Аналитическая геометрия. Подготовка к РК №2

1 Теоретические вопросы

1.1 Теоретические вопросы. Базовый уровень

Вопрос 1. Дать определение единичной, нулевой, верхней треугольной и нижней треугольной матрицы.

Ответ. *Нулевой матрицей* называется матрица, все элементы которой равные нулю.

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Верхне-треугольной матрицей называется квадратная матрица, у которой элементы под главной диагональю равны нулю.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Нижне-треугольной матрицей называется квадратная матрица, у которой над главной диагональю равны нулю.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Вопрос 2. Дать определение равенства матриц.

Ответ. Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковую размерность, и их соответствующие элементы равны.

Вопрос 3. Дать определение суммы матриц и произведения матрицы на число.

Ответ. *Суммой матриц* $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой являются суммой соответствующих элементов матриц A и B.

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на число $k = const$ называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой равны произведению соответствующего элемента матрицы на данное число $c_{ij} = ka_{ij}$.

Вопрос 4. Дать определение операции транспонирования матриц.

Ответ. *Транспонированной матрицей* A_{mn} называется матрица размерностью $n \times m$, элементы которой:

$$a^{\tau}_{ij} = a_{ji}$$

$$A^{\tau}_{n\times m} \text{ – транспонированная матрица } A_{m\times n}$$

Вопрос 5. Дать определение операции умножения матриц.

Ответ. *Произведением матриц* A и B назвается матрица C, элементы которой определяются как:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj}$$

Вопрос 6. Дать определение обратной матрицы.

Ответ. *Обратная матрица* квадратной матрицы $A_{n\times n}$ называется матрица $A^{-1}_{n\times n}$ такая, что $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E$.

Вопрос 7. Дать определение минора. Какие миноры называются окаймляющими для данного минора матрицы?

Ответ. *Минором k-ого порядка* матрицы A называется определитель, составленный из пересечения k строк и k столбцов с сохранением их порядка.

Вопрос 8. Дать определение базисного минора и ранга матрицы.

Ответ. *Базисным минором* называется матрицы A называется минор, не равный нулю, порядок которого равен рангу матрицы A.

Рангом матрицы называется число A, равное наибольшему порядку, отличному от нуля, минора матрицы A.

Вопрос 9. Дать определение однородной и неоднородной СЛАУ.

Ответ. СЛАУ, у которой все свободные члены равны нулю, называется *однородной.*

СЛАУ, у которой хотя бы один свободный член не равен нулю, называется *неоднородной.*

Вопрос 10. Дать определение фундаментальной системы решений однородной СЛАУ.

Ответ. Максимальный набор линейно-независимых решений однородной СЛАУ называется *фундаментальной системой решений (ФСР).*

Вопрос 11. Записать формулы для нахождения обратной матрицы к произведению двух обратимых матриц и для транспонированной матрицы.

Ответ. Нахождение обратной к произведению двух обратных:

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

Нахождение обратной матрицы к траннонированной:

$$(A^{\tau})^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\tau}$$

Вопрос 12. Дать определение присоединённой матрицы и записать формулу для вычисления обратной матрицы.

Ответ. Матрица A^*, являющаяся транспонированной матрицей алгебраических дополнений матрицы А называется *присоединённой матрицей.*

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Вопрос 13. Перечислить элементарные преобразования матриц.

Ответ. .

- Перемена мест двух строк или двух столбцов в данной матрице;
- Умножение строки (или столбца) на произвольное число, отличное от нуля;
- Прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на некоторое число.

Вопрос 14. Записать формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с обратимой матрицей.

Ответ. Для СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} & = b_2 \\ \ldots a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn} & = b_n \end{cases}$$

Значение x_i $(i = 1..n)$ вычисляется по формуле:

$$x_i = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,i-1} & b_{n-1} & a_{n-1,i+1} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Вопрос 15. Перечислить различные формы записи системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Какая СЛАУ называется совместной?

