Seminar 3

6) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$ sp. vect

a) $S = \{ \underbrace{(1, m, 1)}_{u}, \underbrace{(m, 1, 1)}_{v}, \underbrace{(1, 0, m)}_{w} \} \subset \mathbb{R}^3$, $m \in \mathbb{R}$.

1) $m = ?$ a.î. S este SLi

2) $m = ?$ a.î. S este SLD

3) Dacă $m = 2$, at. S este bază

$B_0 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ bază canonică.

$\dim_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}^3) = 3$

$\boxed{\text{Fie } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ a.î. } a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w = 0_{\mathbb{R}^3}}$

$a \cdot (1, m, 1) + b \cdot (m, 1, 1) + c \cdot (1, 0, m) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow (a + bm + c, \ am + b, \ a + b + cm) = (0, 0, 0)$

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} a + bm + c = 0 \\ am + b = 0 \\ a + b + cm = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$$

$(*)$ este SLO cu soluție unică nulă

$\Rightarrow \det A \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \underset{=}{\overset{C_1 - C_2}{}} \begin{vmatrix} 1-m & m & 1 \\ m-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} =$$

$$= (m-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} \overset{L_2 + L_1}{=} (m-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & m & 1 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} =$$

$$= (m-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}$$

$= (1-m)\cdot(m^2+m-1)$

$\det A = 0 \Leftrightarrow m=1$ sau $m^2+m-1=0.$

$\Delta = 1+4=5$

$\Rightarrow m_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$

1) $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{1, \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}.$

2) $m \in \left\{1, \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}.$

3) $m=2 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow S = SLi$

$\left.\begin{array}{l} |S| = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3), \\ S = SLi \end{array}\right\} \Rightarrow$ Baza

Obs: Se poate demonstra și că S este SG, $\mathbb{R}^3 = \langle S \rangle$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; \exists\, a,b,c \in \mathbb{R}$ a.î. $(x,y,z) = a\cdot u + b\cdot v + c\cdot w.$

b) $S' = \{\underbrace{(1, a_1, a_1^2)}_{u'}, \underbrace{(1, a_2, a_2^2)}_{v'}, \underbrace{(1, a_3, a_3^2)}_{w'}\} \subset \mathbb{R}^3$

$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$

S' bază. Ce relație verifică a_1, a_2, a_3?

$|S'| = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \Rightarrow S'$ bază $\Leftrightarrow S'$ este SLi

Fie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ a.î. $\alpha\cdot u' + \beta\cdot v' + \gamma\cdot w' = 0_{\mathbb{R}^3}.$

$\Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha\cdot a_1 + \beta\cdot a_2 + \gamma a_3,\ \alpha\cdot a_1^2 + \beta\cdot a_2^2 + \gamma\cdot a_3^2) = (0,0,0)$

Scanned with CamScanner

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$$

SLO are soluție unică nula $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_3 - a_2) \cdot (a_3 - a_1) \cdot (a_2 - a_1) \neq 0$$

$\Leftrightarrow a_3 \neq a_2 \neq a_1 \neq a_3$.

7) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$

a) $S_1 = \{ \underbrace{(1,1,0)}_{u}, \underbrace{(1,-1,-1)}_{v}, \underbrace{(2,0,-1)}_{w} \}$

Să se extragă din S_1 un SLi maximal S_1' și să se extindă acesta la o bază.

$w = u + v \Rightarrow u + v - w = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow S$ este SLD.

$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow S_1' = \{u, v\}$ este SLi maximal din S_1

$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \underbrace{S_1' \cup \{(1,0,0)\}}_{B_1}$ este SLi

$|B_1| = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$

$\Rightarrow B_1$ bază

b) $S_2 = \{(1, 2, 3)\}$

S_2 este SLi, nu este SG

Să se extindă la o bază

$(1, 2, 3) \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow S_2$ este SLi

$\underset{\overset{\shortparallel}{3}}{n}$ = nr. minim. de vectori din SG $\Rightarrow S_2$ nu este SG.

$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow B_2 = S_2 \cup \{(1,0,0), (0,0,1)\}$ este SLi.

