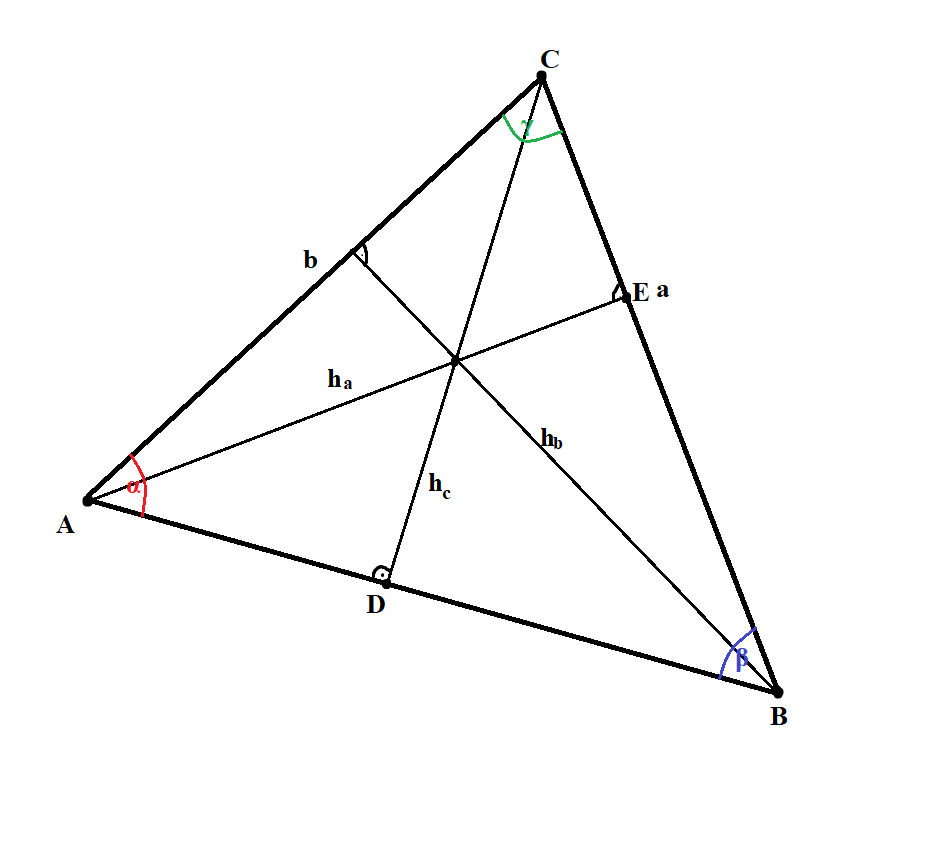
**Twierdzenie 1. (Twierdzenie Sinusów)**

W dowolnym trójkącie zachodzi równość:

.



Dowód:

Z i :

i

Stąd

oraz

Wobec tego

Zatem

Z i :

i

Stąd

oraz

Zatem

q.e.d.

**Twierdzenie 2. (Twierdzenie uogólnione Sinusów)**

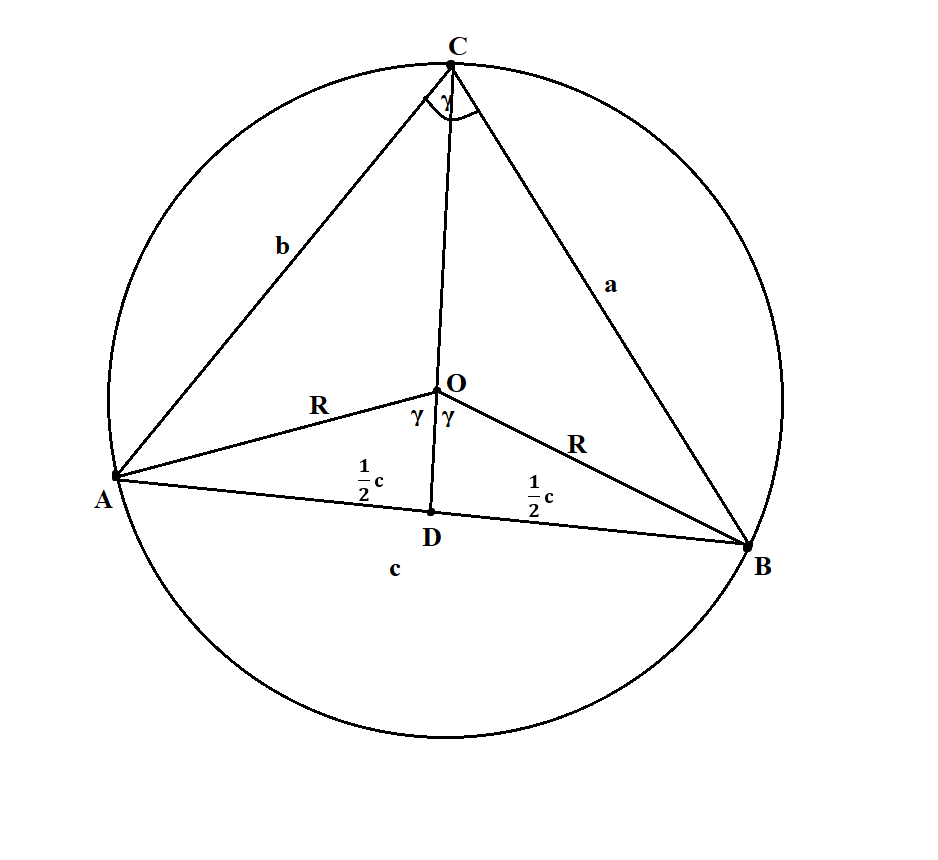
W dowolnym Trójkącie prawdziwe są równości:

=2R

gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Dowód:

1° Niech będzie ostrokątny



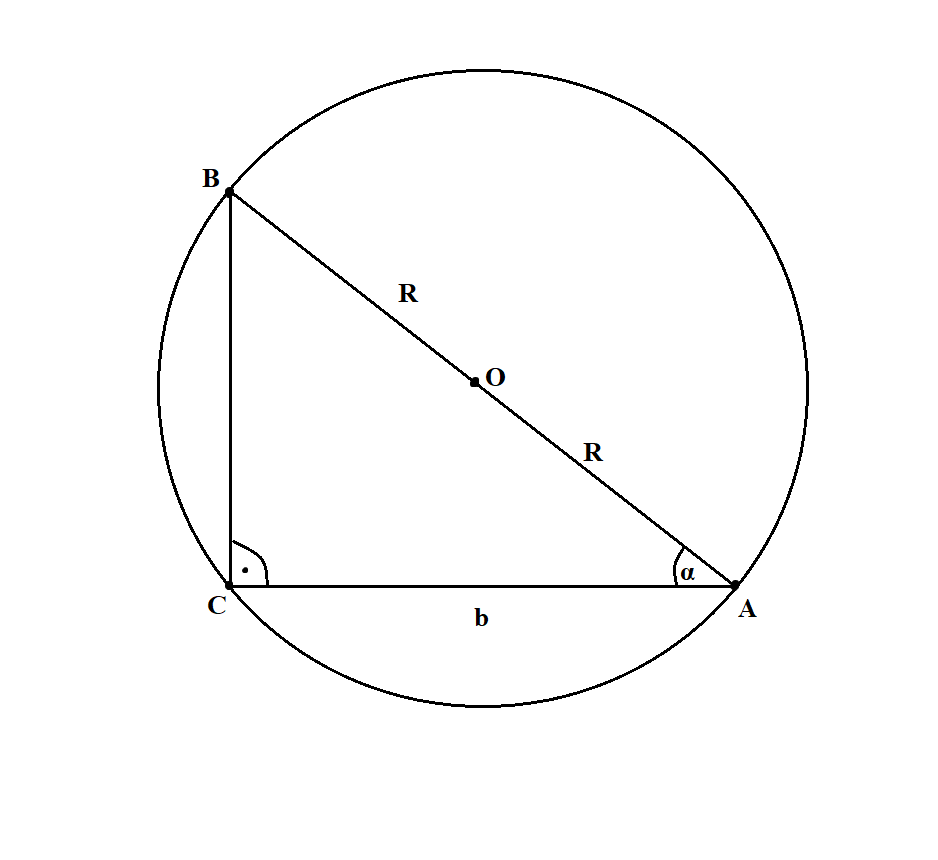
Kąt jest środkowy, oparty na tym samym łuku co kąt wpisany . Trójkąt jest równoramienny, więc jest jednocześnie środkową boku i dwusieczną.

Stąd

Z Twierdzenia 1.(Sinusów):

.

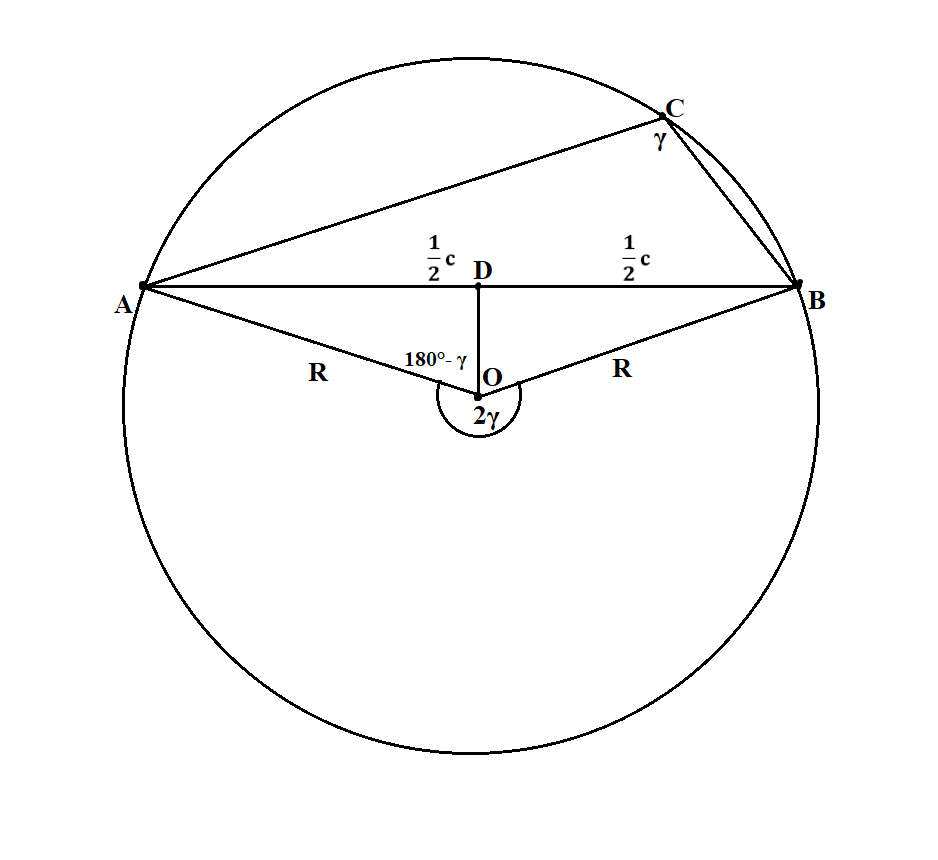
2° Niech będzie prostokątny



Z i Twierdzenia 1. (Sinusów):

.