Ответ. Формы записи СЛАУ:

1. Координатная
2. Матричная
3. Векторная

СЛАУ, имеющая решение, назыается *совместной*.

Вопрос 16. Привести пример, показывающий, что умножение матриц некоммутативно.

Ответ. *От автора: просто возьмите две случайные матрицы и перемножьте их в одну и в другую сторону. Достаточно 2x2.*

Вопрос 17. Сформулировать свойства ассоциативности умножения матриц и дистрибутивности умножения относительно сложения.

Ответ. .

- Ассоциативность

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

- Дистрибутивность произведения матриц относительно сложения:

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

Вопрос 18. Сформулировать критерий Кронекера — Капелли совместности СЛАУ.

Ответ. Для того, чтобы СЛАУ была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был равен рангу матрицы A|B.

Вопрос 19. Сформулировать теорему о базисном миноре.

Ответ. Строки (столбцы) матрицы A, входящие в базисный минор – базисные.
Базисные строки (столбцы), входящие в базисный минор – линейно-независимы.
Любую строку (столбец), не входящую в базисный минор, можно представить в виде линейной комбинации базисных строк (столбцов).

Вопрос 20. Сформулировать теорему о свойствах решений однородной СЛАУ.

Ответ. Пусть $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots X^{(n)}$ – решения однородной СЛАУ $A \times X = \theta$. Тогда их линейной комбинацией так же является решением однородной СЛАУ.

Вопрос 21. Сформулировать теорему о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.

Ответ. *О структуре общего решения неоднородной СЛАУ.*
Пусть $X^{(0)}$ – некоторое частное решение неоднородной СЛАУ $A \times X = B$. Пусть $X^{(1)} \ldots$ – некоторая ФСР, соответствующая однородной СЛАУ $A \times X = \theta$. Тогда общее решение неоднородной СЛАУ $A \times X = B$ будет иметь вид :

$$X_o = X^{(0)} + c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + \ldots + c_n X^{(n)}, \quad c_i = const$$

Вопрос 22. Сформулировать теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.

Ответ. Пусть $X^{(0)}$ – некоторое частное решение неоднородной СЛАУ $A \times X = B$. Пусть $X^{(1)} \ldots$ – некоторая ФСР, соответствующая однородной СЛАУ $A \times X = \theta$. Тогда общее решение неоднородной СЛАУ $A \times X = B$ будет иметь вид :

$$X_o = X^{(0)} + c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + \ldots + c_n X^{(n)}, \quad c_i = const$$

Вопрос 23. Сформулировать теорему об инвариантности ранга при элементарных преобразованиях матрицы.

Ответ. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразований строк (столбцов) матрицы. Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк (столбцов) ступенчатой матрицы, полученной путём элементарных преобразований.

Вопрос 24. Сформулировать критерий существования обратной матрицы.

Ответ. Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную необходимо и достаточно, чтобы её определитель не равнялся нулю.

1.2 Теоретические вопросы. Повышенная сложность

Вопрос 25. Доказать теорему о связи решений неоднородной и соответствующей однородной СЛАУ и теорему о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.

Ответ. *О связи решений неоднородной и соответствующей однородной СЛАУ.*
Пусть $X^{(0)}$ – некоторое решение неоднордной СЛАУ $A \times X = B$. Произвольный стобец X является решением СЛАУ $A \times X = B$ тогда и только тогда, когда его можно представить в виде:

$$X = X^{(0)} + Y, \quad \text{где } A \times Y = \theta$$

Доказательство:
1) Необходимость.
Пусть X – решение СЛАУ $A \times X = B$. Обозначим $Y = X - X^{(0)}$

$$A \times Y = A \times (X - X^{(0)}) = A \times X - A \times X^{(0)} = B - B = \theta$$

Значит Y является решением соответствующей однородной СЛАУ $A \times Y = \theta$.
2) Достаточность.
Пусть X можно представить в виде:

$$X = X^{(0)} + Y, \quad \text{где } A \times Y = 0$$

Тогда:

$$A \times X = A \times (X^{(0)} + Y) = A \times X^{(0)+A\times Y} = B + \theta = B$$

Отсюда делаем вывод, что X является решением неоднородной СЛАУ.

