Министерство образования и науки Украины
Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»

Кафедра компьютерной математики и анализа данных

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8

МЕТОДЫ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

ст. гр. КН-118 Тепляков А. Д.

Харьков, 2020

Результаты работы программы

На рисунках ниже представлены результаты работы программы для функции Химмельблау метода Хука-Дживса:

$x_0 = (3;\ -3)$

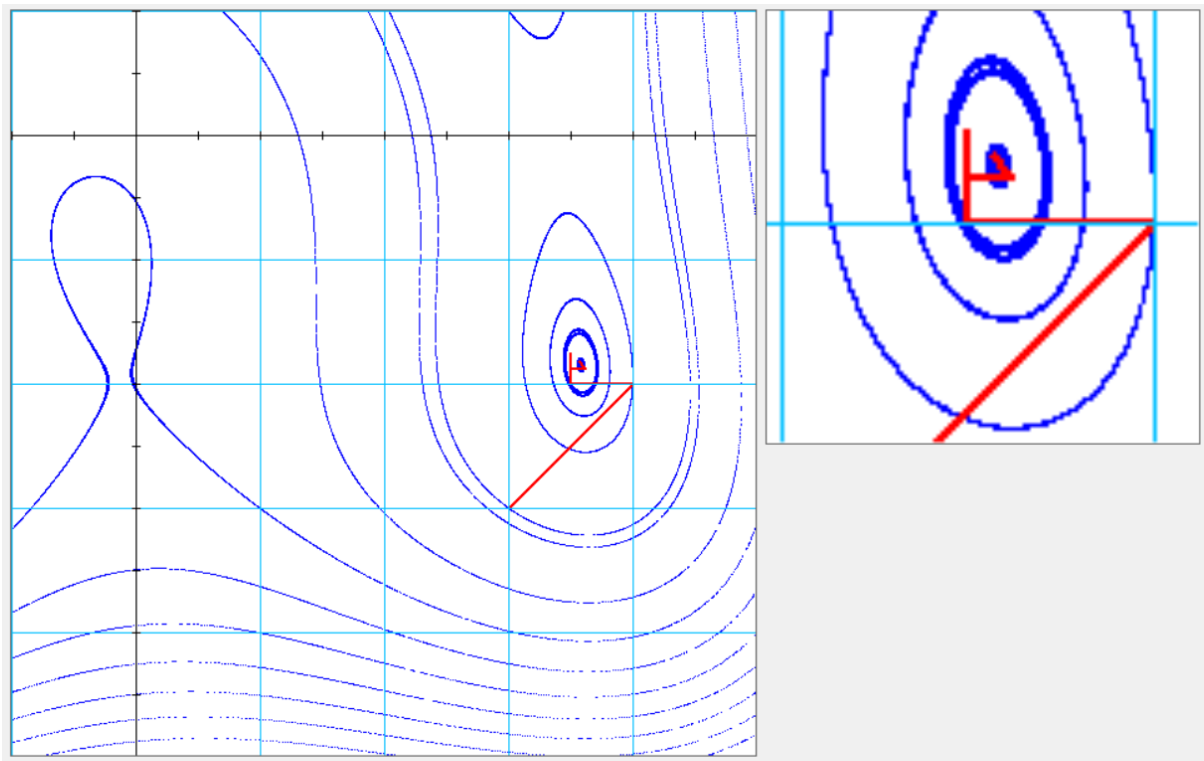

Рис.1 – Хук-Дживс для Химмельблау

Iteration	Lambda	X1	X2	F_x
	Himmelblau			
0		3	-3	50
1		4	-2	10
2		3,5	-2	0,8125
3		3,5	-1,75	0,441406
4		3,5	-1,875	0,390869
5		3,625	-1,875	0,090332
6		3,5625	-1,8125	0,037872
7		3,59375	-1,84375	0,005129
8		3,578125	-1,84375	0,002167
9		3,585938	-1,84766	0,000128
10		3,583984	-1,84766	1,21E-05
	Extremum	3,583984	-1,84766	1,21E-05

Рис.2 – Хук-Дживс для Химмельблау

Для метода Нелдера-Мида:

