9

Estructuras Discretas
Examen 3
Jueves 14 de Diciembre de 2023

Profesor: Nestaly Marín Nevárez
Ayudantes de teoría: Eduardo Pereyra Zamudio
Ricardo López Villafán
Ayudantes de laboratorio: Edgar Mendoza León
David Valencia Rodríguez

Resuelve de manera limpia y ordenada los siguientes ejercicios. Indica claramente el número de pregunta que se esta resolviendo.

2 puntos

2

1. Demuestra, usando inducción, que para todo número natural $n \geq 1$ se cumple:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1$$

Caso base: $(n = 1) : \sum_{k=1}^{n} k(k)! = (1{+}1)!{-}1$. es verdadero porque $1 = 2!{-}1$ que se simplifica como 1=2-1.

P.I: Para algún $n \geq 1$, sup. que hip.inductiva es verdadera para $n + 1$. asi: (n+1 en ambos lados)

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k!) = \sum_{k=1}^{n} k(k!) + (n+1)(n+1)!$$

def de $\sum$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k!) = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$

H.I

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k!) = (n+2)(n+1)! - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k)! = (n+2)! - 1.$$

$\therefore$ la afirmación es verdadera para todos los números naturales $n \geq 1$. $\square$

2 puntos 2. Demuestra, utilizando inducción, que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible entre nueve, es decir, que $(n-2)^3 + (n-1)^3 + n^3 = 9\,(x)$ para algún $x \in \mathbb{N}$.

2

Caso base: $n = 2$

$$(2-2)^3 + (2-1)^3 + 2^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 = 0 + 1 + 8 = 9$$

Que es verdadero porque es divisible por 9.

P.I: Sup. que $9 \mid (k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3$

por H.I

$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$
$(n-1)^3 + n^3 + ((n-2)+3)^3$

$(n+1)^3$ porque es $((n-2)+3)^3$

$(n-1)^3 + n^3 + (n-2)^3 + 9(n-2)^2 + 27(n-2) + 27$

9 divide a $(k-1)^3 + k^3 + (k-2)^3$. Y los términos restantes tienen un factor divisible por 9. □

1 punto 3. Define de manera recursiva una función $\mathrm{lop}(A)$ que devuelva una lista con los operadores lógicos en una fórmula de lógica proposicional A.

5 puntos 4. Define de manera recursiva las siguientes funciones:

5

a) Una función $\mathrm{aplana}(T)$ que reciba un árbol binario T y regrese una lista con las etiquetas de los nodos que lo componen. (*1 punto*)

b) Una función $\mathrm{nn}(T)$ que reciba un árbol binario T y regrese el número de nodos que lo componen. (*1 punto*)

c) Una función $\mathrm{long}(xs)$ que reciba una lista xs y regrese su longitud. „ (*1 punto*

Luego, demuestra, usando inducción estructural y las funciones previamente definidas, que la longitud de la lista que regresa $\mathrm{aplana}(T)$ es igual al número de nodos de T, es decir, demuestra que $\mathrm{long}(\mathrm{aplana}(T)) = \mathrm{nn}(T)$.

leaf (c)=tree(void,c,void)

Número de nodos de un árbol:

$$f(\text{ void }) = 0$$
$$f\,(\mathrm{tree}\,(T_1, c, T_2)) = 1 + f\,(T_1) + f\,(T_2)$$

Definición recursiva aplana.

f leaf(c)=[c]

f(tree(T_1, c, T_2)) = (C:$f(T_1) \sqcup f(T_2)$)

Longitud de una lista:

$$f([\,]) = 0$$
$$f(a : l) = 1 + f(l)$$

Base

$T =$ leaf $(c), P.D : n_n($ leaf $(c)) =$ long (aplana
(leaf(c))
$nn($ leaf $(c)) = 1$
$= 1 + 0$
$= 1 +$ long([])
$=$ long($(c : tJ)$) def. long.
$=$ long(aplana (leaf(c))) def. aplana

H.I. Sean $T_1 + T_2$ arboles arbitrarios
Sup. que $nn\,(T_1) =$ long(aplana (T_1)) y

$$nn\,(T_2) = \text{ long } (\text{ aplana } (T_2)).$$

P.I. P.D.: $nn\,($ tree $(T_1, C, T_2)) =$

$$\text{long (aplana (tree}\,(T_1, c_1 T_2)))$$

$nn\,(\text{tree}\,(T_1, C_1, T_2))$
$= 1 + nn\,(T_1) + nn\,(T_2)$ def. nn.
$= 1 +$ long aplana $(T_1)) +$ long (aplana (T_2))
$= 1 +$ long(aplana $(T_1) \sqcup$ aplana (T_2)) prop. long. U
$=$ long $((C :$ aplana $(T_1) \sqcup$ aplana $(T_2)))$ def. long.
$=$ long(aplana (tree (T_1, C_1, T_2))) def. aplana.

$\square$