Ответ. *О структуре общего решения однородной СЛАУ.*
Пусть $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots X^{(k)}$ – ФСР некоторой СЛАУ $A \times X = \theta$. Тогда общее решение однородной СЛАУ будет иметь вид:

$$X = c_1X^{(1)} + c_2X^{(2)} + \ldots + c_kX^{(k)}, \quad c_i = const$$

Доказательство: Пусть дана однородная СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – решение СЛАУ, и матрица A имеет ранг $rgA = r$.

Тогда если X является решением, то он ялвяется решением первых r уравнений, соответствующих базисным строкам матрицы A. Пусть базисный минор стоит из первых r строк и первых r столбцов данной матрицы, тогда если X – решение уравнений с нулевого по r, то он является решением уравнений с $r+1$ по m, которые являются линейной комбинацией первых k уравнений, поэтому уравнения с $r+1$ по m можно исключить. Т.к. базисный минор включает первые r столбцов матрицы A:

$$M_r = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \dots & a_{1r}x_r \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \dots & a_{2r}x_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1}x_1 & a_{r2}x_2 & \dots & a_{rr}x_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mr}x_r \end{pmatrix}$$

то соответствующие этим столбцам переменные являются базисными (с x_1 по x_r), а остальные переменные (с x_{r+1} по x_n) – свободными.

После исключения первых r строк, получаем:

$$\begin{cases} a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \\ a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + \dots + a_{r+1,n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mr}x_r + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Преобразуем уравнения так, что в левой части остались базисные переменные, а в правой – свободные:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} + x_2 + \dots + a_{1r}x_r = a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22} + x_2 + \dots + a_{2r}x_r = a_{2r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} + x_2 + \dots + a_{mr}x_r = a_{mr+1}x_{r+1} + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Задавая различные значения свободных переменных, мы получаем, что система (3) будет иметь единственное решение, т.к. главный определитель данной системы будет равен угловому минору, не равному нулю. Решая эту систему получаем решение:

$$\begin{cases} x_1 = x_{r+1}\lambda_{1,r+1} + x_{r+2}\lambda_{1,r+2} + \dots + x_n\lambda_{1,n} \\ x_2 = x_{r+1}\lambda_{2,r+1} + x_{r+2}\lambda_{2,r+2} + \dots + x_n\lambda_{2,n} \\ \dots \\ x_r = x_{r+1}\lambda_{r,r+1} + x_{r+2}\lambda_{r,r+2} + \dots + x_n\lambda_{r,n} \end{cases} \tag{4}$$

Т.к. $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots X^{(k)}$ образуют ФСР, то они удовлетворяют системе (4):

$$\begin{cases} X_1^{(i)} = X_{r+1}^{(i)}\lambda_{1,r+1} + X_{r+2}^{(i)}\lambda_{1,r+2} + \dots + X_n^{(i)}\lambda_{1,n} \\ X_2^{(i)} = X_{r+1}^{(i)}\lambda_{2,r+1} + X_{r+2}^{(i)}\lambda_{2,r+2} + \dots + X_n^{(i)}\lambda_{2,n} \\ \dots \\ X_r^{(i)} = X_{r+1}^{(i)}\lambda_{n,r+1} + X_{r+2}^{(i)}\lambda_{n,r+2} + \dots + X_n^{(i)}\lambda_{n,n} \end{cases} \qquad X^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \dots \\ x_m^{(i)} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Составим матрицу B из столбцов $X^{(i)}$:

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} \\ x_2 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_r & x_r^{(1)} & x_r^{(2)} & \dots & x_r^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} X & X^{(1)} & X^{(2)} & \dots & X^{(n)} \end{matrix} \end{array}$$

