

# SEMINAR 3

## Spatii vectoriale. SLI, SLD, SG. Baze

### Preliminarii

$(V, +, \cdot) / K$ ,  $S \subset V$  subm.  $\neq \emptyset$

•  $S$  s.m. SLI  $\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \forall x_1, \dots, x_n \in S \\ \forall a_1, \dots, a_n \in K \end{array} : \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0_V \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0_K \right]$

SLI = sistem liniar independent

•  $S$  s.m. sistem liniar dependent (SLD)  $\Leftrightarrow$

$\left\{ \begin{array}{l} \exists x_1, \dots, x_n \in S \\ \exists a_1, \dots, a_n \in K, \text{ nu toti nuli} \end{array} \text{ ai } \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0_V \right.$

•  $S$  s.m. sistem de generatori (SG)  $\Leftrightarrow$

$\forall x \in V, \exists x_1, \dots, x_n \in S \text{ ai } a_1, \dots, a_n \in K \text{ ai } x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$

Not  $V = \langle S \rangle$

Daca  $S$  este SG finit, atunci  $V$  s.m. sp. vect. finit generat.

•  $S$  s.m. baza  $\Leftrightarrow \begin{array}{l} 1) S \text{ este SLI} \\ 2) S \text{ este SG} \end{array}$

(T) Fie  $(V, +, \cdot) / K$  sp. vect. finit generat.

$B_1, B_2$  baze  $\Rightarrow \text{card } B_1 = \text{card } B_2 = n = \dim_K V$

OBS1  $n = \text{nr. max de vect dim SLI}$

$= \text{nr. min. de vect dim SG.}$

OBS2

a)  $\forall$  subm  $\neq \emptyset$  a unui SLI este SLI

b)  $\forall$  supram. a unui SLD este SLD.

c)  $\forall$  supram. a unui SG este SG

d) Din  $\forall$  SG (finit) se poate extrage o baza

e)  $\forall$  SLI (finit) se poate completa la o baza

OBS3  $(V, +, \cdot) / K$ ,  $\dim_K V = n$ ,  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

UAE 1)  $B$  baza ; 2)  $B$  e SLI ; 3)  $B$  e SG.



# Lista probleme $S_3 - GAL$

4.03.2022.

- ① Fie  $+: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definite prin

a)  $(x, y) + (x', y') = (x + x', 0)$

$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

b)  $(x, y) + (x', y') = (x + x', y')$

$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

c)  $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

$\alpha(x, y) = (0, \alpha y) \quad \forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

Precizați dacă  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot) / \mathbb{R}$  este spațiu vectorial.

- ② Fie  $+: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $\cdot: \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  def. prin

$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

$(a + ib) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx)$

$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \forall a + ib \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}$

Să se arate că  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot) / \mathbb{C}$  este sp. vectorial.

- ③ Fie  $V = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$  și

$\oplus: V \times V \rightarrow V, \quad x \oplus y = \frac{x+y}{1+xy} \quad \forall x, y \in V,$

$\odot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V, \quad \alpha \odot x = \text{th}(\alpha \text{ arcth } x) \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

unde  $\text{th } x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{th}: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$  bij

$\text{arcth } y = \ln \left( \frac{y+1}{y-1} \right)^{1/2} \quad \text{arcth}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

Să se arate că  $(V, \oplus, \odot) / \mathbb{R}$  e sp. vect.



④ Fie  $(K, +, \cdot)$  un corp com. și  $(V, +, \cdot)$  sp. vect.  
Fie  $V' \subset V$  subspațiu vect.

Spunem că  $v \sim w \Leftrightarrow v - w \in V'$  și

$$\hat{v} = \{w \in V \mid v \sim w\}.$$

$$\text{Fie } V/V' = \{\hat{v} \mid v \in V\}.$$

Să se arate că  $(V/V', +, \cdot)$  are str. de sp. vect.

$$(\hat{v} + \hat{u} = \widehat{v+u}, \quad \alpha \cdot \hat{v} = \widehat{\alpha v})$$

⑤ Fie  $(K = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}, +)$  grupul lui Klein  
(i.e.  $\forall x \in K$  are prop  $\text{ord}(x) = 2$  și  $a_0 = e$  el neutru).

$$\text{Fie } \cdot: \mathbb{Z}_2 \times K \rightarrow K$$

$$\hat{0} \cdot a_i = a_0$$

$$\hat{1} \cdot a_i = a_i, \quad \forall i = \overline{0, 3}$$

Să se arate că  $(K, +, \cdot)/\mathbb{Z}_2$  este sp. vect.

