

2023—2024 学年第二学期

《高等数学 A (二)》期末考试 (A 卷) 答案及评分标准

一. 选择题 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. B 2. A 3. D 4. D 5. C
6. A 7. C 8. A 9. B 10. B

二. 计算题 (每小题 11 分, 共 55 分)

11. 解: $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot 1 + f'_2 \cdot 1 = f'_1 + f'_2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{11} \cdot 1 + f''_{12} \cdot (-1) + f''_{21} \cdot 1 + f''_{22} \cdot (-1)$

由于 f 具有二阶连续偏导数, 故 $f''_{12} = f''_{21}$

故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{11} - f''_{22}$

..... (11 分)

12. 解: 用平行于 xOy 的平面截 Ω , 得截面区域为 $D_z = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq z\}$

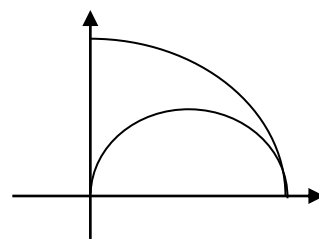
$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^1 dz \iint_{D_z} z dx dy = \int_0^1 z dz \iint_{D_z} dx dy = \int_0^1 \pi z^2 dz = \frac{\pi}{3}$$

..... (11 分)

13. 解: 圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 为圆 C_1 , 圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 为圆 C_2 ,

补一直线段 $L_1: x=0, 0 \leq y \leq 2$, 方向向下, 由格林公式, 有

$$\begin{aligned} J &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \int_{L_1} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy \\ &= \iint_{D_1} (3x^2 + 1 - 3x^2) dx dy - \int_2^0 -2y dy = S(D) - 4 \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} - 4 = \frac{\pi}{2} - 4. \end{aligned}$$



..... (11 分)

14. 解: 由高斯公式

$$\iiint_S x dy dz + y dz dx + (z+1) dx dy = 3 \iiint_V dx dy dz = 4\pi$$

..... (11 分)

15. 解: 收敛半径为 1, 收敛区间为 $(-1, 1)$, 收敛域为 $(-1, 1)$;

$\forall x \in (-1, 1)$, 记

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}, \quad S(0) = 0$$

则
$$S'(x) = x + x^3 + \cdots = \frac{x}{1-x^2};$$

上式两边积分得到

$$\int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \frac{t}{1-t^2} dt = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$$

即有

$$S(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2), \quad x \in (-1, 1). \quad \dots\dots\dots (11 \text{ 分})$$

三. 应用题 (共 10 分)

16. 解: 依题意,
$$M = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$$

因为上半球面 Σ 关于 xOy 面对称, 而 x 关于 x 是奇函数, 故 $\iint_{\Sigma} x dS = 0$; 同理,

$$\iint_{\Sigma} y dS = 0;$$

Σ 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq a^2$, 而

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy,$$

$$\text{所以 } M = \iint_{\Sigma} z dS = \iint_{\Sigma} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = a \iint_{\Sigma} dx dy = \pi a^3.$$

$\dots\dots\dots (10 \text{ 分})$

四. 证明题 (共 5 分)

17. 证明: (反证) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛,

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 由收敛级数的性质得 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n - u_n)$ 收敛,

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 矛盾. 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散.

$\dots\dots\dots (5 \text{ 分})$