Вычтем из элементов первой строки соответствующие элементы строк с $r+1$ по m с соответствующим коэффициентом $\lambda_{1,r+1}, \lambda_{1,r+2}, \dots \lambda_{1n}$:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} - \lambda_{1,r+1}x_{r+1}^{(1)} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2}^{(2)} - \dots - \lambda_{1,n}x_n^{(1)} = 0 \\ x_1^{(2)} - \lambda_{1,r+1}x_{r+1}^{(2)} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2}^{(2)} - \dots - \lambda_{1,n}x_n^{(2)} = 0 \\ \dots \\ x_1^{(k)} - \lambda_{1,r+1}x_{r+1}^{(k)} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2}^{(k)} - \dots - \lambda_{1,n}x_n^{(k)} = 0 \\ x_1 - \lambda_{1,r+1}x_{r+1} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2} - \dots - \lambda_{1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Аналогично вычитая из строк до r строки $r+1$ до n с коэффициентами λ. В результате получаем, что в преобразованной матрице B первые r строк будут нулевые:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{r+1} & x_{r+1}^{(1)} & x_{r+1}^{(2)} & \dots & x_{r+1}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Поскольку элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, получаем, что ранг матрицы B будет равен $k = n - r$. Так как по условию столбцы $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots X^{(k)}$ образуют ФСР, они являются линейно-независимыми. Поэтому первый столбец можно представить в виде линейной комбинации столбцов.

Вопрос 26. Доказать теорему о базисном миноре.

Ответ. *Строки (столбцы) матрицы A, входящие в базисный минор – базисы.*
Базисные строки (столбцы), входящие в базисный минор – линейно-независимы.
Любую строку (столбец), не входящую в базисный минор, можно представить в виде линейной комбинации базисных строк (столбцов).

Доказательство:

Пусть ранг матрицы A равен R.

Предположим, что строки матрицы A - линейно-зависимы. Тогда одну из ни можно выразить как линейную комбинацию других строк. Тогда в базисном миноре 1-ая строка – линейная комбинация других строк. По свойству определителей этот минор равен нулю, что противоречит определению базисного минора.

Пусть базисный минор состоит из первых r строк и r столбцов матрицы A. Добавим к этому минору произвольную i-ную строку и j-ный столбец – получим окаймляющий минор. Если $j \leq r$, то в миноре M' 2 одинаковых столбца и минор равен нулю. Если $j > r$, то в минор M' тоже равен нулю, т.к. ранг матрицы A равен r, наибольний порядок, отличный от нуля, минора равен j.

Определитель можно вычислить путём разложения по каой-нибудь строке или столбцу, поэтому найдем определитель M' путём разложения по j-ному столбцу:

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{ij}A_{ij} = 0$$
$$j = r + 1 \Rightarrow$$
$$a_{1r+1}A_{1r+1} + a_{2r+1}A_{2r+1} + \ldots + a_{ir+1}A_{ir+1} = 0$$

$A_{r+1,r+1}$ – базисный минор, т.к. $M \neq 0$, то $A_{r+1,r+1} \neq 0$.

$$a_{r+1,r+1} = -\frac{A_{1,r+1}}{A_{r+1,r+1}} \cdot a_{1,r+1} - \frac{A_{2,r+1}}{A_{r+1,r+1}} \cdot a_{2,r+1} \ldots - \frac{A_{r,r+1}}{A_{r+1,r+1}} \cdot a_{r,r+1}$$

Обозначим $\lambda_i = -\frac{A_{i,r+1}}{A_{r+1}r+1}$

$$a_{r+1,r+1} = \lambda_i a_{1,r+1} + \lambda_2 a_{2,r+1} + \ldots + \lambda_r \cdot a_{r,r+1}$$

Элементы i-ой строки можно представить в виде линейной комбинации строк.

