4- Lógica de predicados

Lógica proposicional: funciona bien para componentes de enunciados como:

y, o, no, si... entonces, si y sólo si

- Los aspectos lógicos de un lenguaje natural o artificial suelen ser más diversos. Tenemos modificadores como: existe..., todos,..., único...

- Lógica de predicados de primer orden: permite crear enunciados más expresivos.

"Todo estudiante es más joven que algún profesor"

- La proposición p no expresa todo lo que hay en la oración, pues no toma en cuenta propiedades como:

  - ser estudiante
  - ser profesor
  - ser más joven que alguien más
  - la cantidad de estudiantes considerados.

4.1- Predicados

Estructura lógica de un enunciado:

Individuos (objetos)

Predicados: propiedades o relaciones atribuibles a los individuos.

$E(Sofía)$: denota que Sofía es una estudiante

$P(John)$: denota que John es un profesor.

$J(Sofía, John)$: denota que Sofía es más joven que John.

$$E(Sofía) \wedge P(John) \wedge J(Sofía, John)$$

-Los individuos y predicados se definen en un contexto particular que depende del problema a tratar:

Universo del discurso

-Es la colección de todas las cosas, personas, ideas, estructuras de datos, etc., que son necesarias para analizar una fórmula o un argumento lógico.

Ejemplos:

Universo de discurso: Personas

- Ernesto es amigo de Samuel.
- Marta y María son amigas.

Universo de discurso: Números

- La suma de 2 y 3 es 5.

Universo de discurso: Mixto

- El sargento Pérez va en patrulla al parque.

Notación:

$P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ indica que la propiedad o relación P se da entre los individuos $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Ejemplos:

Amigo(Ernesto, Samuel) con P=amigo $\quad t_1$= Ernesto, t_2= Samuel

$1 \equiv$ Suma$(2,3,5)$ con. P = Suma $\quad t_1 = 2$, $t_2 = 3$, sumandos

Suma$(3,5,2) \equiv \emptyset$ $\quad t_3 = 5$ resultado

El número de argumentos en un predicado se conoce como el índice o aridad del predicado:

índice = 1 : propiedad de un individuo/objeto.
índice > 1 : relación entre 2 o más individuos.

Ejemplos:

Amigos (María, Marta) índice 2
Amigos (María, Marta, Juan) índice 3

$\Rightarrow$ Los 2 predicados anteriores se consideran distintos porque difieren en su índice.

4.1.1- Variables y cuantificadores

- Los predicados no son simplemente otra forma de escribir expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} E(\overline{Juan}): \text{Juan es un estudiante} \\ E(Pedro): \text{Pedro es un estudiante} \end{array}\right\} \text{Sí}$$

- Podemos sustituir a los individuos por variables

1- $E(x)$: x es un(a) estudiante

2- $J(x,y)$: x es más joven que y

3- $P(y)$: y es un(a) profesor(a)

- Los nombres de las variables no importan, pero se debe ser consistente en su uso.

- Las expresiones anteriores no son proposiciones; x y y están indeterminados, por lo que no pueden evaluarse.

- Cada predicado puede representar un número infinito de proposiciones al reemplazar sus variables por individuos.

- Consideremos los siguientes ejemplos:

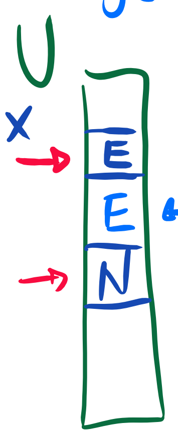
- Algunos gatos son negros.
- Todos los estudiantes trabajan duro.
- Ningún alumno se duerme en clase
- Existe un número primo que es par.
- Hay más árboles que personas.

- Los ejemplos anteriores no hablan de individuos en particular. Se requiere un mecanismo para representar cantidades.

Cuantificadores sobre individuos indeterminados:

- $\forall x$ se lee "para todo" universal
- $\exists x$ se lee "existe" existencial

Ejemplo: Todo estudiante es más joven que algún profesor.



$$\forall x(E(x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge J(x,y)))$$

Para todo x, si x es estudiante entonces existe un y tal que y es profesor y x es más joven que y.

Universo: Personas de la Facultad.

Ejemplo: Algunos gatos son negros. U: animales

$G(x)$: x es gato

$N(x)$: x es negro

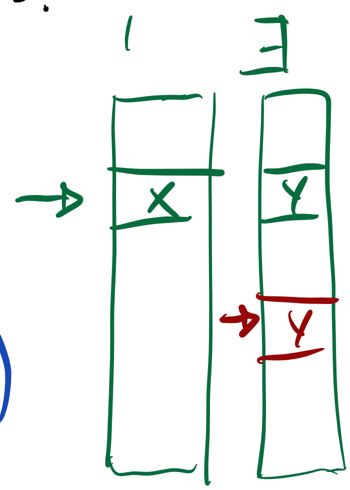
$$\exists x (G(x) \wedge N(x))$$

("Algunos" se toma como "al menos uno")

Ejemplo: Al menos dos gatos son negros.

$G(x)$: x es gato

$N(x)$: x es negro



$$\exists x \exists y (G(x) \wedge N(x) \wedge G(y) \wedge N(y) \wedge \boxed{x \neq y})$$

asegurar que los dos gatos no son el mismo

Ejemplo: No todas las aves pueden volar.

$A(x)$: x es un ave

$V(x)$: x puede volar

→ Existe un ave que no puede volar

$$\exists x (A(x) \wedge \neg V(x))$$

equivalentes

→ No es cierto que todas las aves pueden volar

$$\neg \forall x (A(x) \rightarrow V(x))$$

Ejemplo: Todo niño es más joven que su madre.

U: personas,

$N(x)$: x es niño

$J(x,y)$: x es más joven que y

$M(x,y)$: x es madre de y.

- $\forall x \forall y (N(x) \wedge M(y,x) \to J(x,y))$

- No es cierto que existe un niño que no es más joven que su madre

  - $\neg \exists x (N(x) \wedge \exists y (M(y,x) \wedge \neg J(x,y)))$
  - $\neg \exists x \exists y (N(x) \wedge M(y,x) \wedge \neg J(x,y))$

Ejemplo: Universo: Personas

$H(x,y)$: x y y son hermanos

$A(x,y)$: x y y son amigos

Ana es amiga <u>del</u> hermano de María.

