Tarea 3 - Estructuras Discretas

1 a) $p \wedge q \rightarrow r \rightarrow s$, $\{p=1, r=1, s=1\}$

(Instanciando el estado en la expresión

$$(p \wedge q \rightarrow (r \rightarrow s))[p,r,s := 1,1,1]):$$

$$1 \wedge q \rightarrow (1 \rightarrow 1) \equiv q \rightarrow 1 \equiv 1$$

b) $p \wedge q \rightarrow r \rightarrow s$, $\{p=0\}$

$$0 \wedge q \rightarrow (r \rightarrow s) \equiv 0 \rightarrow (r \rightarrow s) \equiv 1$$

c) $\neg((p \vee q) \wedge r) \leftrightarrow \neg(\neg r \rightarrow q)$, $\{q=0, r=0\}$

$$\neg((p \vee 0) \wedge 0) \leftrightarrow \neg(\neg 0 \rightarrow 0)$$

$$\equiv \neg(p \wedge 0) \leftrightarrow \neg(1 \rightarrow 0)$$

$$\equiv \neg 0 \leftrightarrow \neg 0 \equiv 1 \leftrightarrow 1 \equiv 1$$

d) $\neg((p \vee q) \wedge r) \leftrightarrow \neg(\neg r \rightarrow q)$, $\{p=1, r=1\}$

$$\neg((1 \vee q) \wedge 1) \leftrightarrow \neg(\neg 1 \rightarrow q) \equiv \neg(1 \wedge 1) \leftrightarrow \neg(0 \rightarrow q)$$

$$\equiv \neg 1 \leftrightarrow \neg 1 \equiv 0 \leftrightarrow 0 \equiv 1$$

2- a) $2x + 3y * z - 3z[z := x]$

$= 2x + 3y * z - 3(x)$

$= 2x + 3y * z - 3x$

b) $(2x + 3y * z - 3z)[z := x]$

$= (2x + 3y * (x) - 3(x))$

$= 2x + 3y * x - 3x$

c) $(2x + 3y * z - 3z)[z, x := x, z]$

$= (2(z) + 3y * (x) - 3(x))$

$= 2z + 3y * x - 3x$

d) $(2x + 3y * z - 3z)[z := x][x := y]$

$= (2x + 3y * (x) - 3(x))[x := y]$

$= (2(y) + 3y * ((y)) - 3((y)))$

$= 2y + 3y * y - 3y$

3- a) $((p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)) \leftrightarrow (r \vee s)$

- Equivalencia, el único conectivo $\leftrightarrow$ es el principal, con rango izquierdo $((p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s))$ y rango derecho $(r \vee s)$.

- Justificación 1: los paréntesis explícitos agrupan los operandos.

- Justificación 2: Partir del esquema y utilizar sust. textual.

$$(A \leftrightarrow B)[A, B := (p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s), r \vee s]$$

b) $r \wedge s \rightarrow p \vee q \vee (r \wedge t)$

- Implicación con único conectivo $\rightarrow$ como el principal, rango izquierdo $r \wedge s$ y rango derecho $p \vee q \vee (r \wedge t)$

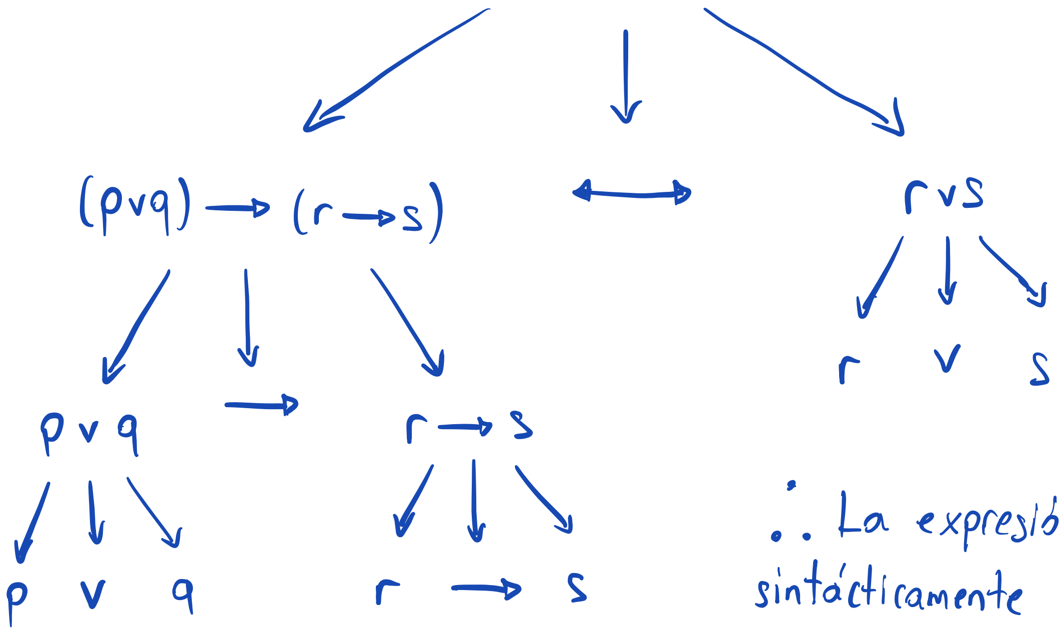
- Justificación 1: la precedencia y asociatividad de los operadores da los siguientes paréntesis implícitos:

$$(r \wedge s) \rightarrow ((p \vee q) \vee (r \wedge t))$$

- Justificación 2: Partir del esquema y utilizar sust. textual.

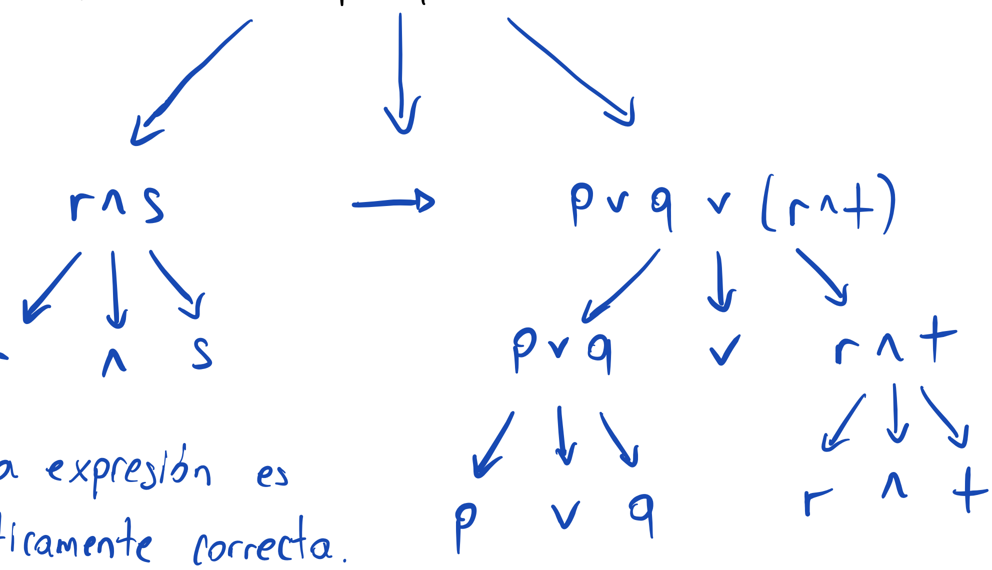
$(A \to B)[A, B := r \wedge s,\ p \vee q \vee (r \wedge t)]$

4 - a) $((p \vee q) \to (r \to s)) \leftrightarrow (r \vee s)$



∴ La expresión es sintácticamente correcta.

b) $r \wedge s \to p \vee q \vee (r \wedge t)$



∴ La expresión es sintácticamente correcta.

5- a) $A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E \wedge F \wedge G \rightarrow C \wedge E$

- Partimos de la tautología $A \wedge B \rightarrow B$

$(A \wedge B \rightarrow B)[A, B := A \wedge B \wedge D \wedge F \wedge G, C \wedge E]$

$= ((A \wedge B \wedge D \wedge F \wedge G) \wedge (C \wedge E) \rightarrow (C \wedge E))$

$= A \wedge B \wedge D \wedge F \wedge G \wedge C \wedge E \rightarrow C \wedge E$

$= A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E \wedge F \wedge G \rightarrow C \wedge E$

$\therefore$ Por el teorema de sustitución (2.10), la expresión a) es una tautología.

b) $(p \wedge q) \vee (s \rightarrow t) \leftrightarrow \neg(p \wedge q) \rightarrow (s \rightarrow t)$

- Usaremos la tautología $P \vee Q \leftrightarrow \neg P \rightarrow Q$ (notemos que es la regla de Eliminación de operadores $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ con la proposición P negada).

$$(P \vee Q \longleftrightarrow \neg P \longrightarrow Q)[P, Q := p \wedge q,\ s \longrightarrow t]$$

$$= ((p \wedge q) \vee (s \longrightarrow t) \longleftrightarrow \neg (p \wedge q) \longrightarrow (s \longrightarrow t))$$

$$= (p \wedge q) \vee (s \longrightarrow t) \longleftrightarrow \neg (p \wedge q) \longrightarrow (s \longrightarrow t)$$

$\therefore$ Por el teorema de sustitución (2.10), la expresión b) es una tautología.