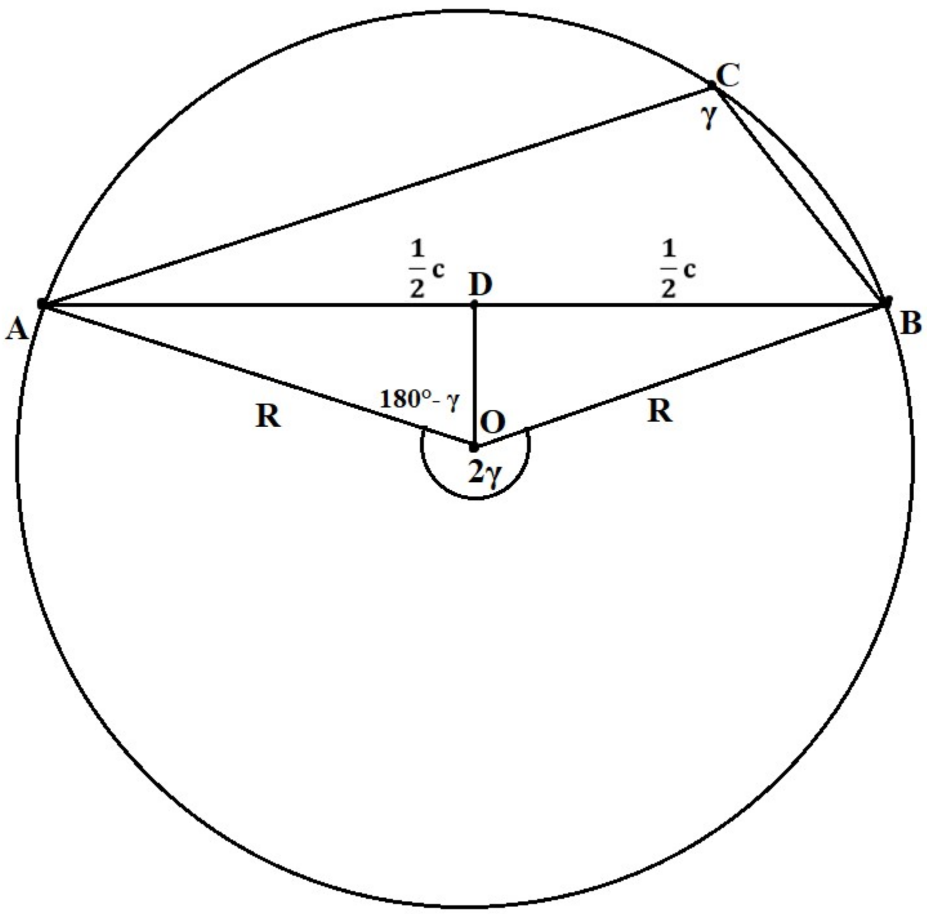


Z ΔABC i Twierdzenia 1. (Sinusów):

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R}$$

$2R = \frac{\alpha}{\sin \alpha}$.

3° Niech ΔABC będzie rozwartokątny



Z ΔAOD:

$$\sin(180° - \gamma) = \frac{\frac{1}{2}c}{R}$$

$$\sin\gamma = \frac{c}{2R}$$

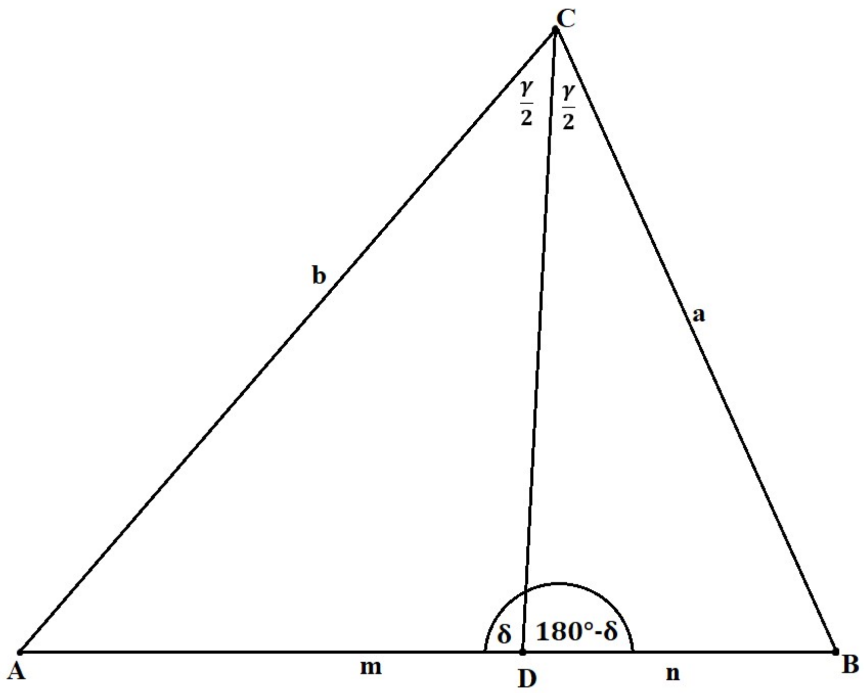
$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

q.e.d.

Twierdzenie 3. (O rzutach boku trójkąta w kierunku dwusiecznej kąta wewnętrznego)

Stosunek dwóch boków trójkąta jest równy jego stosunkowi ich rzutów w kierunku dwusiecznej kąta zawartego między nimi na trzeci bok.

$$\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$$



<u>Dowód:</u>

Z $\Delta\ ADC$, ΔBDC i Twierdzenia 1. (Sinusów):

$\frac{b}{\sin\delta} = \frac{m}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$ oraz $\frac{a}{\sin(180°-\delta)} = \frac{n}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$

$\frac{b}{m} = \frac{\sin\delta}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$ $\qquad$ $\frac{a}{n} = \frac{\sin\delta}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$

Stąd

$$\frac{b}{m} = \frac{a}{n}$$

$\frac{a}{b} = \frac{n}{m}.$

q.e.d.

Twierdzenie 4. (O długości odcinków dla jakich dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok)

Długości odcinków na jakie dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok wyraża się wzorami:

$$m = \frac{bc}{a+b} \quad n = \frac{ac}{a+b}$$

<u>Dowód:</u>

Z Twierdzenia 3.

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{n}{m} \\ c = m + n \end{cases}$$

$$\begin{cases} am = bn \\ m = c - n \end{cases}$$

Z (2) do (1):

