安徽大学 2023—2024 学年第二学期

《 高等数学 A（二） 》期末考试试卷（B 卷）

参考答案与评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1．0； 2． $e^{xy}\cos xy\left(ydx+xdy\right)$； 3． $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$； 4．$1-\cos1$； 5． $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6． D； 7． D； 8． A； 9． C； 10． D

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11.【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2xy+f_2'\cdot(-\dfrac{y}{x^2})$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot x^2+f_2'\cdot\dfrac{1}{x}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=2xf_1'+2xy(f_{11}''\cdot x^2+f_{12}''\cdot\frac{1}{x})-\frac{1}{x^2}f_2'-\frac{y}{x^2}(f_{21}''\cdot x^2+f_{22}''\cdot\frac{1}{x})$$

$$=2xf_1'-\frac{1}{x^2}f_2'+2x^3yf_{11}''+yf_{12}''-\frac{y}{x^3}f_{22}''.$$

…………………（10 分）

12.【解】 $\begin{cases}2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\\1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x\\\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1\end{cases}$， $J=\begin{vmatrix}y&z\\1&1\end{vmatrix}=y-z\neq0$，

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\begin{vmatrix}-x&z\\-1&1\end{vmatrix}\Big/J=\dfrac{z-x}{y-z}$， $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\begin{vmatrix}y&-x\\1&-1\end{vmatrix}\Big/J=\dfrac{x-y}{y-z}$，

所以在点 $P(1,-2,1)$ 处的切向量为 $\vec{T}=\{1,0,-1\}$，

因此切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$，

法平面方程为 $(x-1)-(z-1)=0$，即 $x-z=0$．

…………………（10 分）

13.【解】由轮换对称性可知，$\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

所以 $\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\dfrac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\dfrac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^2\sin\varphi\cdot\rho^2\,\mathrm{d}\rho$

$=\dfrac{1}{3}\cdot2\pi\cdot\dfrac{1}{5}\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\dfrac{4}{15}\pi$

…………………（10 分）

14.【解】L 的参数方程为: $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t\\y=\sqrt{2}\sin t\end{cases}$ $(-\dfrac{\pi}{4}\le t\le\dfrac{\pi}{2})$，

$\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\,\mathrm{d}t$，

所以 $\int_L y\,\mathrm{d}s=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin t\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{d}t=-2\cos t\,|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}$.

......................（10 分）

15.【解】曲面 Σ 的方程为 $z=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ （ $x^2+y^2\le 1$），

补平面 Σ_1： $z=e$ （ $x^2+y^2\le 1$），

取上侧。记 Σ 与 Σ_1 所围立体为 Ω， Ω 在面 xOy 的投影为 D： $x^2+y^2\le 1$，

则 $\iint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}(2xz+2y+2z)dxdydz-\iint\limits_{\Sigma_1}(z^2-x)dxdy$

$=\iiint\limits_{\Omega}2zdxdydz-\iint\limits_{\Sigma_1}(z^2-x)dxdy$

$=\iint\limits_{D}\left[\int_{e^r}^{e}2zdz\right]rdrd\theta-\iint\limits_{D}(e^2-x)dxdy$

$=\pi-\pi e^2$

......................（10 分）

16.【解】设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+1}-1)x^{2n}$ ，

记 $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}$ ， $S_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}$ ，

则 $S(x)=S_1(x)-S_2(x)$， $x\in(-1,1)$.

由于 $S_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2}$， $(xS_1(x))'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2}$， $x\in(-1,1)$，

因此 $xS_1(x)=\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ ，

又由于 $S_1(0)=0$，故

$$S_1(x)=\begin{cases}-1+\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & 0<|x|<1\\ 0, & x=0\end{cases},$$

所以 $S(x)=S_1(x)-S_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}, & 0<|x|<1\\ 0, & x=0\end{cases}$.

......................（10 分）

四、应用题（共 10 分）

17.【解】

$$W=\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$$

令$P=\frac{4x-y}{4x^2+y^2}, Q=\frac{x+y}{4x^2+y^2}$,计算得$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

取$L': 4x^2+y^2=1$,顺时针，

则$I=\int_{L+L'}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy-\int_{L'}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$

$$=0+\int_{L'+}(4x-y)dx+(x+y)dy=\iint\limits_{4x^2+y^2\le 1}1-(-1)dxdy=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\pi$$

......................（10 分）

五、证明题（10 分）

18.【证明】$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}/\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}$,

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，故原级数非绝对收敛；

原级数为交错级数，且$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$单调下降趋向于零，故原级数条件收敛

......................（10 分）