Estructuras Discretas
Tarea 10
Fecha de entrega: martes 28 de noviembre de 2023

Profesor: Nestaly Marín Nevárez
Ayudantes de teoría: Eduardo Pereyra Zamudio
Ricardo López Villafán
Ayudantes de laboratorio: Edgar Mendoza León
David Valencia Rodríguez

Resuelva de manera limpia y ordenada los siguientes ejercicios. Indique claramente el número de pregunta que se esta resolviendo.

1. Demuestre que para cualquier número natural n, el número $2^{2^n} - 1$ es múltiplo de 3. *2 puntos*

2. Demuestre que cualquier cantidad mayor a 29 pesos se puede formar combinando monedas de 6, 10 y 15 pesos. (Por ejemplo, $31 = 15 + 10 + 6$ y $32 = 10 + 10 + 6 + 6$.) *2 puntos*

3. Demuestre que $7n < 2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 6$. *2 puntos*

4. Demuestre que para todo entero z, $z < 2^z$. (Sugerencia: considerar por separado el caso cuando z es negativo y el caso cuando z es no negativo.) *2 puntos*

5. Los números de Fibonacci están definidos de forma recursiva como $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo $n \geq 2$. Probar el siguiente enunciado para todo número natural n. *2 puntos*

   - $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$

1. Demuestre que para cualquier número natural n, el número $2^{2n} - 1$ es múltiplo de 3. *2 puntos*

Dem.: Inducción sobre n

Base: $P(0)$

$$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 3(0)$$

H.I.: $P(n)$: Supongamos que $2^{2n} - 1$ es múltiplo de 3.

P.D.: $P(n+1)$: P.D: $2^{2(n+1)} - 1$ es múltiplo de 3.

$$\begin{aligned}
2^{2(n+1)} - 1 &= 2^n \cdot 2^2 - 1 \\
&= (2^n - 1 + 1) \cdot 2^2 - 1 \\
&= (3k + 1) \cdot 4 - 1 \\
&= 12k + 4 - 1 \\
&= 12k + 3 \\
&= 3(4k + 1)
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

2. Demuestre que cualquier cantidad mayor a 29 pesos se puede formar combinando monedas de 6, 10 y 15 pesos. (Por ejemplo, $31 = 15 + 10 + 6$ y $32 = 10 + 10 + 6 + 6$.) *2 puntos*

Dem.: Inducción sobre n (inducción completa).

H.I.: Supongamos que cualquier k con $29 < k < n$ se puede formar con monedas de 6, 10 y 15 pesos.

P.I.: P.D.: Demostrar que n se puede forman con monedas de 6, 10 y 15 pesos.

- Sea $n \geq 30$ y supongamos que $m = n-6$ es mayor a 29. Entonces tenemos $29 < m < n$, y por H.I. m se puede formar con monedas de 6, 10 y 15 pesos.

- Supongamos entonces que $m = n-6$ no es mayor a 29. Tenemos los siguientes subcasos:

$30 = 5(6), 3(10), 2(15)$	$33 = 3(6) + 15$
$31 = 6 + 15 + 10$	$34 = 4(6) + 10$
$32 = 2(6) + 2(10)$	$35 = 2(10) + 15$

- En cada caso obtenemos n como combinación de monedas de 6, 10 y 15 pesos. ∎

* También se puede probar con inducción "simple":

Dem.: Inducción sobre n

Base: $P(30)$:

$$30 = 5(6) = 3(10) = 2(15)$$

H.I.: $P(n)$: Supongamos que $n > 29$ puede ser formado con monedas de 6, 10 y 15 pesos.

P.I.: $P(n+1)$: Demostrar que $n+1$ se puede formar con monedas de 6, 10 y 15 pesos.

- Sea $n+1 > 29$. Por H.I., sabemos que n puede ser formado con monedas de 6, 10 y 15 pesos. Mostraremos que se puede obtener $n+1$ mediante intercambios en el conjunto que forma n.