3° Niech będzie rozwartokątny



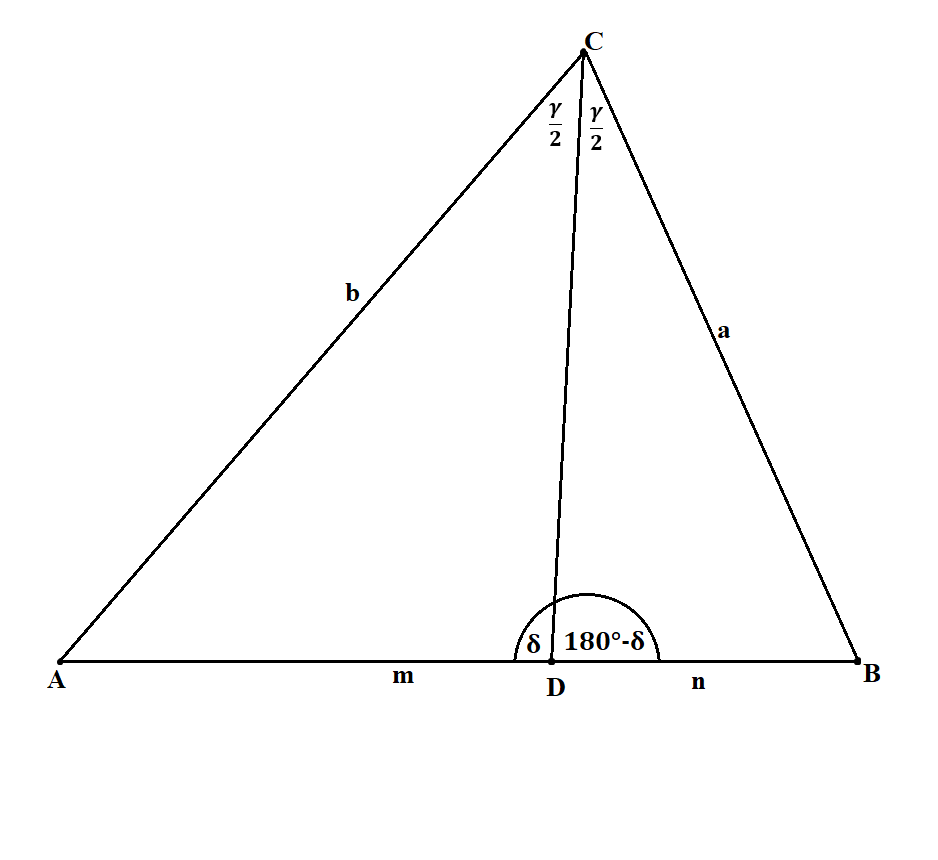
Z

.

q.e.d.

**Twierdzenie 3. (O rzutach boku trójkąta w kierunku dwusiecznej kąta wewnętrznego)**

Stosunek dwóch boków trójkąta jest równy jego stosunkowi ich rzutów w kierunku dwusiecznej kąta zawartego między nimi na trzeci bok.

****

Dowód:

Z , i Twierdzenia 1. (Sinusów):

oraz

Stąd

.

q.e.d.

**Twierdzenie 4. (O długości odcinków dla jakich dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok)**

Długości odcinków na jakie dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok wyraża się wzorami:

Dowód:

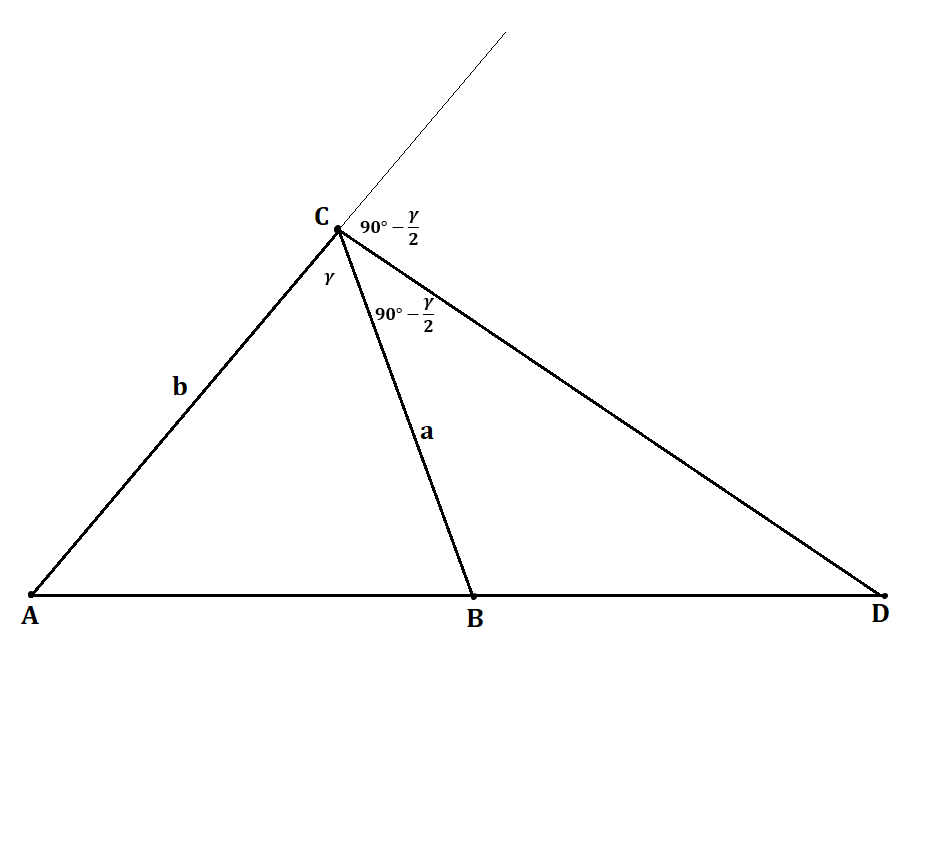
Z Twierdzenia 3.

Z do :

.

q.e.d.

**Twierdzenie 5. (O rzutach trójkąta w kierunku dwusiecznej kąta zewnętrznego)**



Dowód:

Z i Twierdzenia 1. (Sinusów) i :

Stąd

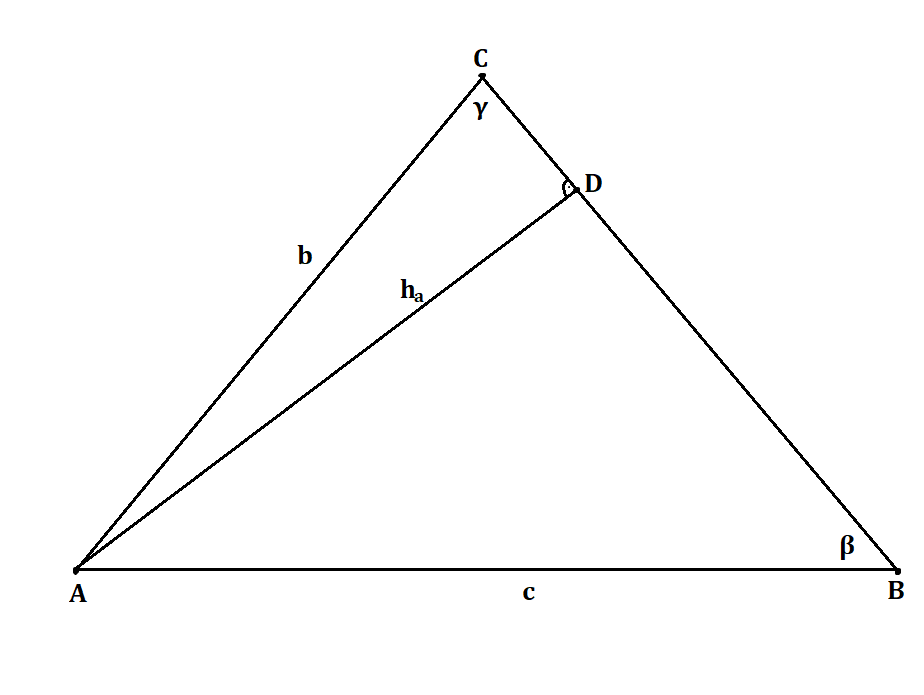
, więc .

q.e.d.

