安徽大学 2020—2021 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末考试试题（B 卷）

参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. C　　2. B　　3. D　　4. B　　5. B

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 4　　7. $-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　8. $2^5\mathrm{e}^x\cos x$

9. $(x^3-3x^2+6x-6)\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}$　　10. $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+(r'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta$

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11. 解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+n}{2+n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2+n}\right)^{-(2+n)\cdot\frac{n}{-(2+n)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{-(2+n)}}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{-(2+n)}=-1$，　　　　……………………7 分

所以所求极限为e^{-1}.　　　　……………………9 分

12. 解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)x^3\cos x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)x^3\cos x}=\frac{1}{4}.$$　　　　9 分

13. 解：对 $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 两边取对数，有

$$\ln y=x\ln(1+\frac{1}{x}).$$　　　　……………… 3 分

对等式两边关于 x 求导，则有 $\dfrac{y'}{y}=\ln(1+\dfrac{1}{x})-\dfrac{1}{x+1}$，

从而 $y'=\left(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$. …………………… 9 分

14. 解：原式 $=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$ ………………………4 分

$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C$. ………………………9 分

15. 解：原式 $=x\ln^2 x\Big|_0^1-2\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$ …………………… 4 分

$=x\ln^2 x\Big|_0^1-2x\ln x\Big|_0^1+\int_0^1 2\mathrm{d}x=2$. ………………………9 分

16. 解：原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^4\sin x\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4 x\mathrm{d}x$ …………………… 3 分

$=0+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4 x\mathrm{d}x=8\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$. …………………… 9 分

四、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

17. 解：因为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\mathrm{e}^{-t}}{2\mathrm{e}^{t}}=-\frac{1}{2\mathrm{e}^{2t}}$，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=-\frac{1}{2}$.

$t=0$ 对应的点为 $(2,1)$，

所以曲线在点 $(2,1)$ 处的切线方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$，即 $x+2y-4=0$.…… 6 分

从而法线方程为 $y-1=2(x-2)$，即 $2x-y-3=0$. …………………… 8 分

18．解：令 $x^3-6x=2x$，解得 $x=\pm 2\sqrt{2},0$. …………………3 分

故所求面积为 $S=\int_{-2\sqrt{2}}^{0}(x^3-6x-2x)\mathrm{d}x+\int_0^{2\sqrt{2}}(2x-x^3+6x)\mathrm{d}x=32$. ………… 8 分

五、证明题（每小题 10 分，共 10 分）

19. **证明：**因为 $F'(x)=\dfrac{xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2}=\dfrac{\int_0^x (x-t)f(x)f(t)\mathrm{d}t}{\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2}\geq 0$,

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加. …………………… 10 分