Estructuras Discretas
Tarea 5
Fecha de entrega: lunes 16 de octubre de 2023

Profesor: Nestaly Marín Nevárez
Ayudantes de teoría: Eduardo Pereyra Zamudio
Ricardo López Villafán
Ayudantes de laboratorio: Edgar Mendoza León
David Valencia Rodríguez

Resuelva de manera limpia y ordenada los siguientes ejercicios. Indique claramente el número de pregunta que se esta resolviendo.

1. Para cada una de las siguientes fórmulas, determine si son o no satisfacibles. En caso de serlo, muestre un modelo para cada una de ellas, y en caso de no serlo, demuestre que cada estado evalúa a `falso`. *2 puntos*

   a) $(P \lor Q) \land \neg P \land \neg Q$.

   b) $\neg(P \lor Q) \to ((P \land R) \leftrightarrow ((S \land T) \to (U \lor P)))$.

2. Decida si los siguientes conjuntos son satisfacibles. En caso de que sean satisfacibles, exponga un modelo que satisfaga el conjunto. En caso contrario, muestre que no existe un modelo para el conjunto. *3 puntos*

   a) $\Gamma = \{p \to q,\ p \lor (r \land s),\ q \to t\}$

   b) $\Gamma = \{p \lor q \lor r,\ \neg(r \lor \neg s),\ s \leftrightarrow t,\ p \to \neg t,\ q \to (p \lor \neg t)\}$.

3. Para los siguientes argumentos, decida si son correctos usando interpretaciones. En caso de no serlo, dé una interpretación que haga verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión (un contraejemplo). *5 puntos*

   a) $p \to q,\ p \lor r,\ \neg(r \land s) / \therefore (p \to q) \to (q \lor \neg s)$

   b) $p \lor q,\ \neg(p \land r),\ \neg q / \therefore r \to s$

   c) $p \to (q \lor r),\ \neg r / \therefore (p \to q)$

   d) $\neg q \to \neg r,\ \neg r \to \neg p,\ \neg p \to \neg q / \therefore \neg q \leftrightarrow r$

1. Para cada una de las siguientes fórmulas, determine si son o no satisfacibles. En caso de serlo, muestre un modelo para cada una de ellas, y en caso de no serlo, demuestre que cada estado evalúa a `falso`.

   a) $(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$.

   b) $\neg(P \vee Q) \rightarrow ((P \wedge R) \leftrightarrow ((S \wedge T) \rightarrow (U \vee P)))$.

a) Supongamos que existe un modelo $\mathcal{I}$ para la fórmula. Como $\neg P \wedge \neg Q$ es una subfórmula que debe cumplirse en $\mathcal{I}$ tenemos: $\mathcal{I}(\neg P) = \mathcal{I}(\neg Q) = 1$, por lo que $\mathcal{I}(P) = \mathcal{I}(Q) = 0$. Esto implica que $\mathcal{I}(P \vee Q) = 0$, por lo que tenemos $\mathcal{I}((P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q) = 0$. Notemos que si $\mathcal{I}(\neg P) = 0$ o $\mathcal{I}(\neg Q) = 0$ entonces también se cumple $\mathcal{I}((P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q) = 0$. Por lo tanto, la fórmula a) es insatisfacible

b) $\neg(P \vee Q) \rightarrow ((P \wedge R) \leftrightarrow ((S \wedge T) \rightarrow (U \vee P)))$.

- Notemos que el esquema principal es una implicación con antecedente $\neg(P \vee Q)$. Tomemos entonces un $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(P) = 1$ o $\mathcal{I}(Q) = 1$. Entonces se cumple $\mathcal{I}(P \vee Q) = 1$, con lo que tenemos $\mathcal{I}(\neg(P \vee Q)) = 0$.
- Así obtenemos $\mathcal{I}(0 \rightarrow ((P \wedge R) \leftrightarrow ((S \wedge T) \rightarrow (U \vee P)))) = 1$ ya que 0 implica cualquier cosa. De modo que la fórmula b) sí es satisfacible.