**Twierdzenie 6.**

Pole dowolnego trójkąt jest równe połowie iloczynu dwóch boków i sinusa kąta zawartego między nimi.

Dowód:



Z

Zatem

q.e.d.

**Twierdzenie 7.**

Dowód:

Z Twierdzenia 6.:

Ale z Twierdzenia 1. (Sinusów) wynika, że:

Stąd

Zatem

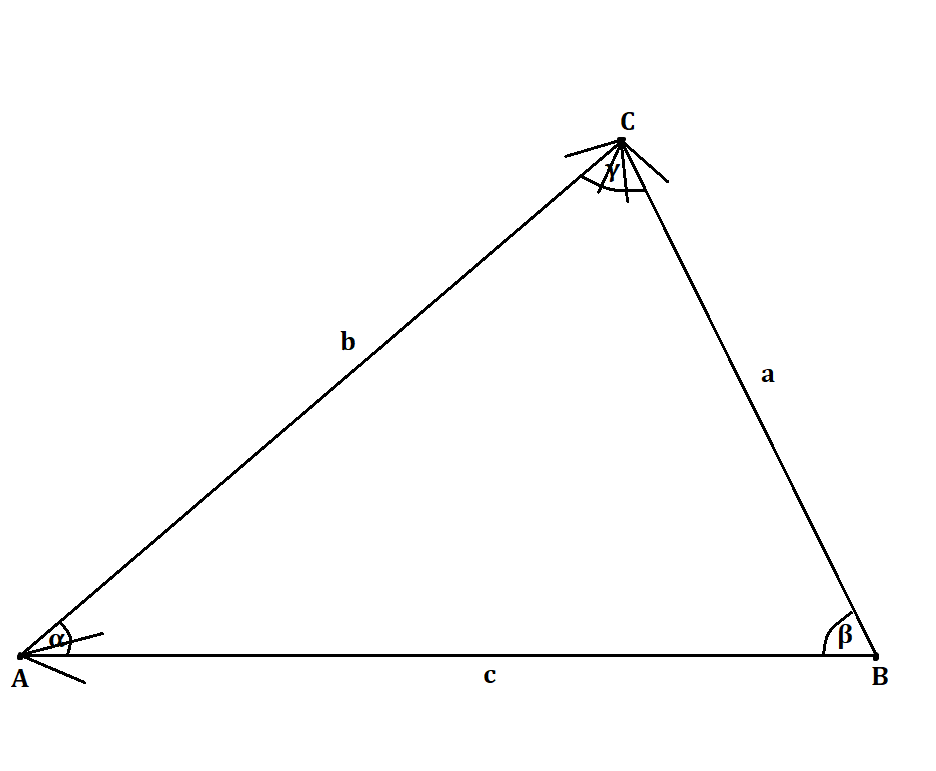
q.e.d

**Twierdzenie 8. (Cosinusów - Carnota)**

W dowolnym trójkącie prawdziwe są równości:

.

Dowód:



=

.

q.e.d.

**Twierdzenie 9. (O długości środkowych)**

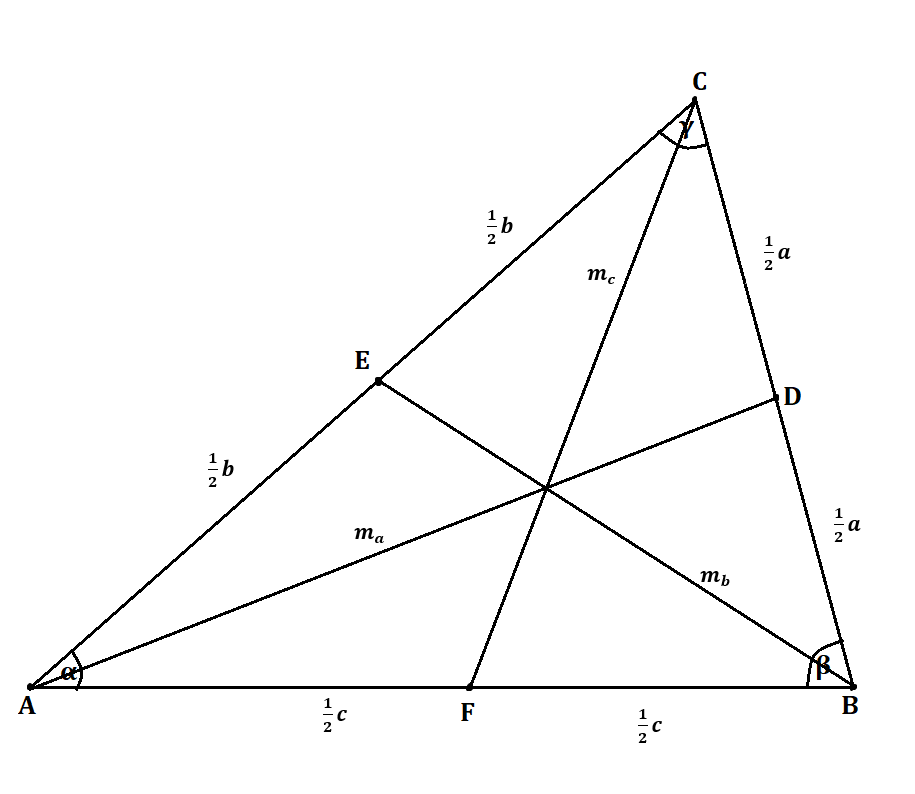
Długości środkowych trójkąta o bokach , i , wyrażają się wzorami:

,

,

.