Вопрос 27. Доказать свойства ассоциативности и дистрибутивности умножения матриц.

Ответ.
- Ассоциативность:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
(A \times B)\,C = \\
&= \sum_{r=1}^{k} [(A \times B)]_{ir} \times [C]_{rj} = \\
&= \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{k} [A]_{is} \cdot [B]_{sn} \right) \cdot [C]_{rj} = \\
&= \sum_{n=1}^{n} \sum_{k=1}^{k} [A]_{is} \times [B]_{sn} \times [C]_{rj} = \\
&= \sum_{s=1}^{k} [A]_{is} \times [(B \times C)] = \\
&= A \times (B \times C)
\end{aligned}$$

- Дистрибутивность произведения матриц относительно сложения:

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
(A_{m \times k} + B_{m \times k}) \times C_{k \times n} = \\
&= \sum_{r+1}^{k} [(A + B)]_{ir} \times [C]_{ir} \\
&= \sum_{r=1}^{k} ([A]_{ir} + [B]_{ir}) \times [C]_{rj} \\
&= \sum_{r=1}^{k} ([A]_{ir}[C]_{rj} + [B]_{ir} \times [C]_{rj}) \\
&= \sum_{r=1}^{k} [A]_{ir}[C]_{ir} + \sum_{r=1}^{k} [B]_{ir}[C]_{ir} \\
&= A \times C + B \times C
\end{aligned}$$

Вопрос 28. Доказать критерий существования обратной матрицы.

Ответ. *Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную необходимо и достаточно, чтобы её определитель не равнялся нулю.*

Доказательство:

1) Пусть матрица А имеет обратную, тогда по определению:

$$A \times A^{-1} = E$$

В таком случае:

$$det(A \times A^{-1}) = det(E) = 1$$
$$det(A \times A^{-1}) = det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow detA \neq 0$$

2) Пусть $detA \neq 0$. Если матрицн разложить по строке или столбцу:

$$\sum_{j+1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = detA$$
$$\sum_{j+1}^{n} a_{ij}A_{nj} = a_{i1}A_{n1} + a_{i2}A_{n2} + \ldots + a_{in}A_{nn} = 0 \quad i \neq k$$

Пусть существует матрица B:

$$b_{ij} = \frac{A_{ij}}{detA}$$

Пусть $C = A \cdot B$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{in} = \sum_{n=1}^{n} a_{ik}\frac{A_{jn}}{detA}$$
$$= \frac{1}{detA} \cdot \sum_{n=1}^{n} a_{ik}A_{jn} = \begin{cases} \frac{1}{detA} \cdot detA = 1, & \text{если } i = j \\ \frac{1}{detA} \cdot 0 = 0, & \text{если } i \neq j \end{cases} \Rightarrow C = E$$
$$c_{ij} = 1, \text{ если } i = j$$
$$c_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j$$

Получим:

$$\left.\begin{matrix} A \times B = E \\ B \times A = E \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{ по определению } B = A^{-1}$$

Вопрос 29. Доказать критерий Кронекера — Капелли совместности СЛАУ.

Ответ. *Для того, чтобы СЛАУ была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был равен рангу матрицы A/B.* 1) Необходимость.
Пусть: СЛАУ совместна, $Rg(a) = r$

Базисный минор $r \times r$:

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

Если использовать векторную форму записи, то если СЛАУ имеет решение $x_1, x_2, \dots x_n$, то можно записать её в виде:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_rx_r + a_{r+1}x_{r+1} + \dots + a_nx_n = b \tag{1}$$

Согласно теореме о базисном миноре, любой столбец матрицы, который не входит в базисный минор, можно представить в виде линейной комбинации базисных столбцов:

$$\begin{cases} a_{r+1} = \lambda_{1,r+1}a_1 + \lambda_{2,r+1}a_2 + \dots + \lambda_{r,r+1}a_r \\ a_{r+2} = \lambda_{2,r+2}a_1 + \lambda_{2,r+2}a_2 + \dots + \lambda_{r,r+2}a_r \\ \dots \\ a_n = \lambda_{2,n}a_1 + \lambda_{2,n}a_2 + \dots + \lambda_{r,n}a_r \end{cases} \tag{2}$$