$a(c - n) = bn$

$ac - an = bn$

$bn + an = ac$

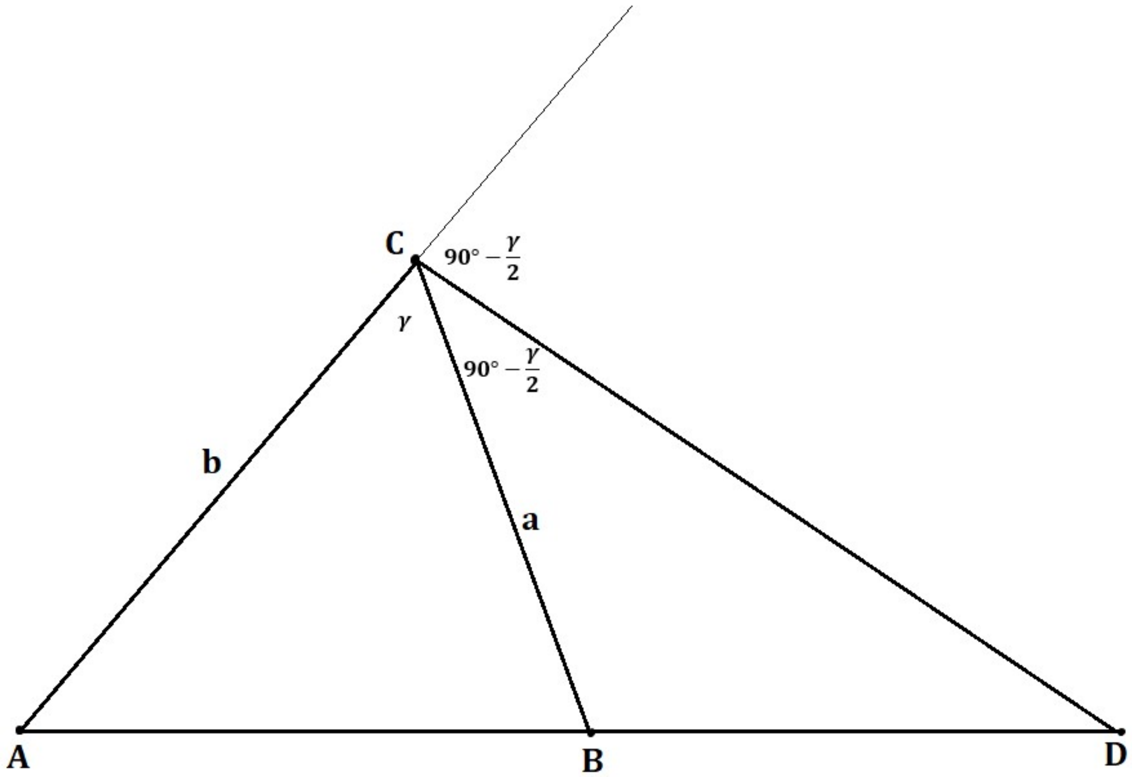
$n(a + b) = ac$

$n = \frac{ac}{a+b}$

$m = c - n = c - \frac{ac}{a+b} = \frac{ca+cb-ac}{a+b} = \frac{bc}{a+b}$.

q.e.d.

Twierdzenie 5. (O rzutach trójkąta w kierunku dwusiecznej kąta zewnętrznego)



$$\frac{a}{b} = \frac{BD}{AD}$$

<u>Dowód:</u>

Z ΔBDC i Twierdzenia 1. (Sinusów) i ΔACD:

$$\frac{a}{\sin\sphericalangle D} = \frac{BD}{\sin(90° - \frac{\gamma}{2})} \qquad \frac{b}{\sin\sphericalangle D} = \frac{AD}{\sin(90° + \frac{\gamma}{2})}$$

$$\frac{a}{BD} = \frac{\sin\sphericalangle D}{cos\frac{\gamma}{2}} \qquad \frac{b}{AD} = \frac{\sin\sphericalangle D}{cos\frac{\gamma}{2}}$$

Stąd

$\frac{a}{BD} = \frac{b}{AD}$, więc $\frac{a}{b} = \frac{BD}{AD}$.

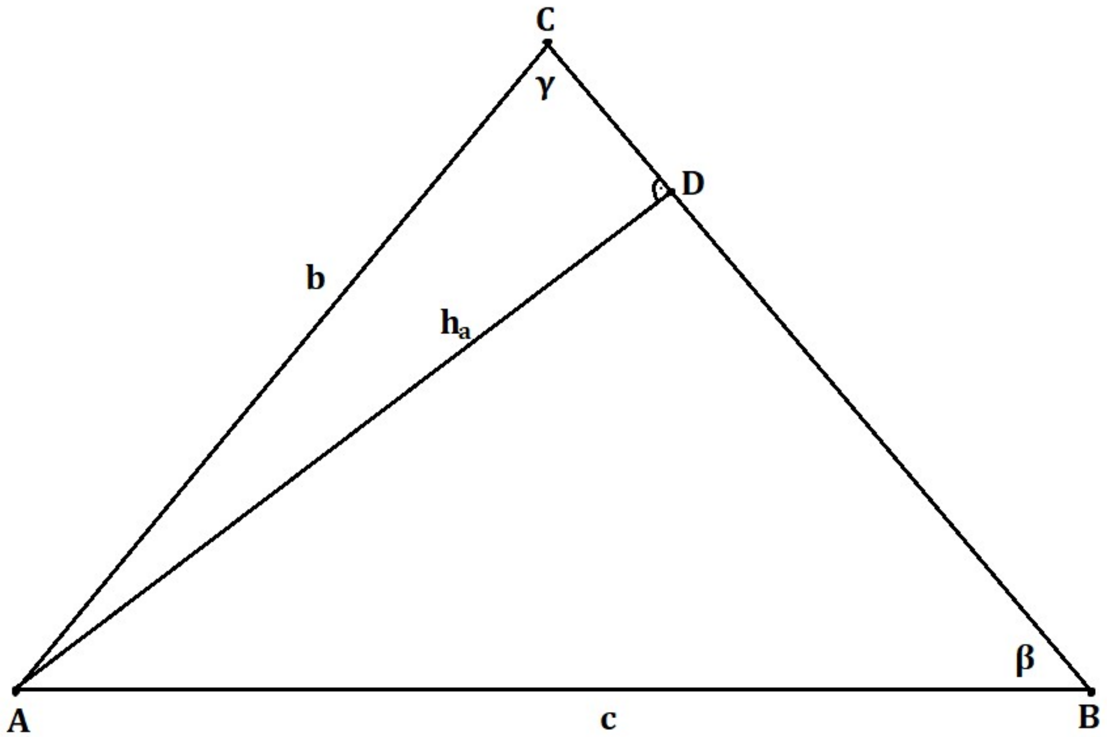
q.e.d.

Twierdzenie 6.

Pole dowolnego trójkąt jest równe połowie iloczynu dwóch boków i sinusa kąta zawartego między nimi.

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}ac \cdot \sin\beta$$

<u>Dowód:</u>



$S = \frac{1}{2}ah_a$

Z ΔADC:

$\sin\gamma = \frac{h_a}{b}$

$h_a = \sin\gamma \cdot b$

Zatem

$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$

q.e.d.

Twierdzenie 7.

$$S = \frac{abc}{4R}$$

<u>Dowód:</u>

Z Twierdzenia 6.:

$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$

Ale z Twierdzenia 1. (Sinusów) wynika, że:

$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Stąd

$\sin\gamma = \frac{c}{2R}$

Zatem

$S = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R}$

$S = \frac{abc}{4R}$

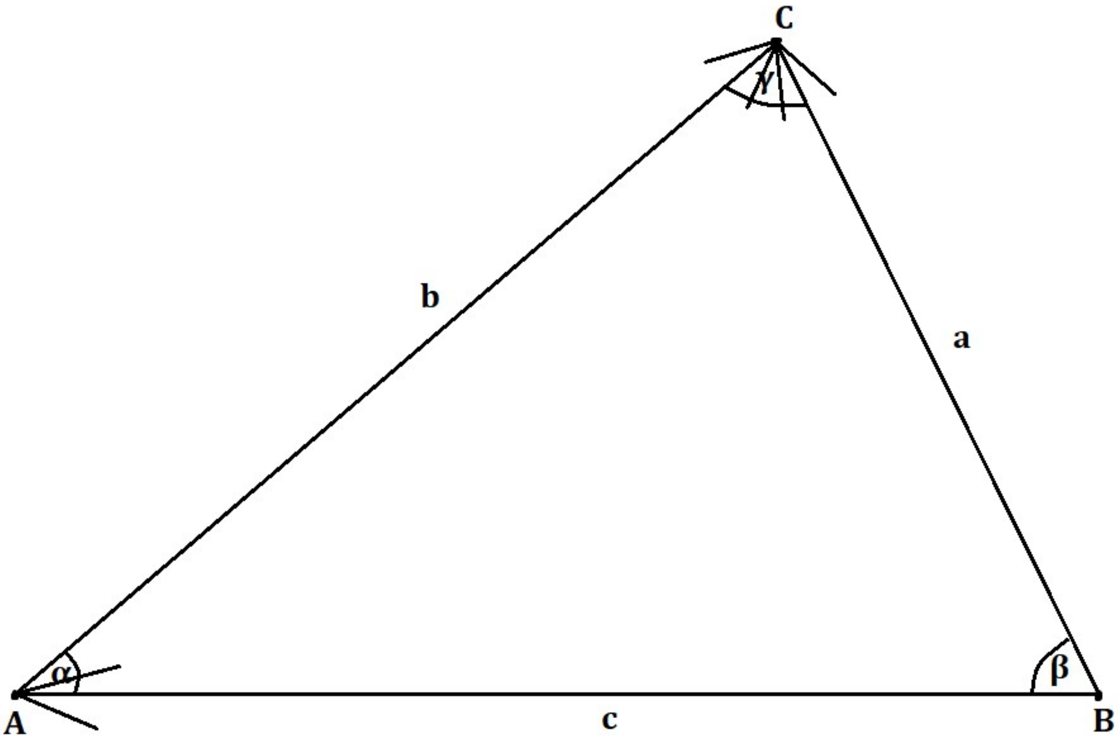
q.e.d

Twierdzenie 8. (Cosinusów - Carnota)

W dowolnym trójkącie prawdziwe są równości:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma.$

Dowód:



$a^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 =$

$= \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 =$

$= |\overrightarrow{BA}|^2 + 2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 180° - \alpha + |\overrightarrow{AC}|^2 =$

$= |\overrightarrow{BA}|^2 - 2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{AC}| \cdot \cos\alpha + |\overrightarrow{AC}|^2 =$

$= c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha + b^2 =$

$= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha.$

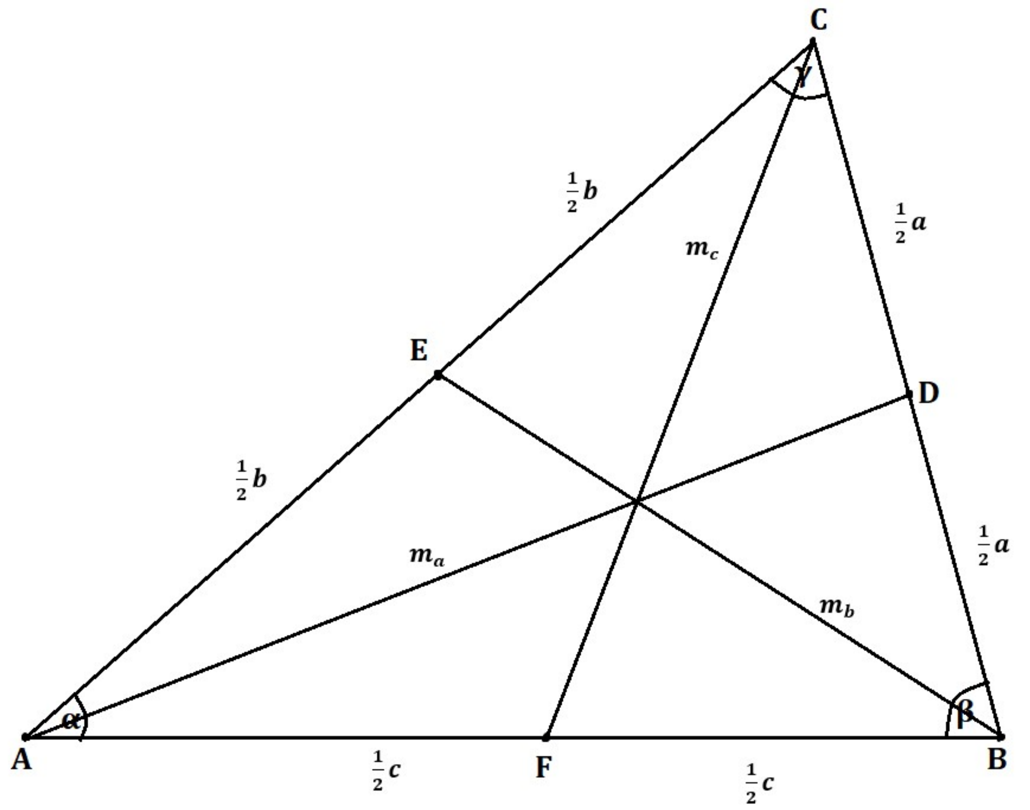
q.e.d.

Twierdzenie 9. (O długości środkowych)

Długości środkowych trójkąta o bokach a, b i c, wyrażają się wzorami:

$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$,
$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$,
$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Dowód:



Z Twierdzenia 8. (Cosinusów) i ΔABC:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Z Twierdzenia 8. (Cosinusów) i ΔABD:

$${m_a}^2 = c^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - 2c\left(\frac{1}{2}a\right) \cdot \cos\beta$$

$${m_a}^2 = c^2 + \frac{1}{4}a^2 - ca \cdot \cos\beta$$

Czyli

$$m_a{}^2 = c^2 + \frac{1}{4}a^2 - ca \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$m_a{}^2 = c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$$

$$m_a{}^2 = \frac{4c^2 + a^2 - 2a^2 - 2c^2 + 2b^2}{4}$$

$$m_a{}^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$$

$$m_a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

analogicznie udowadniamy wzory dla m_b i m_c.

q.e.d.

Twierdzenie 10. (O długości dwusiecznych)

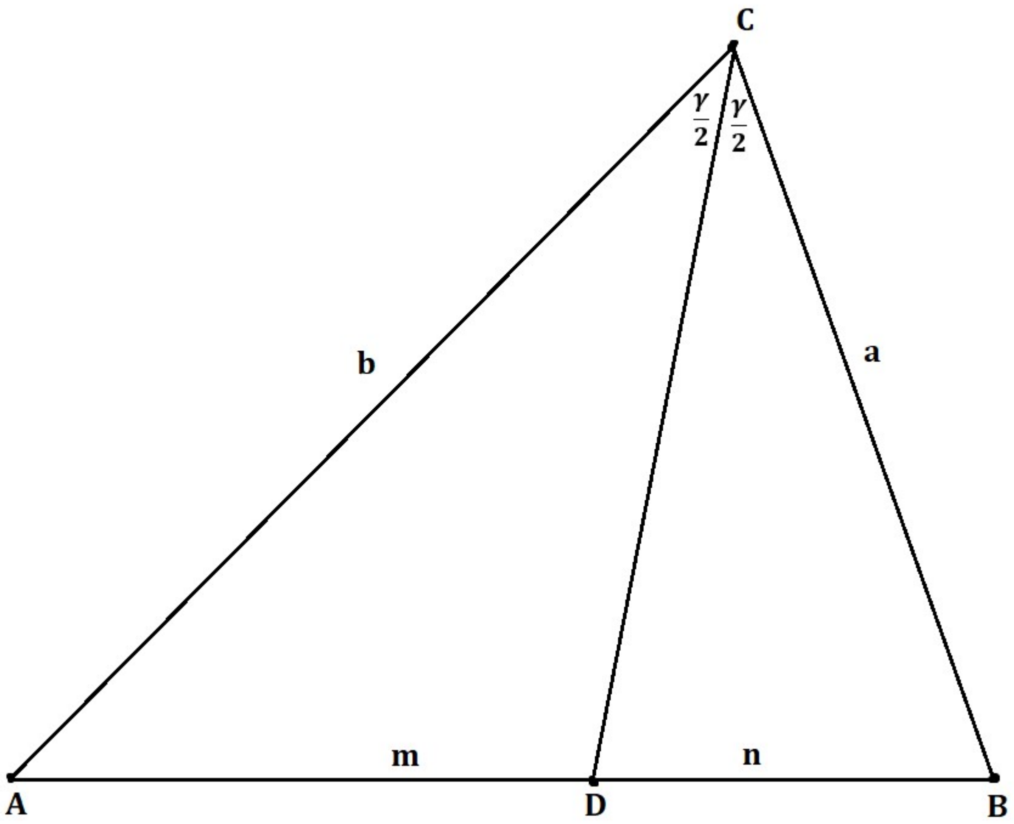
Długości dwusiecznych wyrażaj się wzorami:

$d_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$,

$d_b = \frac{\sqrt{ac(a+b+c)(a-b+c)}}{a+c}$,

$d_a = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(-a+b+c)}}{b+c}$.

