安徽大学 2020—2021 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末考试试题（A 卷）

参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. D　　2. B　　3. C　　4. C　　5. A

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. -1　　7. -1　　8. $\frac{\pi}{2}$　　9. $(\frac{1}{4},+\infty)$　　10. $6a$

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11. **解：**因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1)\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{e^x-1}}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(e^x-1)^2}{xe^x}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{e^x}=0$，

…………………… 7 分

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{(e^x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1)\ln x}=e^0=1$. ……………………9 分

12. **解：**因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{b-\cos x}\cdot\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}$ …………………… 4 分

当 $b\neq 1$ 时，极限值为 0，与题设矛盾. 所以 $b=1$. ……………………6 分

因此，原式左边 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a+x}}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}$.

由 $\dfrac{2}{\sqrt{a}}=1$，得出 $a=4$. …………………… 9 分

13. **解：**因为 $x=y^y$，则 $x=e^{y\ln y}$. …………………… 3 分

对等式两边关于 x 求导，则有 $1=e^{y\ln y}(y'\ln y+y')$，

从而 $y'=\dfrac{1}{y^y(\ln y+1)}=\dfrac{1}{x(\ln y+1)}$， …………………… 8 分

故 $\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln y+1)}$. ……………………9 分

14. **解**：原式 $=\int\dfrac{\mathrm{d}(x+1)}{\sqrt{2-(x+1)^{2}}}$ ……………………4 分

$=\int\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^{2}}}\mathrm{d}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)=\arcsin(\dfrac{\sqrt{2}(x+1)}{2})+C$. ……………………9 分

15. **解**：原式 $=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}(\dfrac{1}{2-x})$ …………………… 3 分

$=\dfrac{\ln(1+x)}{2-x}\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{1}{2-x}\cdot\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2-\dfrac{1}{3}\int_0^1(\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{1+x})\mathrm{d}x$ ……………………6 分

$=\ln 2-\dfrac{1}{3}[-\ln(2-x)|_0^1+\ln(1+x)|_0^1]=\dfrac{\ln 2}{3}$. ……………………9 分

16. **解**：原式 $=\int_1^{+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$ …………………… 3 分

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln x|_1^b-\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^b$ …………………… 6 分

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln\dfrac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\dfrac{1}{2}\ln 2=\ln 1+\dfrac{1}{2}\ln 2=\dfrac{1}{2}\ln 2$. …………………… 9 分

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

17. **解**：因为 $y'=2x$ ， $y''=2$ ，

所以曲线的曲率 $K=\dfrac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$. …………………… 4 分

从而曲率半径 $\rho=\dfrac{1}{2}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}$ ， $\rho'=6x(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}$.

令 $\rho'=0$ ，得 $x=0$. 当 $x<0$ 时， $\rho'<0$ ；当 $x>0$ 时， $\rho'>0$. 所以在 $x=0$ 时， ρ 取

得极小值；驻点唯一，从而 ρ 的极小值也是最小值，从而在 $x=0$ 时，K 取得最大值. ………………… 8 分

18．**解：** 由题知，$V_x=\pi\int_a^{2a}\left(\frac{a}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi a}{2}$， ………………… 3 分

$V_y=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{a}{y}\right)^2\mathrm{d}y+\pi\int_0^{\frac{1}{2}}4a^2\mathrm{d}y-\pi\int_0^1 a^2\mathrm{d}y=2\pi a^2$. ………………… 7 分

因为 $V_x=V_y$，所以 $a=\frac{1}{4}$. ………………… 8 分

五、证明题（每小题 10 分，共 10 分）

19. **证明：** 令 $f(x)=x\ln x$，$x>0$，则 $f'(x)=1+\ln x, f''(x)=\frac{1}{x}>0, x>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是下凸的， ………………… 4 分

从而对任意的 $x,y\in(0,+\infty)$，$x\neq y$，恒有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{1}{2}[f(x)+f(y)],$$

即 $\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}<\frac{1}{2}(x\ln x+y\ln y)$，

亦即 $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$. ………………… 10 分