Министерство образования и науки Украины  
Национальный технический университет  
«Харьковский политехнический институт»

Кафедра компьютерной математики и анализа данных

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7

МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ

ст. гр. КН-118 Тепляков А. Д.

Харьков, 2020

**Цель:** Реализовать метод сопряженных градиентов поиска экстремумов функции многих переменных.

**Задачи**

1. Изучить метод сопряженных градиентов.

2. Реализовать метод сопряженных градиентов поиска экстремума функции.

3. Исследовать скорость сходимости метода для квадратичной формы



где  – положительно определена:

* с разной ориентацией осей:



 – угол между осью абсцисс и большою полуосью квадратичной формы;

* с разной эллиптичностью линий уровня:



где *b* и *a* большая и малая полуоси эллипса соответственно;

4. Сравнить скорости сходимости метода наискорейшего спуска, метода Ньютона, метода ДФП и метода сопряженных градиентов для квадратичной формы большой размерности: 

1. **Теоретическая часть**

Пусть имеется функция (1), матрица – положительно определена и симметрична. Требуется найти минимум данной функции.

В таком случае найти минимум можно при помощи метода сопряженных градиентов (далее – МСГ) по следующим формулам:

(2)

Где:

Существуют теоремы, доказывающие, что МСГ является методом сопряженных направлений, и что для любой выбранной точки точка , полученная по схеме (2), будет координатой и будет найдена не более чем за шагов.

1. **Результаты работы программы**

Рассмотрим результаты работы программы для функции вида (1):