(Ambiguo, María podría tener más de un hermano).

Ana es amiga de un hermano de María.

$\exists x (H(x, María) \wedge A(x, Ana))$

Ana es amiga de todos los hermanos de María.

$$\forall x\,(H(x, \text{María}) \rightarrow A(x, \text{Ana}))$$

¿Por qué no al revés?

Ejemplo: Mike y John tienen la misma abuela.

$M(x, y)$: x es madre de y.

es verdadera si el universo es vacío

$$\forall w \forall x \forall y \forall z\,(M(\underline{w}, x) \wedge M(x, \text{Mike}) \wedge M(y, z) \wedge M(z, \text{John}) \rightarrow w = y)$$

$$\underline{\exists w \exists x \exists y \exists z}\,\underbrace{(M(\underline{w}, x) \wedge M(x, \text{Mike}) \wedge M(y, z) \wedge M(z, \text{John}) \,\underline{\wedge}\, w = y)}$$

4.2- Sintaxis de la lógica de predicados.

-Tenemos dos tipos de elementos en lógica de predicados:

1- Objetos: son los individuos de los que hablamos.

Ejemplos:
- Sofía y John
- Variables, como x y y.
- Símbolos de función que nos permiten referirnos a objetos.

$suc(x)$ - regresa el número $x+1$

Los objetos son conocidos como términos.

$h(x)$ - hermano de x - No es símbolo de función, podría regresar más de un individuo o ninguno.

2- Valores de verdad, conocidos como fórmulas

Ejemplo:

$P(\underline{x, f(x)})$, donde x y $f(x)$ son términos.

4.2.1- Términos

Definición 4.1- Un *término* es una variable, una constante o una función aplicada a otros términos.

Gramática de términos

$$\text{term} ::= \text{var} \tag{4.1}$$

$$\text{term} ::= \text{const} \tag{4.2}$$

$$\text{term} ::= \boxed{\text{func(lista-de-term)}} \tag{4.3}$$

$$\text{var} ::= x \mid y \mid z \mid \ldots \tag{4.4}$$

$$\text{const} ::= a \mid b \mid c \mid \ldots \tag{4.5}$$

$$\text{func} ::= f, g, h \ldots \tag{4.6}$$

$$\text{lista-de-term} ::= \underline{\text{term}} \tag{4.7}$$

$$\text{lista-de-term} ::= \text{term}, \text{lista-de-term} \tag{4.8}$$

- Cada símbolo de función tiene un número fijo de argumentos (índice o aridad)

- Puede escribirse $\boxed{f^{(n)}}$ para indicar que la función f tiene índice n.

Ejemplo: Universo: números naturales ($0 \in \mathbb{N}$)

- La constante a denota al individuo 0 y la constante b denota al individuo 1.
- La función $f^{(2)}(x,y)$ denota la suma de x y y.
- La función $g^{(2)}(x,y)$ denota $x * y$.
- Así, podemos representar los individuos 2, 3 y 4 como:

$$\underbrace{f(b,b)}_{=2},\quad \underbrace{f(f(b,b),b)}_{=3},\quad \underbrace{g(f(b,b),f(b,b))}_{=4}$$

Ejemplo: Universo: estados de la república y sus municipios

- Las variables x y y representan estados cualesquiera.
- La constante a representa a Aguascalientes.
- La función $c(x)$ que recibe un estado x y regresa su capital. (Cada estado tiene una sola capital, por lo que es una función válida)

$c(a)$: Aguascalientes

$c(\text{Tamaulipas})$: Ciudad Victoria

4.2.2- Fórmulas

Definición 4.2 (fórmula atómica)-

-Una fórmula atómica es una expresión de la forma $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ donde P es un símbolo de predicado de índice n y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos.

Ejemplo: Sean $P^{(2)}$, $H^{(3)}$ y $R^{(1)}$ símbolos de predicado, $f^{(2)}$ y $s^{(1)}$ funciones, y a, b, c, constantes.

Las siguientes son fórmulas atómicas:

- $P(a, f(b,c))$
- $H(a, b, s(c))$
- $R(f(s(b), f(a,b)))$

Ejemplos: Universo: $\mathbb{N}$. Si $a+b=c+b$, entonces, $a=c$,

función:

$s(x,y)$ representa $x+y$

predicado:

$Igual(x,y)$ representa que x es igual a y

-Sean a, b y c

$$\forall a \forall b \forall c\, (Igual(s(a,b), s(c,b)) \rightarrow Igual(a,c))$$

* Usar predicados si al intentar determinar el valor de una función, esta no siempre puede regresar un valor.

Ejemplo: Universo: números reales.

Predicado: Calif(x) representa: x es una calificación.

$$\forall x\,(\underline{Calif}(x) \to x \geq 0 \wedge x \leq 10)$$

* $\geq$ y $\leq$ son predicados utilizados de manera infija. Se podrían declarar, por ejemplo, como:

MayorOIgual(x, y) representa que x es mayor o igual que y.

- Las fórmulas con predicados son similares a las fórmulas de lógica proposicional, pero las fórmulas atómicas ahora tienen predicados que involucran uno o más términos.

- Gramática de las fórmulas

E ::= pred(lista-de-term)	(4.9)
E ::= $\neg$E	(4.10)
E ::= E $\rightarrow$ E	(4.11)
E ::= E $\vee$ E	(4.12)
E ::= E $\wedge$ E	(4.13)
E ::= E $\leftrightarrow$ E	(4.14)
E ::= (E)	(4.15)
pred ::= P | Q | R | ...	(4.16)
lista-de-term ::= term	(4.17)
lista-de-term ::= term, lista-de-term	(4.18)

* term indica los términos que se pueden formar con la gramática anterior.

Ejemplo: Valor de verdad del predicado:

$S(x, y, z)$ es $x + y = z$

$S(2, 3, 5) \equiv 1$ $\qquad$ $S(2, 3, 4) \equiv 0$

4.2.3- Fórmulas cuantificadas

Definición 4.3 (cuantificadores). Sea E una fórmula:

- La expresión $\forall x E$ es la cuantificación universal de E con respecto a x y representa el enunciado para todo x se cumple E.

- Análogamente, la expresión $\exists x E$ es la cuantificación existencial de E con respecto a x y representa el enunciado existe algún x que cumple E.

