

2022—2023 学年第二学期

《高等数学 A (二)》期末考试试卷 (A卷)

一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 二次曲面 $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 与平面 $y = h$ 相截, 则其截痕是空间的 () .
(A) 椭圆 (B) 直线 (C) 抛物线 (D) 双曲线
2. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy}{2x^2 + 3y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 则函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处 ().
(A) 连续, 但偏导数不存在 (B) 不连续, 偏导数存在
(C) 连续且偏导数存在, 但不可微 (D) 不连续且偏导数不存在
3. 设有空间区域 $\Omega_1 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$; $\Omega_2 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 则 ()
(A) $\iiint_{\Omega_1} z dV = 4 \iiint_{\Omega_2} z dV$ (B) $\iiint_{\Omega_1} y dV = 4 \iiint_{\Omega_2} y dV$
(C) $\iiint_{\Omega_1} x dV = 4 \iiint_{\Omega_2} x dV$ (D) $\iiint_{\Omega_1} xyz dV = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dV$
4. 设 L 是圆周 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, 则 $\oint_L x^2 ds =$ ()
(A) 0 (B) π (C) $\sqrt{\pi}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$
5. 设 $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 则下列级数中必定收敛的为 ().
(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n}$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n^2$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

6. 点 $P(2, 1, 0)$ 到平面 $x + 2y + 2z - 1 = 0$ 的距离为 _____.
7. 累次积分 $\int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} f(x, y) dy$ 交换积分次序后为 _____.

8. 设 $u = f(x, y, z)$ 在 R^3 上有二阶连续偏导数, 则 $\text{rot}(\text{grad}u) = \underline{\hspace{2cm}}$.
9. 设 $\alpha > 0$ 为常数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n}\right)$ 为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (填“绝对收敛”或“条件收敛”或“发散”)
10. 函数 $f(x) = \pi x + x^2$ ($-\pi < x < \pi$), 且周期为 2π . 已知 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上的傅里叶级数为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则 $b_3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题 (每小题 9 分, 共 54 分)

11. 求切点在椭球面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上且平行于平面 $x - y + 2z = 0$ 的切平面方程.
12. 设 $z = z(x, y)$ 是由 $e^z = xyz + 1$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
13. 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{dxdydz}{(x+y+z)^3}$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) | 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 2\}$.
14. 计算 $\int_L xy dx$, 其中 L 为抛物线 $x = y^2$ 上从点 $A(1, -1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段弧.
15. 计算 $\iint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, 其中 Σ 为球面的 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 外侧.
16. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的和函数 $S(x)$.

四、应用题 (每小题 8 分, 共 8 分)

17. 已知上半球面壳子 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的密度函数为 $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, 求该上半球面壳子的质量.

五、证明题 (每小题 8 分, 共 8 分)

18. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛.

