2.7 Tableaux semánticos

¿Cuando podemos decir que una fórmula es razonable?

-Existe un estado en el que la fórmula se evalúa a verdadero (asignación de valores a las variables proposicionales, modelo).

Tablas semánticas o tableaux.

-Permiten determinar de forma eficiente y segura si una fórmula es una tautología, contingencia o contradicción y encontrar estados en que las fórmulas se evalúan a verdadero.

2.7.1- Tableau

- Un tableau es un árbol cuya función es buscar una interpretación para una fórmula dada, o determinar que no existe una interpretación que la satisfaga.

Las fórmulas deben consistir únicamente de conjunciones y disyunciones de literales o constantes, o negaciones de literales o constantes (fórmulas atómicas)

$(true, false, p, q, \ldots, \neg true, \neg false, \neg p, \neg q, \ldots)$

- Eliminar implicación y bicondicional al sustituirlas por conjunciones y disyunciones (Leyes de Eliminación de oper.)

- Eliminar la negación de una fórmula conjuntiva ($\wedge$) o disyuntiva ($\vee$) mediante las leyes de De Morgan,
  ($\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$)

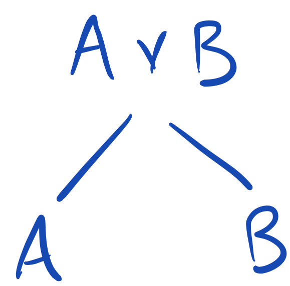
- Se debe mantener la asociatividad y precedencia de la fórmula original (utilizando para ello paréntesis explícitos).

Construcción de tableaux

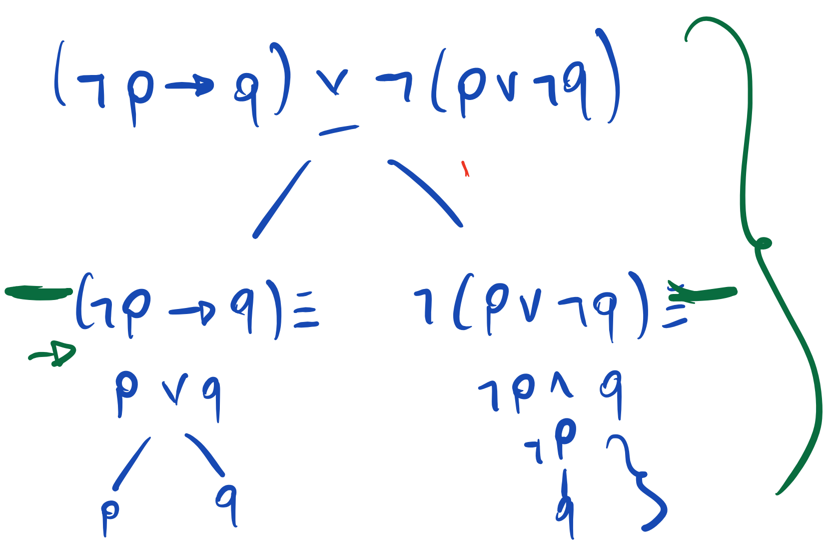
1- La fórmula completa aparece como raíz del árbol.

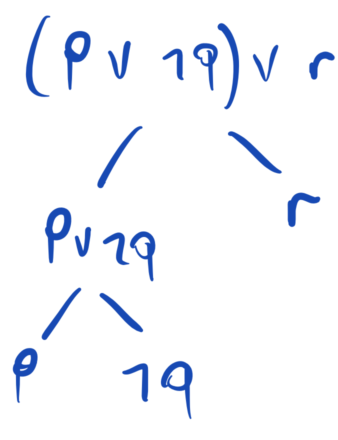
2- Si el esquema de la fórmula es una disyunción $(A \vee B)$, se abre una rama para A y otra para B.

Disyunción

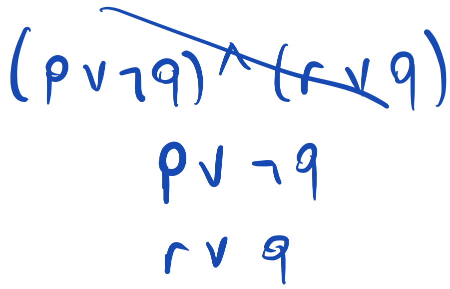


3- Si la fórmula es una conjunción $(A \wedge B)$ se pone uno de los operandos como hijo del otro.



