Estructuras Discretas
Examen 3
Jueves 14 de Diciembre de 2023

Profesor: Nestaly Marín Nevárez
Ayudantes de teoría: Eduardo Pereyra Zamudio
Ricardo López Villafán
Ayudantes de laboratorio: Edgar Mendoza León
David Valencia Rodríguez

Resuelve de manera limpia y ordenada los siguientes ejercicios. Indica claramente el número de pregunta que se esta resolviendo.

2 puntos 1. Demuestra, usando inducción, que para todo número natural $n \geq 1$ se cumple:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1$$

2 puntos 2. Demuestra, utilizando inducción, que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible entre nueve, es decir, que $(n-2)^3 + (n-1)^3 + n^3 = 9\,(x)$ para algún $x \in \mathbb{N}$.

1 punto 3. Define de manera recursiva una función $\text{lop}(A)$ que devuelva una lista con los operadores lógicos en una fórmula de lógica proposicional A.

5 puntos 4. Define de manera recursiva las siguientes funciones:

a) Una función $\text{aplana}(T)$ que reciba un árbol binario T y regrese una lista con las etiquetas de los nodos que lo componen. (*1 punto*)

b) Una función $\text{nn}(T)$ que reciba un árbol binario T y regrese el número de nodos que lo componen. (*1 punto*)

c) Una función $\text{long}(xs)$ que reciba una lista xs y regrese su longitud. (*1 punto*)

Luego, demuestra, usando inducción estructural y las funciones previamente definidas, que la longitud de la lista que regresa $\text{aplana}(T)$ es igual al número de nodos de T, es decir, demuestra que $\text{long}(\text{aplana}(T)) = \text{nn}(T)$.

2 puntos 1. Demuestra, usando inducción, que para todo número natural $n \geq 1$ se cumple:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1$$

Dem.- Inducción sobre n.

Base- $P(1)$- P.D.: $\sum_{k=1}^{1} k(k!) = 2! - 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k(k!) = 1 \cdot (1!) = 1 \cdot 1 = 2 - 1 = 2! - 1$$

H.I.: Supongamos que $\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1$

P.I: P.D.: $\sum_{k=1}^{n+1} k(k!) = (n+2)! - 1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k!) = \sum_{k=1}^{n} k(k!) + (n+1)(n+1)! \qquad \text{def } \Sigma$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \qquad \text{H.I.}$$

$$= (n+1)!\,(n+2) - 1$$

$$= (n+2)! \qquad \text{def. fact.}$$

2 puntos 2. Demuestra, utilizando inducción, que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible entre nueve, es decir, que $(n-2)^3 + (n-1)^3 + n^3 = 9(x)$ para algún $x \in \mathbb{N}$.

Dem.] Inducción sobre n.

- Notemos que existen 3 naturales consecutivos $(n-2)+(n-1)+n$ a partir de $n \geq 2$.

Base. $P(2)$

$$0^3 + 1^3 + 2^3 = 9$$

H.I.- Supongamos que para para algún $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $(n-2)^3 + (n-1)^3 + n^3$ es divisible entre 9.

P.I. P.D.: $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ es divisible entre 9.

- Sean $m = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ y

$$m' = (n-2)^3 + (n-1)^3 + n^3$$

- Entonces $m = m' - (n-2)^3 + (n+1)^3$, y por H.I., $m' = 9x$ para algún $x \in \mathbb{N}$.

- Así: $m = 9x - (n-2)^3 + (n+1)^3$

$$= 9x - (\cancel{n^3} - 6n^2 + 12n - 8) + (\cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + 1)$$

$$= 9x + 9n^2 - 9n + 9$$

$$= 9(x + n^2 - n + 1)$$

■

1 punto 3. Define de manera recursiva una función lop(A) que devuelva una lista con los operadores lógicos en una fórmula de lógica proposicional A.