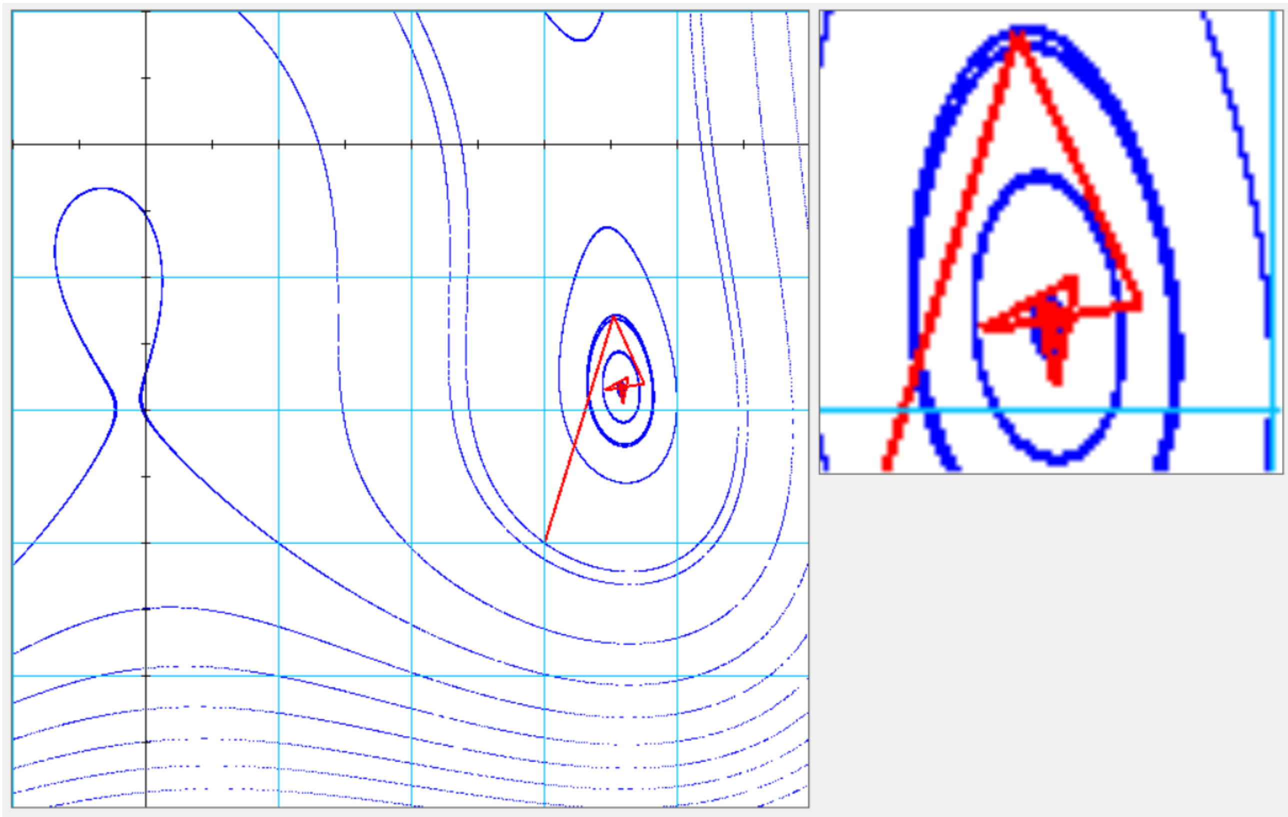

Рис.3 – Нелдер-Мид для Химмельблау

Iteration	Lambda	X1	X2	F_x
	Himmelblau			
0	(3; -3)	(3,85355339059327; -2,74118095489748)	(3,25881904510252; -2,14644660940673)	
1	(3; -3)	(3,85355339059327; -2,74118095489748)	(3,25881904510252; -2,14644660940673)	7,133476
2	(4,11237243569579; -1,88762756430421)	(3,51763809020504; -1,29289321881345)	(3,25881904510252; -2,14644660940673)	3,285499
3	(3,75030050167479; -1,80364873920715)	(3,51763809020504; -1,29289321881345)	(3,25881904510252; -2,14644660940673)	1,590398
4	(3,75030050167479; -1,80364873920715)	(3,51763809020504; -1,29289321881345)	(3,44639417052122; -1,84735879420851)	0,960213
5	(3,62624697175558; -1,75346369134586)	(3,55799271315152; -1,55919849276064)	(3,44639417052122; -1,84735879420851)	0,246449
6	(3,62624697175558; -1,75346369134586)	(3,58751126509144; -1,9461101417161)	(3,69450123035964; -1,94772888993108)	0,146274
7	(3,62624697175558; -1,75346369134586)	(3,58751126509144; -1,9461101417161)	(3,56306806245545; -1,80081592983093)	0,048735
8	(3,60076831776451; -1,81346336355969)	(3,58751126509144; -1,9461101417161)	(3,56306806245545; -1,80081592983093)	0,035353
9	(3,60076831776451; -1,81346336355969)	(3,58471472760071; -1,87662489420571)	(3,56306806245545; -1,80081592983093)	0,012028
10	(3,60076831776451; -1,81346336355969)	(3,58471472760071; -1,87662489420571)	(3,57790479256903; -1,82293002935682)	0,010269
11	(3,59103903892469; -1,83162041267048)	(3,58471472760071; -1,87662489420571)	(3,57790479256903; -1,82293002935682)	0,007018
12	(3,59103903892469; -1,83162041267048)	(3,58459332167379; -1,85195005760968)	(3,57790479256903; -1,82293002935682)	0,000212
13	(3,58711876784535; -1,84555096734255)	(3,58459332167379; -1,85195005760968)	(3,58422616377487; -1,84488599163367)	0,000151
14	(3,58576425528484; -1,84698449598211)	(3,58459332167379; -1,85195005760968)	(3,58422616377487; -1,84488599163367)	0,000123
15	(3,58576425528484; -1,84698449598211)	(3,58479426560182; -1,84894265070879)	(3,58422616377487; -1,84488599163367)	1,47E-05
16	(3,58378272242608; -1,84838293721623)	(3,58479426560182; -1,84894265070879)	(3,58452060306152; -1,84754378822604)	5,80E-06
17	(3,58422007837887; -1,84831307834182)	(3,58479426560182; -1,84894265070879)	(3,58452060306152; -1,84754378822604)	3,05E-06
	Extremum	3,584220078	-1,848313078	3,05E-06

Рис.4 – Нелдер-Мид для Химмельблау

Метод Хука-Дживса для функции Розенброка:

$x_0 = (-2;\ 2)$

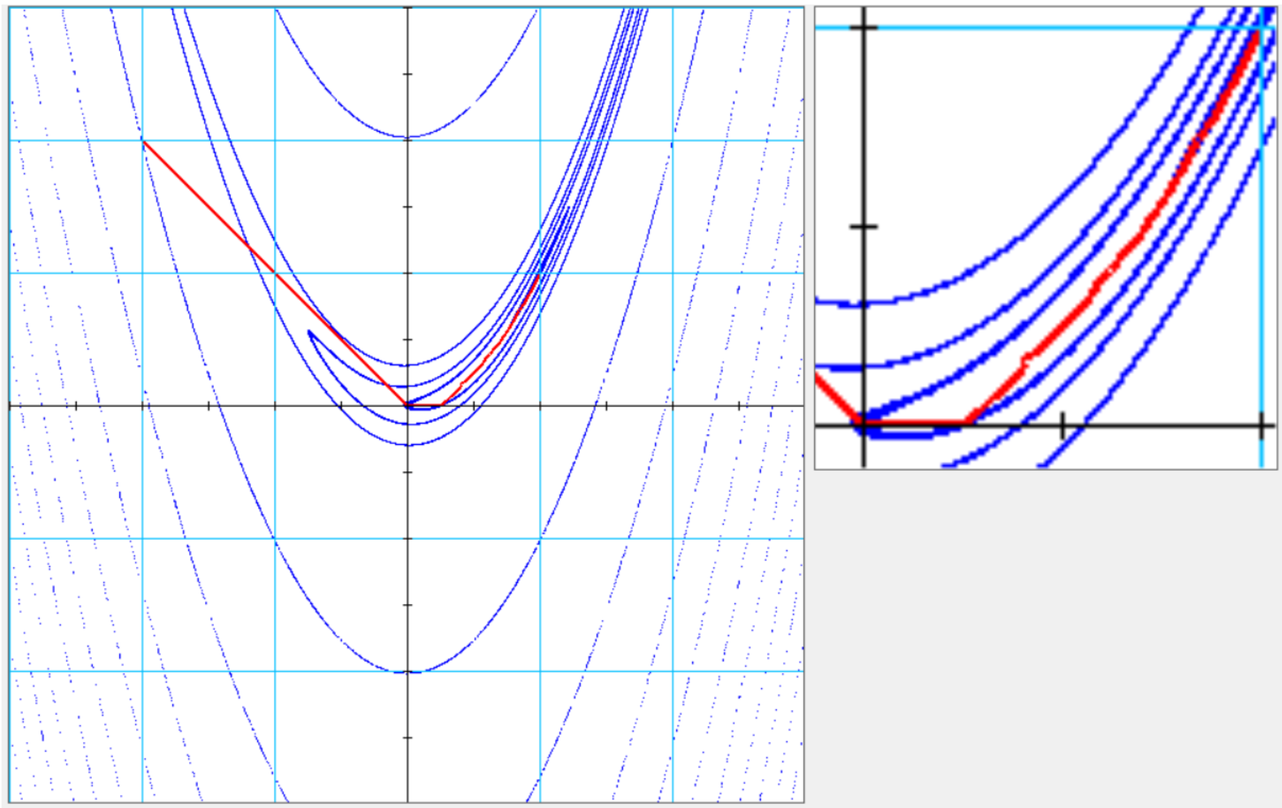

Рис.5 – метод Хука-Дживса для Розенброка

Iteration	Lambda	X1	X2	F_x
	Rosenbrok			
0		-2	2	409
1		-1	1	4
2		0	0	1
3		0,25	0	0,953125
4		0,375	0,125	0,415039
5		0,40625	0,15625	0,360264
6		0,40625	0,171875	0,357212
7		0,4375	0,1875	0,317932
8		0,46875	0,21875	0,282322
9		0,5	0,25	0,25
10		0,53125	0,28125	0,219822
11		0,5625	0,3125	0,192932
12		0,59375	0,359375	0,169712
13		0,625	0,390625	0,140625
14		0,65625	0,4375	0,122837
15		0,6875	0,46875	0,099182
16		0,71875	0,515625	0,079197
17		0,75	0,5625	0,0625
18		0,78125	0,609375	0,047947
19		0,8125	0,65625	0,036682
20		0,84375	0,71875	0,029087
21		0,875	0,765625	0,015625
22		0,90625	0,828125	0,013462
23		0,9375	0,875	0,005432
24		0,96875	0,9375	0,001072
25		1	1	0
	Extremum	1	1	0

Рис.6 – метод Хука-Дживса для функции Розенброка

Для метода Нелдера-Мида:

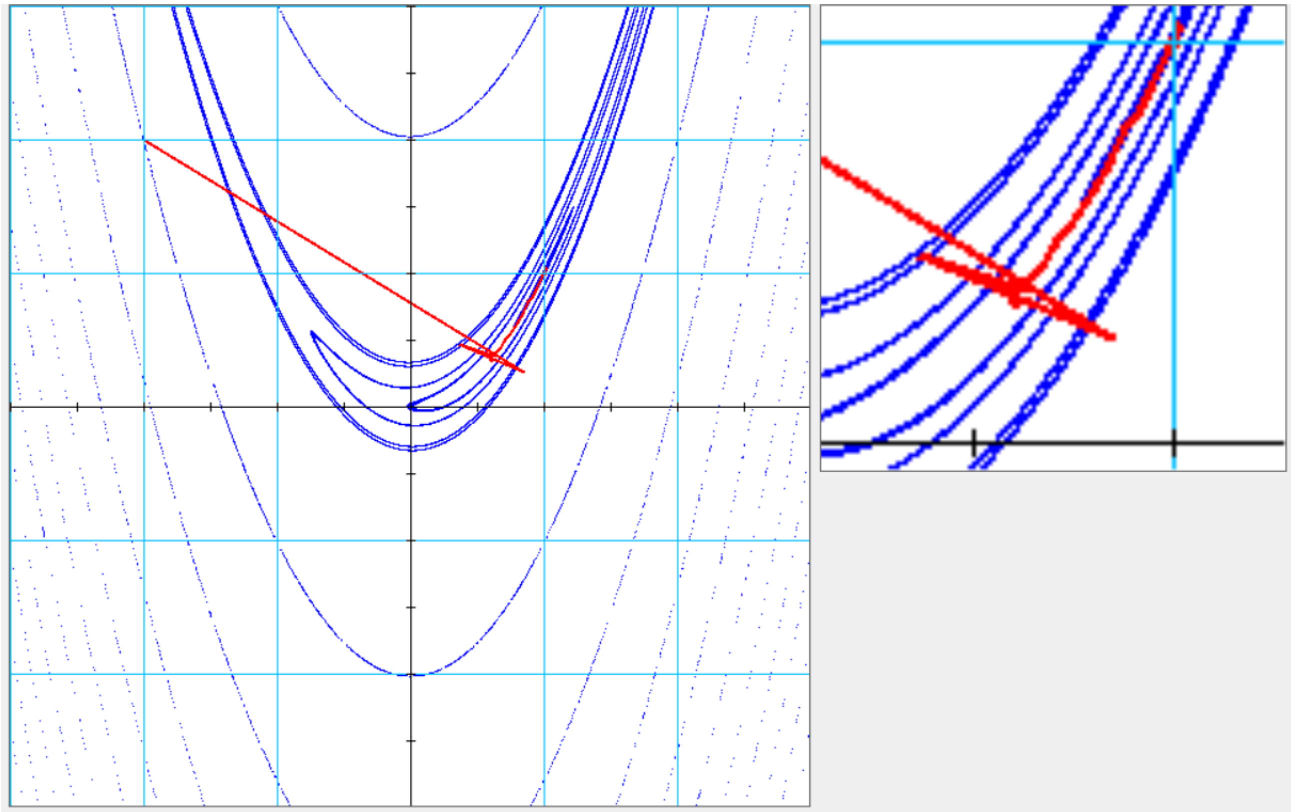

Рис.7 – метод НМ для Розенброка

Iteration	Lambda	X1	X2	F_x
	Rosenbrok			
0	(-2; 2)	(0,853553390593274; 0,258819045102521)	(0,258819045102521; 0,853553390593274)	
1	(-2; 2)	(0,853553390593274; 0,258819045102521)	(0,258819045102521; 0,853553390593274)	22,08648
2	(0,0658232497586111; 0,768456077013235)	(0,853553390593274; 0,258819045102521)	(0,363190422503988; 0,471088904267858)	11,90994
3	(0,337097578153621; 0,566705025849212)	(0,601848695461039; 0,388858005080528)	(0,363190422503988; 0,471088904267858)	0,229473
4	(0,602425179734253; 0,337225364090807)	(0,601848695461039; 0,388858005080528)	(0,551968943853164; 0,373559684284353)	0,224067
5	(0,602425179734253; 0,337225364090807)	(0,601848695461039; 0,388858005080528)	(0,614678936033767; 0,360412184660996)	0,178811
6	(0,602425179734253; 0,337225364090807)	(0,605200376672524; 0,368838389728215)	(0,614678936033767; 0,360412184660996)	0,156528
7	(0,617454132972038; 0,392025210298404)	(0,605200376672524; 0,368838389728215)	(0,613003095428024; 0,370421992337153)	0,15263
8	(0,613277934511156; 0,380827700665544)	(0,605200376672524; 0,368838389728215)	(0,613003095428024; 0,370421992337153)	0,15178
9	(0,613277934511156; 0,380827700665544)	(0,629020791563721; 0,389197760047615)	(0,613003095428024; 0,370421992337153)	0,141811
10	(0,613277934511156; 0,380827700665544)	(0,629020791563721; 0,389197760047615)	(0,637441898256267; 0,414194206395433)	0,13763
11	(0,67313816570767; 0,443432548333485)	(0,629020791563721; 0,389197760047615)	(0,637441898256267; 0,414194206395433)	0,116214
12	(0,67313816570767; 0,443432548333485)	(0,707828512818464; 0,508044611998147)	(0,637441898256267; 0,414194206395433)	0,090297
13	(0,67313816570767; 0,443432548333485)	(0,707828512818464; 0,508044611998147)	(0,743524780269866; 0,537282953936198)	0,089948
14	(0,830753608217155; 0,681126252234548)	(0,707828512818464; 0,508044611998147)	(0,743524780269866; 0,537282953936198)	0,03679
15	(0,830753608217155; 0,681126252234548)	(0,747483853530987; 0,55862460754176)	(0,880306632082481; 0,785060381792064)	0,024569
16	(0,830753608217155; 0,681126252234548)	(0,909553253459234; 0,820327671749079)	(0,880306632082481; 0,785060381792064)	0,013024
17	(1,02328261187826; 1,04582957584262)	(0,909553253459234; 0,820327671749079)	(0,880306632082481; 0,785060381792064)	0,000705
18	(1,02328261187826; 1,04582957584262)	(0,983540846691266; 0,966497272980236)	(0,984949424007496; 0,973373184009066)	0,000344
19	(1,00607166177348; 1,01198118221893)	(0,983540846691266; 0,966497272980236)	(0,99418057664613; 0,989768304210247)	4,08E-05
20	(1,00607166177348; 1,01198118221893)	(0,996576300544655; 0,993288537024491)	(0,998945277831568; 0,99821790465296)	1,18E-05
21	(1,0019162254808; 1,00386720152883)	(0,996576300544655; 0,993288537024491)	(0,998945277831568; 0,99821790465296)	3,77E-06
22	(1,0019162254808; 1,00386720152883)	(1,00009943785782; 1,00025328339444)	(1,00147447374965; 1,00281484193356)	3,06E-07
23	(0,9994243650865; 0,998823624063214)	(1,00009943785782; 1,00025328339444)	(1,00050152709082; 1,00098799796321)	2,75E-07
	Extremum	1,000501527	1,000987998	2,75E-07

Рис.8 – метод НМ для Розенброка

Метод ХД ля квадратичной формы:

$x_0 = (0;\ 0)$

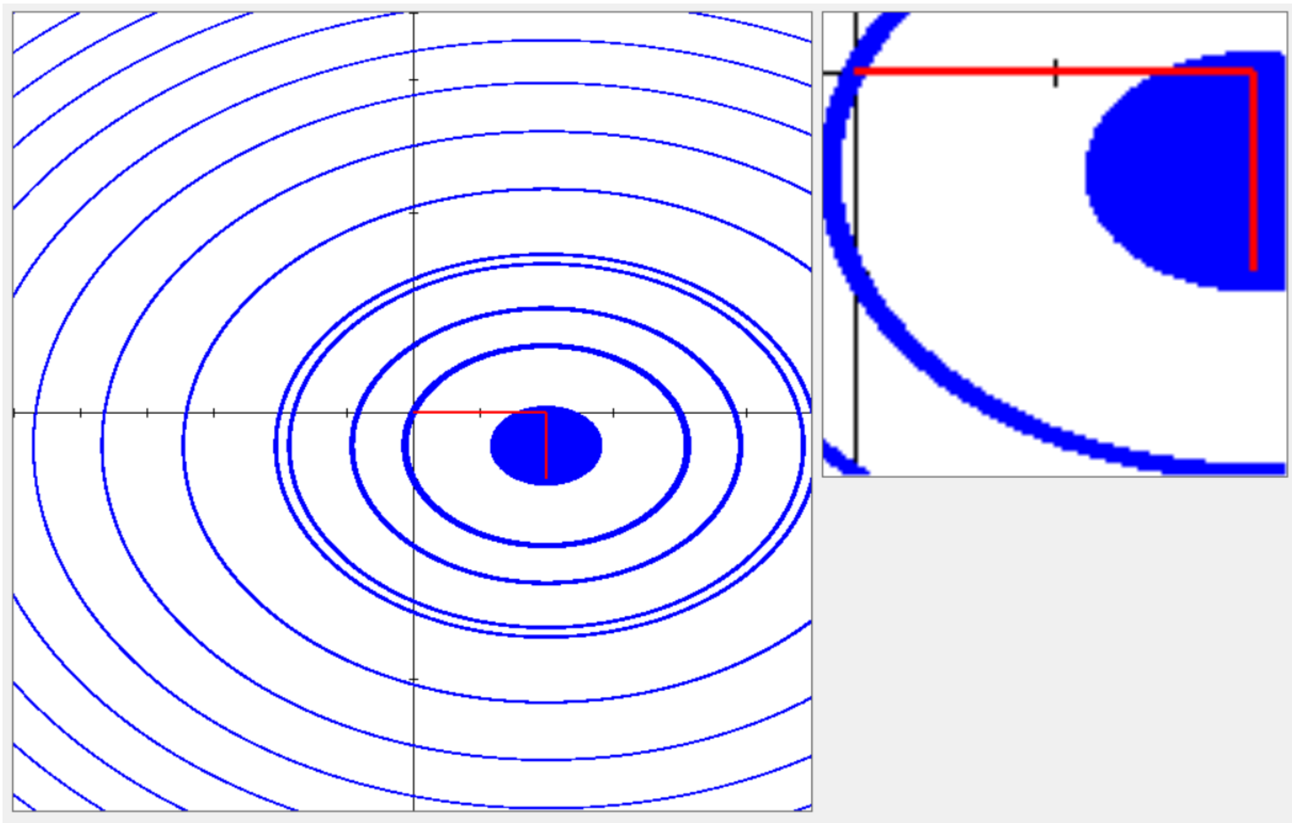

Рис.9 – метод ХД для квадратичной формы

Iteration	Lambda	X1	X2	F_x
	x^2 + 2y^2 - x + 2y			
0		0	0	0
1		1	0	-1
2		1	-0,5	-1
3		1	-0,25	-1,125
4		1	-0,25	-1,125
	Extremum	1	-0,25	-1,125

Рис.10 – метод ХД для формы

Метод Нелдера-Мида:

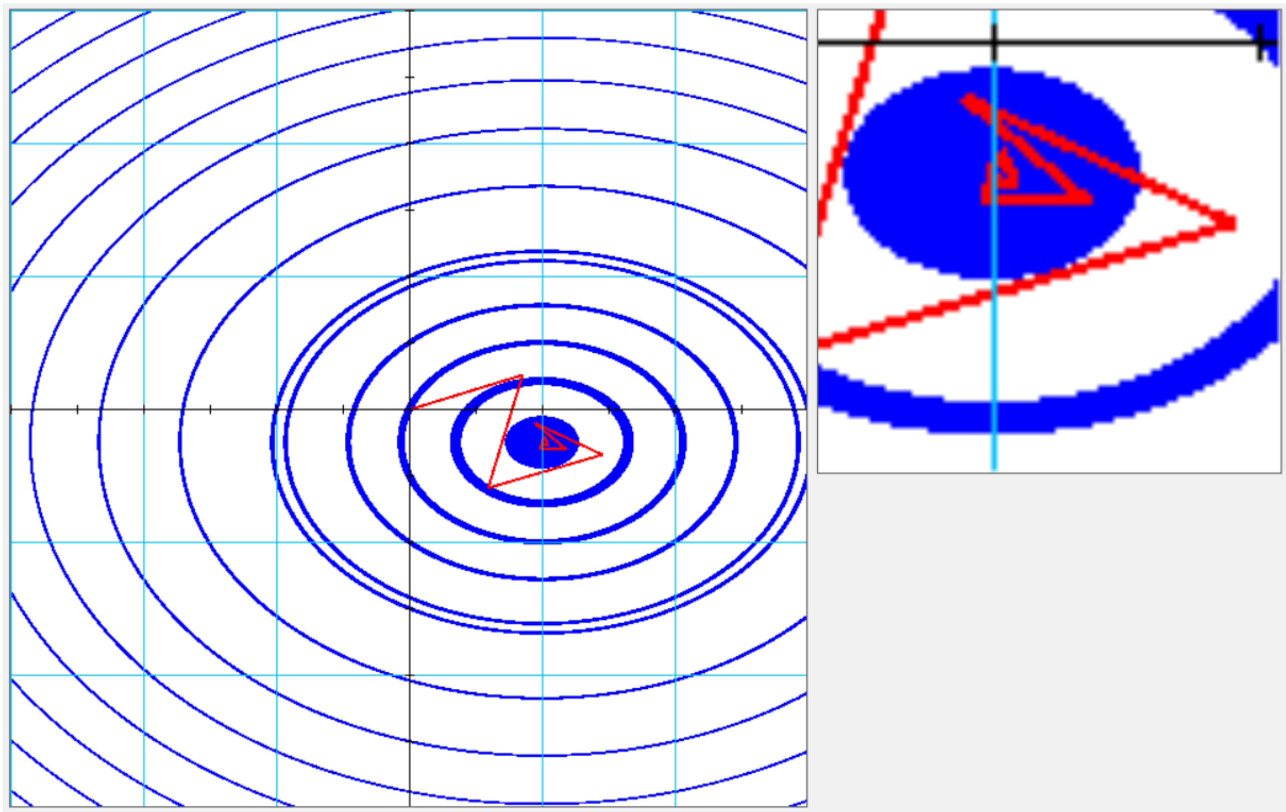

Рис. 11 – метод НМ для формы

Iteration	Lambda	X1	X2	F_x
	x^2 + 2y^2 - x + 2y			
0	(0; 0)	(0,853553390593274; 0,258819045102521)	(0,258819045102521; 0,853553390593274)	
1	(0; 0)	(0,853553390593274; 0,258819045102521)	(0,258819045102521; 0,853553390593274)	-0,58576
2	(0; 0)	(0,853553390593274; 0,258819045102521)	(0,594734345490753; -0,594734345490753)	-0,72308
3	(1,44828773608403; -0,335915300388232)	(0,853553390593274; 0,258819045102521)	(0,594734345490753; -0,594734345490753)	-0,90928
4	(1,44828773608403; -0,335915300388232)	(0,937532215690332; -0,103252888918486)	(0,594734345490753; -0,594734345490753)	-1,07803
5	(1,18198246213684; -0,295560677441752)	(0,937532215690332; -0,103252888918486)	(0,893822160688966; -0,407159220072056)	-1,08773
6	(1,18198246213684; -0,295560677441752)	(0,937532215690332; -0,103252888918486)	(0,976789749801275; -0,303283001626087)	-1,11878
7	(1,18198246213684; -0,295560677441752)	(1,00845916082969; -0,201337364226203)	(0,976789749801275; -0,303283001626087)	-1,12019
8	(1,03996395702082; -0,263122806555047)	(1,00845916082969; -0,201337364226203)	(0,976789749801275; -0,303283001626087)	-1,12306
9	(1,03996395702082; -0,263122806555047)	(1,00845916082969; -0,201337364226203)	(1,00050065436327; -0,267756543508356)	-1,12437
10	(0,991152812207691; -0,244297394075458)	(1,01434573326087; -0,233388519628952)	(1,00050065436327; -0,267756543508356)	-1,12486
11	(0,991152812207691; -0,244297394075458)	(1,00508623327317; -0,244707744210429)	(1,00050065436327; -0,267756543508356)	-1,12492
12	(0,991152812207691; -0,244297394075458)	(1,00508623327317; -0,244707744210429)	(0,99931008855185; -0,25612955632565)	-1,12492
13	(0,996675486560102; -0,247358022171749)	(1,00508623327317; -0,244707744210429)	(0,99931008855185; -0,25612955632565)	-1,12497
14	(0,996675486560102; -0,247358022171749)	(1,00153951041458; -0,248225766729564)	(0,99931008855185; -0,25612955632565)	-1,12499
15	(0,996675486560102; -0,247358022171749)	(1,00153951041458; -0,248225766729564)	(0,999208793519594; -0,25196072538815З)	-1,12499
16	(0,998524819263593; -0,248725634115304)	(1,00153951041458; -0,248225766729564)	(0,999208793519594; -0,251960725388153)	-1,12499
17	(0,998524819263593; -0,248725634115304)	(1,00020315840308; -0,249284473240646)	(0,999208793519594; -0,251960725388153)	-1,125
18	(0,998524819263593; -0,248725634115304)	(1,00020315840308; -0,249284473240646)	(0,999286391176466; -0,250482889533064)	-1,125
19	(1,00035475255287; -0,250462705022631)	(1,00020315840308; -0,249284473240646)	(0,999286391176466; -0,250482889533064)	-1,125
20	(1,00035475255287; -0,250462705022631)	(1,00001186513388; -0,249878635259247)	(0,999286391176466; -0,250482889533064)	-1,125
	Extremum	1,000011865	-0,249878635	-1,125

Рис. 12 – метод НМ для формы

Сравнение методов прямого поиска с другими методами многомерной оптимизации:

Сравним работу методов для расширенной функции Розенброка:

Таблица 1 – сравнение скорости работы методов

	Время работы методов					
Размерность	Хук-Дживс	Нелдер-Мид	МНС	МСГ	Ньютон	
2	0,113	0,045	0,086	0,13	0,084	
10	0,032	0,022	0,382	0,009	0,023	
50	0,873	3,699	0,375	0,012	0,054	
100	1,161	38,267	0,789	0,016	0,032	
250	2,034	134	1,803	0,048	0,418	
500	3,498	410	5,767	0,04	3,248	
1000	13,502	1893	11,274	0,073	39,864	