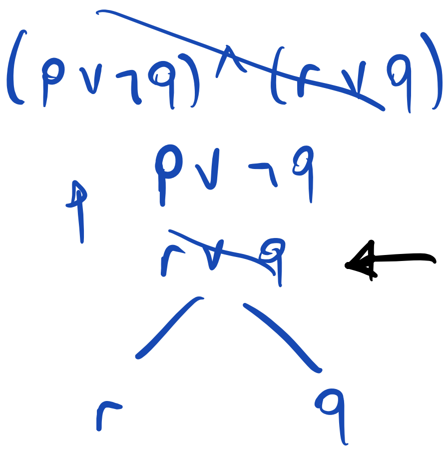


Ejemplo- Construir tableau para $(p \vee \neg q) \wedge (r \vee q)$



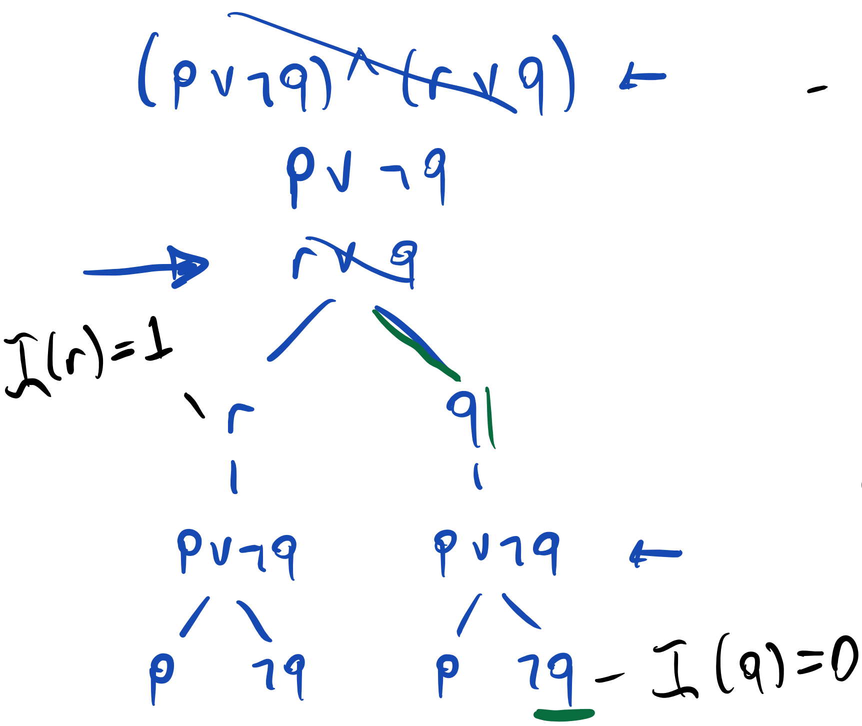
- El esquema es $A \wedge B$

$\Downarrow$

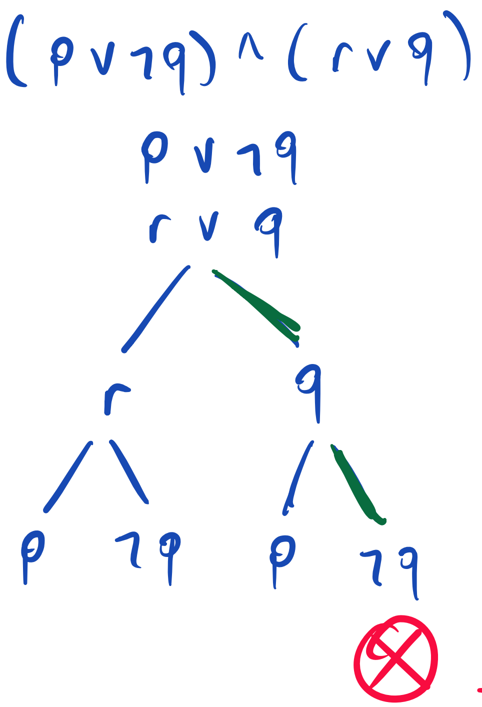


Desarrollamos el primer operando construyendo su tableu hasta que las hojas obtenidas sean fórmulas atómicas

$\Downarrow$



- Se cuelga el siguiente operando de ambas ramas, ya que provenía de una conjunción y luego lo desarrollamos.

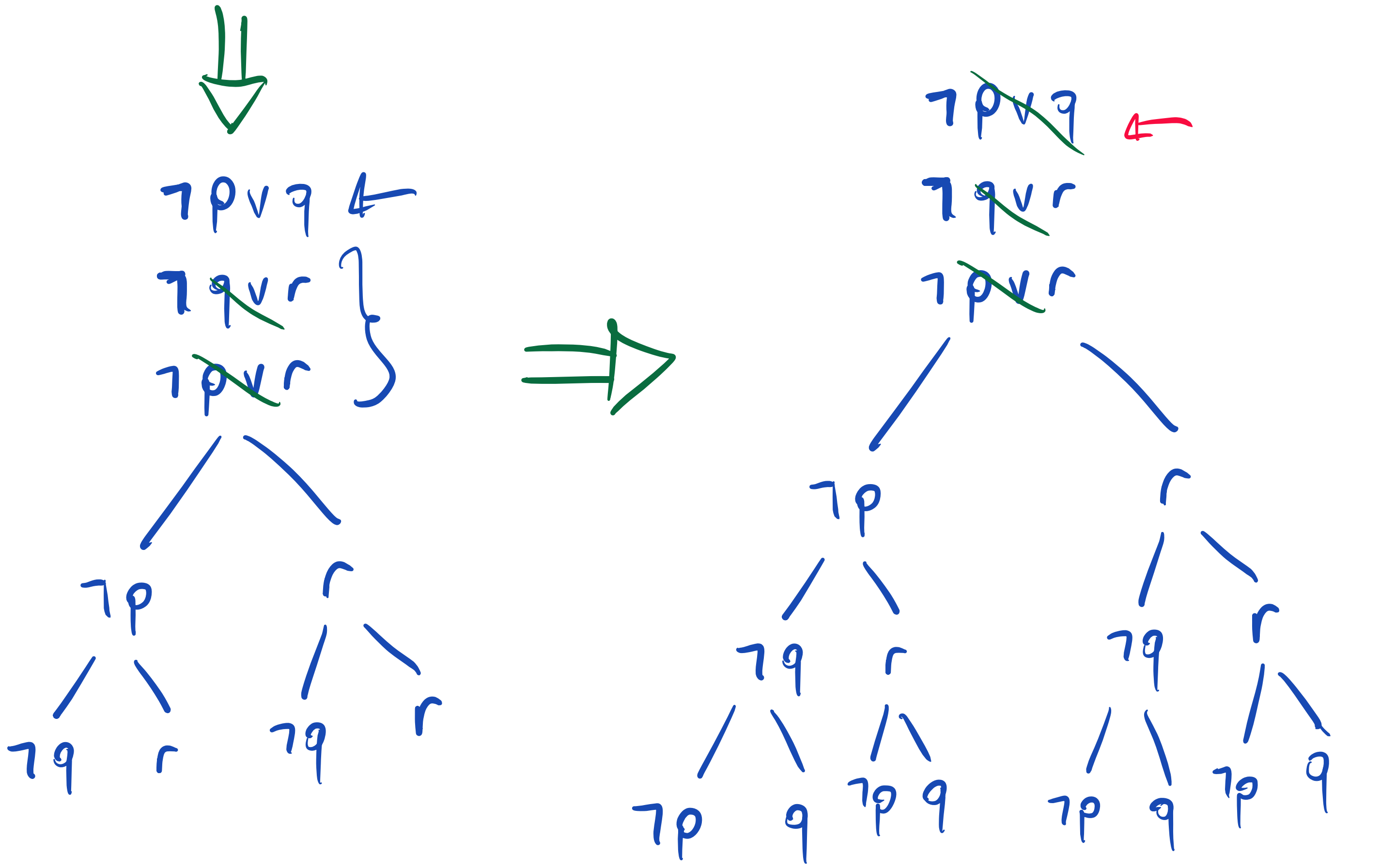


Esta tableu representa lo mismo que la anterior: podemos colgar directamente la disyunción abierta.

Indica que se ha cerrado la rama porque contiene una contradicción.

Ejemplo: Construir tableau de $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee r)$

- Si la fórmula original es una conjunción, se puede poner como raíz directamente su lista de operandos.



- Se agrega el siguiente operando a cada una de las ramas abiertas.