Dowód:



Z Twierdzenia 8. (Cosinusów) i :

Z Twierdzenia 8. (Cosinusów) i :

Czyli

.

analogicznie udowadniamy wzory dlai.

q.e.d.

**Twierdzenie 10. (O długości dwusiecznych)**

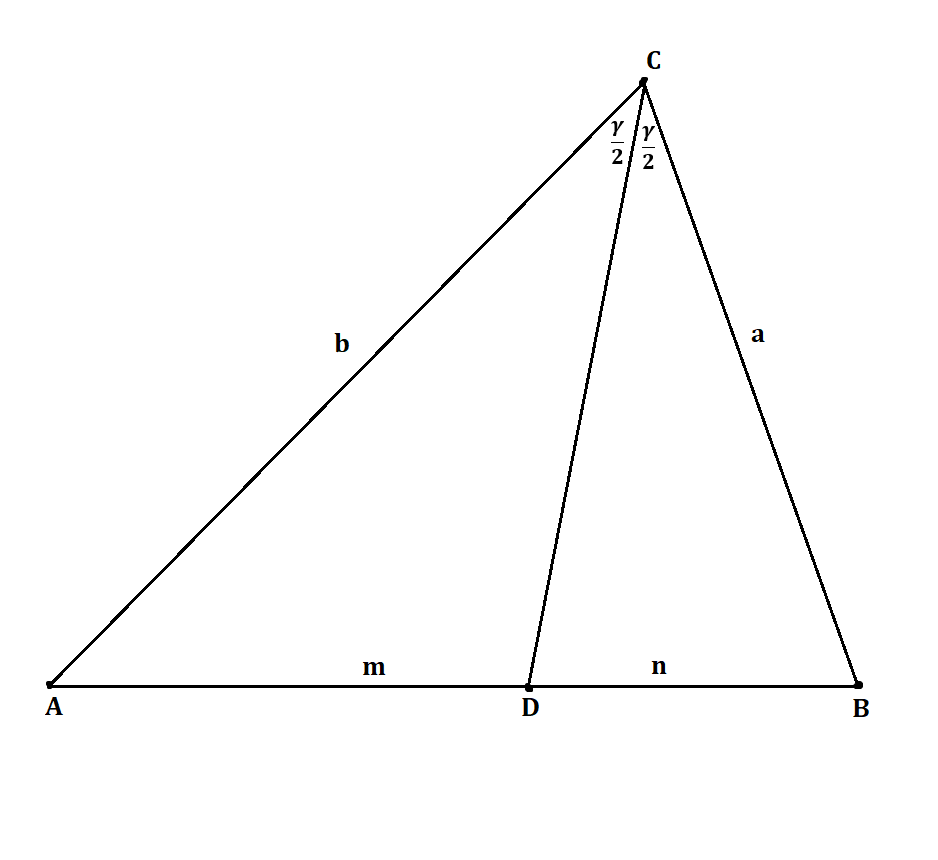
Długości dwusiecznych wyrażaj się wzorami:

,

,

.

Dowód:



Z Twierdzenia 4.(O długości odcinków dla jakich dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok):

Z Twierdzenia 8. (Cosinusów):

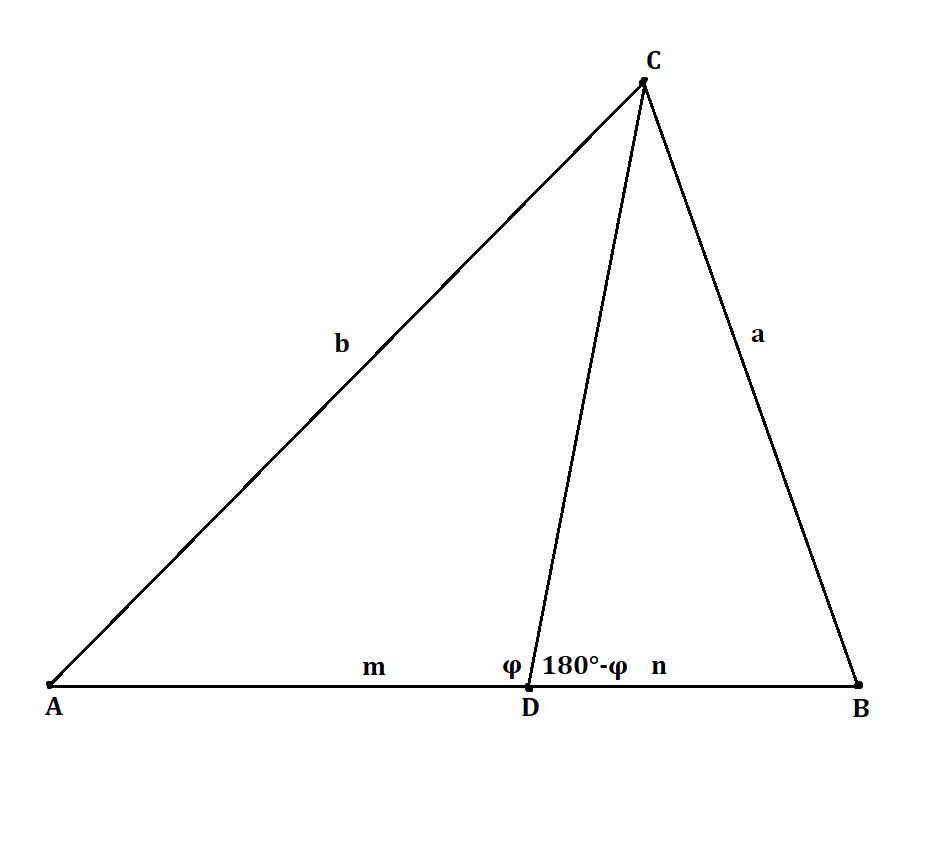
Z Twierdzenia 8. (Cosinusów) i :

Stąd

.

analogicznie udowadniamy wzory dla i .

**Twierdzenie 11. (Stewarta)**



Dowód:

Z , i Twierdzenia 8. (Cosinusów):

Dodając stronami:

.

q.e.d.

