

2021—2022 学年第二学期

《高等数学 A (二)》期末试卷

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. 直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$ 与直线 $L_2: \begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$ 的夹角为()

- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

2. 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处().

- (A) 连续, 偏导数存在 (B) 连续, 偏导数不存在
(C) 不连续, 偏导数存在 (D) 不连续, 偏导数不存在

3. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\cos\theta + \sin\theta}{1}}^1 f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr = ()$.

- (A) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ (B) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$
(C) $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ (D) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

4. 设 $L: y = x, x \in [0, 1]$, 第一类曲线积分 $I_1 = \int_L k(y-x) ds$, $I_2 = \int_L (y-x^2) ds$, 其中 k 为常数, 则 I_1, I_2 的大小关系为().

- (A) $I_1 < I_2$ (B) $I_1 > I_2$ (C) $I_1 = I_2$ (D) 无法比较

5. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处收敛, 则此级数在 $x = 2$ 处().

- (A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 敛散性不定

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 函数 $z = x^2 y + 2xy$ 在点 $(1, 1)$ 处的最大方向导数为_____.

7. 函数 $z = \arctan \frac{x+y}{x-y}$ 的全微分 $dz =$ _____.

8. 设 $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$, 则三重积分 $\iiint_{\Omega} xy dv =$ _____.

9. 设曲面 Σ 的方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 则曲面积分 $\iint_{\Sigma} 3x^2 dS =$ _____.

10. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 1+x^2, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$ 则其以 2π 为周期的傅里叶级数在

$x = \pi$ 处收敛于 _____.

三、解答题 (本大题共 7 小题, 每小题 9 分, 共 63 分)

11. 求曲面 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处的切平面与法线方程.

12. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x + y - z = e^z$ 所确定隐函数, 求 $z''_{xy}(1, 0)$.

13. 求函数 $f(x, y) = y^3 - x^2 + 6x - 12y + 5$ 的极值.

14. 计算二重积分 $I = \iint_D |y - x^2| d\sigma$, 其中区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

15. 计算曲线积分 $I = \int_L (2 + xe^{2y}) dx + (x^2 e^{2y} - 1) dy$, 其中 L 是沿着圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 顺时针方向的上半圆周.

16. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^2 y dy dz + y^2 \sin x dz dx + z^2 dx dy$, 其中 Σ 为圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 介于平面 $z=0$ 和 $z=1$ 之间的部分, 并取外侧.

17. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$ 的收敛域及其和函数.

四、证明题 (本题 7 分)

18. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