Solo tenemos reglas para conjunciones y disyunciones

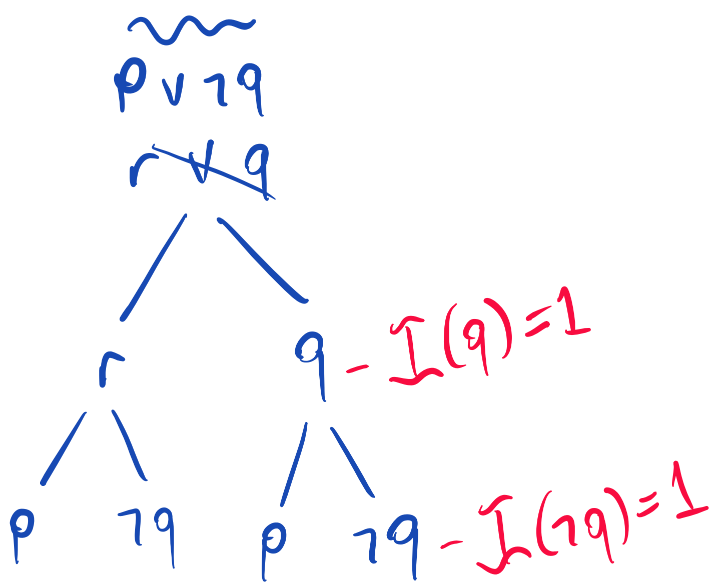
- Podemos transformar las fórmulas antes de construir el tableau.
  (razonamiento ecuacional, equivalencias lógicas), ⊗

- Podemos ir transformando las subfórmulas durante la construcción del tableau.

2.7.2- Eliminación de ramas

Cada rama del árbol (camino desde la raíz hacia una hoja) representa una conjunción de variables proposicionales.

Ejemplo: Tableau que contiene la subfórmula $q \wedge \neg q$

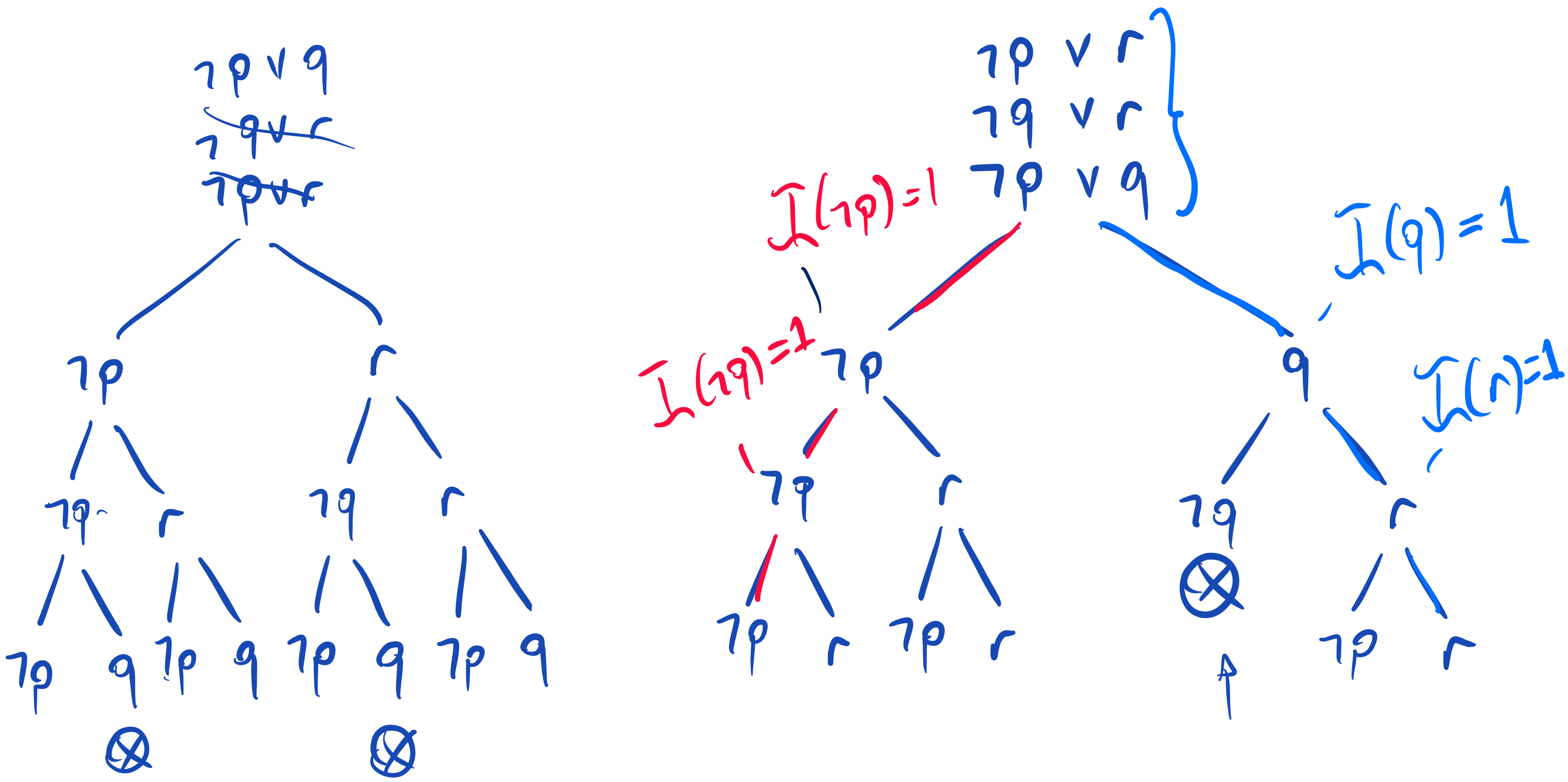


⊗ - Indica una rama cerrada.

Cada vez que encontremos a una literal y su negación en alguna rama podemos cerrar dicha rama y dejar de extenderla.

- Se trata de una rama correspondiente a una conjunción que contiene una contradicción. Por lo tanto, se evaluará a falso sin importar las subfórmulas que se cuelguen a dicha rama.

Ejemplo: $(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q)$



- Cada rama abierta representa una interpretación para la que la fórmula se evalúa a verdadero.

- Si todas las ramas quedan cerradas entonces la fórmula es una contradicción.

- El hecho de que todas las ramas queden abiertas **NO** significa que la fórmula sea una tautología.

Ejemplo: $p \wedge q$

p — $I(p)=1$ $\Big\}$ modelo para $p \wedge q$

$|$

q — $I(q)=1$

$\therefore$ no es una tautología

$I(p)=0$ o $I(q)=0$

- Para determinar si una fórmula es una tautología podemos construir el tableau de su negación.
  - Si se cierran todas las ramas, entonces la negación de la fórmula es una contradicción, lo que implica que la fórmula original es una tautología.

  - Recordemos que una fórmula A es una tautología si y sólo si su negación $\neg A$ es una contradicción.

2.7.3- Reglas para la construcción de tableaux

- Abrir las fórmulas conforme se vayan agregando:

  Si se cierra una rama antes de agregar la siguiente fórmula de una conjunción, entonces nos ahorramos el transformar dicha fórmula.

* Para poder aplicar alguna de las siguientes reglas es necesario identificar el esquema principal.