Dowód:



Z Twierdzenia 4.(O długości odcinków dla jakich dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok):

$$m = \frac{bc}{a+b}$$

Z Twierdzenia 8. (Cosinusów):

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Z Twierdzenia 8. (Cosinusów) i ΔADC:

$$CD^2 = b^2 + m^2 - 2mb \cdot \cos\alpha$$

$$CD^2 = b^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 - 2\frac{bc}{a+b}b \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} =$$

$$= \frac{b^2(a+b)^2 + b^2c^2 - b(a+b)(b^2+c^2-a^2)}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{b}{(a+b)^2}\left(b(a+b)^2 + bc^2 - (a+b)(b^2+c^2-a^2)\right) =$$

$$= \frac{b}{(a+b)^2}(ba^2 + 2ab^2 + b^3 + bc^2 - ab^2 - ac^2 + a^3 - b^3 - bc^2 + ba^2) =$$

$$= \frac{b}{(a+b)^2}(ab^2 + 2a^2b - ac^2 + a^3) =$$

$$= \frac{ab}{(a+b)^2}(a^2 + 2ab + b^2 - c^2) =$$

$$= \frac{ab}{(a+b)^2}((a+b)^2 - c^2) =$$

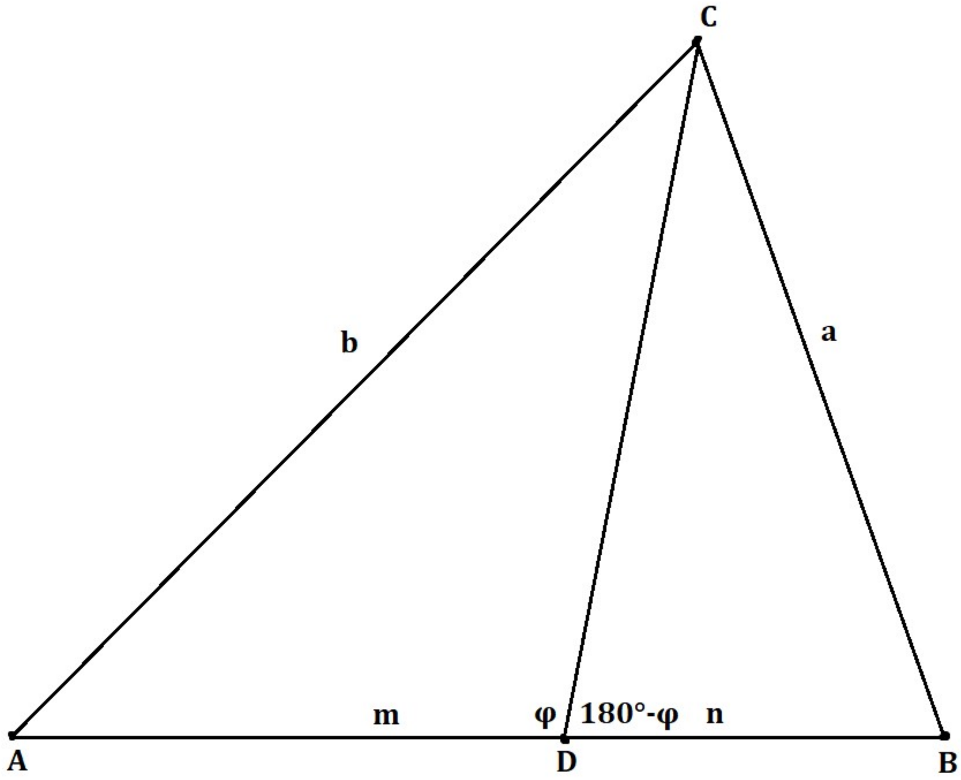
$$= \frac{ab}{(a+b)^2}(a+b+c)(a+b-c)$$

Stąd

$$CD = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b} = d_c.$$

analogicznie udowadniamy wzory dla d_a i d_b.

Twierdzenie 11. (Stewarta)



$$CD^2 = \frac{ma^2 + nb^2}{c} - m \cdot n$$

Dowód:

Z ΔADC, ΔBDC i Twierdzenia 8. (Cosinusów):

$$\begin{cases} b^2 = CD^2 + m^2 - 2m \cdot CD \cdot \cos\varphi \\ a^2 = CD^2 + n^2 - 2n \cdot CD \cdot \cos(180° - \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} nb^2 = n \cdot CD^2 + nm^2 - 2nm \cdot CD \cdot \cos\varphi \\ ma^2 = m \cdot CD^2 + mn^2 + 2mn \cdot CD \cdot \cos\varphi \end{cases}$$

Dodając stronami:

$nb^2 + ma^2 = n \cdot CD^2 + nm^2 + m \cdot CD^2 + mn^2$

$(m + n)CD^2 = -nm^2 - mn^2 + nb^2 + ma^2$

$(m + n)CD^2 = -(m + n)nm + nb^2 + ma^2$

$CD^2 = \frac{nb^2+m\ {}^2}{m+n} - nm = \frac{ma^2+nb^2}{c} - mn.$

q.e.d.

Twierdzenie 12.

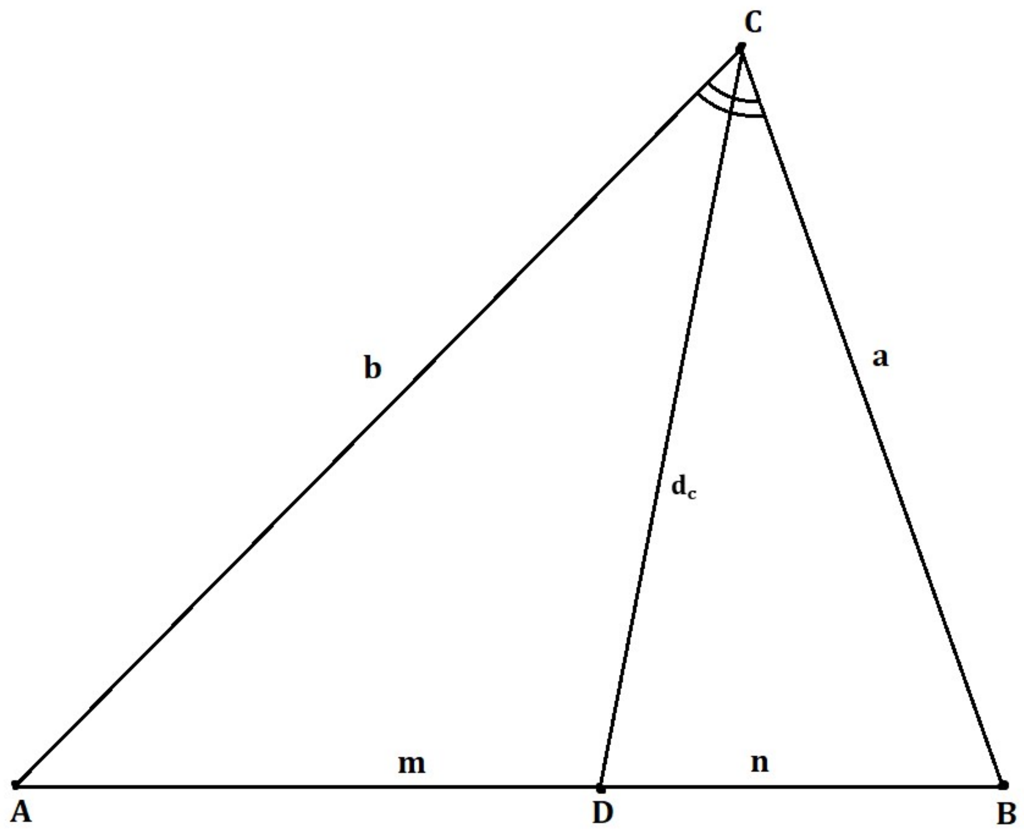
Długości dwusiecznych w trójkącie wyrażają się wzorami:

$d_c = \frac{2}{2p-c}\sqrt{abp(p-c)}$,

$d_b = \frac{2}{2p-b}\sqrt{acp(p-b)}$,

$d_a = \frac{2}{2p-a}\sqrt{cbp(p-a)}$.