En ambos casos la fórmula E se conoce como el alcance de la cuantificación y la variable que figura inmediatamente después se conoce como variable del cuantificador.

* $\forall$ y $\exists$ tienen la misma precedencia que $\neg$, y asociatividad de izquierda a derecha.

- El valor de verdad de una fórmula cuantificada depende del universo de discurso o dominio.

- Se suele asumir que el universo de discurso no es vacío. En caso de que sea vacío, una fórmula del tipo $\forall x P(x)$

se evalúa a verdadero, puesto que no hay elementos x para los que $P(x)$ sea falso. $\rightarrow$ Vacuidad.

Ejemplos $\forall$:

1- Sea $P(x)$ el predicado $x \geq 0$ y consideremos la fórmula:

$$\forall x P(x)$$

- Si el universo de discurso son los números naturales, su valor de verdad es: verdadero

- Si el universo de discurso son los números reales entonces su valor de verdad es falso.

2- Sea $P(x)$ el predicado $x \leq x^2$ y consideremos la fórmula:

$$\forall x P(x)$$

- Si el universo de discurso son los números naturales, su valor de verdad es: verdadero

$x = \frac{1}{2}$

$x^2 = \frac{1}{4}$

- Si el universo de discurso son los números reales entonces su valor de verdad es falso.

- Consideremos como universo de discurso los libros de la biblioteca y sea $R(x)$ el predicado "x tiene portada roja".

$\forall x R(x)$ es falso

- Para que una expresión con cuantificación existencial como $\exists x P(x)$ tenga sentido se debe especificar un universo de discurso.

Ejemplos $\exists$: Universo de discurso: "libros de la biblioteca".

- Sea $R(x)$ el predicado "x tiene portada roja".

$$\exists x R(x) \text{ es verdadero}$$

- Sea $P(x)$ el predicado $x < 0$ y consideremos la fórmula: $\exists x P(x)$

  - Si el universo (o dominio) son los números reales, entonces su valor de verdad es: verdadero

  - Si el universo de discurso son los números naturales, entonces su valor de verdad es: falso

- Sea $P(x)$ el predicado $x = x + 1$ y consideremos la fórmula $\exists x P(x)$

  - Si el universo de discurso son los números naturales, entonces su valor de verdad es: falso

- Si el universo de discurso es vacío, entonces $\exists x Q(x)$ es falso para cualquier predicado $Q(x)$, ya que no existe x en el dominio que cumpla $Q(x)$.

* Cuantificadores *

Expresión	Es verdadera	Es falsa
$\forall x P(x)$	$P(x)$ se cumple para toda x.	Existe una x para la que no se cumple $P(x)$.
$\exists x P(x)$	Existe una x para la que $P(x)$ es verdadera.	$P(x)$ es falsa para toda x.

* Expresiones con varios cuantificadores *

$\forall x \exists y Q(x,y)$: para todo x existe un y tal que $Q(x,y)$.

Ejemplo: Consideremos los predicados, U: personas.

$S(x,y)$ x es hijo de y

$P(x,y)$ x es padre de y

$H(x,y)$ x es hermano de y

constante: m es "yo"

$$\underline{\forall x}\forall y\,(\underbrace{P(x,m)}\wedge S(y,x)\rightarrow H(y,m))$$

Significado:

- Para todo x y para todo y, si x es mi padre y y es hijo de x, entonces x es mi hermano.
- Todo hijo de mi padre es mi hermano.
- Si alguien es hijo de mi padre, entonces es mi hermano.

- Podríamos utilizar una función para usar una variable menos y un cuantificador menos

$p(x)$: regresa el padre de x

(*Estamos suponiendo que cada persona tiene sólo un padre para que $p(x)$ sea una función y no una relación)

$$\underbrace{\forall x(S(x,p(m))\rightarrow H(x,m))}$$

Ejemplo: Universo: frutas sobre una mesa

$M(x)$: x es una manzana

$N(x)$: x es una naranja

Todo es una manzana $\quad \forall x\, M(x)$

Todo es una naranja $\quad \forall x\, N(x)$

Existe una manzana y una naranja $\quad \exists x \exists y (M(x) \wedge N(x))$

Cualquiera es manzana o naranja

$$\forall x (M(x) \vee N(x))$$

Ejemplo: Alcance de un cuantificador

$$\forall x ((x > i \wedge \boxed{i} > j) \rightarrow \exists i \exists j \boxed{(x > \boxed{i} \wedge x > j)})$$

Alcance de $\forall x$

Alcance de $\exists i \exists j$

4.2.4 - Variables libres y variables ligadas

Consideremos el predicado: todos son naranjas, donde $N(x)$ es x es naranja.

Entonces $\forall x N(x)$ y $\forall y N(y)$ significan lo mismo: ¡el nombre de la variante es irrelevante!

A la variable de un cuantificador se le conoce como variable artificial o monigote, pues su función es ser reemplazada por individuos del universo de discurso.

Ejemplo: Si tenemos el símbolo de predicado $P(x)$ que representa que x es par:

$P(x)$ tiene distinto valor de verdad si $x=4$ o si $x=3$.

Definición 4.4 (variable libre) - Se dice que una presencia específica de una variable x en una fórmula A es libre si no es la variable artificial de un cuantificador ni figura dentro del alcance de una cuantificación con la misma variable artificial x.

Ejemplo:

Cuantificación	Variables libres
$\forall x((x>i \wedge i>j) \rightarrow (x>j))$	i, j
$\exists x(x>i \wedge x<j)$	i, j
$\exists i \exists j \boxed{(x>i \wedge x<j)}$	x

acotadas o ligadas

Definición 4.5 (variable acotada)- Se dice que una presencia específica de una variable x en una fórmula A es ligada o acotada si x es la variable artificial de A o cae dentro del alcance de una cuantificación con la misma variable artificial x.

- Si una variable no es libre, entonces es acotada.

Definición 4.6 (enunciado)- Un enunciado es una fórmula A que no tiene presencias de variables libres.

(Si una fórmula no es un enunciado decimos que es una fórmula cuantificada con variables libres.)

Ejemplo:

libre ligada (artificial) ligadas (cuantificación con i)

$$i > 0 \vee \forall i \, (0 \le i \to x * i = 0)$$

libre

libres ligadas.

$$(k+j) > 0 \wedge \exists j \, (0 \le j \le 5 \wedge k < j)$$

artificial. libre

- La evaluación de una expresión depende del estado en el que se evalúen las presencias libres de variables.