Para poder aplicar alguna de las siguientes reglas es necesario identificar el esquema principal.

α-reglas (Conjunciones)

1- De $A \wedge B$ se deduce A y B $\quad \alpha(1)$

2- De $\neg(A \vee B)$ se deduce $\neg A$ y $\neg B$ $\quad \alpha(2)$

3- De $\neg(A \rightarrow B)$ se deduce A y $\neg B$ $\quad \alpha(3)$

$$\neg(A \rightarrow B) \equiv \neg(\neg A \vee B) \equiv A \wedge \neg B$$

β-reglas (Disyunciones)

1- De $A \vee B$ se deduce A, y en una rama separada, B. $\beta(1)$

2- De $\neg(A \wedge B)$ se deduce $\neg A$, y en una rama separada, $\neg B$. $\beta(2)$

3- De $A \to B$ se deduce $\neg A$, y en una rama separada, B. $\beta(3)$

σ-reglas (negaciones)

1- De $\neg\neg A$ se deduce A $\sigma(1)$

2- De $\neg$false se deduce true $\sigma(2)$

3- De $\neg$true se deduce false $\sigma(3)$

Bicondicionales $(A \leftrightarrow B)$

Transformar la fórmula con alguna equivalencia lógica conveniente para luego usar las reglas α o β.

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$$

$$\boxed{A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)}$$

Ejemplo: Demostrar $\vdash (((p \to q) \to p) \to p)$
(Construir tableau de su negación)

$$\neg(\overbrace{((p \to q) \to p)}^{A} \to \overbrace{p}^{B})$$

$\alpha(3)$ $\quad \equiv ((p \to q) \to p) \wedge \neg p$

$$(p \to q) \to p$$

$$\neg p$$

$\beta(3)$ $\quad (p \to q) \to p$

$$\equiv \neg(p \to q) \vee p$$

Rama izquierda:

$\alpha(3)$ $\quad \neg(p \to q)$

$$\equiv p \wedge \neg q$$

$$p$$

$$\otimes$$

Rama derecha:

$$p$$

$$\otimes$$

$A \wedge B$	$\alpha(1)$
$\neg(A \vee B)$	$\alpha(2)$
$\neg(A \to B)$	$\alpha(3)$
$A \vee B$	$\beta(1)$
$\neg(A \wedge B)$	$\beta(2)$
$A \to B$	$\beta(3)$

$\therefore$ La fórmula $(((p \to q) \to p) \to p)$ es una tautología.

Ejemplo: Determinar si el argumento

$p \vee q \to r,\ s \to p,\ s \ /\therefore\ r$.

es correcto.

Fórmula asociada al argumento:

$$(p \vee q \to r) \wedge (s \to p) \wedge s \to r$$

Construir tableau para:

$$\neg\big((p \vee q \to r) \wedge (s \to p) \wedge s \to r\big)$$

$\alpha(3) \equiv (p \vee q \to r) \wedge (s \to p) \wedge s \wedge \neg r$

$$\left.\begin{array}{c} \cancel{p \vee q \to r} \\ \cancel{s \to p} \\ \cancel{s} \\ \neg r \end{array}\right\} \alpha(1)$$

s

$s \to p$

$\beta(3)$ $\equiv \neg s \vee p$

- $\neg s$ ⊗
- p
  - $p \vee q \to r$ $\beta(3)$
  - $\equiv \neg(p \vee q) \vee r$
    - $\neg(p \vee q)$
      - $\alpha(2)$ $\equiv \neg p \wedge \neg q$
      - $\neg p$ ⊗
    - r ⊗

$A \wedge B$	$\alpha(1)$
$\neg(A \vee B)$	$\alpha(2)$
$\neg(A \to B)$	$\alpha(3)$
$A \vee B$	$\beta(1)$
$\neg(A \wedge B)$	$\beta(2)$
$A \to B$	$\beta(3)$

$\therefore$ El argumento es correcto.

Ejemplo: Silogismo hipotético $\vdash (P\to Q)\wedge(Q\to R)\to(P\to R)$

$$\neg\big((P\to Q)\wedge(Q\to R)\to(P\to R)\big)$$

$\boxed{\alpha(3)\ \equiv}$ $(\cancel{P\to Q})\wedge(Q\to R)\wedge\neg(\cancel{P\to R})$

$\neg(P\to R)$

P

$\alpha(3)$

$\neg R$

$P\to Q$

$\beta(3)$

$\neg P$ | Q

$\otimes$

$Q\to R$

$\beta(3)$

$\neg Q$ | R

$\otimes$ | $\otimes$

$A\wedge B$	$\alpha(1)$
$\neg(A\vee B)$	$\alpha(2)$
$\neg(A\to B)$	$\alpha(3)$
$A\vee B$	$\beta(1)$
$\neg(A\wedge B)$	$\beta(2)$
$A\to B$	$\beta(3)$

$\therefore$ El argumento es correcto.

Estrategias para hacer el menor trabajo posible

1- Usar α-reglas y σ-reglas antes que las β-reglas (evitar abrir ramas)

2- Dar prioridad a la descomposición de fórmulas que cierren ramas.

3- Parar cuando el problema esté resuelto.
(Por ejemplo, para probar satisfacibilidad basta encontrar una rama completa abierta)

4- Si no es posible utilizar alguna de las estrategias anteriores, procesar primero las fórmulas más complejas: así evitamos colgarlas de muchas ramas.

2.7.4- Modelo de una fórmula

Cada rama completa y abierta proporciona una interpretación que es un modelo de la fórmula:

1- A las variables negadas se les asigna el valor 0 \ $\neg p$ $\boxed{\mathcal{I}(p)=0}$

2- A las variables sin negar se les asigna 1.

p $\mathcal{I}(p)=1$.

3- Las variables que no aparecen en la rama pueden tener cualquier asignación.

2.7.5 - Algoritmos de tableaux para lógica proposicional

1- Decidir si A es una tautología

Entrada: Una fórmula A.

Salida: La decisión de si A es o no una tautología.

Método:
- Construir el tableau T para $\neg A$.
- Si T se cierra entonces A es una tautología.
- De otro modo, existe al menos una rama abierta de T, la cual proporciona un modelo para $\neg A$, por lo que $\not\models A$.

$$\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \longrightarrow B)$$

2- Clasificar una fórmula como tautología, contradicción o contingencia

Entrada: La fórmula A a clasificar.

Salida: El dictámen de si A es una tautología, una contradicción o una contingencia.