Dowód:



Z Twierdzenia 4.(O długości odcinków dla jakich dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok):

$m = \frac{bc}{a+b}$ i $n = \frac{ac}{a+b}$

Z Twierdzenia 11. (Stewarta):

$${d_c}^2 = \frac{ma^2 + nb^2}{c} - mn =$$

$$= \frac{\frac{bc}{a+b}a^2 + \frac{ac}{a+b}b^2}{c} - \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{ac}{a+b} =$$

$$= \frac{ba^2 + ab^2}{a+b} - \frac{abc^2}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{(a+b)ba^2 + (a+b)ab^2 - abc^2}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{ab\big((a+b)a + (a+b)b - c^2\big)}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{ab\big((a+b)(a+b) - c^2\big)}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{ab((a+b)^2 - c^2)}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{ab \cdot 2p(2p-2c)}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{4abp(p-c)}{(2p-c)^2}.$$

analogicznie udowadniamy wzory dla d_a i d_b.

q.e.d.

Twierdzenie 13. (Herona)

Pole dowolnego trójkąta wyraża się wzorami:

(1) $S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$,

(2) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Dowód:

Z Twierdzenia 6.:

$$s = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma =$$

$$= \frac{1}{2}ab \cdot \sqrt{1-\cos^2\gamma} =$$

$$= \frac{1}{2}ab \cdot \sqrt{1-\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}ab \cdot \sqrt{\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}ab \cdot \frac{\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2)} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b-c)(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b)} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

q.e.d.(1)

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c) =}$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{2p \cdot 2(p-a)2(p-b)2(p-c) =}$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

q.e.d. (2)

Twierdzenie 14.

Pole trójkąta przy pomocy wysokości wyraża się wzorem:

$$S=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}}$$

<u>Dowód:</u>

Z Twierdzenia 13. (Herona):

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

Ale także z wzoru na pole trójkąta:

$a=\frac{2S}{h_a}, b=\frac{2S}{h_b}, c=\frac{2S}{h_c}$

Zatem

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{2S}{h_a}+\frac{2S}{h_b}+\frac{2S}{h_c}\right)\left(-\frac{2S}{h_a}+\frac{2S}{h_b}+\frac{2S}{h_c}\right)\left(\frac{2S}{h_a}-\frac{2S}{h_b}+\frac{2S}{h_c}\right)\left(\frac{2S}{h_a}+\frac{2S}{h_b}-\frac{2S}{h_c}\right)}$$

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{2S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)2S\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)2S\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)2S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}$$

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(2S)^4\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}$$

$$S=S^2\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}$$

$$\frac{1}{S}=\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}$$

$$S=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}}$$

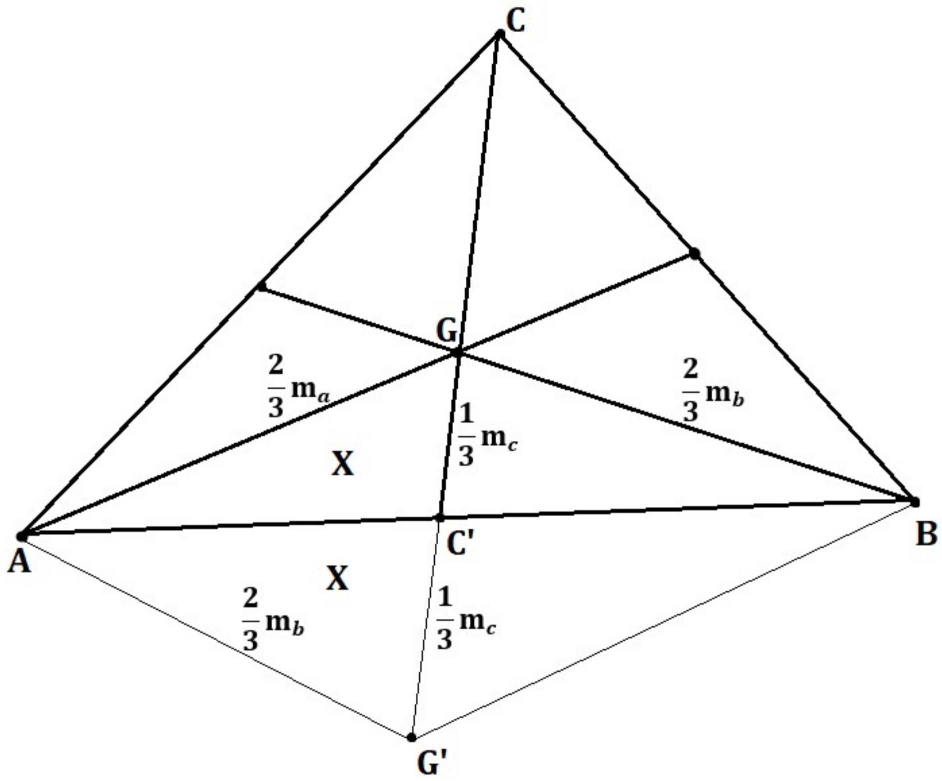
q.e.d.

Twierdzenie 15.

Pole trójkąta przy pomocy środkowych wyraża się wzorem:

$$S = \frac{1}{3}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(-m_a + m_b + m_c)(m_a - m_b + m_c)(m_a + m_b - m_c)}$$

<u>Dowód:</u>



Punkt G' jest obrazem puntu G w symetrii środkowej względem C'. Wobec tego czworokąt $AG'BG$ jest równoległobokiem.

$[ABC] = 6x = 3 \cdot 2x = 3[AGG'] =$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{\left(\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c\right)\left(-\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c\right)\left(\frac{2}{3}m_a - \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c\right)\left(\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b - \frac{2}{3}m_c\right)} =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}(m_a + m_b + m_c)\frac{2}{3}(-m_a + m_b + m_c)\frac{2}{3}(m_a - m_b + m_c)\frac{2}{3}(m_a + m_b - m_c)} =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{2^2}{3^2}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(-m_a + m_b + m_c)(m_a - m_b + m_c)(m_a + m_b - m_c)} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(-m_a + m_b + m_c)(m_a - m_b + m_c)(m_a + m_b - m_c)}.$$

q.e.d.

