

2023—2024 学年第二学期

《 高等数学 A (二) 》期末考试试卷 (A 卷)

(闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号_____

一、选择题 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. 直线 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ 和平面 $\pi: 3x+2y-2z+1=0$ 的位置关系是 ()

- (A) L 在 π 上 (B) L 与 π 平行, 但 L 不在 π 上
(C) L 与 π 垂直 (D) L 与 π 相交于一点, 但不垂直

2. 直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$ 与直线 $L_2: \frac{x-7}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ 的夹角为 ()

- (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

3. 椭圆抛物面 $z = 2x^2 + y^2$ 在点 $P(1, -1, 3)$ 处的切平面方程是 ()

- (A) $2x + 4y - z - 3 = 0$ (B) $2x - 4y - z - 3 = 0$
(C) $4x + 2y - z - 3 = 0$ (D) $4x - 2y - z - 3 = 0$

4. 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处 ()

- (A) 不连续且偏导不存在 (B) 不连续但偏导存在
(C) 连续但偏导不存在 (D) 连续且偏导存在

5. 设函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$, 则 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 是 ()

- (A) 不为极值点 (B) 极大值点 (C) 极小值点 (D) 无法判断

6. 交换积分次序求积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx = ()$

- (A) $1 - \cos 1$ (B) $1 + \cos 1$ (C) $1 - \sin 1$ (D) $1 + \sin 1$

7. 若 $f(x)$ 是周期为 2 的函数, 且 $f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x = 0$ 处收敛于 ()

- (A) 2 (B) 0 (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$

学号

姓名

专业

年级

院/系

8. 曲线积分 $\int_{(0,1)}^{(1,2)} (6xy + 2y^2)dx + (3x^2 + 4xy)dy = (\quad)$

- (A) 14 (B) 0 (C) 12 (D) -12

9. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{\sqrt{n^2+1}}$ ()

- (A) 条件收敛 (B) 绝对收敛 (C) 发散 (D) 敛散性不确定

10. 向量场 $\vec{F} = xy\vec{i} + \cos(xy)\vec{j} + \cos(xz)\vec{k}$ 在 $(0, 1, 0)$ 处的散度是 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

二、计算题 (每小题 11 分, 共 55 分)

11. 设 $z = f(x+y, x-y)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

12. 求 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 1$ 所围成的立体区域.

13. 计算曲线积分 $J = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$, 其中 L 是第一象限中从点 $(0, 0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2, 0)$, 再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $(0, 2)$ 的曲线段.

14. 计算曲面积分 $\oiint_S x dy dz + y dz dx + (z+1) dx dy$, 其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧.

15. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$ 的和函数 $S(x)$.

三、应用题 (共 10 分)

16. 某博物馆的屋顶为曲面 $\Sigma: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 其中 $a > 0$ 常数, 其密度分布为 $P(x, y, z) = x + y + z$, 求该屋顶的质量 M .

四、证明题 (共 5 分)

17. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散.