**Twierdzenie 12.**

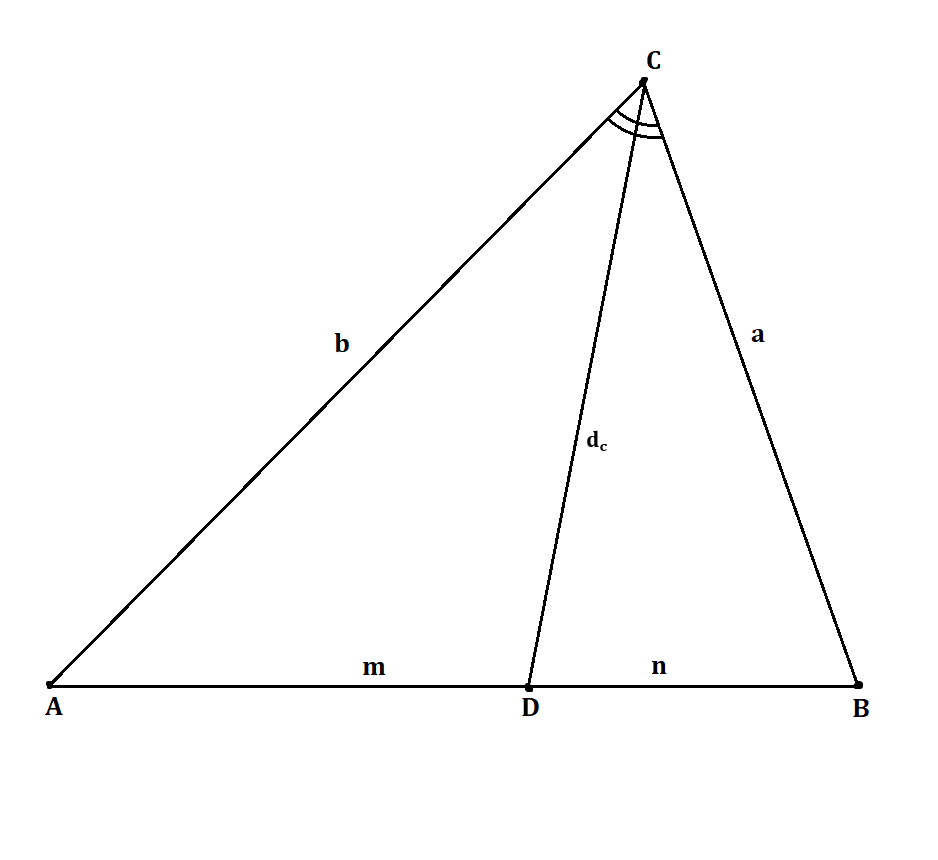
Długości dwusiecznych w trójkącie wyrażają się wzorami:

,

,

.

Dowód:



Z Twierdzenia 4.(O długości odcinków dla jakich dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok):

i

Z Twierdzenia 11. (Stewarta):

.

analogicznie udowadniamy wzory dla i .

q.e.d.

**Twierdzenie 13. (Herona)**

Pole dowolnego trójkąta wyraża się wzorami:

1. ,
2. .

Dowód:

Z Twierdzenia 6.:

q.e.d.(1)

.

q.e.d. (2)

**Twierdzenie 14.**

Pole trójkąta przy pomocy wysokości wyraża się wzorem:

Dowód:

Z Twierdzenia 13. (Herona):

Ale także z wzoru na pole trójkąta:

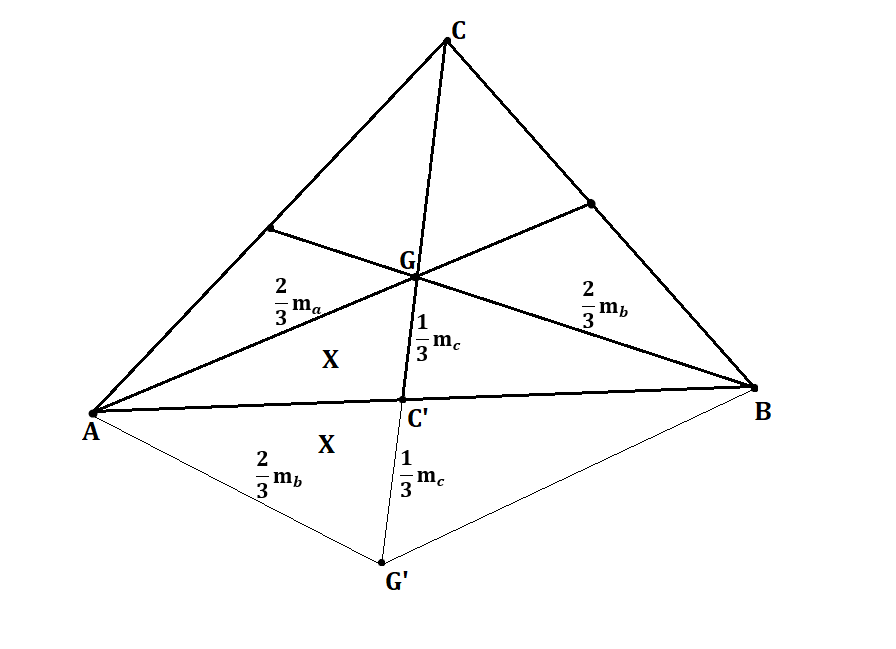
, ,

Zatem

q.e.d.

**Twierdzenie 15.**

Pole trójkąta przy pomocy środkowych wyraża się wzorem:

Dowód:

Punkt jest obrazem puntu w symetrii środkowej względem . Wobec tego czworokąt jest równoległobokiem.

=

.