2. Decida si los siguientes conjuntos son satisfacibles. En caso de que sean satisfacibles, exponga un modelo que satisfaga el conjunto. En caso contrario, muestre que no existe un modelo para el conjunto.

   a) $\Gamma = \{p \to q,\, p \vee (r \wedge s),\, q \to t\}$
   b) $\Gamma = \{p \vee q \vee r,\, \neg(r \vee \neg s),\, s \leftrightarrow t,\, p \to \neg t,\, q \to (p \vee \neg t)\}$.

a) Supongamos que existe un modelo I para Γ.
Supongamos primero que $I(p)=0$. Entonces, como $I(p \vee (r \wedge s))=1$, tenemos $I(r \wedge s)=1$, $I(r)=1$ e $I(s)=1$.
Como $I(p)=0$, podemos asignar $I(q)=0$ y se cumplen $I(p \to q)=1$ e $I(q \to t)=1$.
$\therefore \Gamma$ se satisface en $I(p)=I(q)=0$, $I(r)=I(s)=1$ con $I(t)$ libr

b) $\Gamma = \{p \vee q \vee r,\, \neg(r \vee \neg s),\, s \leftrightarrow t,\, p \to \neg t,\, q \to (p \vee \neg t)\}$.

Supongamos que existe un modelo I para Γ.
- Como $I(\neg(r \vee \neg s))=1$, entonces $I(\neg r \wedge s)=1$, por lo que $I(r)=0$ e $I(s)=1$. Entonces, como $I(s \leftrightarrow t)=1$, tenemos $I(t)=1$ e $I(\neg t)=0$. Por $I(p \to \neg t)=1$, debemos tener $I(p)=0$. Entonces $I(p \vee \neg t)=0$, y dado que $I(q \to (p \vee \neg t))=1$, tenemos $I(q)=0$.
$\therefore$ - Pero entonces, como $I(p)=I(q)=I(r)=0$, tenemos $I(p \vee q \vee r)=0$, por lo que Γ no es satisfacible.

3. Para los siguientes argumentos, decida si son correctos usando interpretaciones. En caso de no serlo, dé una interpretación que haga verdaderas a las premisas y falsa a la conclusión (un contraejemplo).

   a) $p \to q,\ p \lor r,\ \neg(r \land s) / \therefore (p \to q) \to (q \lor \neg s)$

   b) $p \lor q,\ \neg(p \land r),\ \neg q / \therefore r \to s$

   c) $p \to (q \lor r),\ \neg r / \therefore (p \to q)$

   d) $\neg q \to \neg r,\ \neg r \to \neg p,\ \neg p \to \neg q / \therefore \neg q \leftrightarrow r$

a) $p \to q,\ p \lor r,\ \neg(r \land s) / \therefore (p \to q) \to (q \lor \neg s)$

Método directo

1-	$I(p \to q) = 1$	Premisa
2-	$I(p \lor r) = 1$	Premisa
3-	$I(\neg(r \land s)) = 1$	Premisa
4-	$I(r \land s) = 0$	Por 3
5-	$I(p) = 1$	Supuesto
6-	$I(q) = 1$	Por 1 y 5
7-	$I(q \lor \neg s) = 1$	Por (1) y 6
8	$I((p \to q) \to (q \lor \neg s)) = 1$	Por 1 y 7
9-	$I(p) = 0$	Supuesto
10-	$I(r) = 1$	Por 2 y 9
11-	$I(s) = 0$	Por 4 y 10
12-	$I(\neg s) = 1$	Por 11
13-	$I(q \lor \neg s) = 1$	Por 12
14-	$I((p \to q) \to (q \lor \neg s)) = 1$	Por 13

Obtenemos la expresión deseada en los dos casos posibles para p.

