

Estructuras Discretas

Tarea 4

Fecha de entrega: lunes 25 de septiembre de 2023

Profesor: Nestaly Marín Nevárez

Ayudantes de teoría: Eduardo Pereyra Zamudio

Ricardo López Villafán

Ayudantes de laboratorio: Edgar Mendoza León

David Valencia Rodríguez

Resuelva de manera limpia y ordenada los siguientes ejercicios. Indique claramente el número de pregunta que se está resolviendo.

1. Los siguientes razonamientos incompletos siguen el patrón de Leibniz. Llene las partes que faltan y escriba en qué consiste la expresión E (Es decir, diga quién es E y quiénes son X y Y .) *1 punto*

$$a) \frac{p \rightarrow q \quad \leftrightarrow \quad \neg q \rightarrow \neg p}{(p \rightarrow q) \rightarrow p \quad \leftrightarrow \quad ?} \quad b) \frac{b + c = x + y}{x + y + w = ?}$$

2. Justifique la siguiente equivalencia lógica mostrando la instancia explícita de la regla de Leibniz y/o la sustitución textual utilizada en cada paso. *3 puntos*

$$\blacksquare (P \rightarrow Q) \wedge (Q \vee P) \equiv Q$$

3. Utilizando la tabla de equivalencias dada en clase, demuestre las siguientes equivalencias lógicas mediante razonamiento ecuacional. Justifique cada paso escribiendo a la derecha de cada expresión obtenida en el proceso el nombre de la regla que se aplicó para obtenerla (no es necesario hacer explícitas las aplicaciones de la regla de Leibniz ni las sustituciones textuales). *6 puntos*

$$a) (A \vee B) \rightarrow Q \equiv (A \rightarrow Q) \wedge (B \rightarrow Q)$$

$$b) (A \wedge B) \rightarrow Q \equiv (A \rightarrow Q) \vee (B \rightarrow Q)$$

$$c) (A \wedge B) \rightarrow Q \equiv A \rightarrow (B \rightarrow Q)$$

$$d) (\neg B \vee A) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B) \equiv B$$

1. Los siguientes razonamientos incompletos siguen el patrón de Leibniz. Llene las partes que faltan y escriba en qué consiste la expresión E (Es decir, diga quién es E y quienes son X y Y .)

$$a) \frac{p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p}{(p \rightarrow q) \rightarrow p \leftrightarrow ?} \quad b) \frac{b + c = x + y}{x + y + w = ?}$$

Regla de Leibniz

$$X = Y$$

$$E[z := X] = E[z := Y]$$

$$a) \frac{p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p}{(p \rightarrow q) \rightarrow p \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow p}$$

$$E \text{ es } (z \rightarrow p)$$

$$X \text{ es } p \rightarrow q$$

$$Y \text{ es } \neg p \rightarrow \neg q$$

$$E[z := X] \text{ es}$$

$$(z \rightarrow p)[z := p \rightarrow q]$$

$$E[z := Y] \text{ es}$$

$$(z \rightarrow p)[z := \neg q \rightarrow \neg p]$$

$$b) \frac{b + c = x + y}{x + y + w = ?}$$

por conmutatividad de $=$

$$\text{es } \frac{x + y = b + c}{x + y + w = b + c + w}$$

$$x + y + w = b + c + w$$

donde

$$E \text{ es } (z + w)$$

$$X \text{ es } x + y$$

$$Y \text{ es } b + c$$

2. Justifique la siguiente equivalencia lógica mostrando la instancia explícita de la regla de Leibniz y/o la sustitución textual utilizada en cada paso.

$$\blacksquare (P \rightarrow Q) \wedge (Q \vee P) \equiv Q$$

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \vee P)$$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (Q \vee P)$$

$$\equiv (Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee P)$$

$$\equiv Q \vee (\neg P \wedge P)$$

Usando eliminación de operadores y Leibniz

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \vee P) \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (Q \vee P)$$