Подставим (2) в (1):

$$\begin{aligned} a_1x_1 + & a_2x_2 + \dots + a_rx_r + \\ & + (\lambda_{1,r+1}a_1 + \lambda_{2,r+1}a_2 \dots + \lambda_{r,r+1}a_r)x_{r+1} + \\ & + \dots + \\ & + (\lambda_{1,n}a_1 + \lambda_{2,n}a_2 \dots + \lambda_{r,n}a_r)x_n = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_1 + & \lambda_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + \lambda_{1n}x_n)a_1 + \\ & + (x_2 + \lambda_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + \lambda_{2n})a_2 + \\ & + \dots + \\ & + (x_r + \lambda_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + \lambda_{rn})a_r = b \\ & \text{где } b = const, i = 1 \dots r \end{aligned}$$

В результате столбец свободных членов можно представить в виде линейной комбинации столбцов базисного минора. Отсюда следует, что базисный минор матрицы A и будет базисным минором расширенной матрицы $A|B$.

Т.к $M \neq 0$ и любой окаймляющий минор $M' = 0$, то мы получаем:

$$Rg(A) = Rg(A|B)$$

2) Достаточность.

Пусть: $Rg(A) = Rg(A|B) = r$, базисный минор M будет содержать первые r строк и первые r столбцов базисного минора M.

Тогда столбец B можно представить в виде линейной комбинации столбцов базисного минора M:

$$b = x_1^0 a_1 + x_2^0 a_2 + \ldots + x_r^0 a_r + 0 \cdot a_{r+1} + \ldots + 0 \cdot a_n$$
$$x_1^0, x_2^0, \ldots x_r^0 \text{ -- коэффициенты линейной комбинации}$$
$$x_i^0 = const, i = 1..r$$

Поэтому $X = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots x_r^0\right)$ является решением $AX = B$, т.е. СЛАУ совместимая.

Вопрос 30. Доказать теорему о существовании ФСР однородной СЛАУ.

Ответ. *Пусть имеется однородная СЛАУ $A \times X = \theta$ с n неизвестных и $rg(A) = r$.*
Тогда существует набор $k = n - r$ решений однородной СЛАУ, которые образуют ФСР:

$$X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots X^{(k)}$$

Доказательство:

Пусть базисный минор M матрицы A состоит из первых r строк и первых r столбцов матрицы A. Тогда любая строка A, от $r+1$ до m будет линейной комбинацией строк базисного минора.

Если $x_1, x_2, \ldots x_n$ удовлетворяют уравнениям СЛАУ соответветствующим строкам базисного минора то это решение будет удовлетворять и остальным уравнениям СЛАУ. Поэтому исключим из системы уравнения после r-ой строки:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

В системе (3) базисными переменными являются переменные $x_1, x_2, \ldots x_r$; свободными являются переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_n$.

Оставим в левой части слагаемые с базисными переменными, а в правой – со свободными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1r}x_r = a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2r}x_r = a_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots a_{rr}x_r = a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n \end{cases} \tag{4}$$

Если свободным переменным придавать различные значения, то определитель левой части (4) равен базисному минору $A (\neq 0)$, то (4) будет иметь единственное решение.