- Para evitar confusiones se recomienda usar nombres distintos para las presencias libres y las ligadas.

$$\underline{(k+j)} > 0 \wedge \exists i \, (0 \le i \le 5 \wedge k < i)$$

Observaciones:

- El universo de discurso debe estar bien definido y ser claro.

- Los términos y los predicados son categorías ajenas:

  - Términos: denotan exclusivamente individuos u objetos.

  - Predicados (fórmulas atómicas): denotan exclusivamente proposiciones o propiedades/relaciones acerca de los términos.

- Únicamente los individuos u objetos son cuantificables, de ahí el nombre: lógica de primer orden.

- Segundo orden- Permite cuantificar propiedades

4.3 Especificación formal

Traducción de expresiones desde el lenguaje natural

- Se pueden especificar únicamente afirmaciones o proposiciones.

- Formar predicados al combinar fórmulas atómicas extraídas de la frase utilizando conectivos y cuantificadores.

- La conjunción "y" se traduce como $\wedge$, al igual que "pero".

- La disyunción es inclusiva: incluye el caso cuando se cumplen ambos operandos. (Existe o exclusivo)

- "A solo si B" se traduce como "si no B entonces no A", que es lo mismo que "si A, entonces B".

→

$\forall$: se usa para frases como para todo, para cualquier, cualquiera, todos, los, las.

$\exists$: se usa para algún, existe algún, alguno, alguna, algunos, algunas, uno, una, alguien.

* En ocasiones, frases con "alguien" o "algo" va con $\forall$.

"Si alguien es muy alto, entonces se golpea con el marco de la puerta".

$$\forall x(A(x)\rightarrow M(x))$$

- Pronombres como "él" o "ella" se refieren a algo anteriormente mencionado.

"Pedro es hermano de María pero $\boxed{\text{él}}$ no es amigo de Ana"

$$H(\text{Pedro}, \text{María}) \wedge \neg A(\text{Pedro}, \text{Ana})$$

- Las variables no suelen mencionarse en español:

$\forall x(M(x)\rightarrow D(x))$ "Cualquier manzana es dulce"

"Para cualquier x, si x es una manzana, entonces x es dulce".

- Los esquemas más comunes son

• $\forall x(A\rightarrow B)$ y • $\exists x(A\wedge B)$

- También son adecuados los esquemas:

• $\forall x(A\wedge B)$, • $\forall x(A\vee B)$, • $\exists x(A\vee B)$

- El esquema $\exists x(A \to B)$ es sintácticamente correcto pero poco común.

- Dos o más variables distintas no necesariamente representan valores distintos:

- $\exists x P(x)$ y $\exists x \exists y (P(x) \wedge P(y))$ representan lo mismo. Es necesario especificar $\boxed{x \neq y}$.

4.3.1- Juicios aristotélicos

- Gran parte de las especificaciones en lenguaje formal pueden especificarse mediante alguno de los 4 juicios aristotélicos.

Predicados:

$P(x)$ x es un patito $F(x)$ x es feo

a) Juicio universal afirmativo $\forall x (P(x) \rightarrow F(x))$

- Todos los patitos son feos.
- Todos los que cumplan la propiedad de ser patitos cumplen también con la propiedad de ser feos.

b) Juicio existencial afirmativo $\exists x (P(x) \wedge F(x))$

- Existe un patito feo
- Algunos patitos son feos.

c) Juicio existencial negativo $\exists x (P(x) \wedge \neg F(x))$

- Algunos patitos no son feos
- Existe un patito que no es feo.

$$\boxed{\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)}$$

d) Juicio universal negativo $\neg\exists x\,[P(x) \wedge F(x) \equiv$

- Ningún patito es feo $\qquad \forall x\,(P(x) \to \neg F(x))$
- No existe un patito feo
- Todo patito no es feo.

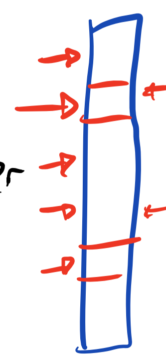
$O \to P$

$\neg\exists x\,(P(x) \wedge F(x)) \equiv$
$\forall x\,\neg(P(x) \wedge F(x)) \equiv$
$\forall x\,(\neg P(x) \vee \neg F(x))$

- Caso $\forall$, esquema $P(x\ldots) \to Q(x\ldots)$

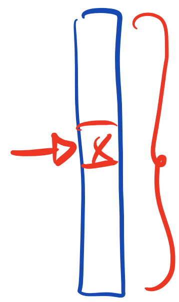
- Examinamos todo el universo de discurso para comprobar que todo el que cumple $P(x\ldots)$ también cumple $Q(x\ldots)$.

U



- Si un individuo no cumple $P(x\ldots)$, no nos interesa saber sobre $Q(x\ldots)$.

• $\forall x\,(P(x\ldots) \wedge Q(x\ldots))$ - es falso si un individuo no cumple con $P(x\ldots)$ o $Q(x\ldots)$.



Caso $\exists$, esquema $P(x\ldots) \wedge Q(x\ldots)$

- Queremos encontrar un individuo en el universo de discurso que cumpla al mismo tiempo con $P(x\ldots)$ y con $Q(x\ldots)$.

• $\exists x\,(P(x\ldots) \to Q(x\ldots))$ - lo damos por verdadero si encontramos un individuo que no cumpla $P(x\ldots)$.

Cuantificadores anidados

Ejemplos: Sea $Q(x,y)$ el predicado x quiere a y

1- $\forall x \exists y Q(x,y)$ - Todos quieren a alguien.

2- $\underline{\exists x} \underline{\forall y} Q(x,y)$ - Alguien quiere a todos.

3- $\forall x \forall y Q(x,y)$ - Todos quieren a todos.

4- $\exists x \exists y Q(x,y)$ - Alguien quiere a alguien.

5- $\exists x \forall y \neg Q(\underline{y},x)$ - Alguien no es querido por nadie / Todos no quieren a alguien.

6- $\exists x \forall y \neg Q(x,y)$ - Alguien no quiere a todos / nadie.