Таблица 2 – сравнение количества вычислений функции методов

	Количество вычислений функции					
Размерность	Хук-Дживс	Нелдер-Мид	МНС	МСГ	Ньютон	
2	489	146	12836	77	42	
10	1821	7910	23280	356	46	
50	8481	750413	40416	599	46	
100	16806	4300958	48592	599	46	
250	41781	11489093	60296	599	46	
500	83406	43881096	70600	599	46	
1000	166656	126527028	82472	599	46	

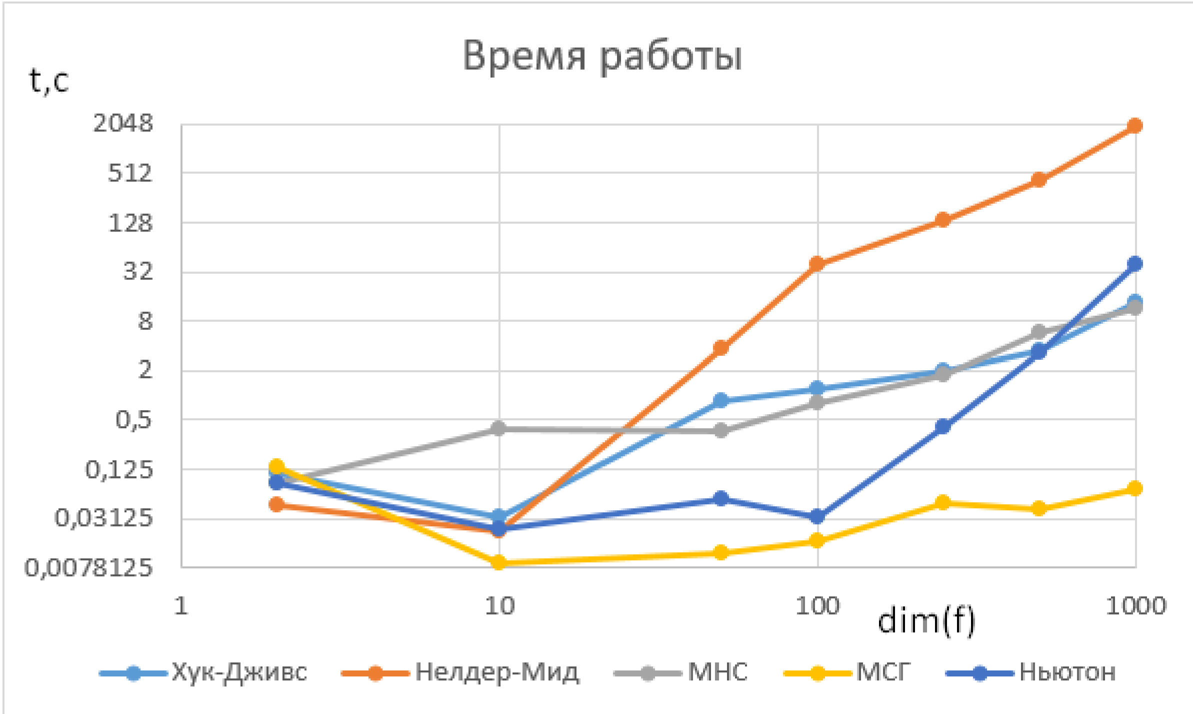

Рис.13 – сравнение времени работы методов

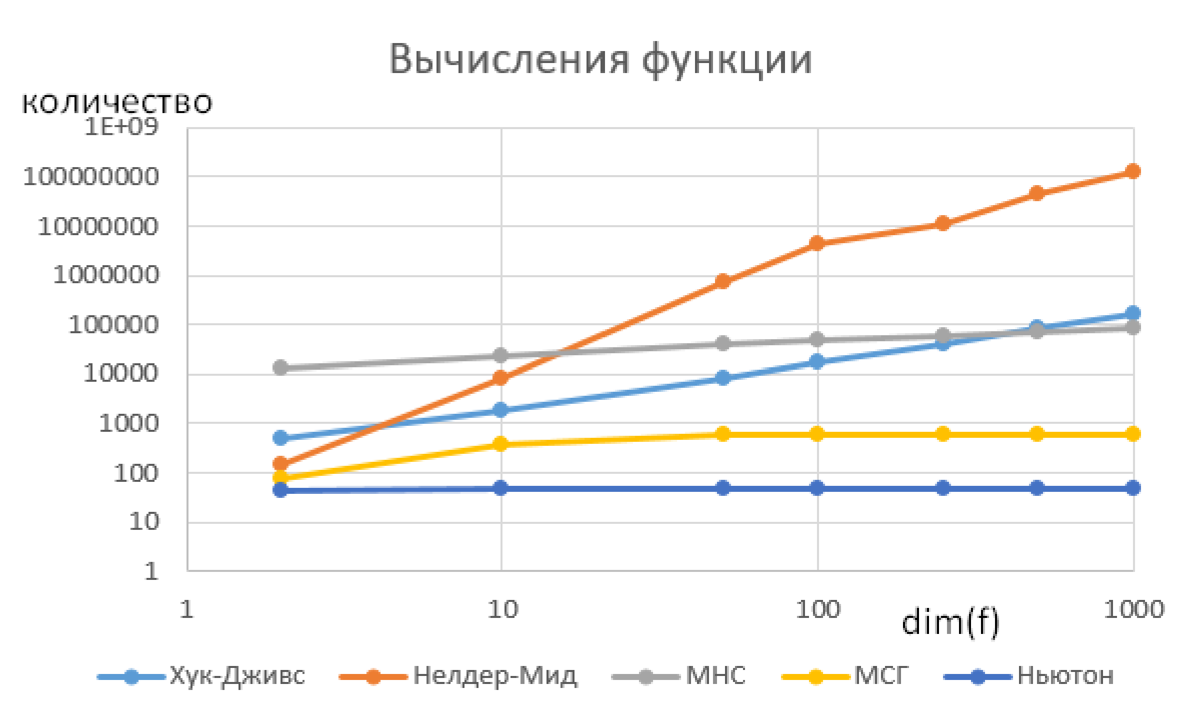

Рис.14 – сравнение количества вычислений функции

Из графиков можно сделать вывод, что использование метода НМ для функций больших размерностей неэффективно.

Выводы:

В данной лабораторной работе были рассмотрены два метода нулевого порядка – метод Хука-Дживса(ХД) и метод Нелдера-Мида(НМ). Эти методы были реализованы, и были вычислены минимумы для некоторых функций.

Отличительной особенностью методов нулевого порядка является то, что им не требуется вычисление производной, что упрощает их реализацию и уменьшает погрешность для случаев, когда вычислить аналитически производную затруднительно.

Так же было проведено сравнение данных методов с методами спуска (МНС, модифицированный метод Ньютона) и методом сопряженных градиентов. Следует отметить, что оба метода достаточно хорошо показывают себя для небольших (до 10ти) размерностей функции. Для больших размерностей метод НМ показывает значительно худшие результаты. Работа метода ХД для больших размерностей сопоставима с работой МНС. Исследование проводилось для расширенной функции Розенброка.

