Estructuras Discretas
Tarea 9
Fecha de entrega: martes 21 de noviembre de 2023

Profesor: Nestaly Marín Nevárez
Ayudantes de teoría: Eduardo Pereyra Zamudio
Ricardo López Villafán
Ayudantes de laboratorio: Edgar Mendoza León
David Valencia Rodríguez

Resuelva de manera limpia y ordenada los siguientes ejercicios. Indique claramente el número de pregunta que se esta resolviendo.

1. Traduzca los siguientes enunciados a lógica de predicados. Indique de manera clara el universo de discurso, los predicados que utilizará, y a qué inciso corresponde cada fórmula. Defina un único universo de discurso para todos los predicados. *2 puntos*

   a) Existen a lo más dos dragones.
   b) Existen exactamente dos dragones.
   c) Sólo existe un grifo que es más fuerte que todos los dragones.
   d) Para todo dragón hay un grifo que es más fuerte que él.

2. Considere los siguientes predicados: *4 puntos*

   - $P(x)$ x es un número par.
   - $M(x,y)$ x es menor que y.
   - $D(x,y)$ la división de x entre y está dentro del conjunto.

   (Por ejemplo, la división de los números naturales 6 entre 2 es 3, así que $D(6,2)$ es verdadero en los números naturales. La división de los números enteros -5 entre 2 es $-5/2$, por lo que $D(-5,2)$ es falso en los números enteros, mientras que en el dominio de los números reales es verdadero.)

   Y los siguientes enunciados:

   1) $\forall x \forall y\,(M\,(x,y) \rightarrow \exists z\,(M\,(x,z) \wedge M\,(z,y)))$
   2) $\forall x\,((P\,(x) \wedge x \neq 0) \rightarrow M\,(0,x))$
   3) $\forall x \forall y\,(x \neq 0 \wedge y \neq 0 \rightarrow (D\,(x,y) \wedge D\,(y,x)))$
   4) La negación del inciso 3)

   Evalúe el valor de verdad de cada enunciado con respecto a cada uno de los siguientes universos de discurso. Para aquellos enunciados que sean falsos, exhiba un contraejemplo (una asignación de individuos del universo en cuestión a las variables tales que el enunciado sea falso).

a) Los números naturales (incluyendo el 0).

b) Los números enteros.

c) Los números reales.

3. Demuestre utilizando inducción que las siguientes fórmulas se cumplen. *4 puntos*

   a) $\sum_{k=1}^{n} k\,(k!) = (n+1)! - 1$

   b) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

1. Traduzca los siguientes enunciados a lógica de predicados. Indique de manera clara el universo de discurso, los predicados que utilizará, y a qué inciso corresponde cada fórmula. Defina un único universo de discurso para todos los predicados. *2 puntos*

U: criaturas mitológicas

Predicados: $D(x)$: x es dragón

$G(x)$: x es un grifo

$F(x,y)$: x es más fuerte que y

$x = y$: x y y son el mismo individuo

$x \neq y$: x y y son distintos $(\neg(x = y))$

a) Existen a lo más dos dragones.

-Incluye como válido el caso en el que no existen dragones:

$$\forall x \forall y \forall z (D(x) \wedge D(y) \wedge D(z) \rightarrow x = z \vee y = z)$$

Es decir, si encontramos tres dragones, entonces dos de ellos son el mismo dragón.

b) Existen exactamente dos dragones.

$$\exists x \exists y (D(x) \wedge D(y) \wedge \forall z (D(z) \rightarrow z = x \vee z = y))$$

-Aseguramos que existen dos dragones, luego decimos que cualquier dragón que encontremos tiene que ser uno de esos dos.

c) Sólo existe un grifo que es más fuerte que todos los dragones.