7- $\forall x \exists y \neg Q(x,y)$ - Todos no quieren a alguien

8- $\neg \exists x \forall y Q(x,y)$ - Nadie quiere a todos / No existe alguien que que quiera a todos

9- $\forall x \forall y \underline{\neg Q(x,y)}$ - Nadie quiere a nadie.

$\neg \forall x \forall y Q(x,y)$

$\neg \forall x$ - no todos

$\neg \exists x$ - no existe

Cuantificaciones de dos variables

Enunciado	Es verdadero si:	Es falso si:
$\forall x \forall y P(x,y)$ $\forall y \forall x P(x,y)$	$P(x,y)$ es verdadero para todo par x, y.	Existe un par x, y tal que $P(x,y)$ es falso.
$\forall x \exists y P(x,y)$	Para todo x existe un elemento y tal que $P(x,y)$ es verdadero.	Existe un x tal que $P(x,y)$ es falso para todo y.
$\exists x \forall y P(x,y)$	Existe un x tal que $P(x,y)$ sea verdadero para todo y.	Para todo x existe un y tal que $P(x,y)$ es falso.
$\exists x \exists y P(x,y)$ $\exists y \exists x P(x,y)$	Existe un par x, y tal que $P(x,y)$.	$P(x,y)$ es falso para todo par x, y.

próxima iniciar

Orden de los cuantificadores

Ejemplo: Sea $Q(x,y)$ el predicado $x+y=0$ en el dominio de los números reales.

1- $\exists y \forall x\, Q(x,y)$

Existe un número real y tal que para todo número real x, $x+y=0$.

$z+(-z)=0$ si $z\neq 0$.

Falso

2- $\forall x \exists y\, Q(x,y)$

- Para todo número real x existe un real $\underset{=-x}{y}$ tal que $x+y=0$.

Verdadero

Ejemplo: Sea $Q(x,y,z)$ el predicado $x+y=z$ en el dominio de los números reales.

1- $\forall x \forall y \exists z\, Q(x,y,z)$

"Para todo real x y para todo real y existe un real z tal que $x+y=z$"

Verdadero

2- $\exists z \forall x \forall y\, Q(x,y,z)$

Existe un número real z tal que para todo par de reales x y y tenemos $x+y=z$."

$z = 3+4$

Falso

$z = 5+8$

4.3.2- Negaciones de cuantificadores

Ejemplo: Sea $H(x)$ el predicado x es humano.

equiv.
- No todos son humanos $\neg \forall x\, H(x)$
- Existe alguien que no es humano $\exists x \neg H(x)$

equiv.
- No existen humanos $\neg \exists x\, H(x)$
- Cualquiera no es humano $\forall x \neg H(x)$

Leyes de De Morgan para cuantificadores			
Negación	**Equivalencia**	**Verdadero**	**Falso**
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	Para cada x, $P(x)$ es falso.	Existe un x tal que $P(x)$ es verdadero.
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	Existe un x tal que $P(x)$ es falso.	$P(x)$ es verdadero para todo x.

$\neg \exists x P(x)$ es equivalente a $\neg(P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n))$, que por las leyes de De Morgan es equivalente a $\neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \ldots \wedge \neg P(x_n)$, que es lo mismo que $\forall x \neg P(x)$.

$\neg\forall x P(x)$ es equivalente a $\neg(P(x_1)\wedge P(x_2)\wedge\ldots\wedge P(x_n))$, que por las leyes de De Morgan es equivalente a $\neg P(x_1)\vee\neg P(x_2)\vee\ldots\vee\neg P(x_n)$, que es lo mismo que $\exists x\neg P(x)$.

Ejemplo: Consideremos los predicados - U: animales de un zoológico y partes del cuerpo.

$P(x)$ x es un primate

$C(x)$ x es una cola/rabo

$T(x,y)$ x tiene a y

- No todos los primates tienen cola:

$$\neg\forall x(P(x)\to\exists y(C(y)\wedge T(x,y)))\equiv$$

$$\equiv\neg\forall x(\neg P(x)\vee\exists y(C(y)\wedge T(x,y)))$$

$$\equiv\exists x\neg(\neg P(x)\vee\exists y(C(y)\wedge T(x,y)))$$

- Existe un primate que no tiene cola:

$$\equiv\exists x(P(x)\wedge\neg\exists y(C(y)\wedge T(x,y)))$$

$$\equiv\exists x(P(x)\wedge\forall y\neg(C(y)\wedge T(x,y)))$$

$$\equiv\exists x(P(x)\wedge\forall y(\neg C(y)\vee\neg T(x,y)))$$

$$\equiv\exists x(P(x)\wedge\forall y(C(y)\to\neg T(x,y)))$$

- Existe un primate tal que todas las cosas que son colas no las tiene.

Negaciones de cuantificadores anidados

Ejemplo: Consideremos la expresión $\neg\forall x \exists y P(x,y)$

$$\underbrace{\neg\forall x}\exists y P(x,y) \equiv$$
$$\equiv \exists x \neg \exists y P(x,y)$$
$$\equiv \exists x \forall y \neg P(x,y)$$

Ejemplo: En el universo de alumnos de la facultad consideremos los predicados:

$A(x)$: x es alumno(a) $\qquad$ $T(x)$: x es un tiempo

$E(x,y)$: x estudia en el tiempo y

- No hay alumnos que estudien todo el tiempo.

$$\neg\exists x (A(x) \wedge \forall y (T(y) \rightarrow E(x,y))$$
$$\equiv \forall x \neg (A(x) \wedge \forall y (T(y) \rightarrow E(x,y))$$
$$\equiv \forall x (\neg A(x) \vee \neg \forall y (T(y) \rightarrow E(x,y)))$$
$$\equiv \forall x (\neg A(x) \vee \exists y \neg (T(y) \rightarrow E(x,y)))$$
$$\equiv \forall x (\neg A(x) \vee \exists y (T(y) \wedge \neg E(x,y)))$$
$$\equiv \forall x (A(x) \rightarrow \exists y (T(y) \wedge \neg E(x,y)))$$

Para todo alumno existe un tiempo en el que no estudia.