Возьмём k наборов свободных переменных:

$$\begin{array}{cccc} X_{r+1}^{(1)} & X_{r+1}^{(2)} & \dots & X_{r+1}^{(k)} \\ X_{r+2}^{(1)} & X_{r+2}^{(2)} & \dots & X_{r+2}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n^{(1)} = 0 & X_n^{(2)} = 0 & \dots & X_n^{(k)} = 0 \end{array}$$

В результате, при каждом наборе свободных переменных мы получаем k решений однородной СЛАУ:

$$X^{(i)} = \begin{pmatrix} X_1^{(i)} \\ X_2^{(i)} \\ \dots \\ X_r^{(i)} \\ \dots \\ X_n^{(i)} \end{pmatrix}$$

Пусть линейная комбинация решений равна 0:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ \dots \\ X_r^{(1)} \\ \dots \\ X_n^{(1)} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \\ \dots \\ X_r^{(2)} \\ \dots \\ X_n^{(2)} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_k \begin{pmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \\ \dots \\ X_r^{(k)} \\ \dots \\ X_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \theta$$

$$\begin{aligned} r+1: &\quad 1 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + \dots + 0 \cdot \lambda_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ r+2: &\quad 0 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + \dots + 0 \cdot \lambda_k = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \\ &\quad \dots \\ r: &\quad 1\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + \dots + 1 \cdot \lambda_k = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0 \end{aligned}$$

Все коэффициенты равны нулю. Мы получили тривиальную равную нуля линейную комбинация решений однородной СЛАУ.

Вопрос 31. Вывести формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с обратимой матрицей.

Ответ. Запишем СЛАУ в матричном виде:

$$A \times X = B \qquad A_{n \times n}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Пусть матрица не вырожденная. Тогда её обратная матрица будет иметь вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\tau} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{detA} & \frac{A_{12}}{detA} & \dots & \frac{A_{1n}}{detA} \\ \frac{A_{21}}{detA} & \frac{A_{22}}{detA} & \dots & \frac{A_{2n}}{detA} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{n1}}{detA} & \frac{A_{n2}}{detA} & \dots & \frac{A_{nn}}{detA} \end{pmatrix}^{\tau}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{detA} & \frac{A_{12}}{detA} & \dots & \frac{A_{1n}}{detA} \\ \frac{A_{21}}{detA} & \frac{A_{22}}{detA} & \dots & \frac{A_{2n}}{detA} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{n1}}{detA} & \frac{A_{n2}}{detA} & \dots & \frac{A_{nn}}{detA} \end{pmatrix}^{\tau} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$x_i = \frac{A_{i1}}{detA} b_1 + \frac{A_{i2}}{detA} b_2 + \ldots + \frac{A_{in}}{detA} b_n = \\ = \frac{A_{i1}b_1 + A_{i_2}b_2 + \ldots + A_{in}b_n}{detA}$$

Заметим, что числитель – это ничто иное, как определитель матрицы. Запишем:

$$x_i = \frac{1}{detA} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,i-1} & b_{n-1} & a_{n-1,i+1} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Вопрос 32. Доказать теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.

Ответ. *Пусть $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots X^{(k)}$ – ФСР некоторой СЛАУ $A \times X = \theta$. Тогда общее решение однородной СЛАУ будет иметь вид:*

$$X = c_1X^{(1)} + c_2X^{(2)} + \ldots + c_kX^{(k)}, \quad c_i = const$$

Доказательство:
Пусть дана однородная СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – решение СЛАУ, и матрица А имеет ранг $rgA = r$.
Тогда если X является решением, то он ялвяется решением первых

r уравнений, соответствующих базисным строкам матрицы A. Пусть базисный минор стоит из первых r строк и первых r столбцов данной матрицы, тогда если X – решение уравнений с нулевого по r, то он является решением уравнений с $r+1$ по m, которые являются линейной комбинацией первых k уравнений, поэтому уравнения с $r+1$ по m можно исключить. Т.к. базисный минор включает первые r столбцов матрицы A:

$$M_r = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \dots & a_{1r}x_r \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \dots & a_{2r}x_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1}x_1 & a_{r2}x_2 & \dots & a_{rr}x_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mr}x_r \end{pmatrix}$$

то соответствующие этим столбцам переменные являются базисными (с x_1 по x_r), а остальные переменные (с x_{r+1} по x_n) – свободными.

