# 2022—2023 学年第二学期

# 《高等数学 A（二）》期末考试试卷（A 卷）

# 考试试题参考答案及评分标准

## 一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、 C　　2、 B　　3、 A　　4、D　　5、 C

## 二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6、 1　　7、$\int_0^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$　　8、$(0,0,0)$ 或 $\vec{0}$　　9、绝对收敛　　10、$\frac{2\pi}{3}$

## 三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11、【解】设切点坐标 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，则：$x_0^2+2y_0^2+z_0^2=1$。令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1$，则：$F_x'=2x, F_y'=4y, F_z'=2z$，因此，点$M_0$处切平面的法向量为 $\mathbf{n}=\{2x_0,4y_0,2z_0\}$，平面 $x-y+2z=0$ 的法向量为 $\mathbf{n}_0=\{1,-1,2\}$，又因为切平面平行于已知平面，则它们的法向量也平行，

即$\mathbf{n}//\mathbf{n}_0$，故

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{-1}=\frac{2z_0}{2},$$

即得：$y_0=-\frac{1}{2}x_0, z_0=2x_0$, 故有：

$$x_0^2+2\cdot\frac{1}{4}x_0^2+4x_0^2=1$$

解得$x_0=\pm\sqrt{\frac{2}{11}}$, 从而$\mathbf{n}=2x_0\{1,-1,2\}$，故所求切平面方程为：

$$(x-x_0)-\left(y+\frac{1}{2}x_0\right)+2(z-2x_0)=0$$

即：$x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}$　　………………　9 分

12、【解】 设$F(x,y,z)=e^z-xyz-1$, 则 $F_x'=-yz$，$F_y'=-xz$，$F_z'=e^z-xy$，由隐函数求导公式，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{yz}{e^z-xy}$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yz}{e^z-xy}\right)=\frac{y\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(e^z-xy\right)-yz\left(e^z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)}{\left(e^z-xy\right)^2}$$

$$=\frac{2y^2ze^z-2xy^3z-y^2z^2e^z}{\left(e^z-xy\right)^3}$$

………………………………… 9 分

13、【解】

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x+y+z)^3}=\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^2\mathrm{d}y\int_1^2\frac{1}{(x+y+z)^3}\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{1}{2}\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^2\left[\frac{1}{(x+y+2)^2}-\frac{1}{(x+y+1)^2}\right]\mathrm{d}y$$ ……… 9 分

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+4}-\frac{2}{x+3}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{7}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln 5$$

14、【解】取 $y$ 为参数， 曲线 $L$ 的参数方程为： $L: y=y, x=y^2$, $y:-1\rightarrow 1$，而 $\mathrm{d}x=2y\mathrm{d}y$，则：

$$\int_L xy\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 y^2\times y\times 2y\mathrm{d}y=2\int_{-1}^1 y^4\mathrm{d}y=\frac{2y^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4}{5}$$ … 9 分

15、【解】设 $\Omega$ 为由 $\Sigma$ 围成的空间闭区域，$\Omega$：$0\le\theta\le 2\pi$, $0\le\varphi\le\pi$, $0\le r\le a$，由高斯公式，有

$$\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}3\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$ …………… 9 分

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=3\times 2\pi\times\frac{a^5}{5}\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{12\pi}{5}a^5$$

16、【解】 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+3}}{2n+3}}{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{2n+3}x^2\right|=\left|x^2\right|<1\longrightarrow\left|x\right|<1$，

则收敛半径为$R = 1$, 当$x = -1$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$，发散；当$x = 1$时，

级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$，发散；所以级数的收敛域为$(-1, 1)$。

$\forall x \in (-1, 1)$，设和函数为$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, S(0) = 0$，两边求导可得：

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}, x \in (-1,1)$$

两边求积分可得和函数：

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|, x \in (-1,1) \end{aligned}$$

………… 9 分

**四、综合题（每小题 8 分，共 8 分）**

17、【解】上半球面可表示为

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le a^2\},$$

面积微元为：

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所以球面质量为：

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\Sigma}\left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}S = a\iint_{D_{xy}}\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \frac{r^3}{\sqrt{a^2 - r^2}}\mathrm{d}r \\ &= \pi a\int_0^a\left(\sqrt{a^2 - r^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - r^2}}\right)\mathrm{d}\left(a^2 - r^2\right) \\ &= \pi a\left[\frac{2}{3}\left(a^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} - 2a^2\sqrt{a^2 - r^2}\right]_0^a = \frac{4}{3}\pi a^4 \end{aligned}$$

………………………………… 8 分

## 五、证明题（每小题 8 分，共 8 分）

18、【证明】因为正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛，所以 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \lim_{n\to\infty} v_n = 0,$ 由极限存在必有解，可知$u_n^2 \le Mu_n$，$v_n^2 \le Nv_n$，其中$M, N$为正常数；再由比较判别法的极限形式，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 均收敛，而$u_n v_n \le \frac{1}{2}\left(u_n^2 + v_n^2\right)$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n + v_n\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2$ 收敛.

…………………………………… 8 分