Usando Conmutatividad de \vee

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

y sustituyendo $[P, Q := \neg P, Q]$

$$\neg P \vee Q \equiv Q \vee \neg P$$

$$(\neg P \vee Q) \wedge (Q \vee P) \equiv (Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee P)$$

Usando distributividad

$$(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \equiv P \vee (Q \wedge R)$$

y sustituyendo $[P, Q, R := Q, \neg P, P]$

$$(Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee P) \equiv Q \vee (\neg P \wedge P)$$

Usando conmutatividad de \wedge

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

y sustituyendo $[P, Q := \neg P, P]$

$$\equiv Q \vee (P \wedge \neg P)$$

$$\equiv Q \vee \text{false}$$

$$\equiv Q.$$

$$\neg P \wedge P \equiv P \wedge \neg P$$

$$Q \vee (\neg P \wedge P) \equiv Q \vee (P \wedge \neg P)$$

Usando contradicción

$$P \wedge \neg P \equiv \text{false}$$

$$Q \vee (P \wedge \neg P) \equiv Q \vee (\text{false})$$

Usando elemento identidad

$$P \vee \text{false} \equiv P$$

y sustituyendo $[P := Q]$

$$Q \vee \text{false} \equiv Q$$

3. Utilizando la tabla de equivalencias dada en clase, demuestre las siguientes equivalencias lógicas mediante razonamiento ecuacional. Justifique cada paso escribiendo a la derecha de cada expresión obtenida en el proceso el nombre de la regla que se aplicó para obtenerla (no es necesario hacer explícitas las aplicaciones de la regla de Leibniz ni las sustituciones textuales).

$$a) (A \vee B) \rightarrow Q \equiv (A \rightarrow Q) \wedge (B \rightarrow Q)$$

$$b) (A \wedge B) \rightarrow Q \equiv (A \rightarrow Q) \vee (B \rightarrow Q)$$

$$c) (A \wedge B) \rightarrow Q \equiv A \rightarrow (B \rightarrow Q)$$

$$d) (\neg B \vee A) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B) \equiv B$$

$$a) (A \vee B) \rightarrow Q$$

$$\equiv \neg(A \vee B) \vee Q \quad \text{Elim. oper.}$$

$$\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee Q \quad \text{De Morgan}$$

$$\equiv (\neg A \vee Q) \wedge (\neg B \vee Q) \quad \text{Distributividad}$$

$$\equiv (A \rightarrow Q) \wedge (B \rightarrow Q) \quad \text{Elim. oper.}$$

$$b) (A \wedge B) \rightarrow Q$$

$$\equiv \neg(A \wedge B) \vee Q \quad \text{Elim. oper.}$$

$$\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee Q \quad \text{De Morgan}$$

$$\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee Q \vee Q \quad \text{Idempotencia } \vee$$

$$\equiv (\neg A \vee Q) \vee (\neg B \vee Q) \quad \text{Asoc. y Conmut.}$$

$$\equiv (A \rightarrow Q) \vee (A \rightarrow Q) \quad \text{Elim. oper.}$$

$$c) (A \wedge B) \rightarrow Q$$

$$\equiv \neg(A \wedge B) \vee Q$$

Elim. oper

$$\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee Q$$

De Morgan

$$\equiv \neg A \vee (\neg B \vee Q)$$

Asociatividad

$$\equiv A \rightarrow (\neg B \vee Q)$$

Elim. oper.

$$\equiv A \rightarrow (B \rightarrow Q)$$

Elim. oper.

$$d) (\neg B \vee A) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$$

$$\equiv \neg(\neg B \vee A) \vee \neg(\neg A \vee \neg B) \quad \text{Elim. oper.}$$

$$\equiv (B \wedge \neg A) \vee (A \wedge B)$$

De Morgan.

$$\equiv B \wedge (A \vee \neg A)$$

Distributividad

$$\equiv B \wedge \text{true}$$

Tercero excluido

$$\equiv B$$

Identidad.