С различными точками

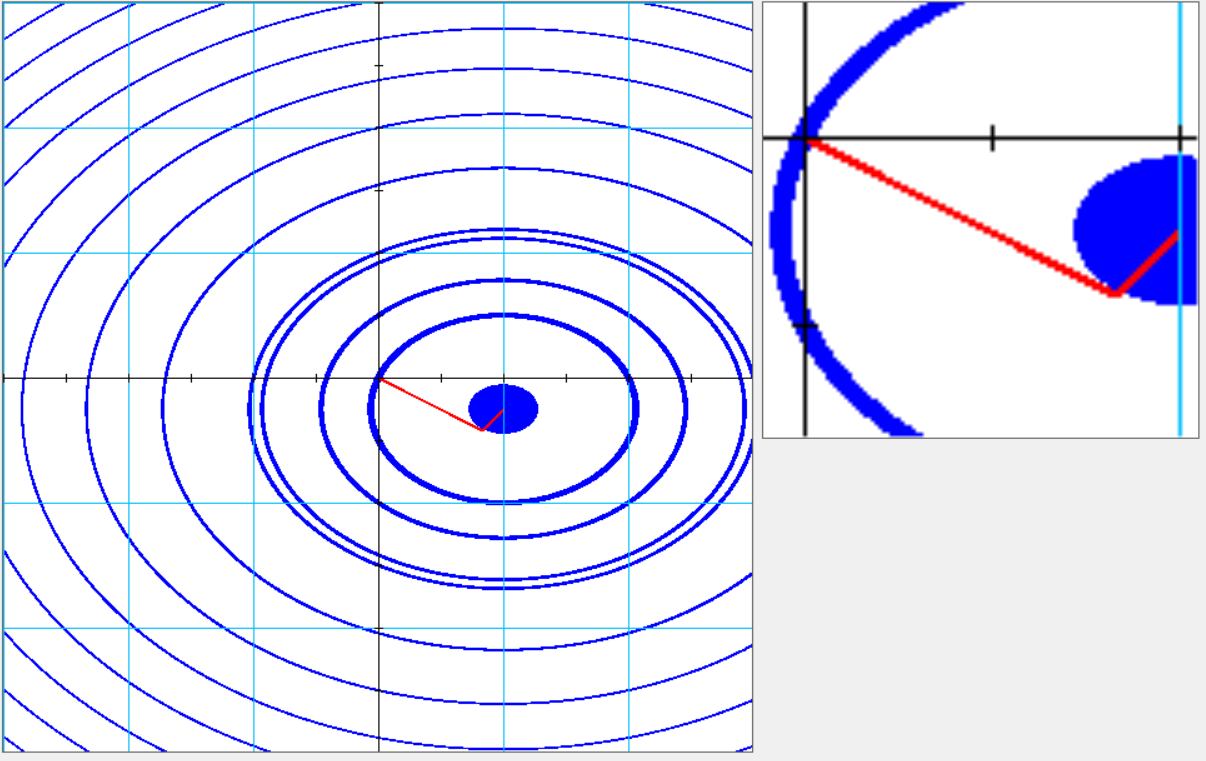


Рис.1 – результат работы МСГ для квадратичной формы

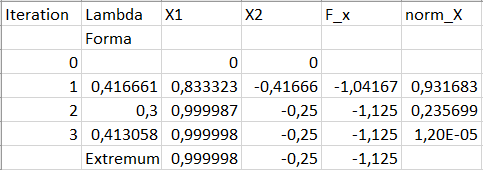


Рис. 2 – результат работы МСГ для квадратичной формы

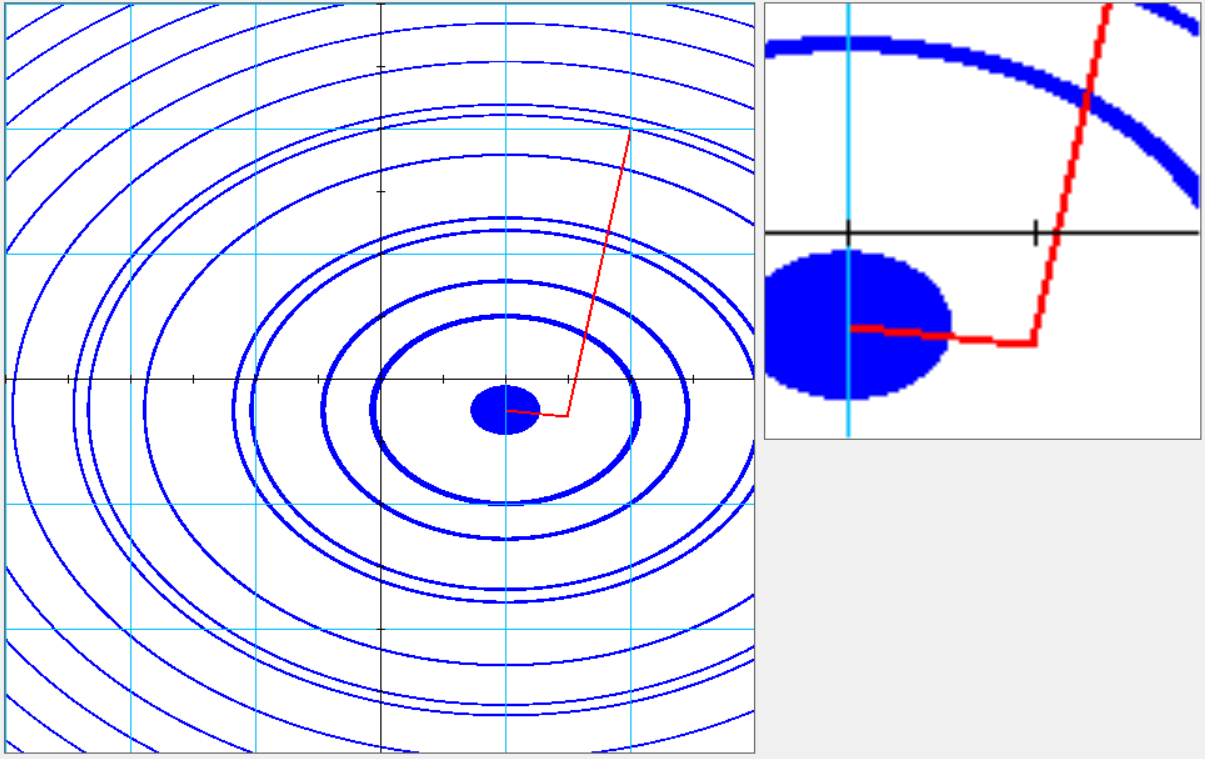


Рис.3 – МСГ для другой начальной точки

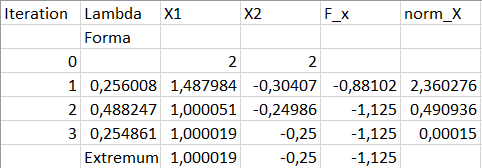


Рис.4 – МСГ для другой начальной точки

1. **Исследование скорости сходимости МСГ для квадратичной формы**

Исследуем сходимость МСГ для квадратичной формы в зависимости от угла наклона большей полуоси фигуры к оси абсцисс с помощью поворота фигуры матрицей поворота, где

,

– угол наклона фигуры к оси абсцисс,

– коэфициент угла наклона.

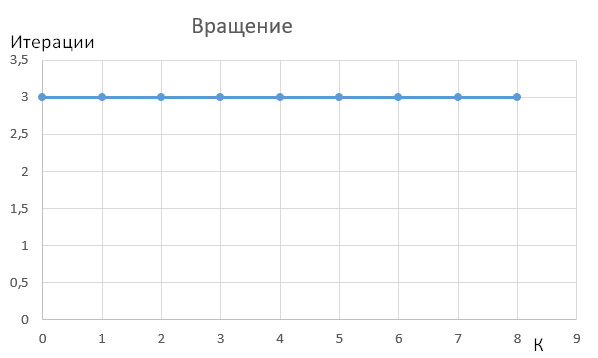


Рис.5 – вращение квадратичной формы

Исследуем сходимость МСГ для различной эллиптичности линий уровня квадратичной формы по формуле

где – большая и меньшая полуоси соответственно.