En forma abreviada:

$$\exists! x\left(G(x) \wedge \forall y(D(y) \rightarrow F(x,y))\right)$$

que significa:

$$\exists x\left(G(x) \wedge \forall y(D(y) \rightarrow F(x,y)) \wedge \neg \exists z\left(G(z) \wedge x \neq z \wedge \forall y(D(y) \rightarrow F(z,y))\right)\right)$$

y mediante equivalencias se puede obtener, por ejemplo:

$$\exists x\left(G(x) \wedge \forall y(D(y) \rightarrow F(x,y)) \wedge \forall z\left(G(z) \wedge x \neq z \rightarrow \neg \forall y(D(y) \rightarrow F(z,y))\right)\right)$$

d) Para todo dragón hay un grifo que es más fuerte que él.

$$\forall x\left(D(x) \rightarrow \exists y(G(y) \wedge F(y,x))\right)$$

2. Considere los siguientes predicados: *4 puntos*

- $P(x)$ x es un número par.
- $M(x,y)$ x es menor que y.
- $D(x,y)$ la división de x entre y está dentro del conjunto.

(Por ejemplo, la división de los números naturales 6 entre 2 es 3, así que $D(6,2)$ es verdadero en los números naturales. La división de los números enteros -5 entre 2 es $-5/2$, por lo que $D(-5,2)$ es falso en los números enteros, mientras que en el dominio de los números reales es verdadero.)

Y los siguientes enunciados:

1) $\forall x \forall y\, (M\,(x,y) \to \exists z\, (M\,(x,z) \wedge M\,(z,y)))$
2) $\forall x\, ((P\,(x) \wedge x \neq 0) \to M\,(0,x))$
3) $\forall x \forall y\, (x \neq 0 \wedge y \neq 0 \to (D\,(x,y) \wedge D\,(y,x)))$
4) La negación del inciso 3)

Evalúe el valor de verdad de cada enunciado con respecto a cada uno de los siguientes universos de discurso. Para aquellos enunciados que sean falsos, exhiba un contraejemplo (una asignación de individuos del universo en cuestión a las variables tales que el enunciado sea falso).

a) Los números naturales (incluyendo el 0).

1) $\forall x \forall y\, (M\,(x,y) \to \exists z\, (M\,(x,z) \wedge M\,(z,y)))$ Falso

-Cualquier par de números naturales consecutivos es un contraejemplo, pues cualquier valor intermedio tiene una parte no entera.

2) $\forall x\, ((P\,(x) \wedge x \neq 0) \to M\,(0,x))$ Verdadero

3) $\forall x \forall y\, (x \neq 0 \wedge y \neq 0 \to (D\,(x,y) \wedge D\,(y,x)))$ Falso

-Cualquier elección de x y y naturales tal que una de las divisiones dé un resultado fraccionario. Por ejemplo, $x=1$ y $y>1$.

4) La negación del inciso 3) Verdadero

$\neg \forall x \forall y \left(x \neq 0 \wedge y \neq 0 \to (D(x,y) \wedge D(y,x)) \right)$

$$\equiv \exists x \exists y \neg \left(\neg (x \neq 0 \wedge y \neq 0) \vee (D(x,y) \wedge D(y,x)) \right)$$

$$\exists x \exists y \left((x \neq 0 \wedge y \neq 0) \wedge \neg (D(x,y) \wedge D(y,x)) \right)$$

$$\exists x \exists y \left(x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge (\neg D(x,y) \vee \neg D(y,x)) \right)$$

b) Los números enteros.

1) $\forall x \forall y \left(M(x,y) \rightarrow \exists z \left(M(x,z) \wedge M(z,y) \right) \right)$ Falso

-Cualquier par de números enteros consecutivos es un contraejemplo.

2) $\forall x \left((P(x) \wedge x \neq 0) \rightarrow M(0,x) \right)$ Falso.

-Cualquier entero negativo que sea par es un contraejemplo.

3) $\forall x \forall y \left(x \neq 0 \wedge y \neq 0 \rightarrow (D(x,y) \wedge D(y,x)) \right)$ Falso

-Cualquier elección de x y y enteros donde una de las las divisiones dé un resultado fraccionario.

4) La negación del inciso 3) Verdadero

$c)$ Los números reales.

