

2021-2022 第二学期高等数学 A(二)试卷 B 参考答案

一、选择题 (每题 3 分, 共 15 分)

1. C. 2. D. 3. C. 4. A. 5. B.

二、填空题 (每题 3 分, 共 15 分)

6. 5. 7. $e^2 dx + 2e^2 dy$. 8. 8π . 9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!} x^{2n+1}$. 10. 0.

三、计算题 (每题 10 共 60)

11. 解: 设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$, 则

$$F'_x = 2x, \quad F'_z = 2z - 4$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_{y'}} = \frac{x}{2-z}.$$

再一次对 x 求偏导数, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(2-z) + x \frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2} = \frac{(2-z) + x \cdot \frac{x}{2-z}}{(2-z)^2} = \frac{(2-z)^2 + x^2}{(2-z)^3}.$$

12. 解: 令 $\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 8x + 2y = 0 \\ f'_y = 2x - 2y = 0 \end{cases}$, 解得驻点为 $(0,0)$, $(2,2)$.

又 $f''_{xx} = 6x - 8$, $f''_{xy} = 2$, $f''_{yy} = -2$, 依次代入驻点, 有

在驻点 $(0,0)$ 处, $A = f''_{xx}(0,0) = -8$, $B = f''_{xy}(0,0) = 2$, $C = f''_{yy}(0,0) = -2$,

$B^2 - AC = -12 < 0$, 且 $A < 0$, 故 $(0,0)$ 是极大值点, 且极大值为 $f(0,0) = 1$.

在驻点 $(2,2)$ 处, $A = f''_{xx}(2,2) = 4$, $B = f''_{xy}(2,2) = 2$, $C = f''_{yy}(2,2) = -2$,

$B^2 - AC = 12 > 0$, 故 $(2,2)$ 不是极值点;

所以 $f(x, y)$ 在点 $(0,0)$ 处取极大值, 且极大值为 $f(0,0) = 1$.

13. 解: $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^2 r dz$

$$= 2\pi \int_0^2 r^3 \left(2 - \frac{r^2}{2} \right) dr$$

$$= \frac{16\pi}{3}$$

14 解: 这里 $P = -2xy - y^2$, $Q = -2xy - x^2 + 3x$

其在整个平面上具连续偏导, 又

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x - 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x - 2y + 3$$

故由格林公式知

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 3 dx dy = 3$$

15 解:

$$I = \iiint_{\Sigma} (x dy dz + y dz dx + z dx dy), \text{ 记 } \Omega \text{ 为球体 } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1. \text{ 由高斯公式}$$

$$I = - \iiint_{\Omega} (1 + 1 + 1) dv$$

$$= - \iiint_{\Omega} 3 dv$$

$$= -3 \times \frac{4}{3} \pi$$

$$= -4\pi$$

16 解: $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3n+4}{3n+1} \right| = 1$, 所以收敛半径为 $R = 1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x = \pm 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n+1)x^n \neq 0$, 所以原级数均发散, 故收敛域为 $(-1, 1)$.

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (3n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+1)x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= 3\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right)' - 2\frac{1}{1-x} = 3\left(\frac{x}{1-x}\right)' - \frac{2}{1-x} = \frac{3}{(1-x)^2} - \frac{2}{1-x} = \frac{1+2x}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

四、证明题（本题 10）

17 证明： $\because \left| \frac{n^2}{3^n} \sin \frac{\pi n}{4} \right| \leq \frac{n^2}{3^n},$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n^2} = \frac{1}{3} < 1 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ 收敛,

由比较判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^2}{3^n} \sin \frac{\pi n}{4} \right|$ 收敛, 故原级数绝对收敛.