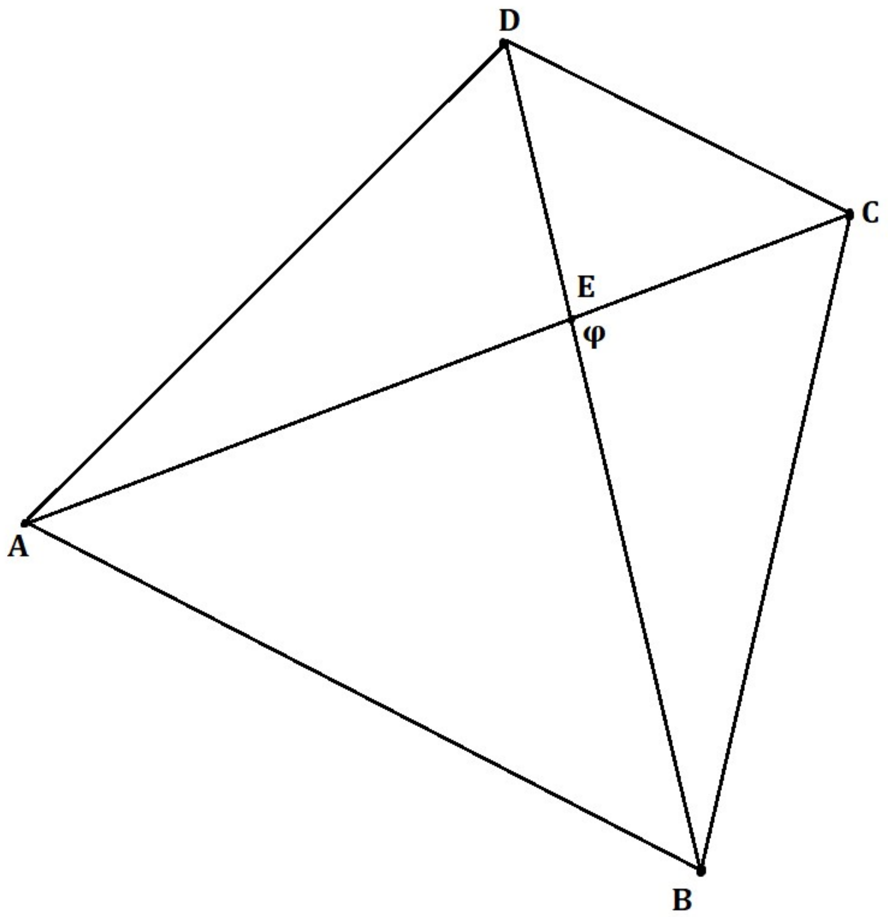
Twierdzenie 16. (Pole dowolnego czworokąta)

Pole dowolnego czworokąta jest równe połowie iloczynu przekątnych i sinusa kota zawartego między nimi.

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin \varphi$$

Dowód:

1° Niech czworokąt $ABCD$ będzie wypukły.



$S = [ABCD] = [AEB] + [EBC] + [ECD] + [EDA] =$

$= \frac{1}{2} AE \cdot BE \cdot \sin(180° - \varphi) + \frac{1}{2} EB \cdot CE \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} EC \cdot ED \cdot \sin(180° - \varphi) + \frac{1}{2} DE \cdot AE \cdot \sin \varphi =$

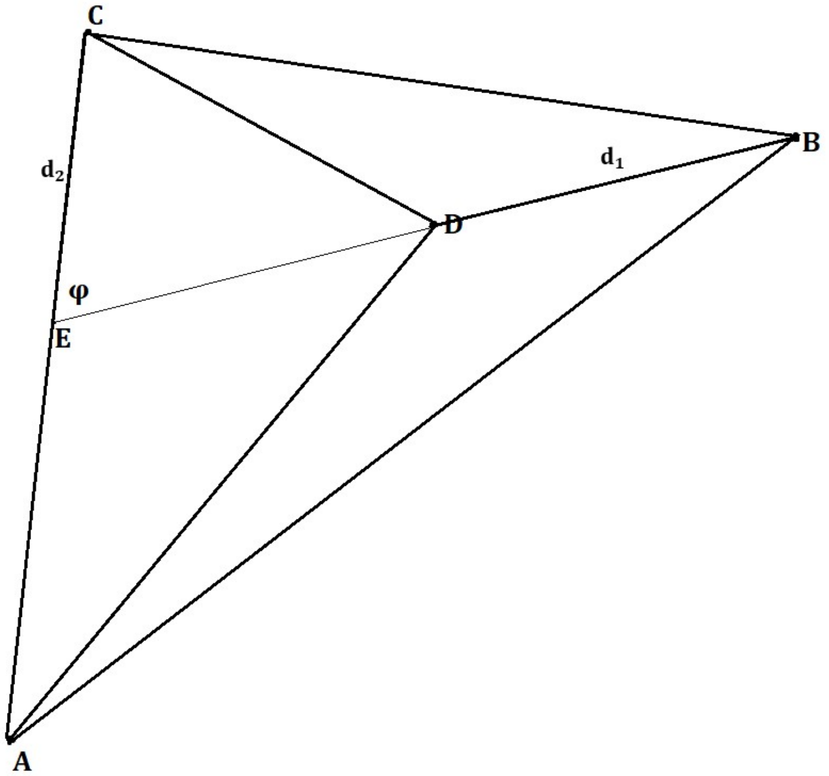
$= \frac{1}{2} \sin \varphi \, (AE \cdot BE + EB \cdot CE + EC \cdot ED + DE \cdot AE) =$

$= \frac{1}{2} \sin \varphi \, \big(AE(BE + DE) + EC(EB + DE)\big) =$

$= \frac{1}{2} \sin \varphi \, (BE + DE)(AE + EC) =$

$= \frac{1}{2} \sin\varphi \cdot d_1 d_2$

2° Niech czworokąt $ABCD$ będzie wklęsły.



$[ABCD] = [EBC] - [ECD] + [ABE] - [EDA] =$

$= \frac{1}{2} BE \cdot EC \cdot \sin\varphi - \frac{1}{2} ED \cdot EC \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} BE \cdot EA \cdot \sin(180° - \varphi) - \frac{1}{2} ED \cdot EA \cdot \sin(180° - \varphi) =$

$= \frac{1}{2} \sin\varphi \cdot (BE \cdot EC - ED \cdot EC + BE \cdot EA - ED \cdot EA) =$

$= \frac{1}{2} \sin\varphi \cdot \big(BE(EC + EA) - DE(EC + EA)\big) =$

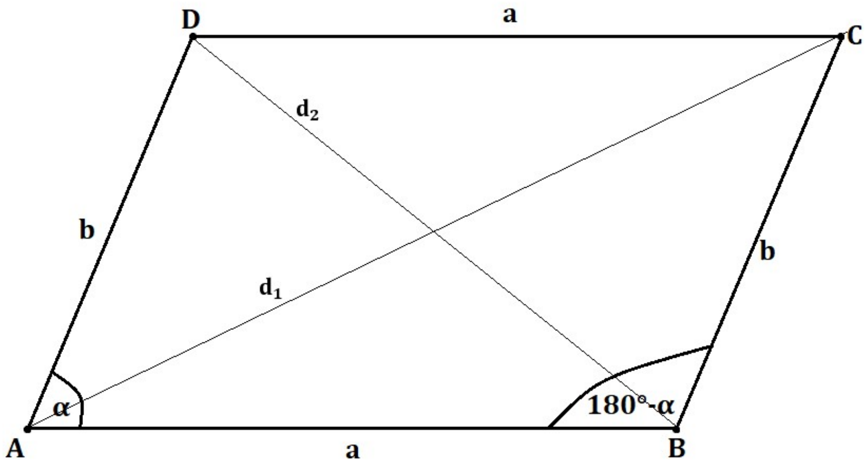
$= \frac{1}{2} \sin\varphi \cdot (BE - DE)(EC + EA) =$

$= \frac{1}{2} \sin\varphi \cdot \ d_1 d_2.$

q.e.d.

Twierdzenie 17.

W dowolnym równoległoboku suma kwadratów przekątnych jest równa sumie kwadratów jego boków.