Ejemplo:

$$\neg \exists x \forall y \neg \exists w \forall z \neg(\neg P(x,y) \wedge Q(x)) \overset{\vee}{\rightarrow} \forall w\, T(x,w))$$

$$\equiv \forall x \neg \forall y \forall w \neg \forall z (\neg (P(x,y) \wedge Q(x)) \wedge \neg \forall w\, T(x,w))$$

$$\equiv \forall x \exists y \neg \forall w \exists z \neg (\neg (P(x,y) \wedge Q(x)) \wedge \exists w \neg T(x,w))$$

$$\equiv \forall x \exists y \exists w \neg \exists z ((P(x,y) \wedge Q(x)) \vee \neg \exists w \neg T(x,w))$$

$$\equiv \forall x \exists y \exists w \forall z \neg ((P(x,y) \wedge Q(x) \vee \forall w\, T(x,w))$$

$$\equiv \forall x \exists y \exists w \forall z (\neg (P(x,y) \wedge Q(x) \wedge \neg \forall w\, T(x,w))$$

$$\equiv \forall x \exists y \exists w \forall z (\neg (P(x,y) \wedge Q(x) \wedge \exists w \neg T(x,w))$$

4.3.3- Contando objetos

- Usar variables con nombres distintos no necesariamente denota individuos distintos, por lo que a veces es necesario especificarlos explícitamente.

Ejemplos: Consideremos los predicados $Igual(x,y)$: $x=y$

$\neg Igual(x,y)$: $x \neq y$. en su forma infija.

$H(x)$: x es humano

- Hay al menos un humano. $\exists x\, H(x)$

- Hay al menos dos humanos. (Hay más de un humano).

$$\exists x \exists y \,(H(x) \wedge H(y) \wedge x \neq y)$$

- Hay al menos 3 humanos.

$$\exists x \exists y \exists z \,(H(x) \wedge H(y) \wedge H(z) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$$

- Existe un único humano.

$$\exists x \,(H(x) \wedge \forall y \,(H(y) \rightarrow x = y))$$

se abrevia $\exists! x\, H(x)$

* $\exists! x\, P(x)$ - Indica que existe un único individuo que cumple la propiedad $P(x)$.

-Hay a lo más un humano:

$$\forall x \forall y (H(x) \wedge H(y) \to x = y)$$

* Incluye el caso en el que no hay humanos.

$$\neg(\exists x \exists y (H(x) \wedge H(y) \wedge x \neq y)$$

"No existen dos humanos distintos."

Negación del único

4.4- Algunas notas adicionales sobre semántica

Cuantificadores de dos variables		
Enunciado	**Es verdadero si:**	**Es falso si:**
$\forall x \forall y P(x,y)$ $\forall y \forall x P(x,y)$	$P(x,y)$ es verdadero para todo par x, y.	Existe un par x, y tal que $P(x,y)$ es falso.
$\forall x \exists y P(x,y)$	Para todo x existe un elemento y tal que $P(x,y)$ es verdadero.	Existe un x tal que $P(x,y)$ es falso para todo y.
$\exists x \forall y P(x,y)$	Existe un x tal que $P(x,y)$ sea verdadero para todo y.	Para todo x existe un y tal que $P(x,y)$ es falso.
$\exists x \exists y P(x,y)$ $\exists y \exists x P(x,y)$	Existe un par x, y tal que $P(x,y)$.	$P(x,y)$ es falso para todo par x, y.

Leyes de De Morgan para cuantificadores

Negación	Equivalencia	Verdadero	Falso
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	Para cada x, $P(x)$ es falso.	Existe un x tal que $P(x)$ es verdadero.
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	Existe un x tal que $P(x)$ es falso.	$P(x)$ es verdadero para todo x.

4.4.1- Noción informal de verdad

- En lógica de predicados el valor de verdad depende del universo de discurso o dominio.

- En lógica proposicional el universo de discurso es $\{0,1\}$.

Ejemplo: Todos son humanos: $\forall x H(x)$

- Será cierta si se cumple: $H(x_1) \wedge H(x_2) \wedge \ldots \wedge H(x_n)$

- Si el universo es finito, teóricamente, si analizamos todas las posibles combinaciones podemos asignar el valor de falso o verdadero a todos los predicados.

- No contamos con un equivalente a las tablas de verdad.

Ejemplo: Predicado $x > y$ (MayorQue(x, y)), $U = \{1,2,3,4\}$

>	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	1	0	0	0
3	1	1	0	0
4	1	1	1	0

- ¿Qué pasa si el universo no es finito?

- ¿Qué pasa si el índice es mayor a 2?

Definición 4.1- Dada una fórmula A de lógica de predicados, definimos cuando A es verdadera en un universo de discurso U, de acuerdo a su forma sintáctica, como sigue:

- Si A es una fórmula atómica, $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, entonces A es verdadera en U si y sólo si los valores de los términos $t_1, \ldots, t_n$ como individuos de U están en la relación del universo definida por P.

- Si A es una fórmula proposicional, entonces utilizamos los criterios de verdad de la lógica proposicional

Ejemplo: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x,y))$ pertenece al esquema $A \rightarrow B$.

- Si $A = \forall x B$ es una fórmula con cuantificador universal, entonces A es verdadera en U si y sólo si B es verdadera en U para todos los valores posibles de x en U.

- Si $A = \exists x B$ es una fórmula con cuantificador existencial, entonces A es verdadera en U si y sólo si B es verdadera en U para algún valor de x como individuo de U.

-Esta es una definición informal: Si U es infinito no queda claro como mostrar que $\forall x B$ es verdadera para todos los posibles valores de x.

4.4.2- Algunas equivalencias lógicas

Interpretación

-En expresiones que tienen predicados, una interpretación consiste en:

- 1- Una colección de objetos, conocido como el dominio de la interpretación, el cual debe incluir al menos un objeto.

- 2- Asignar una propiedad o relación a cada predicado en la expresión.

- 3- Asignar un individuo particular del dominio a cada símbolo de constante en la expresión.

- El análogo a una tautología en la lógica de predicados es la validez. Una fórmula de predicados (bien formada) es válida si es verdadera para todas las interpretaciones posibles

	Fórmulas proposicionales	Fórmulas de predicado
Valores de verdad	Falso o verdadero, según los valores de verdad de las variables proposicionales.	-Falso, verdadero o indeterminado (si tiene variables libres), dependiendo de la interpretación.
Verdad "intrínseca"	-Tautología, si es verdadera para todas las posibles asignaciones de valores.	-Válida, si es verdadera para todas las posibles interpretaciones.
Metodología	-Algoritmo (tabla de verdad) para determinar si la fórmula es tautología.	-No hay algoritmo para determinar si la fórmula es válida.