Método:

- Construir el tableau $\mathcal{T}$ para A.
- Si $\mathcal{T}$ se cierra entonces A es una contradicción.
- De otro modo, existe al menos una rama abierta y completa de $\mathcal{T}$ proporciona un modelo $\mathcal{I}$ de A.
  - Construir el tableau $\mathcal{T}'$ de $\neg A$.
  - Si $\mathcal{T}'$ se cierra entonces A es una tautología.
  - En otro caso, una rama abierta y completa de $\mathcal{T}'$ proporciona un modelo $\mathcal{I}'$ de $\neg A$.
- Las interpretaciones $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$ muestran que A es contingente.

3- Decidir la satisfacibilidad de un conjunto de fórmulas Γ

Entrada: Un conjunto de fórmulas $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$

Salida: La decisión de si Γ es o no satisfacible

Método:
- Construir el tableau $\mathcal{T}$ para $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$.
- Si $\mathcal{T}$ se cierra entonces Γ es insatisfacible.
- De otro modo, existe una rama abierta, la cual proporciona un modelo para Γ.

* Para hacer el menor trabajo posible podemos desarrollar las ramas una a la vez, ya que basta con la existencia de una rama abierta para que Γ sea satisfacible.

4- Decidir la consecuencia lógica $\Gamma \models A$

Entrada: Un conjunto de fórmulas Γ y una fórmula A.

Salida: La decisión de si A es consecuencia lógica de Γ.

Método:

- Construir el tableau $\mathcal{T}$ para el conjunto $\underbrace{\Gamma \cup \{\neg A\}}$
- Si $\mathcal{T}$ se cierra entonces la consecuencia lógica se da. y el argumento que tiene a las fórmulas de Γ como premisas y a A como conclusión es correcto.
- En otro caso, una rama completa y abierta en $\mathcal{T}$ representa un modelo de las premisas donde la conclusión es falsa. (contraejemplo).

Tableaux semánticos

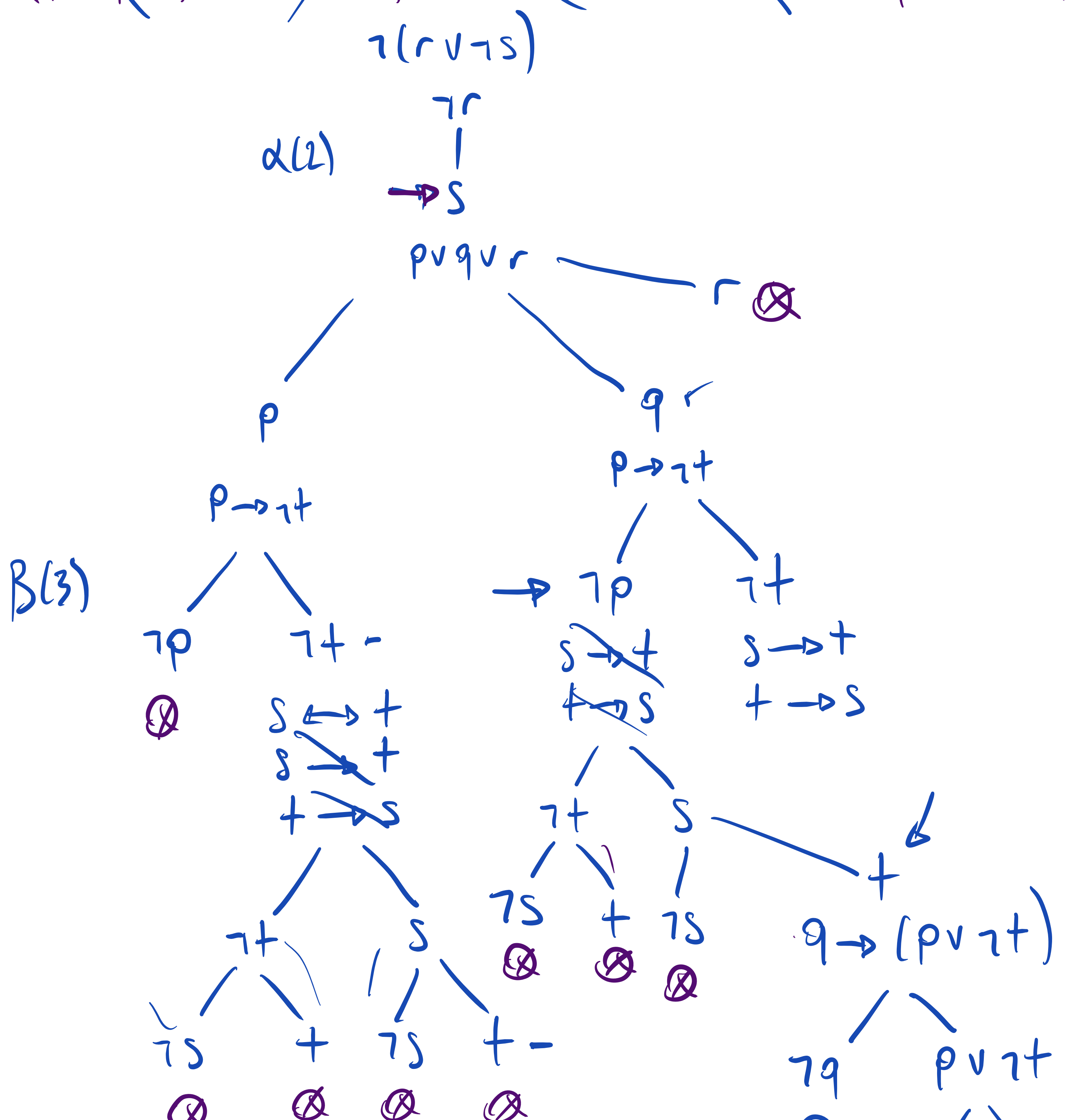
- Permiten la derivación de fórmulas y la demostración de teoremas con menos esfuerzo que los métodos anteriores.

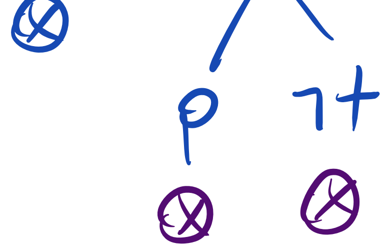
- El proceso es algorítmico: siempre termina.

Ejemplo: Decidir si el siguiente conjunto es satisfacible:

$$\Gamma = \{p \vee q \vee r,\ \neg(r \vee \neg s),\ s \leftrightarrow t,\ p \to \neg t,\ q \to (p \vee \neg t)\}$$

$$\cancel{(p \vee q \vee r)} \wedge \cancel{\neg(r \vee \neg s)} \wedge \cancel{(s \leftrightarrow t)} \wedge \cancel{(p \to \neg t)} \wedge (q \to (p \vee \neg t))$$





$\therefore$ El conjunto es insatisfacible.

