安徽大学2024—2025学年第一学期

《概率论与数理统计A》期末考试（A卷）

试题参考答案及评分标准

一．选择题（每小题3分，共15分）

1．A　　2．B　　3．C　　4．D　　5．C

6．B　　7．D　　8．A　　9．C　　10．B

二．计算题（每小题10分，共50分）

11.【解】（1）X 所有可能取值为 $0,1,2,3$，

$$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20},\quad P(X=1)=\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20},$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20},\quad P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20},$$

所以 $E(X)=0\cdot\frac{1}{20}+1\cdot\frac{9}{20}+2\cdot\frac{9}{20}+3\cdot\frac{1}{20}=\frac{3}{2}$.

（2）设 B 表示从乙箱中任取一件产品是次品，由全概率公式得

$$P(B)=P\{X=0\}P\{B|X=0\}+P\{X=1\}P\{B|X=1\}$$

$$+P\{X=2\}P\{B|X=2\}+P\{X=3\}P\{B|X=3\}$$

$$=\frac{1}{20}\cdot 0+\frac{9}{20}\cdot\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{4}.$$

10分

12.【解】X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\le x\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$；

Y 的分布律为

$$P\{Y=1\}=P\{X>0\}=\frac{2}{3},\quad P\{Y=0\}=P\{X=0\}=0,\quad P\{Y=-1\}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3};$$

则 $E(Y)=-1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot 0+1\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，$E(Y^2)=(-1)^2\cdot\frac{1}{3}+0^2\cdot 0+1^2\cdot\frac{2}{3}=1$，

故 $DY=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{8}{9}$.

10分

13.【解】$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\max(X,Y)\le z)=P(X\le z,Y\le z)$，

$$=\begin{cases}\int_0^z\int_0^z e^{-(x+y)}dxdy, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}=\begin{cases}\int_0^z e^{-x}dx\int_0^z e^{-y}dy, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-z})^2, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

则 $f_Z(z)=\dfrac{dF_Z(z)}{dz}=\begin{cases}2e^{-z}(1-e^{-z}), & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$ 10 分

14.【解】

（1）X 与 Y 的边缘分布律分别为：

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix},\quad Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\end{pmatrix};$$

（2） $P(X=0\,|\,Y=0)=\dfrac{P(X=0,Y=0)}{P(Y=0)}=0.4$，

$P(X=1\,|\,Y=0)=\dfrac{P(X=1,Y=0)}{P(Y=0)}=0.6$，

则 $Y=0$ 时 X 的条件分布律为：

X	0	1
$P(X=i\,\vert\,Y=0)$	0.4	0.6

（3）因为 $P(X=0,Y=-1)=0.1\ne P(X=0)P(Y=-1)=0.12$，

所以 X 与 Y 不独立. 10 分

15. 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为来自总体 X 下样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的样本值，则似然函数为：

$$L(\theta)=\left[P(X=1)\right]^2\left[P(X=2)\right]^2P(X=3)$$
$$=\theta^4\cdot\left[2\theta(1-\theta)\right]^2\cdot(1-\theta)^2\quad=4(1-\theta)^4\theta^6,$$

有对数似然函数为：

$$\ln L(\theta)=\ln 4+4\ln(1-\theta)+6\ln\theta,$$

于是 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{6}{\theta}-\dfrac{4}{1-\theta}=0$，

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$， 解得 $\theta=\dfrac{3}{5}$，

因此得 θ 的最大似然估计值为： $\widehat{\theta}=\dfrac{3}{5}$. 10 分

四．应用题（**每小题 10 分，共 10 分**）

16.【解】$H_0:\mu=\mu_0=0$， $H_1:\mu\ne\mu_0$；

检验统计量：$T\overset{H_0}{=}\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，

拒绝域为：$|T|\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，

又 $n=36$，计算得 $\overline{x}=8$， $S=12$，从而 $T=4$，又

$$\left|T\right| > t_{0.025}(35) = 2.0301,$$

故拒绝 H_0，认为该课程对学生英语成绩能显著改变学生的英语成绩.　　10 分

五．证明题（**每小题 10 分，共 10 分**）

17．【证明】X 与 Y 的边缘概率密度函数分别为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_x^1 8xydy, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} = \begin{cases} 4x(1-x^2), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases},$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^y 8xydx, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} = \begin{cases} 4y^3, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases},$$

因为 $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立；

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_0^1 x \cdot 4x(1-x^2)dx = \frac{8}{15},$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy = \int_0^1 y \cdot 4y^3 = \frac{4}{5},$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^1 xy \cdot 8xydy \right) dx = \frac{4}{9},$$

则 $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \dfrac{4}{225} \neq 0$，

所以 X 与 Y 相关.　　10 分