Ejemplos de equivalencias lógicas:

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x(Q(x) \wedge P(x)) \quad (\forall) \quad \overset{\wedge}{\vee}$$

-Conmutatividad

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x(\neg P(x) \rightarrow Q(x))$$

-Eliminación de operadores

$$\neg(\exists x\, S(x) \wedge \forall x\, P(x)) \equiv \neg\exists x\, S(x) \vee \boxed{\neg\forall x} P(x)$$

-Leyes de De Morgan

$$\forall x\, S(x) \to \neg\exists y\, G(y) \equiv \exists y\, G(y) \to \neg\forall x\, S(x)$$

-Contrapositiva

-Leyes de negación de cuantificadores

$$\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$$

$$\neg\exists x\, P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

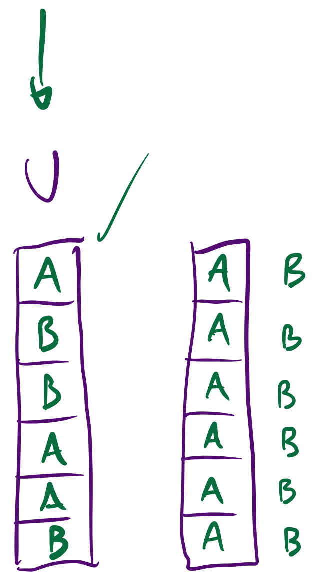
*Ver sección 4.3.2

-Distributividad

$\forall$: $\forall x\,(A \wedge B) \equiv \forall x A \wedge \forall x B$

¿Por qué no funciona con disyunción?

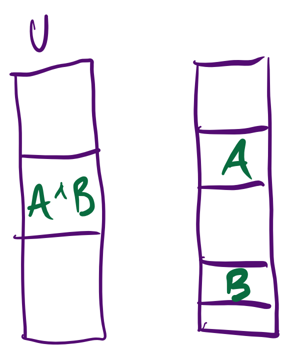
$$\forall x(A \vee B) \not\equiv \forall x A \vee \forall x B$$



$\exists$: $\exists x\,(A \vee B) \equiv \exists x A \vee \exists x\, B.$

¿Por qué no funciona con conjunción?

$$\exists x(A \wedge B) \not\equiv \exists x A \wedge \exists x B$$



Cuantificación vacua

-Consideremos las constantes:

r: Revolver y b: the Beatles

los predicados:

$A(x,y)$: x es un álbum de y y

$M(x)$: x es un músico.

y los siguientes enunciados.

- Para cualquier individuo, Revolver es un álbum de the Beatles.

$$\underline{\forall x}\boxed{D(r,b)} \equiv D(r,b)$$

-Existe un individuo tal que todos son músicos

$$\underline{\exists x}\boxed{\forall y M(y)} \equiv \forall y M(y)$$

-Los ejemplos anteriores tienen en común que una variable cuantificada no está en el alcance del cuantificador.

$\forall x D(r,b)$ es verdadera si y sólo si $D(r,b)$ es verdadera para cualquier valor de x como individuo particular.

Como x no figura en $D(r,b)$, basta con mostrar la verdad de $D(r,b)$ para probar que $\forall x D(r,b)$ es verdadero.

-La cuantificación no aporta nada a la evaluación.

Cuantificadores vacuos: si x no figura en A, entonces:

$\forall x A \equiv A$	$\exists x A \equiv A$
$\forall x \forall x A \equiv \forall x A$	$\exists x \exists x A \equiv \exists x A$

4.4.3-Reglas de inferencia para enunciados cuantificados

-Similar a la fórmula asociada a un argumento lógico, en lógica de predicados tenemos argumentos de la forma:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$$

donde las fórmulas están formadas con predicados y cuantificadores. Q debe derivarse de $P_1, \dots, P_n$ en todas las interpretaciones posibles.

Ejemplo: Demostrar $[\forall x R(x) \wedge (\forall x R(x) \rightarrow \forall x S(x))] \rightarrow \forall x S(x)$

1- $\forall x R(x)$	Hipótesis
2- $(\forall x R(x) \rightarrow \forall x S(x)$	Hipótesis
3- $\forall x S(x)$	MP, 1,2.

Regla de inferencia	Nombre
$\dfrac{\forall x P(x)}{P(c)}$	~~Instanciación universal~~
$\dfrac{P(c) \text{ para } c \text{ arbitraria}}{\forall x P(x)}$	Generalización universal

$\dfrac{\exists x P(x)}{P(c) \text{ para algún } c}$ ←	Instanciación existencial.
$\dfrac{P(c) \text{ para algún } c}{\exists x P(x)}$	Generalización existencial

Instanciación universal

- Dada la premisa $\forall x P(x)$, podemos derivar $P(c)$ como cierta, en donde c es un individuo particular del universo de discurso. Como P es verdadera para todo elemento del dominio, podemos nombrar tales elementos con un nombre arbitrario de variable, como x, y o z, o podemos especificar una constante particular en el dominio, de modo tal que P se cumpla para ellos.

Ejemplo: Usando instanciación universal podemos concluir de "Todos los humanos son mortales" que "Sócrates es mortal."

Universo: Humanos.

Constante s: Sócrates.

$H(x)$: "x es humano"

$M(x)$: "x es mortal"

Demostrar: $(\forall x (H(x) \rightarrow M(x)) \wedge H(s)) \rightarrow \underline{M(s)}$

1-	$\forall x (H(x) \rightarrow M(x))$	Hipótesis
2-	$H(s)$	Hipótesis
3-	$H(s) \rightarrow M(s)$	IU, 1
4-	$M(s)$	MP, 2,3

Generalización universal

- Permite insertar un cuantificador universal. Si sabemos que $P(c)$ es verdadera para todo elemento c del dominio entonces podemos concluir $\boxed{\forall x P(x)}$.

- La forma de usar la generalización universal es tomar un elemento arbitrario x del dominio (donde arbitrario significa que nos referimos a un elemento cualquiera), y si sabemos que $P(x)$ es verdadera, entonces podemos concluir $\forall x P(x)$

- No funciona tomar un elemento específico del dominio para usar esta regla. La única suposición sobre x es que sea un elemento del dominio.