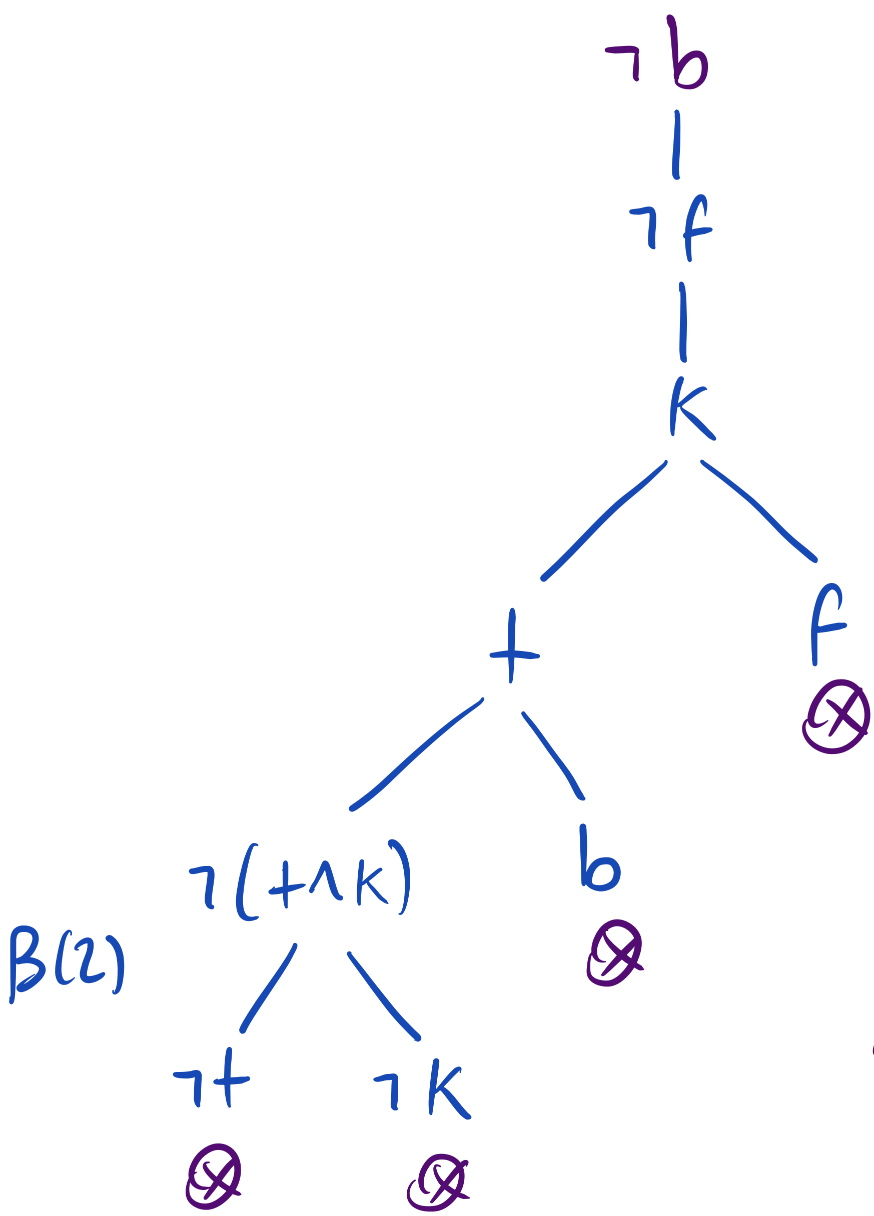
Ejemplo: $t \wedge k \to b,\ \neg t \to f,\ \neg f \wedge k \ /\therefore b$

- Fórmula asociada

$$(t \wedge k \to b \wedge \neg t \to f \wedge (\neg f \wedge k)) \to b$$

$$\neg((t \wedge k \to b \wedge \neg t \to f \wedge (\neg f \wedge k)) \to b) \equiv$$

$$\alpha(3) \equiv \boxed{t \wedge k \to b \wedge \cancel{\neg t \to f}^{3} \wedge \cancel{(\neg f \wedge k)}^{2} \wedge \cancel{\neg b}^{1}}$$