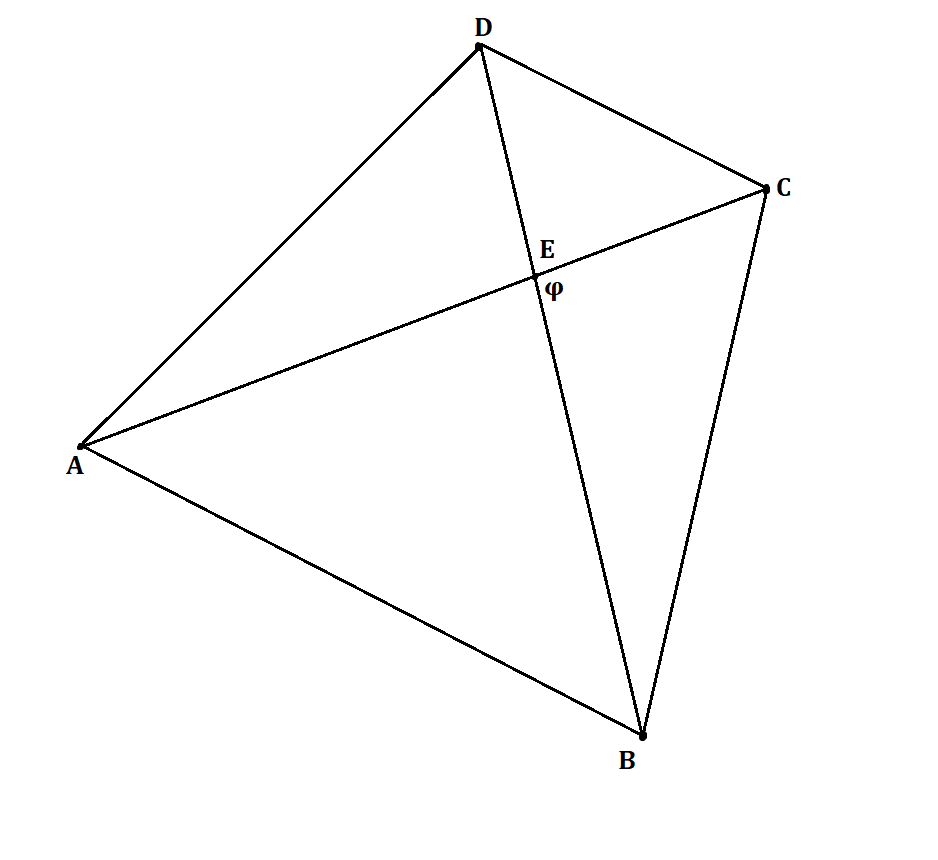
q.e.d.

**Twierdzenie 16. (Pole dowolnego czworokąta)**

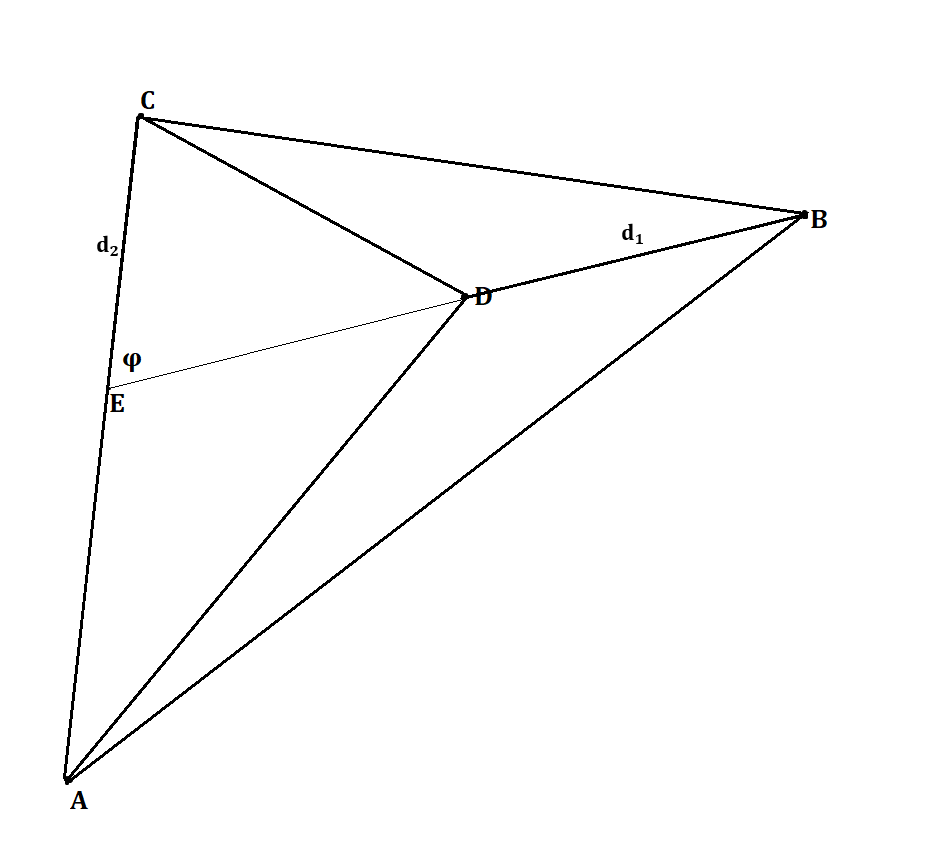
Pole dowolnego czworokąta jest równe połowie iloczynu przekątnych i sinusa kota zawartego między nimi.

Dowód:

1 Niech czworokąt będzie wypukły.



2 Niech czworokąt będzie wklęsły.

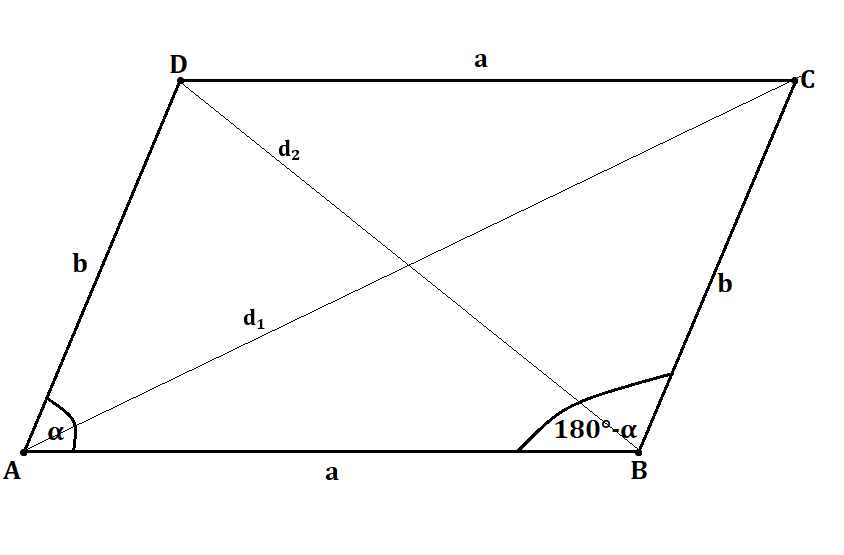
****

.

q.e.d.