$\therefore$ El argumento es correcto

$a)\ p \to q,\ p \vee r,\ \neg(r \wedge s) / \therefore (p \to q) \to (q \vee \neg s)$

1-	$I(p \to q) = 1$	Premisa Método indirecto
2-	$I(p \vee r) = 1$	Premisa
3-	$I(\neg(r \wedge s)) = 1$	Premisa
4-	$I((p \to q) \to (q \vee \neg s)) = 0$	Refutación
5-	$I(q \vee \neg s) = 0$	Por 4
6-	$I(q) = 0$	Por 5
7-	$I(\neg s) = 0$	Por 5
8-	$I(s) = 1$	Por 7
9-	$I(p) = 0$	Por 1 y 6
10-	$I(r) = 1$	Por 2 y 9
11-	$I(r \wedge s) = 0$	Por 3
12-	$I(s) = 0$	Por 10 y 11

8 y 11 se contradicen

$\therefore$ El argumento es correcto.

$b)\ p \vee q,\ \neg(p \wedge r),\ \neg q / \therefore r \rightarrow s$

Directo

1- $I(p \vee q) = 1$	Premisa
2- $I(\neg(p \wedge r)) = 1$	Premisa
3- $I(\neg q) = 1$	Premisa
4- $I(q) = 0$	Por 3
5- $I(p) = 1$	Por 1 y 3
6- $I(p \wedge r) = 0$	Por 2
7- $I(r) = 0$	Por 5 y 6
8- $I(r \rightarrow s) = 1$	Por 7

$\therefore$ Argumento correcto

Indirecto

1- $I(p \vee q) = 1$	Premisa
2- $I(\neg(p \wedge r)) = 1$	Premisa
3- $I(\neg q) = 1$	Premisa
4- $I(r \rightarrow s) = 0$	Refutación
5- $I(r) = 1$	Por 4
6- $I(p \wedge r) = 0$	Por 2
7- $I(p) = 0$	Por 5 y 6
8- $I(q) = 1$	Por 1 y 7
9- $I(\neg q) = 0$	Por 8

3 y 9 se contradicen

$\therefore$ Argumento correcto

c) $p \to (q \vee r), \neg r / \therefore (p \to q)$

Directo

1- $I(p \to (q \vee r)) = 1$ Premisa
2- $I(\neg r) = 1$ Premisa
3- $I(r) = 0$ Por 2
4- $I(p) = 0$ Supuesto
5- $I(p \to q) = 1$ Por 4
6- $I(p) = 1$ Supuesto
7- $I(q \vee r) = 1$ Por 1 y 7
8- $I(q) = 1$ Por 3 y 7
9- $I(p \to q) = 1$ Por 6 y 8

$\therefore$ Argumento correcto

1- $I(p \to (q \vee r)) = 1$ Premisa
2- $I(\neg r) = 1$ Premisa
3- $I(p \to q) = 0$ Refutación
4- $I(p) = 1$ Por 3
5- $I(q) = 0$ Por 3
7- $I(q \vee r) = 1$ Por 1 y 4
8- $I(r) = 0$ Por 2
9- $I(q) = 1$ Por 7 y 8

$\therefore$ Argumento correcto

$d)$ $\neg q \to \neg r, \neg r \to \neg p, \neg p \to \neg q / \therefore \neg q \leftrightarrow r$

Directo

1- $I(\neg q \to \neg r) = 1$ Premisa

2- $I(\neg r \to \neg p) = 1$ Premisa

3- $I(\neg p \to \neg q) = 1$ Premisa

4- $I(\neg q) = 1$ Suposición

5- $I(\neg r) = 1$ Por 1 y 4

6- $I(\neg p) = 1$ Por 2 y 5

7- $I(r) = 0$ Por 5

8- $I(\neg q \leftrightarrow r) = 0$ Por 4 y 7

$\therefore$ Argumento incorrecto

Contraejemplo:

$I(p) = I(q) = I(r) = 0$

Indirecto

1- $I(\neg q \to \neg r) = 1$ Premisa

2- $I(\neg r \to \neg p) = 1$ Premisa

3- $I(\neg p \to \neg q) = 1$ Premisa

4- $I(\neg q \leftrightarrow r) = 0$ Refutación

5- $I(\neg q) = 1$ Suposición

6- $I(\neg r) = 1$ Por 1 y 5

7- $I(\neg p) = 1$ Por 2 y 6

$\therefore$ Argumento incorrecto

Contraejemplo:

$I(p) = I(q) = I(r) = 0$