<u>Dowód:</u>

Z ΔABD i ΔABC i Twierdzenia 8. (Cosinusów):

(1) ${d_2}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha$
(2) ${d_1}^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\alpha$

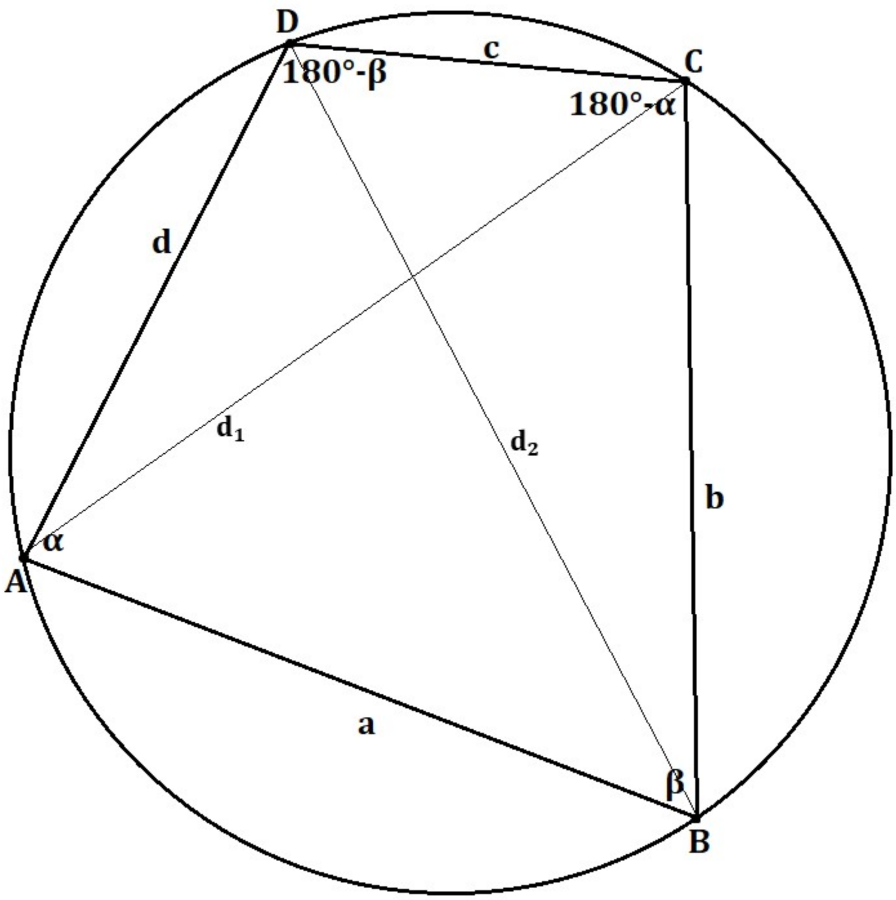
Dodając stronami otrzymujemy:

${d_1}^2 + {d_2}^2 = 2a^2 + 2b^2$.

q.e.d.

Twierdzenie 18. (Ptolemeusza)

W dowolnym trójkącie, na którym można opisać okrąg, iloczyn przekątnych jest równy sumie iloczynów boków przeciwległych.



$d_1 d_2 = ac + bd$

<u>Dowód:</u>

Z ΔABC, ΔACD i Twierdzenia 8. (Cosinusów):

$$\begin{cases} {d_1}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\beta \\ {d_1}^2 = d^2 + c^2 + 2cd \cdot \cos\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} cd{d_1}^2 = a^2cd + b^2cd - 2abcd \cdot \cos\beta \\ ab{d_1}^2 = abd^2 + abc^2 + 2abcd \cdot \cos\beta \end{cases}$$

Dodając stronami:

$$cd{d_1}^2 + ab{d_1}^2 = a^2cd + b^2cd + abc^2 + abd^2$$

$$(ab + cd){d_1}^2 = ac(ad + bc) + bd(bc + ad)$$

$$(ab+cd){d_1}^2=(ac+bd)(ad+bc)$$

$${d_1}^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)}$$

$$(1)\ \ d_1=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)}}.$$

Z ΔABD i ΔDCB i Twierdzenia 8. (Cosinusów):

$$\begin{cases} {d_2}^2=d^2+a^2-2ad\cdot\cos\alpha \\ {d_2}^2=c^2+b^2+2bc\cdot\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} bc{d_2}^2=bcd^2+a^2bc-2abcd\cdot\cos\alpha \\ ad{d_2}^2=ac^2d+ab^2d+2abcd\cdot\cos\alpha \end{cases}$$

Dodając stronami:

$$bc{d_2}^2+ad{d_2}^2=bcd^2+a^2bc+ac^2d+ab^2d$$

$$(bc+ad){d_2}^2=bd(cd+ab)+ac(ab+cd)$$

$$(bc+ad){d_2}^2=(bd+ac)(cd+ab)$$

$$(2)\ \ d_2=\sqrt{\frac{(bd+\quad)(cd+\quad)}{(bc+ad)}}.$$

Z (1) i (2):

$$d_1d_2=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)}\cdot\frac{(bd+ac)(cd+ab)}{(bc+ad)}}$$

$$d_1d_2=\sqrt{(ac+bd)^2}$$

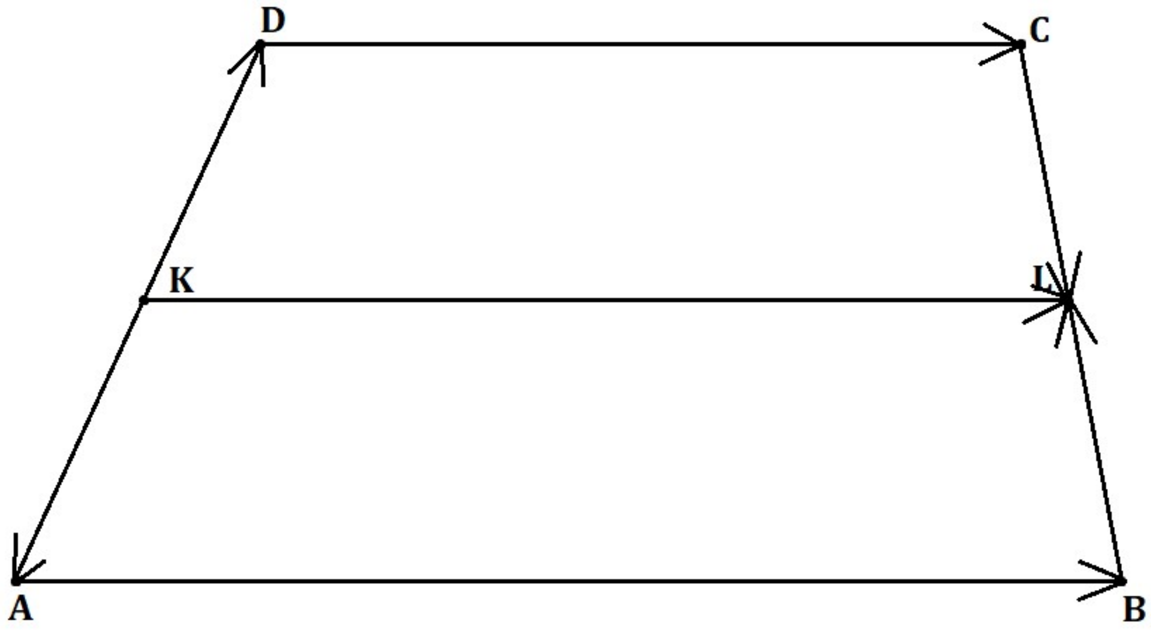
$$d_1d_2=ac+bd$$

q.e.d.

Twierdzenie 19. (O linii środkowej trapezu)

Odcinek łączący środki nierównoległych boków trapezu jest równoległy do podstaw, a jego długość jest równa średniej arytmetycznej długości podstaw.

