安徽大学 2022—2023 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期末考试试卷（B 卷）

考试试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、 0　　2、 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$　　3、 $\dfrac{\pi}{2}ae^a$　　4、 $[-1,1)$　　5、 $\dfrac{\pi^2}{2}$

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6、 C　　7、 A　　8、 B　　9、A　　10、 D

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11、【解】设 $F(x,y,z)=\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z-1$，则

$F_x'(x,y,z)=-2\cos x\sin x=-\sin 2x$， $F_y'(x,y,z)=-2\cos y\sin y=-\sin 2y$，

$F_z'(x,y,z)=-2\cos z\sin z=-\sin 2z$.

由隐函数求导公式可得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{\sin 2x}{\sin 2z}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{\sin 2y}{\sin 2z}。$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{\sin 2x}{\sin 2z}dx-\frac{\sin 2y}{\sin 2z}dy=-\frac{1}{\sin 2z}(\sin 2xdx+\sin 2y\,dy)$$

………………………………… 10 分

12、【解】先求出函数在 D 上的所有驻点和偏导数不存在的点,解方程得：

$$\begin{cases} f_x'(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0 \\ f_y'(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0 \end{cases}$$

得到区域D内的唯一驻点(2, 1)，且 $f(2,1)=4$． 再求 $f(x,y)$ 在D的边界上的最值.

在边界 x=0 和 y=0 上 $f(x,y)$=0. 在边界 x+y=6 上，即 y=6－x，于是 $f(x,y)=-2x^2(6-x)$,

故有： $f_x=4x(x-6)+2x^2=0\Rightarrow x_1=0,x_2=4\Rightarrow y=6-x\,|_{x=4}=2,\ f(4,2)=-64$

比较后得到 $f(2,1)=4$ 为最大值， $f(4,2)=-64$ 为最小值.

………………………………… 10 分

13、【解】令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，利用极坐标系，积分区域表示为 $D'=\{(r,\theta)\mid 0\le\theta\le 2\pi, \pi\le r\le 2\pi\}$，则：

$$\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint_{D'}\sin r\cdot rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\pi^{2\pi}\sin r\cdot rdr=-6\pi^2$$

………………………………… 10 分

14、【解】 因为$\frac{\partial z}{\partial x}=2a\sin(ax+by)\cos(ax+by)=a\sin 2(ax+by)$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a\cos 2(ax+by)\bullet 2a=2a^2\cos 2(ax+by)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=a\cos 2(ax+by)\bullet 2b=2ab\cos 2(ax+by)$$

………………………………… 10 分

15、【解】由高斯公式，有

$$\begin{aligned}&\oiint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint_\Omega 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=3\iiint_\Omega 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=3\times\frac{4}{3}\pi a^3\\&=4\pi a^3\end{aligned}$$

………………………………… 10 分

16、【解】先求幂级数得收敛域，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+2)x^{2n+1}}{2nx^{2n-1}}\right|=x^2<1$，则：$-1<x<1$。当$x=\pm1$时，级数发散，故级数得收敛域为$(-1,1)$。设和函数为 $s(x)=\sum_{n=1}^\infty 2nx^{2n-1}, x\in(-1,1)$，两边同时求积分可得：

$$\int_0^x s(x)dx=\int_0^x\sum_{n=1}^\infty 2nx^{2n-1}dx=\sum_{n=1}^\infty\int_0^x 2nx^{2n-1}dx=\sum_{n=1}^\infty x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2}, x\in(-1,1),$$

求导可得：

$$s(x)=\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)'=\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2},x\in(-1,1)$$

………………………………… 10 分

四、证明题（每小题 10 分，共 10 分）

17、【证明】因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\bullet\frac{2^n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛。

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$ 绝对收敛

………………………………… 10 分