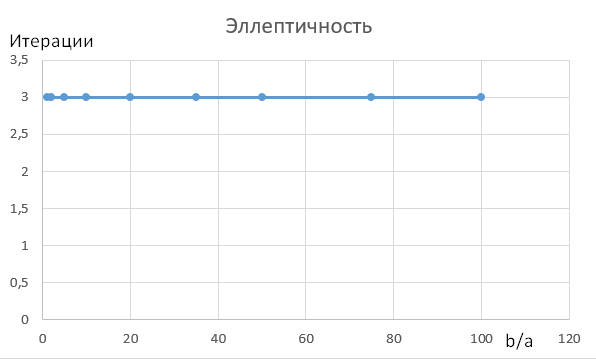


Рис.6 – эллиптичность квадратичной формы

Как можно видеть из приведенных выше графиков, количество итераций МСГ не изменяется с поворотом формы или с изменением эллиптичности линий уровня.

1. **Сравнение МСГ с другими методами**

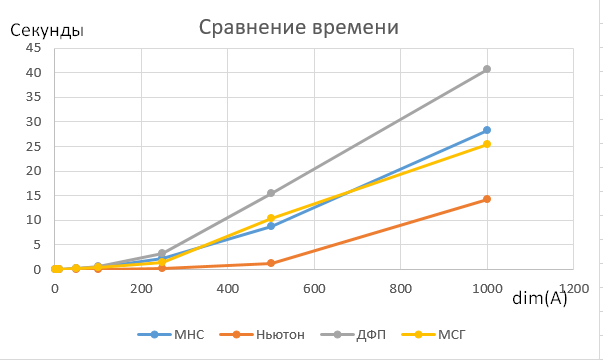


Рис.7 – сравнение времени работы методов

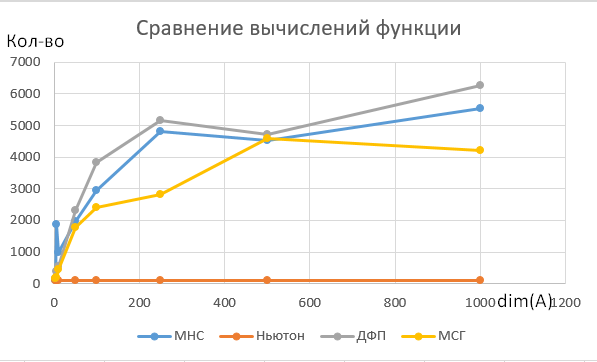


Рис.8 – сравнение количества вычислений функции

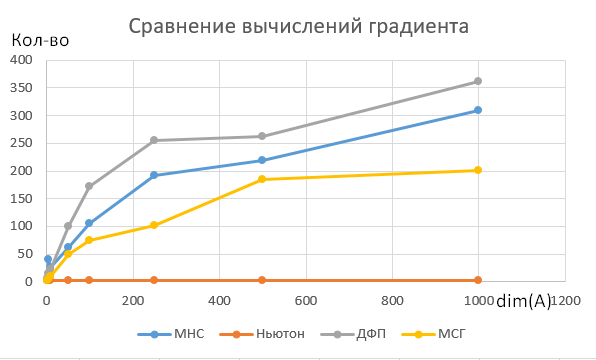


Рис.9 – сравнение количества вычислений градиента

Из приведенных выше графиков видно, что метод Ньютона наилучший – это объясняется низким количеством дополнительных вычислений, помимо обращения матрицы. МСГ оказывается на втором месте.

Так же следует учитывать, что полученные результаты могут несколько отличаться в зависимости от программной реализации методов.

1. **Выводы**

Основная идея методов сопряженных направлений – использование системы А – сопряженных векторов вместо направлений спуска. И, так как система таких векторов может быть выбрана различными способами, существует несколько методов сопряженной направлений.

В данной работе был рассмотрен и реализован один из методов сопряженных направлений – метод сопряженных градиентов. От ранее рассмотренных он отличается прежде всего тем, что не является методом спуска. Выбор системы А – сопряженных векторов делается при помощи градиента функции.

Так же было проведено сравнение работы МСГ для различных параметров квадратичной формы и выявлено, что те не влияют на его скорость сходимости.

Было проведено сравнение МСГ с методами спуска, в котором лучше него показал себя метод Ньютона, так как он требует меньше сопутствующих вычислений.