В заключение можно сказать, что методы нулевого порядка показывают себя достаточно хорошо для функций небольших размерностей и составляют достойную альтернативу для остальных методов.

Приложение 1. Альтернативная реализация метода Хука-Дживса

В основной части были приведены результаты реализации метода ХД через деление шага. Здесь будут приведены результаты с использованием метода Золотого сечения.

На рисунках ниже представлены результаты работы программы для функции Химмельблау метода Хука-Дживса:

$x_0 = (3; -3)$

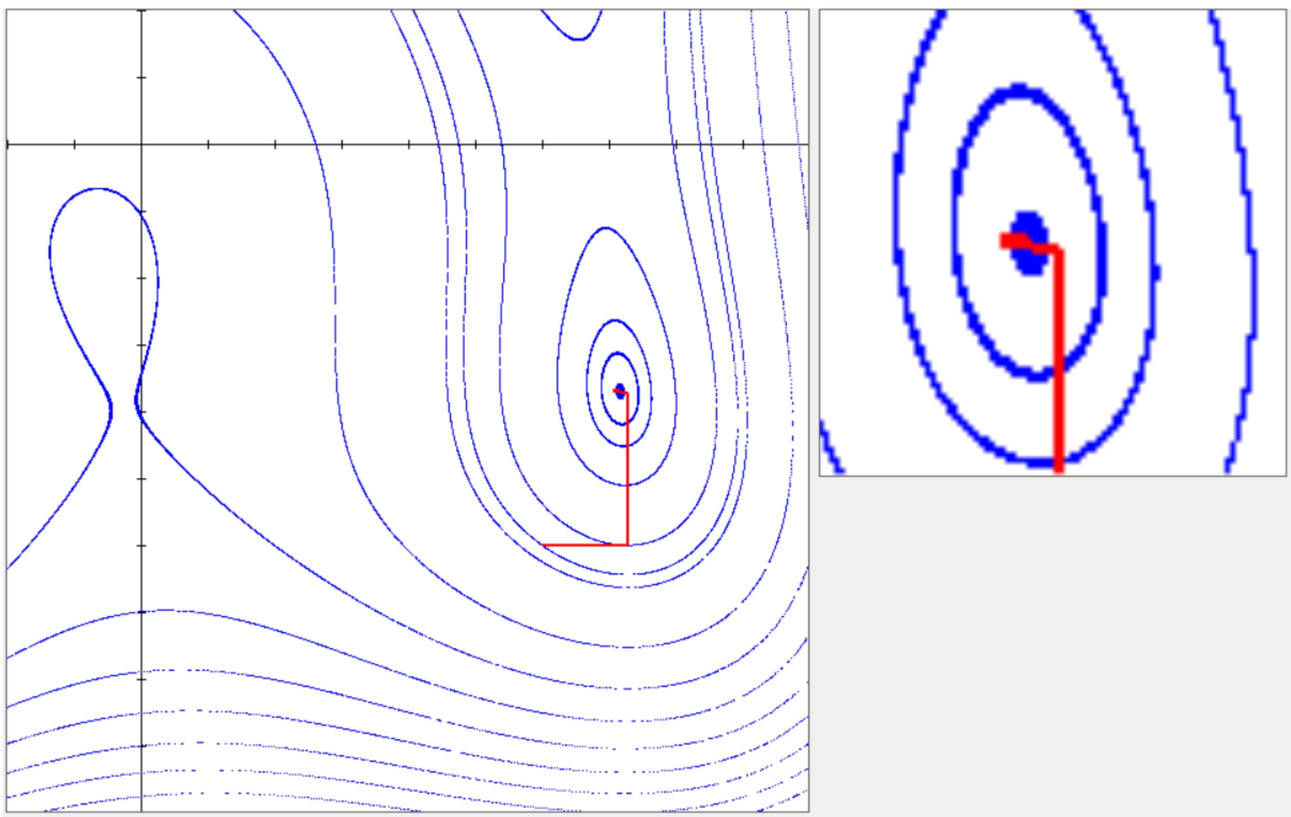

Рис.15 метод ХД для Химмельблау.

Iteration	Lambda	X1	X2	F_x
	Himmelblau			
0		3	-3	50
1		3	-3	50
2		3,636632	-3	32,3721
3		3,636632	-1,86047	0,142547
4		3,636632	-1,86047	0,142547
5		3,585244	-1,86047	0,002213
6		3,585244	-1,84834	3,43E-05
7		3,533856	-1,83622	0,130079
8		3,583634	-1,83622	0,002035
9		3,583634	-1,84793	3,25E-05
10		3,582024	-1,84751	0,000298
11		3,584375	-1,84751	5,50E-06
12		3,584375	-1,84813	1,54E-07
13		3,585115	-1,84834	2,44E-05
14		3,584459	-1,84834	6,53E-07
15		3,584459	-1,84814	5,01E-08
	Extremum	3,584459	-1,84814	5,01E-08

Рис.16 – метод ХД для Химмельблау

Метод Хука-Дживса для функции Розенброка:

$x_0 = (-2;\ 2)$

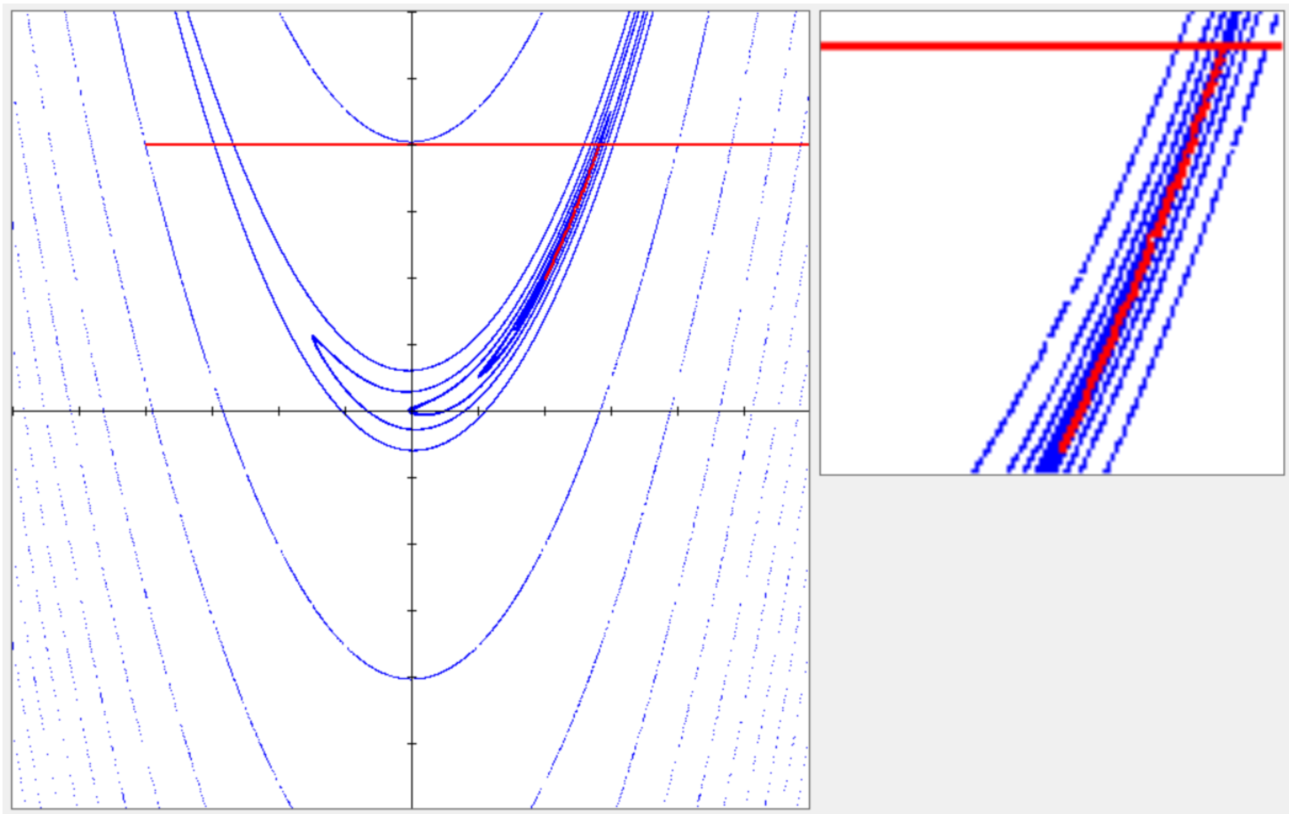

Рис.17 – метод ХД для Розенброка

Iteration	Lambda	X1	X2	F_x
	Rosenbrok			
0		-2	2	409
1		-2	2	409
2		1,413702	2	0,171359
3		1,413702	1,998565	0,171149
4		4,827404	1,997131	45412,19
5		1,412678	1,997131	0,17052
6		1,412678	1,995654	0,170303
7		1,411653	1,992742	0,169458
8		1,411142	1,992742	0,16924
9		1,411142	1,991308	0,169037
10		1,409606	1,986962	0,167777
110		1,055386	1,114147	0,003077
111		1,055386	1,11385	0,003068
112		1,036665	1,074014	0,001388
113		1,036243	1,074014	0,001318
114		1,036243	1,073789	0,001314
115		1,017099	1,033728	0,000351
116		1,016677	1,033728	0,000279
117		1,016677	1,033643	0,000278
118		0,997111	0,993496	6,23E-05
119		0,99677	0,993496	1,07E-05
120		0,99677	0,993534	1,05E-05
	Extremum	0,99677	0,993534	1,05E-05

Рис.18 – метод ХД для Розенброка

Метод ХД ля квадратичной формы:

$x_0 = (0;\ 0)$

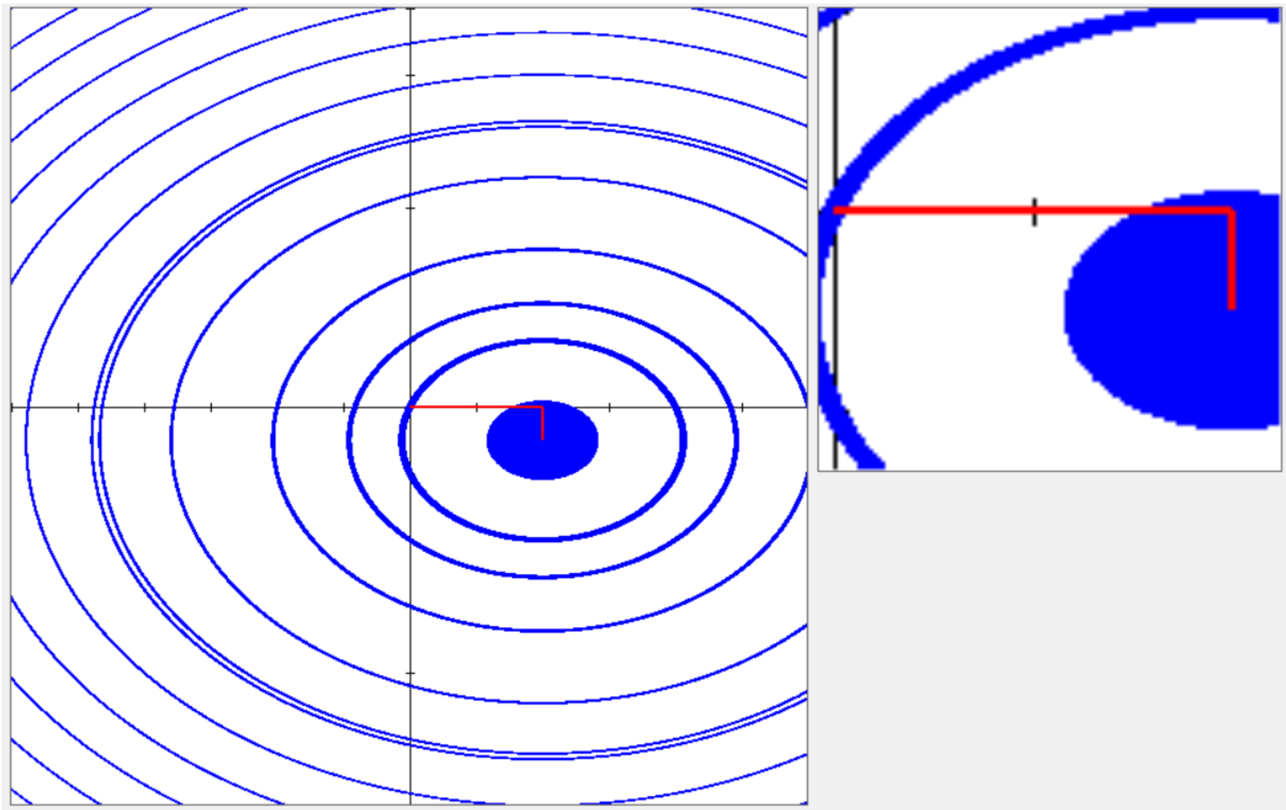

Рис.19 – метод ХД для квадратичной формы

Iteration	Lambda	X1	X2	F_x
	x^2+2y^2-2x+y			
0		0	0	0
1		0	0	0
2		1,000008	0	-1
3		1,000008	-0,25	-1,125
	Extremum	1,000008	-0,25	-1,125

Рис.20 – метод ХД для квадратичной формы

Из приведенной выше информации можно сделать вывод, что использование МЗС улучшает работу для формы и функции Химмельблау, но приводит к увеличению количества итераций в функции Розенброка.

Приложение 2. Дополнительные результаты работы программы.