Ejemplo: Demostrar $\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$

1- $\forall x(P(x) \to Q(x))$	Hipótesis
2- $\forall x P(x)$	Hipótesis.
3- $P(u) \to Q(u)$	I U, 1
4 - $P(u)$	I U, 2
5- $Q(u)$ ←	M P, 3, 4
6- $\forall x Q(x)$	G.U, 5

Instanciación existencial

- Permite eliminar un cuantificador existencial. Si sabemos que $\exists x P(x)$ entonces podemos decir que $P(c)$ es cierta para un elemento c. Notemos que c no es un elemento arbitrario. Lo único que sabemos es que existe al menos un elemento en el universo para el que $P(x)$ es verdadera. Dado de dicho elemento existe, podemos darle un nombre (como c) y continuar con nuestro argumento.

Ejemplo: $\forall x (P(x) \to Q(x)) \wedge \exists y P(y) \to Q(y)$

1- $\forall x (P(x) \to Q(x))$	Hipótesis
2- $\exists y P(y)$	Hipótesis
3- $P(a)$	IE, 2
4- $P(a) \to Q(a)$	IU, 1
5- $Q(a)$	MP, 3, 4

* Notemos que no es posible invertir el orden de los pasos 3 y 4. Si se usa primero la instanciación universal para nombrar la constante a en $P(a) \to Q(a)$, entonces no hay razón para suponer que esa a en particular es el individuo que la hipótesis 2 asegura que cumple P.

Generalización existencial

Esta regla permite agregar un cuantificador existencial. Si sabemos que $P(c)$ es cierta para un elemento particular c entonces podemos concluir que $\exists x P(x)$.

Ejemplo: Demostrar el argumento: $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$

1- $\forall x\, P(x)$ Hipótesis

2- $P(c)$ IU, 1

3- $\exists x\, P(x)$ GE, 2

Ejemplo: Probar el argumento:

$$\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall x\,P(x) \wedge \forall x\,Q(x)$$

1-	$\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$	Hipótesis
2-	$P(x) \wedge Q(x)$	IU, 1
3-	$P(x)$	E∧, 2
4-	$Q(x)$	E∧, 2
5-	$\forall x\,P(x)$	GU, 3
6-	$\forall x\,Q(x)$	GU, 4
7-	$\forall x\,P(x) \wedge \forall x\,Q(x)$	I∧, 5, 6.

- Remover el cuantificador universal en 1 permite separar $P(x)$ de $Q(x)$.

- Como x no aparece libre en la hipótesis, es un elemento arbitrario, por lo tanto se pueden deducir $\forall x\,P(x)$ y $\forall x\,Q(x)$.

Ejemplo: Consideremos los predicados:

$C(x)$: x está en una clase
$L(x)$: x ha leído un libro
$P(x)$: x pasó el examen

$$\exists x(C(x) \wedge \neg L(x)) \wedge \forall x(C(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge \neg L(x))$$

a

1- $\exists x(C(x) \wedge \neg L(x))$ Hipótesis
2- $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$ Hipótesis
3- $C(a) \wedge \neg L(a)$ IE, 1.
4- $C(a) \rightarrow P(a)$ IU, 2
5- $C(a)$ E$\wedge$, 3
6 - $P(a)$ MP, 4, 5
7 - $\neg L(a)$ E$\wedge$, 3
8 $P(a) \wedge \neg L(a)$ I$\wedge$, 6, 7
9 - $\exists(x)(P(x) \wedge \neg L(x))$ GE, 8

Ejemplo: Demostrar:

$$(P(x) \to \forall y\, Q(x,y)) \to \forall y\, (P(x) \to Q(x,y))$$

1-	$P(x) \to \forall y\, Q(x,y)$	Hipótesis.
2-	$P(x)$	Suposición
3-	$\forall y\, Q(x,y)$	M.P. 1,2.
4	$Q(x,\underline{y})$	I U, 3
5	$P(x) \to Q(x,\underline{y})$	I→, 2-4
6	$\forall y\, (P(x) \to Q(x,y))$	G.U. 5.

4.5- Predicados y tipos

Dominios de interpretación: están compuestos de diversas clases bien determinadas de objetos.

- Se puede especificar alguna propiedad acerca de todos los individuos de cierta clase de objetos en el universo.

- Esto se hace mediante una forma de predicados llamados calificadores o tipos, los cuales denotan clases de objetos.

Propiedades de un tipo específico de objeto:
Utilizamos juicio universal afirmativo

Ejemplo: Universo: frutas.

propiedad de los limones: $A(x)$: x es ácido.

$\forall x\, A(x)$: incorrecto, incluye a todas las frutas.

$\forall x\,(L(x) \rightarrow A(x))$, $L(x)$: x es un limón.

Propiedades de algunos objetos de un tipo particular

Utilizamos juicio existencial afirmativo

$\exists x(N(x) \wedge A(x))$: algunas naranjas son ácidas

Notación especial:

$\forall x : L. A(x)$ en lugar de $\forall x(L(x) \to A(x))$

$\exists x : N. A(x)$ en lugar de $\exists x(N(x) \wedge A(x))$

Ejemplo: "Para todo número real existe un número natural mayor que él"

Sin tipos: $\forall x \exists y (x < y)$ - (no da información necesaria)

Con juicios afirmativos: $\forall x(R(x) \to \exists y(N(y) \wedge x < y))$

Con tipos abreviados: $\forall x : R. \exists y : N. x < y$

Lenguajes fuertemente tipificados, o, tipados.

- Tienen reglas sintácticas que manejan los tipos de las variables. (Haskell, Java, C++, Pascal)

Ejemplo: Especificación de los números naturales

$N(x)$, y sea $s(x)$ la función sucesor

El 0 es un número natural: $N(0)$ o $0:N$

El sucesor de un natural es un natural

$\forall x:N.(N(s(x)))$ o $\forall x:N.(s(x):N)$

La suma de dos naturales es un natural

$\forall x:N.\forall y:N.(N(x+y))$ $\quad (x+y):N$

El producto de dos naturales es un natural

$\forall x:N.\forall y:N.(N(x*y))$

El sucesor es una función inyectiva:

$\forall x:N.\forall y:N(s(x)=s(y)\rightarrow x=y)$

Existe un número natural menor o igual que todos los números naturales

$\exists y N.\forall x N.\ y\leq x$