- $lop(p) = [\,]$
- $lop(true) = [\,]$
- $lop(false) = [\,]$
- $lop(\neg A) = (\neg : lop(A))$
- $lop(A \wedge B) = (\wedge : lop(A) \sqcup lop(B))$
- $lop(A \vee B) = (\vee : lop(A) \sqcup lop(B))$
- $lop(A \to B) = (\to : lop(A) \sqcup lop(B))$
- $lop(A \leftrightarrow B) = (\leftrightarrow : lop(A) \sqcup lop(B))$

Ej:

$$lop(\neg(p \to \neg q \wedge (s \vee r))) = (\neg : lop(p \to \neg q \wedge (s \vee r)))$$

$$= (\neg : (\to : lop(p) \sqcup lop(\neg q \wedge (s \vee r))))$$

$$= (\neg : (\to : [\,] \sqcup (\wedge : lop(\neg q) \sqcup lop(s \vee r))))$$

$$= (\neg : (\to : (\wedge : (\neg : lop(q)) \sqcup (\vee : lop(s) \sqcup lop(r)))))$$

$$= (\neg : (\to : (\wedge : (\neg : [\,]) \sqcup (\vee : [\,] \sqcup [\,]))))$$

$$= (\neg : (\to : (\wedge : (\neg : (\vee : [\,]))))) = [\neg, \to, \wedge, \neg, \vee]$$

5 *puntos* 4. Define de manera recursiva las siguientes funciones:

a) Una función aplana(T) que reciba un árbol binario T y regrese una lista con las etiquetas de los nodos que lo componen. (*1 punto*)

b) Una función nn(T) que reciba un árbol binario T y regrese el número de nodos que lo componen. (*1 punto*)

c) Una función long(xs) que reciba una lista xs y regrese su longitud. (*1 punto*)

Luego, demuestra, usando inducción estructural y las funciones previamente definidas, que la longitud de la lista que regresa aplana(T) es igual al número de nodos de T, es decir, demuestra que long(aplana(T)) = nn(T).

Aplanar un árbol

- $aplana(void) = [\,]$
- $aplana(tree(T_1, c, T_2)) = (c : aplana(T_1) \sqcup aplana(T_2))$

Número de nodos de un árbol

- $nn(void) = 0$
- $nn(tree(T_1, c, T_2)) = 1 + nn(T_1) + nn(T_2)$

Longitud de una lista

- $long([\,]) = 0$
- $long((a : l)) = 1 + long(l)$

Concatenación de listas

- $[\,] \sqcup l_2 = l_2$
- $(a : l_1) \sqcup l_2 = (a : l_1 \sqcup l_2)$

Propiedad de longitud de concatenación:

Para dos listas xs, ys:

$$long(xs \sqcup ys) = long(xs) + long(ys)$$

Luego, demuestra, usando inducción estructural y las funciones previamente definidas, que la longitud de la lista que regresa aplana(T) es igual al número de nodos de T, es decir, demuestra que long(aplana(T)) = nn(T).

Dem.] - Inducción sobre T.

Base: $T = \text{void}$ P.D.: $\text{long}(\text{aplana}(\text{void})) = \text{nn}(\text{void})$

$$
\begin{aligned}
\text{long}(\text{aplana}(\text{void})) &= \\
&= \text{long}([\,]) && \text{def. aplana} \\
&= 0 && \text{def. long.} \\
&= \text{nn}(\text{void}) && \text{def. nn.}
\end{aligned}
$$

H.I.- Sean T_1 y T_2 árboles binarios arbitrarios. Supongamos que $\text{long}(\text{aplana}(T_1)) = \text{nn}(T_1)$ y que $\text{long}(\text{aplana}(T_2)) = \text{nn}(T_2)$.

P.I.: P.D.: $\text{long}(\text{aplana}(\text{tree}(T_1, c, T_2))) = \text{nn}(\text{tree}(T_1, c, T_2))$

$$
\begin{aligned}
&\text{long}(\text{aplana}(\text{tree}(T_1, c, T_2))) \\
&= \text{long}(c : \text{aplana}(T_1) \sqcup \text{aplana}(T_2)) && \text{def. aplana} \\
&= 1 + \text{long}(\text{aplana}(T_1) \sqcup \text{aplana}(T_2)) && \text{def. long.} \\
&= 1 + \text{long}(\text{aplana}(T_1)) + \text{long}(\text{aplana}(T_2)) && \text{prop. long. } \sqcup \\
&= 1 + \text{nn}(T_1) + \text{nn}(T_2) && \text{H.I.} \\
&= \text{nn}(\text{tree}(T_1, c, T_2)) && \text{def. nn}
\end{aligned}
$$