**Twierdzenie 17.**

W dowolnym równoległoboku suma kwadratów przekątnych jest równa sumie kwadratów jego boków.



Dowód:

Z i i Twierdzenia 8. (Cosinusów):

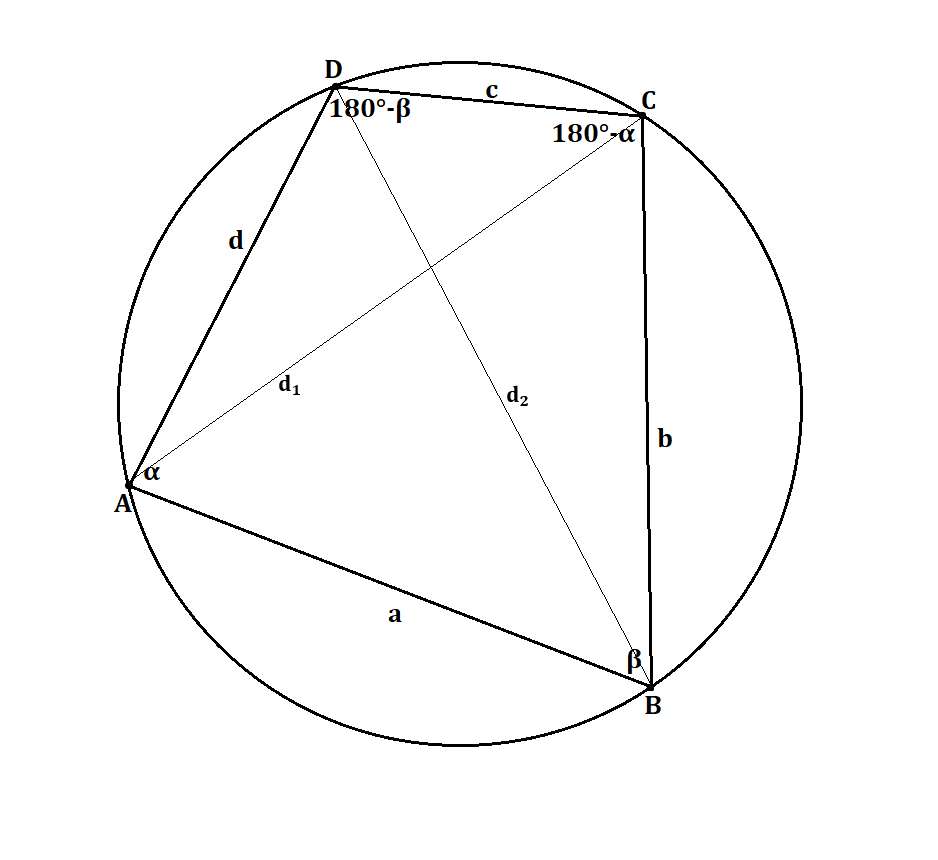
Dodając stronami otrzymujemy:

.

q.e.d.

**Twierdzenie 18. (Ptolemeusza)**

W dowolnym trójkącie, na którym można opisać okrąg, iloczyn przekątnych jest równy sumie iloczynów boków przeciwległych.

****

Dowód:

Z , i Twierdzenia 8. (Cosinusów):

Dodając stronami:

1. .

Z i i Twierdzenia 8. (Cosinusów):

Dodając stronami:

1. .

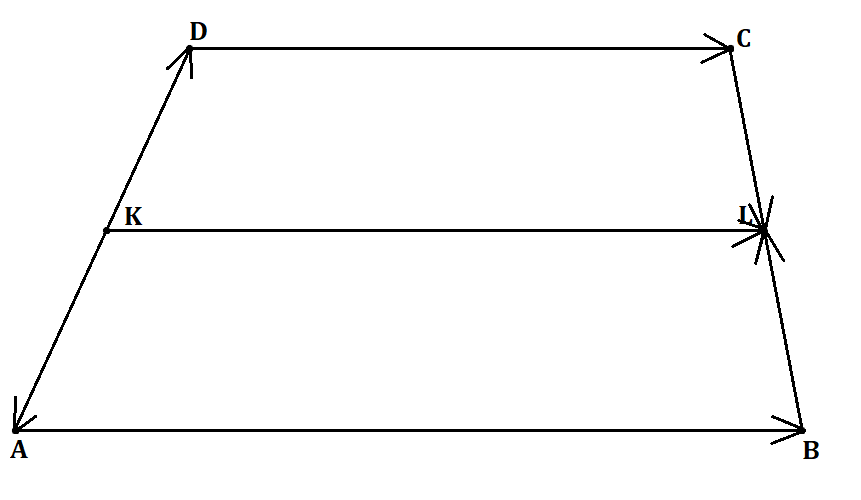
Z i :

q.e.d.

**Twierdzenie 19. (O linii środkowej trapezu)**

Odcinek łączący środki nierównoległych boków trapezu jest równoległy do podstaw, a jego długość jest równa średniej arytmetycznej długości podstaw.

Niech i



Dowód:

Zauważmy, że

Oraz

Dodając stronami otrzymujemy:

Wektory i są równoległe i mają ten sam zwrot. Wobec tego ich suma jest równoległa do tych wektorów. Ponadto iloczyn wektora przez liczbę nie zmienia jego kierunku, zatem:

i

.

q.e.d.

**Twierdzenie 20. (Brahmagupty)**

Pole dowolnego czworokąta, na którym można opisać okrąg, wyraża się wzorem:

, gdzie

Obraz zawierający antena

Opis wygenerowany automatycznie

Dowód:

Z Twierdzenia 16. (Pole dowolnego czworokąta):

Stąd

=

(1)

Z , ,, i Twierdzenia 8. (Cosinusów) mamy:

Dodając i i odejmując i otrzymujemy:

(2)

Z Twierdzenia 18. (Ptolemeusza):

(3)

Podstawiając i do otrzymujemy:

=

Stąd

q.e.d.

**Twierdzenie 21. (Roberta/Robsona)**

Jeżeli na czworokącie można opisać okrąg to:

Dowód:

Z dowodu Twierdzenia 18. (Ptomeleusza):

i

Zatem

q.e.d.