- Si para formar n se usaron dos monedas de

10, entonces $n+1 = n - 2(10) + 6 + 15$, es decir, quitando de las monedas que forman n dos monedas de 10 y agregando una de 6 y otra de 15.

- Si no se usaron dos monedas de 10 pero se usó al menos una de 15, entonces $n+1 = n - 15 + 6 + 10$.

- En el caso restante, no se usaron monedas de 15 y se usó a lo más una moneda de 10. Por lo tanto, se usaron al menos cuatro monedas de 6 para formar n pesos (porque $10 + 3(6) = 28 < 29$). En este caso hacemos: $n+1 = n - 4(6) + 10 + 15$.

$\blacksquare$

* Es decir, por H.I. n se puede expresar como:

$$n = x(6) + y(10) + z(15)$$

y consideramos los casos:

- $y \geq 2$
- $z \geq 1$ (y $y < 2$)
- $y < 2 \wedge z = 0$ (En cuyo caso $x \geq 4$).

3. Demuestre que $7n < 2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 6$. *2 puntos*

Dem.: Inducción sobre n.

Base: $P(7)$

$$3^7 = 2187 \text{ mientras que } 7! = 5040.$$

Se cumple el caso base.

H.I.: $P(n)$: Supongamos que $3^n < n!$ para un $n > 6$.

P.I.: $P(n+1)$. P.D.: $3^{n+1} < (n+1)!$

$$
\begin{aligned}
3^{(n+1)} &= 3 \cdot 3^n \\
&< 3 \cdot n! && \text{H.I.} \\
&< (n+1) \cdot n! && \text{por que } n+1 > 3 \\
&= (n+1)! && \text{def. factorial.}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

- Sabemos que $(n+1) > 3$ porque el teorema se cumple para $n > 6$.

4. Demuestre que para todo entero z, $z < 2^z$. (Sugerencia: considerar por separado el caso cuando z es negativo y el caso cuando z es no negativo.) *2 puntos*

Dem.: Inducción sobre n.

Base: $P(0)$

$$0 < 1 = 2^0.$$

H.I.: $P(z)$: Supongamos que $z < 2^z$ para z entero.

Caso negativo

P.I.: $P(z-1)$. P.D.: $z-1 < 2^{z-1}$.

* Sabemos que $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$ para x positivo.

Por lo tanto, $2^{-x} < 2^{-y}$ si $y < x$.

Como z es negativo, $2^z < 2^{z-1}$

$$z-1 < 2^z - 1 \qquad \text{H.I.}$$

$$< 2^z$$

$$< 2^{z-1}. \qquad \text{Por } *$$

Caso positivo

P.I.: $P(z+1)$. P.D.: $z+1 < 2^{z+1}$.

$$
\begin{aligned}
z+1 &< 2^{z}+1 && \text{H.I} \\
&= 2^{z}+2^{0} \\
&\leq 2^{z} * 2 \\
&= 2^{z+1}
\end{aligned}
$$

Al unir los casos negativo y positivo obtenemos la propiedad $z < 2^{z}$ para todo entero z.

5. Los números de Fibonacci están definidos de forma recursiva como $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo $n \geq 2$. Probar el siguiente enunciado para todo número natural n. *2 puntos*

- $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$

Dem. Inducción en n.

Base $P(1)$

- Sabemos que $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$ y por lo tanto $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

$$\sum_{k=1}^{1} F_k = F_1 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1.$$

H.I.: $P(n)$. Suponer que $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$

P.I.: $P(n+1)$. P.D.: $\sum_{k=1}^{n+1} F_k = F_{n+3} - 1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_k = \sum_{k=1}^{n} F_k + F_{n+1} \qquad \text{def } \Sigma$$

$$= F_{n+2} - 1 + F_{n+1} \qquad \text{H.I.}$$

$$= F_{n+3} - 1$$

■