

## 2023—2024 学年第二学期

### 《高等数学 A (二)》期末考试 (A 卷) 答案及评分标准

#### 一. 选择题 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. B      2. A      3. D      4. D      5. C  
 6. A      7. C      8. A      9. B      10. B

#### 二. 计算题 (每小题 11 分, 共 55 分)

11. 解:  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot 1 + f'_2 \cdot 1 = f'_1 + f'_2$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{11} \cdot 1 + f''_{12} \cdot (-1) + f''_{21} \cdot 1 + f''_{22} \cdot (-1)$

由于  $f$  具有二阶连续偏导数, 故  $f''_{12} = f''_{21}$

故  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{11} - f''_{22}$   
 ..... (11 分)

12. 解: 用平行于  $xOy$  的平面截  $\Omega$ , 得截面区域为  $D_z = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq z\}$

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^1 dz \iint_{D_z} z dx dy = \int_0^1 z dz \iint_{D_z} dx dy = \int_0^1 \pi z^2 dz = \frac{\pi}{3}$$

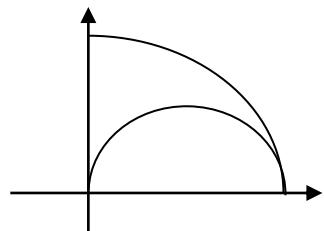
..... (11 分)

13. 解: 圆周  $x^2 + y^2 = 2x$  为圆  $C_1$ , 圆周  $x^2 + y^2 = 4$  为圆  $C_2$ ,

补一直线段  $L_1: x=0, 0 \leq y \leq 2$ , 方向向下, 由格林公式,

有

$$\begin{aligned} J &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \int_{L_1} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy \\ &= \iint_{D_i} (3x^2 + 1 - 3x^2) dx dy - \int_2^0 -2y dy = S(D) - 4 \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} - 4 = \frac{\pi}{2} - 4. \end{aligned}$$



..... (11 分)

14. 解: 由高斯公式

$$\iint_S x dy dz + y dz dx + (z+1) dx dy = 3 \iiint_V dx dy dz = 4\pi$$

..... (11 分)

15. 解: 收敛半径为 1, 收敛区间为  $(-1, 1)$ , 收敛域为  $(-1, 1)$ ;

$\forall x \in (-1, 1)$ , 记

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}, \quad S(0) = 0$$

则

$$S'(x) = x + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x^2};$$

上式两边积分得到

$$\int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \frac{t}{1-t^2} dt = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$$

即有

$$S(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2), \quad x \in (-1,1). \quad \dots \quad (11 \text{ 分})$$

### 三. 应用题 (共 10 分)

16. 解: 依题意,  $M = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$

因为上半球面  $\Sigma$  关于  $xOy$  面对称, 而  $x$  关于  $x$  是奇函数, 故  $\iint_{\Sigma} x dS = 0$ ; 同理,

$$\iint_{\Sigma} y dS = 0;$$

$\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域为  $D_{xy} : x^2 + y^2 \leq a^2$ , 而

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dx dy,$$

所以  $M = \iint_{\Sigma} z dS = \iint_{\Sigma} \sqrt{a^2-x^2-y^2} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dx dy = a \iint_{\Sigma} dx dy = \pi a^3.$  (10 分)

### 四. 证明题 (共 5 分)

17. 证明: (反证) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$  收敛,

因为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 由收敛级数的性质得  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n - u_n)$  收敛,

即级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛, 矛盾. 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$  发散.

..... (5 分)