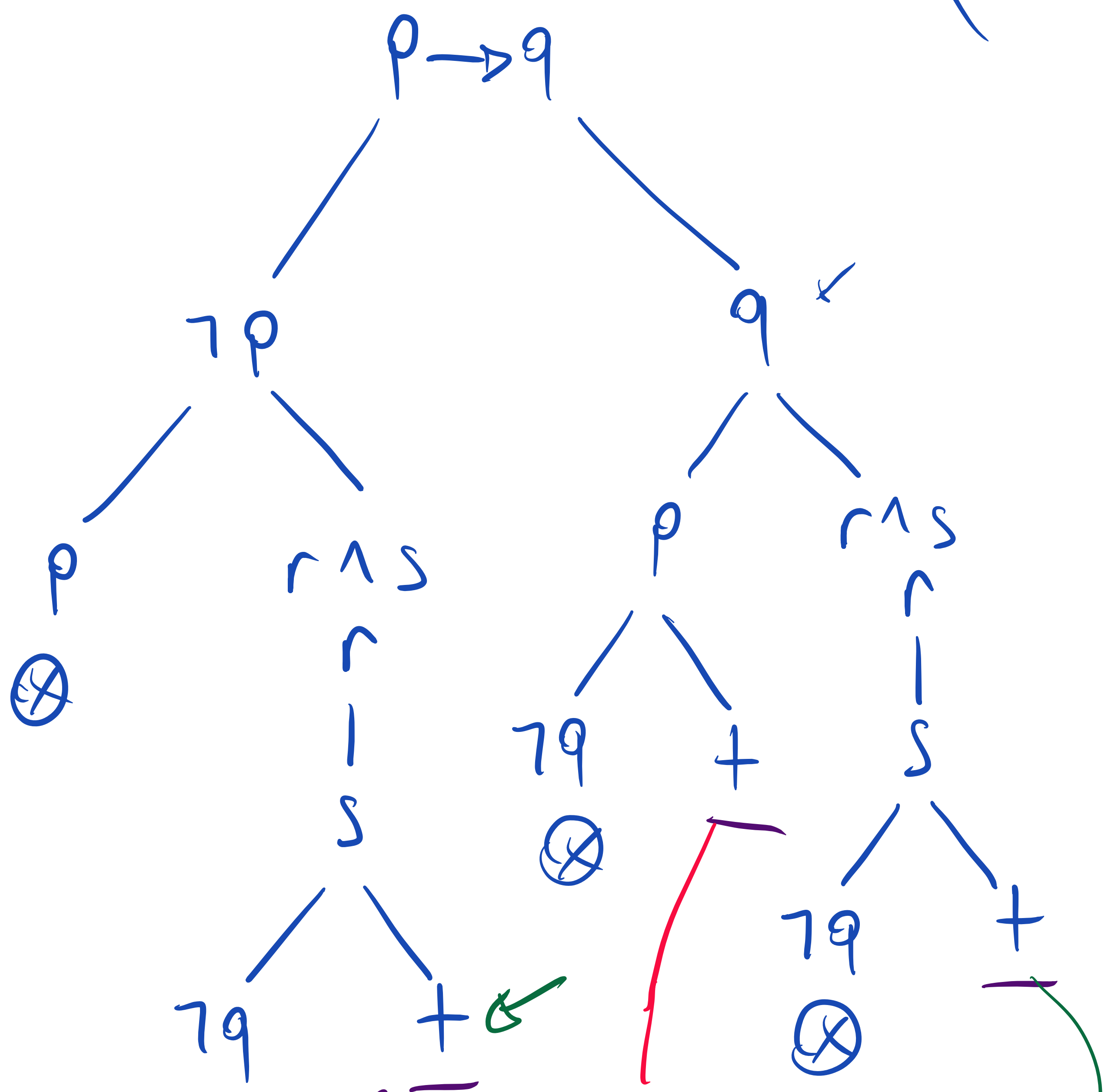


$\therefore$ El argumento es correcto.

Ejemplo: Satisfacibilidad de:

$$\Gamma = \{p \to q,\ p \vee (r \wedge s),\ q \to t\}$$

$$\cancel{(p \to q)} \wedge \cancel{(\bar{p} \vee (r \wedge s))} \wedge \cancel{(q \to t)}$$



$\mathcal{I}(r) = \mathcal{I}(s) = \mathcal{I}(t) = 1$

$\mathcal{I}(q) = 0$

$\mathcal{I}(q) = \mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(t) = 1$

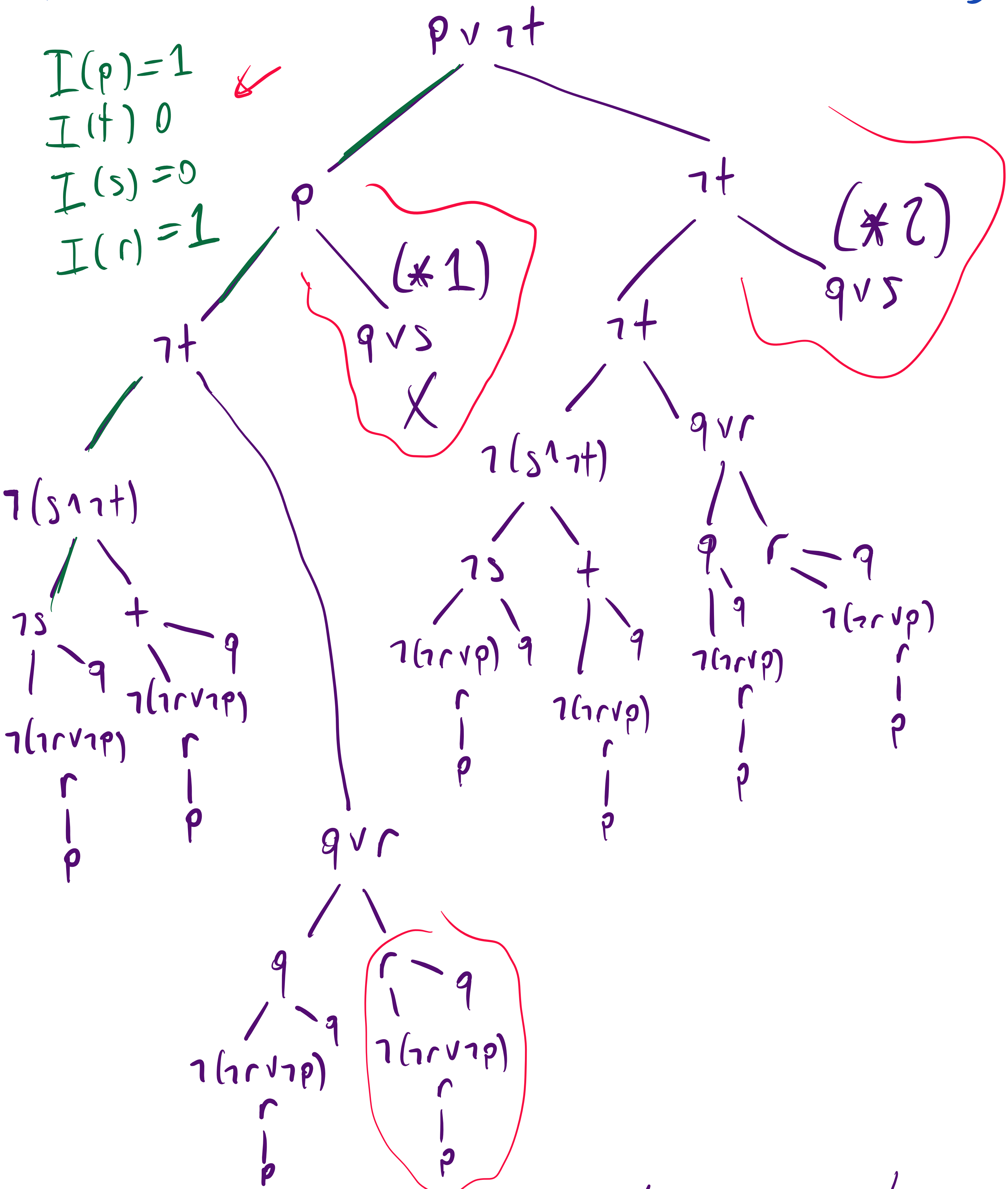
$\mathcal{I}(q) = \mathcal{I}(r) = \mathcal{I}(s) =$