1) $\forall x \forall y \left(M\left(x,y\right) \to \exists z \left(M\left(x,z\right) \land M\left(z,y\right)\right)\right)$ Verdadero

2) $\forall x \left(\left(P\left(x\right) \land x \neq 0\right) \to M\left(0,x\right)\right)$ Falso

-Cualquier real negativo que sea par es un contraejemplo.

3) $\forall x \forall y \left(x \neq 0 \land y \neq 0 \to \left(D\left(x,y\right) \land D\left(y,x\right)\right)\right)$ Verdadero.

4) La negación del inciso 3) Falso.

-Para cualquier par de números reales, el resultado de ambas divisiones está dentro del conjunto de números reales. El contraejemplo es $\mathbb{R}$.

3. Demuestre utilizando inducción que las siguientes fórmulas se cumplen. *4 puntos*

a) $\sum_{k=1}^{n} k\,(k!) = (n+1)! - 1$

- Dem.: Inducción sobre n.

Base $(P(1))$. P.D.: $\sum_{k=1}^{1} k(k!) = (1+1)! - 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k(k!) = 1(1!) = 1(1) = 1 = 2-1 = 2! - 1 = (1+1)-1$$

H.I. $(P(n-1))$: Supongamos que $\sum_{k=1}^{n-1} k(k!) = n! - 1$

P.I. $(P(n))$. P.D.: $\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k(k!) &= \sum_{k=1}^{n-1} k(k!) + n(n!) && \text{Def. } \Sigma \\
&= n! - 1 + n(n!) && \text{H.I.} \\
&= n! + n(n!) - 1 \\
&= n!(1+n) - 1 \\
&= (n+1)! - 1
\end{aligned}$$

■

b) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

-Dem.: Inducción sobre n

Base (P(1)) P.D.: $\sum_{k=1}^{1}(2k-1)^3 = 1^2(2(1)^2-1) = 1(2-1) = 1$

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1)^3 = (2(1)-1)^3 = (2-1)^3 = 1$$

H.I.: Supongamos que $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

P.I. (P(n+1)): P.D.: $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^3 = (n+1)^2(2(n+1)^2-1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 + (2(n+1)-1)^3 \qquad \text{def. } \Sigma$$

$$= n^2(2n^2-1) + (2(n+1)-1)^3 \qquad \text{H.I.}$$

$$= n^2(2n^2-1) + (2n+1)^3$$

$$= n^2(2n^2-1) + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1$$

$$= 2n^4 - n^2 + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1$$

$$= 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1$$

Como queremos obtener $(n+1)^2(2(n+1)^2-1)$ necesitamos extraer $(n+1)^2 = n^2+2n+1$ de la expresión actual:

$$= (n^2+2n+1)(2n^2+ \quad)$$

ya que necesitamos obtener $2n^4$. Llevamos:

$2n^4 + 4n^3 + 2n^2$

y el valor de mayor exponente que falta sumar al resultado es: $4n^3$

$$= (n^2+2n+1)(2n^2+4n+ \quad)$$

Llevamos: $2n^4 + 4n^3 + 2n^2$

$$\begin{array}{r} 2n^4 + 4n^3 + 2n^2 \qquad \\ + \qquad 4n^3 + 8n^2 + 4n \\ \hline 2n^4 + 8n^3 + 10n^2 + 4n \end{array}$$

y el valor de mayor exponente que falta sumar es n^2

$$= (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1)$$

Llevamos: $2n^4 + 8n^3 + 10n^2 + 4n$

$$\begin{array}{r} 2n^4 + 8n^3 + 10n^2 + 4n \qquad \\ + \qquad n^2 + 2n + 1 \\ \hline 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1 \end{array}$$

Falta ver que el operando derecho en la multiplicación coincide con la expresión deseada.

$$= (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1)$$

$$= (n^2+2n+1)(n^2+2n+1+n^2+2n+1-1)$$

$$= (n^2+2n+1)\left((n+1)^2+(n+1)^2-1\right)$$

$$= (n^2+2n+1)\left(2(n+1)^2-1\right)$$

$$\blacksquare$$