Niech $K = śr. AD$ i $L = śr. BC$



Dowód:

Zauważmy, że $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL}$

Oraz $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CL}$

Dodając stronami otrzymujemy:

$2\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CL} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL}$

$2\overrightarrow{KL} = \vec{0} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \vec{0}$

$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}\right)$

Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ są równoległe i mają ten sam zwrot. Wobec tego ich suma jest równoległa do tych wektorów. Ponadto iloczyn wektora przez liczbę nie zmienia jego kierunku, zatem:

$\overline{KL} \parallel \overline{AB}$ i $\overline{KL} \parallel \overline{CD}$

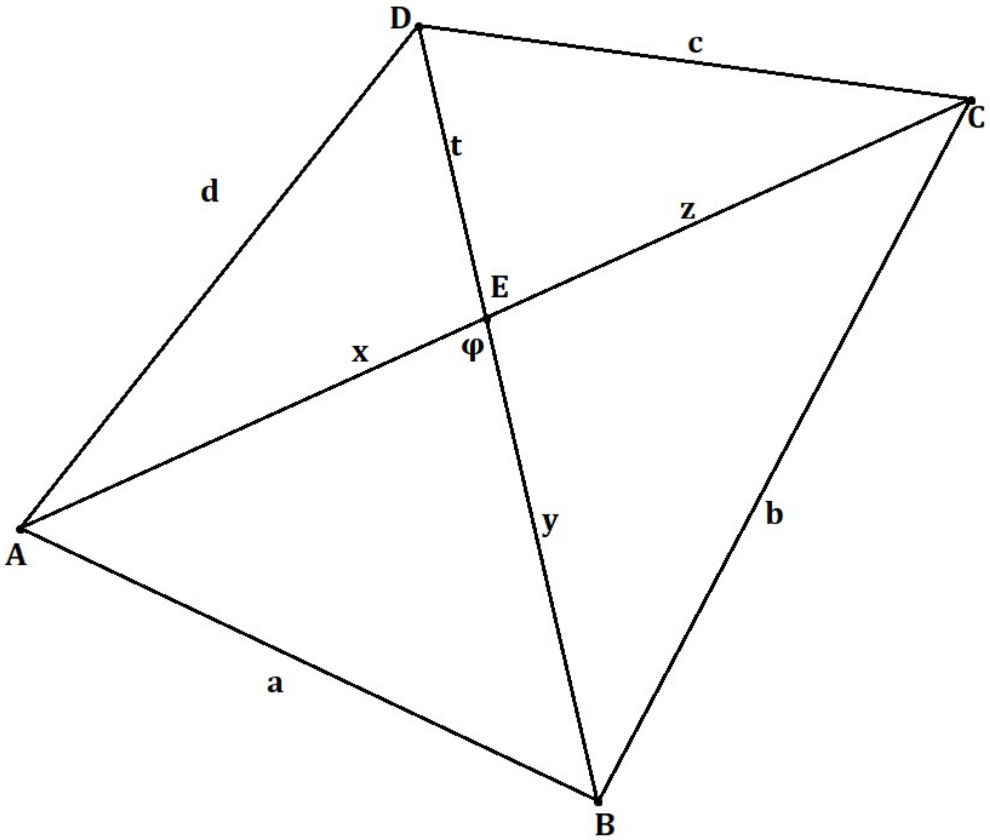
$KL = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

q.e.d.

Twierdzenie 20. (Brahmagupty)

Pole dowolnego czworokąta, na którym można opisać okrąg, wyraża się wzorem:

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-c)}$, gdzie $2p = a + b + c + d$.



Dowód:

Z Twierdzenia 16. (Pole dowolnego czworokąta):

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\varphi$$

Stąd

$$S^2 = \frac{1}{4} {d_1}^2 {d_2}^2 \cdot \sin^2\varphi = \frac{1}{4} {d_1}^2 {d_2}^2 \cdot (1 - \cos^2\varphi)$$

(1) $S^2 = \frac{1}{4}\left({d_1}^2 {d_2}^2 - {d_1}^2 {d_2}^2 \cdot \cos^2\varphi\right)$

Z ΔABE, ΔBCE, ΔCED, ΔDAE i Twierdzenia 8. (Cosinusów) mamy:

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos\varphi$$

$$b^2 = y^2 + z^2 + 2yz \cdot \cos\varphi$$

$c^2 = z^2 + t^2 - 2tz \cdot \cos\varphi$

$d^2 = t^2 + x^2 + 2tx \cdot \cos\varphi$

Dodając (2) i (4) i odejmując (1) i (3) otrzymujemy:

$-a^2 + b^2 - c^2 + d^2 = 2yz \cdot \cos\varphi + 2tx \cdot \cos\varphi + 2xy \cdot \cos\varphi + 2tz \cdot \cos\varphi$

$-a^2 + b^2 - c^2 + d^2 = 2\cos\varphi\,(yz + tx + xy + tz)$

$-a^2 + b^2 - c^2 + d^2 = 2\cos\varphi\,\big(y(z + x) + t(x + z)\big)$

(2) $-a^2 + b^2 - c^2 + d^2 = 2\cos\varphi\, d_1 d_2$

Z Twierdzenia 18. (Ptolemeusza):

(3) $d_1 d_2 = ac + bd$

Podstawiając (2) i (3) do (1) otrzymujemy:

$$S^2 = \frac{1}{4}\left((ac + bd)^2 - \left(\frac{-a^2 + b^2 - c^2 + d^2}{2}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left((ac + bd)^2 - \frac{(-a^2 + b^2 - c^2 + d^2)^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{4(ac + bd)^2 - (-a^2 + b^2 - c^2 + d^2)^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}(2ac + 2bd - a^2 + b^2 - c^2 + d^2)(2ac + 2bd + a^2 - b^2 + c^2 - d^2) =$$

$$= \frac{1}{16}((b + d)^2 - (a + c)^2)((a + c)^2 - (b - d)^2) =$$

$$= \frac{1}{16}(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d) =$$

$$= \frac{1}{16}(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)(2p - 2d) =$$

$$= \tfrac{1}{16} 2(p - a)2(p - b)2(p - c)2(p - d) =$$

$$= (p - a)(p - b)(p - c)(p - d)$$

Stąd

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$$

q.e.d.

Twierdzenie 21. (Roberta/Robsona)

Jeżeli na czworokącie można opisać okrąg to:

$$ {d_1}^2 + {d_2}^2 = \frac{(ac+bd)\big((a^2+c^2)(d^2+b^2)+4abcd\big)}{(cd+ab)(ad+bc)} $$

<u>Dowód:</u>

Z dowodu Twierdzenia 18. (Ptomeleusza):

$d_1 = \sqrt{\frac{(ac+b\quad)(ad+b\ )}{(ab\qquad)}}$ i $d_2 = \sqrt{\frac{(bd+ac)(cd\qquad)}{(bc\qquad)}}$

Zatem

$$ {d_1}^2 + {d_2}^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)^2 + (bd+ac)(cd+ab)^2}{(ab+cd)(bc+ad)} = $$

$$ = \frac{(ac+bd)((ad+bc)^2 + (cd+ab)^2)}{(ab+cd)(bc+ad)} = $$

$$ = \frac{(ac+bd)(a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 + c^2d^2 + 2abcd + a^2b^2)}{(ab+cd)(bc+ad)} = $$

$$ = \frac{(ac+bd)(a^2(d^2+b^2) + c^2(b^2+d^2) + 4abcd)}{(ab+cd)(bc+ad)} = $$

$$ = \frac{(ac+bd)\big((c^2+a^2)(b^2+d^2)+4abcd\big)}{(ab+cd)(bc+ad)} $$

q.e.d.