$= \mathcal{I}(t) = 1$

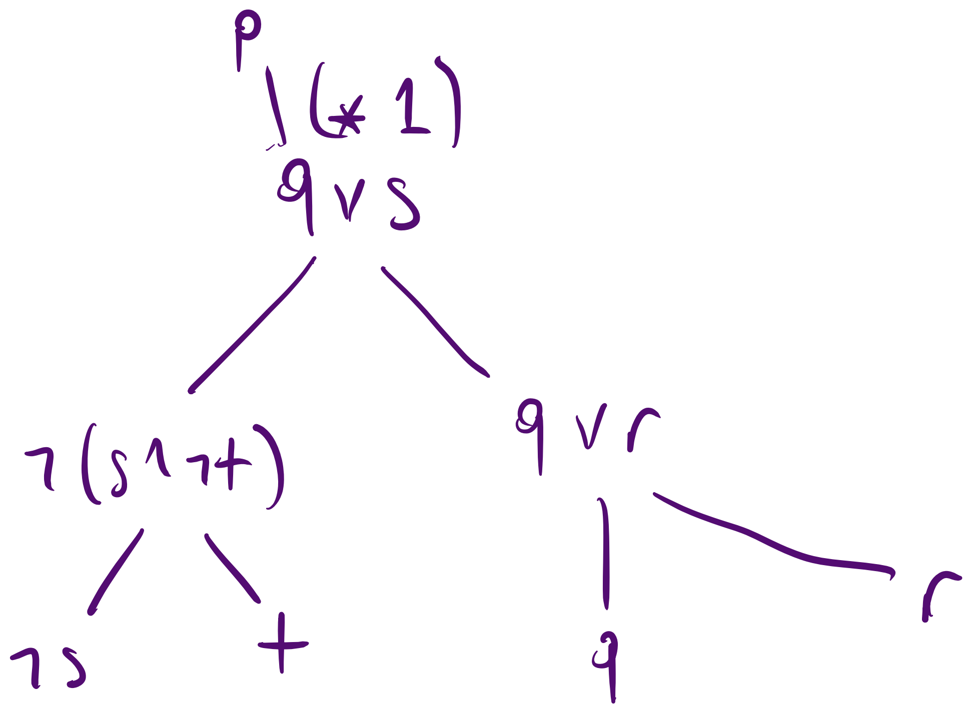
Ejemplo: Satisfacibilidad de

$\Gamma = \{ p \vee \neg t,\ t \to q \vee s,\ s \wedge \neg t \to q \vee r,\ \neg r \vee \neg p \to q \}$

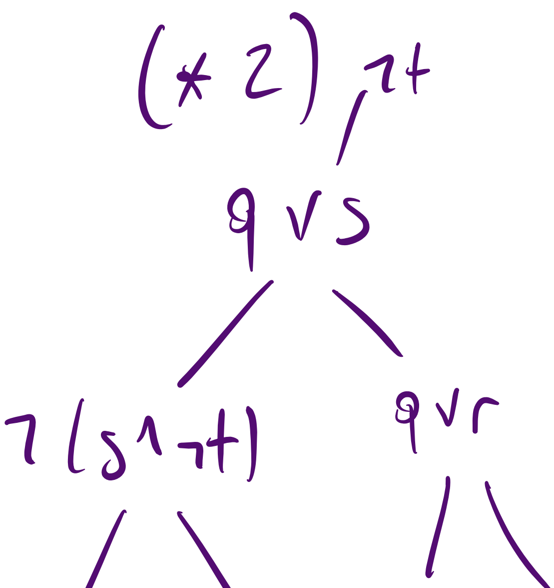
$I(p) = 1$
$I(t)\ 0$
$I(s) = 0$
$I(r) = 1$



$\Gamma = \{ p \vee \neg t,\ t \to q \vee s,\ s \wedge \neg t \to q \vee r,\ \neg r \vee \neg p \to q \}$



$\Gamma = \{ p \vee \neg t,\ t \to q \vee s,\ s \wedge \neg t \to q \vee r,\ \neg r \vee \neg p \to q \}$



$\neg s$ t q r

- Equivalencia lógica

$$(A \wedge B) \to Q \equiv (A \to Q) \vee (B \to Q)$$

ssi $\models (A \wedge B) \to Q \leftrightarrow (A \to Q) \vee (B \to Q)$

$$\neg(\,(A \wedge B) \to Q \leftrightarrow (A \to Q) \vee (B \to Q)\,)$$

$$\neg(((A \wedge B) \to Q \wedge ((A \to Q) \vee (B \to Q))) \vee (\neg((A \wedge B) \to Q) \wedge \neg((A \to Q) \vee (B \to Q))))$$

$$\cancel{\neg((A \wedge B \to Q) \wedge (A \to Q \vee B \to Q))} \wedge$$

$$\neg(\neg(A \wedge B \to Q) \wedge \neg(A \to Q \vee B \to Q))$$

$\neg(A \wedge B \to Q)$ | $\neg(A \to Q \vee B \to Q)$

$\neg Q$ | $\cancel{\neg(B \to Q)}$

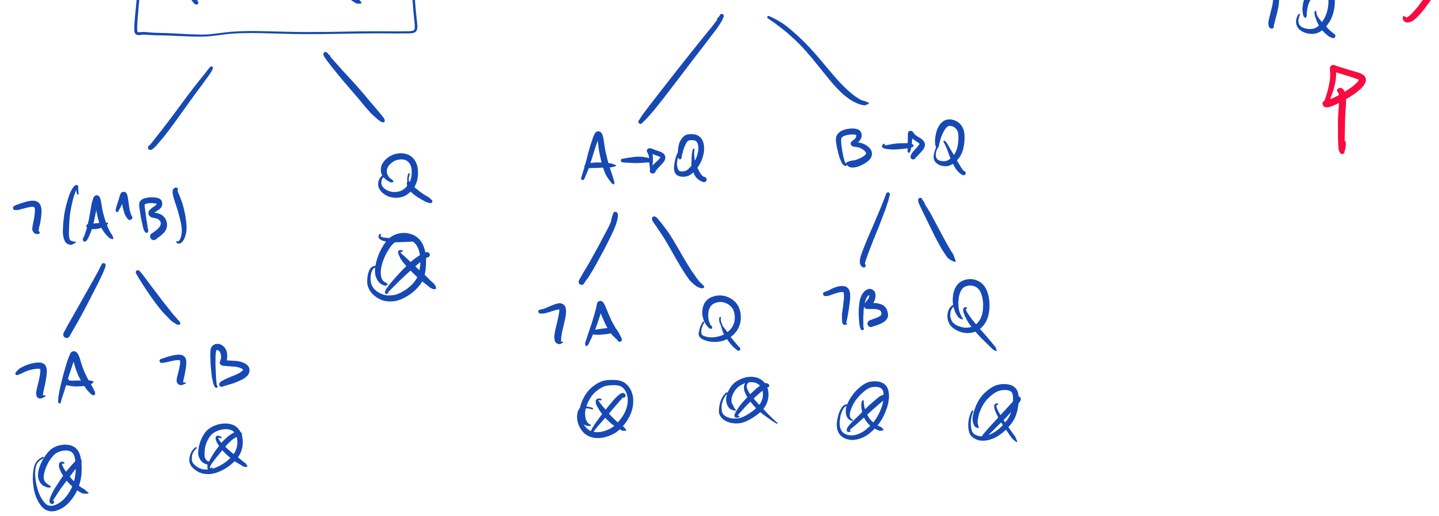
A | $\cancel{\neg(A \to Q)}$

B | B

$A \wedge B \to Q$ | $A \to Q \vee B \to Q$ | $\neg Q$

A

$\neg Q$



¬(A∧B)
Q
¬A
¬B
A→Q
B→Q
¬A
Q
¬B
Q
¬Q
P