$\left.\begin{array}{l} B_2 \text{ SLi} \\ |B_2| = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) \end{array}\right\} \Rightarrow B_2$ este bază

c) $S_3 = \{(1,0,-1), (2,1,3), (1,1,1), (-1,2,3)\}$

1) $\dim \langle S_3 \rangle$

2) det. $S_3' \subset S_3$ SLi max și prelungiți la o bază

$rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3$ (calcule mai jos)

$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{=}{\overset{L_1+L_3}{=}} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= -1 \cdot 3 = -3 \neq 0$

$S_3' = \{(1,0,-1), (2,1,3), (1,1,1)\}$ SLi maximal c

$\dim \langle S_3 \rangle = \dim \langle S_3' \rangle = 3 \Rightarrow S_3'$ bază (SLi și $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = |S_3$

8) Fie $(\mathbb{R}_2[x] = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grad } P \leq 2\}, +, \cdot)/\mathbb{R}$

a) $f = 2x^2 - 3x + 1 \Rightarrow B_1 = \{f, f', f''\}$ bază

Să se generalizeze. $\qquad f = \tilde{f}$

$B_0 = \{1, x, x^2\}$ bază canonică.

$f'(x) = 4x - 3$

$f''(x) = 4$

$f = 2x^2 - 3x + 1 \longrightarrow (1, -3, 2)$

$f' = 4x - 3 \longrightarrow (-3, 4, 0)$

$f'' = 4 \longrightarrow (4, 0, 0)$

$\{(1,-3,2), (-3,4,0), (4,0,0)\}$ SLi

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \text{SLi}.$$

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x]) = 3 \Rightarrow B_2 =$ bază

$\forall P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \; a_2 \neq 0.$

$\{P, P', P''\}$ formează baza

b) $B_2 = \{1, x-1, (x-1)^2\}$ bază.

Să se generalizeze.

Dezvoltare în serie Taylor în jurul lui x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

Arătăm că B_2 este SG

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_2[x] : P(x) = P(1) + \frac{P'(1)}{1!}(x-1) + \frac{P''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$P(1) = a_0 + a_1 + a_2$

$P' = a_1 + a_2 \cdot x \cdot 2$ $\qquad P'(1) = a_1 + 2a_2$

$P'' = 2a_2$ $\qquad P''(1) = 2a_2$

$$\Rightarrow P(x) = 1 \cdot (a_0 + a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2)\cdot(x-1) + a_2 \cdot (x-1)^2$$

$|B_2| = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x]) = 3 \Rightarrow B_2$ este bază

Generalizare: $\{1, (x-a), (x-a)^2\}$ este bază $\forall a \in \mathbb{R}$

10) $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)/\mathbb{R}$

a) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ C

$\alpha = ?$ a.î. $B =$ bază

$B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ bază canonică în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^4$

$\{(1, 1, 1, -1), (0, 5, -1, -1), (-1, 0, 3, -1), (\alpha, 1, 1, -1)\}$ SLI

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

SLI $\Leftrightarrow \det M \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} L_1+L_4 \\ L_2+L_4 \\ L_3+L_4 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & \alpha-1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -2 & \alpha-1 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{(-1)}{=} (\alpha-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (1-\alpha) \cdot 6$$

B - SLI $\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

S este SLI. Să se completeze la o bază

$S' = \{ (1, 0, 1, 1), (2, 3, 1, 0) \}$

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ SLI

$|S| = \dim_{\mathbb{R}} (\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$

$\Rightarrow S$ bază

c) $S' = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{D}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{E} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. $\dim \langle S' \rangle$
2. SLI max. şi să se extindă la o bază

$D = B + C$

$E = B - C$

$S'' = \{B, C\}$ SLi maximal.

$\dim \langle S' \rangle = \dim \langle S'' \rangle = 2.$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

$S' \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ SLi $\Rightarrow$ bază.

II) $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), +, \cdot)/\mathbb{R}$

a) $S = \{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin(x)$, $f_3(x) = \cos(x)$

S este SLi

$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î. $a \cdot f_1 + b \cdot f_2 + c \cdot f_3 = 0 \Rightarrow a \cdot 1 + b \sin x + c \cos x = 0,$
$\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow a + c = 0. \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a + b = 0. \\ x = \pi \Rightarrow a - c = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow a = b = c = 0 \Rightarrow SLi.$$

b) $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$. (ideea)