После исключения первых r строк, получаем:

$$\begin{cases} a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \\ a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + \dots + a_{r+1,n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mr}x_r + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Преобразуем уравнения так, что в левой части остались базисные переменные, а в правой – свободные:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} + x_2 + \dots + a_{1r}x_r = a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22} + x_2 + \dots + a_{2r}x_r = a_{2r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} + x_2 + \dots + a_{mr}x_r = a_{mr+1}x_{r+1} + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Задавая различные значения свободных переменных, мы получаем, что система (3) будет иметь единственное решение, т.к. главный определитель данной системы будет равен угловому минору, не равному нулю. Решая эту систему получаем решение:

$$\begin{cases} x_1 = x_{r+1}\lambda_{1,r+1} + x_{r+2}\lambda_{1,r+2} + \dots + x_n\lambda_{1,n} \\ x_2 = x_{r+1}\lambda_{2,r+1} + x_{r+2}\lambda_{2,r+2} + \dots + x_n\lambda_{2,n} \\ \dots \\ x_r = x_{r+1}\lambda_{r,r+1} + x_{r+2}\lambda_{r,r+2} + \dots + x_n\lambda_{r,n} \end{cases} \tag{4}$$

Т.к. $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots X^{(k)}$ образуют ФСР, то они удовлетворяют системе

(4):

$$\begin{cases} X_1^{(i)} = X_{r+1}^{(i)}\lambda_{1,r+1} + X_{r+2}^{(i)}\lambda_{1,r+2} + \ldots + X_n^{(i)}\lambda_{1,n} \\ X_2^{(i)} = X_{r+1}^{(i)}\lambda_{2,r+1} + X_{r+2}^{(i)}\lambda_{2,r+2} + \ldots + X_n^{(i)}\lambda_{2,n} \\ \ldots \\ X_r^{(i)} = X_{r+1}^{(i)}\lambda_{n,r+1} + X_{r+2}^{(i)}\lambda_{n,r+2} + \ldots + X_n^{(i)}\lambda_{n,n} \end{cases} \qquad X^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \ldots \\ x_m^{(i)} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Составим матрицу B из столбцов $X^{(i)}$:

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(n)} \\ x_2 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_r & x_r^{(1)} & x_r^{(2)} & \ldots & x_r^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{pmatrix} \\ X \quad X^{(1)} \quad X^{(2)} \quad \ldots \quad X^{(n)} \end{array}$$

Вычтем из элементов первой строки соответствующие элементы строк с $r{+}1$ по m с соответствующим коэффициентом $\lambda_{1,r+1}, \lambda_{1,r+2}, \ldots \lambda_{1n}$:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} - \lambda_{1,r+1}x_{r+1}^{(1)} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2}^{(2)} - \ldots - \lambda_{1,n}x_n^{(1)} = 0 \\ x_1^{(2)} - \lambda_{1,r+1}x_{r+1}^{(2)} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2}^{(2)} - \ldots - \lambda_{1,n}x_n^{(2)} = 0 \\ \ldots \\ x_1^{(k)} - \lambda_{1,r+1}x_{r+1}^{(k)} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2}^{(k)} - \ldots - \lambda_{1,n}x_n^{(k)} = 0 \\ x_1 - \lambda_{1,r+1}x_{r+1} - \lambda_{1,r+2}x_{r+2} - \ldots - \lambda_{1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Аналогично вычитая из строк до r строки $r + 1$ до n с коэффициентами λ. В результате получаем, что в преобразованной матрице B первые r строк будут нулевые:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x_{r+1} & x_{r+1}^{(1)} & x_{r+1}^{(2)} & \ldots & x_{r+1}^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Поскольку элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, получаем, что ранг матрицы B будет равен $k = n - r$. Так как по условию столбцы $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots X^{(k)}$ образуют ФСР, они являются линейно-независимыми. Поэтому первый столбец можно представить в виде линейной комбинации столбцов.