⑥ Fie sp. vect.  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$

a) Fie sist. de vect.  $S = \{(1, m, 1), (m, 1, 1), (1, 0, m)\} \subset \mathbb{R}^3$   
 $m \in \mathbb{R}$

1.  $m = ?$  ai  $S$  este SLI

2.  $m = ?$  ai  $S$  este SLΔ.

3. Dacă  $m = 2$ , at  $S$  este bază

b) Fie sist. de vect.  $S' = \{(1, a_1, a_1^2), (1, a_2, a_2^2), (1, a_3, a_3^2)\} \subset \mathbb{R}^3$   
 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ .

Ce relație verifică  $a_1, a_2, a_3$  ai  $S'$  este bază?



7) Fie  $\mathcal{M} \vee. (\mathbb{R}^3, +, \cdot) / \mathbb{R}$ .

a) Fie  $S_1 = \{(1, 1, 0), (1, -1, -1), (2, 0, -1)\}$

Să se extragă din  $S_1$  un SLI maximal  $S_1'$  și să se extindă acesta la o bază.

b) Fie  $S_2 = \{(1, 2, 3)\}$

Să se arate că este SLI și nu este SG.

Să se extindă  $S_2$  la o bază.

c)  $S_3 = \{(1, 0, -1), (2, 1, 3), (1, 1, 1), (-1, 2, 3)\}$   $\begin{cases} 1. \dim \langle S_3 \rangle \\ 2. \det S_3' \subset S_3, \text{ SLI max} \end{cases}$  și să se extindă la o bază.

8) Fie  $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot) / \mathbb{R}$ .

a)  $f = 2x^2 - 3x + 1 \Rightarrow B_1 = \{f, f', f''\}$  bază. Generalizare.

b)  $B_2 = \{1, x-1, (x-1)^2\}$  bază. Generalizare.

obs  $f = \tilde{f}$  (funcția polinomială asociată).

9) Fie  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot) / \mathbb{R}$

a)  $B = \{(1, 2), (3, 4)\}$  bază

b)  $S = \{(1, 2), (3, 4), (4, 2)\}$  este SLI, SG

c)  $S' = \{(1, 4)\}$  este SLI, nu e SG.

Să se extindă la o bază.

d)  $S'' = \{(1, -1), (2, 3), (3, 2), (1, 4)\}$  este SG

Să se extragă o bază din  $S''$ .

10) Fie  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot) / \mathbb{R}$ .

a)  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\alpha = ?$  ca  $B$  este bază



b) Fie  $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$

$S$  este SLI și să se completeze la o bază.

c)  $S' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$

1.  $\dim \langle S' \rangle = ?$

2. Să se extragă din  $S'$  un SLI max și acesta să se extindă la o bază.

(11)  $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), +, \cdot) / \mathbb{R}$

a)  $S = \{f_1, f_2, f_3\}$ ,  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = \sin x$ ,  $f_3(x) = \cos x$   
 $S$  este SLI

b)  $S' = \{g_1, g_2, g_3\}$ ,  $g_1(x) = 1$ ,  $g_2(x) = \cos x$ ,  $g_3(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$   
 $S'$  este SLI.

c)  $S'' = \{h_1, h_2, h_3\}$ ,  $h_1(x) = e^x$ ,  $h_2(x) = e^{-x}$ ,  $h_3(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$   
 $S''$  este SLI.

(12) Fie sp. vect  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot) / \mathbb{R}$  cu baza  $\{f_1, \dots, f_n\}$ .

Să se arate că sp. vect  $(\mathbb{C}^n, +, \cdot) / \mathbb{R}$  are baza  $\{f_1, i f_1, \dots, f_n, i f_n\}$ .

(13) Fie  $(V_1, +, \cdot) / \mathbb{K}$  sp. vect și  $B_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$  baza  
 $(V_2, +, \cdot) / \mathbb{K}$  sp. vect și  $B_2 = \{f_1, \dots, f_m\}$  bază

Să se arate că sp. vect  $(V_1 \times V_2, +, \cdot) / \mathbb{K}$  are baza

$B = \{(e_1, 0_{V_2}), \dots, (e_n, 0_{V_2}), (0_{V_1}, f_1), \dots, (0_{V_1}, f_m)\}$  și

deci  $\dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 = n + m$

Ex 14.  $\text{Fie } (\mathbb{R}^3, +, \cdot) / \mathbb{R}.$

$$S = \{ u_1 = (1, 5, 3), u_2 = (2, 0, 6) \}$$

$$S' = \{ w_1 = (-1, 7, -3), w_2 = (4, 5, 12) \}$$

Să se arate că  $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$

Ex 15 Arătați că  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1, \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n, \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$$