Ecuaciones Diferenciales No Homogéneas.

Sandra Elizabeth Delgadillo Alemán.

Universidad Autónoma de Aguascalientes.

May 25, 2022

E.D. No Homogéneas.

Recordemos que una E.D. No Homogénea tiene la forma

$$a_m(x)y^{(n)} + a_{m-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde $a_i(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en I, y $a_n(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.

Solución de la E.D.N.H.

Sea $y_p(x)$ cualquier solución paricular de la E.D. No Homogénea de orden n en el intervalo I. Sea $y_c(x)$ la solución general de la E.D.H asociada a la E.D. en I, llamada *función complementaria*. Entonces la solución general de la E.D. No Homogénea en el intervalo I, es:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x).$$

Es decir:

$$y(x) + c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x).$$

$c_1, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias, donde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ es un c.f.s de la E.D.L.H asociada.

Para determinar la solución particular de una E.D. No Homogénea estudiaremos dos métodos:

1. Método de coeficientes indeterminados.
2. Método de variación de parámetros.

Método de Coeficientes Indeterminados.

La idea básica de éste método es proponer la forma de $y_p(x)$de acuerdo a los tipos de funciones que forman a $g(x)$, donde $g(x)$ puede ser: constante, función polinomial, función exponencial, función seno y/o cosenos, sumas y/o productos finitos de éstas funciones.

Para ilustrar el método considere los siguientes eventos.

Example

Determine la solución general de la E.D. $y'' + 2y' - 3y = g(x)$, donde

1. $g(x) = 8e^{2x}$.
2. $g(x) = (x-1)^2$.
3. $g(x) = 7\cos 3x$.

Excepción.

El método de Coeficientes Indeterminados falla cuando $g(x)$ es solución de la Ecuación Diferencial Homogéna asociada.

Example

Suponga que $g(x) = e^{-3x}$ en el ejemplo anterior, luego, encuentre una solución particular de la E.D.N.H.

$$y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}.$$

Ejercicio.

Obtener la solución del P.V.I. $y'' + 4y' + 4y = (3 + x)e^{-2x}$, con

$$y(0) = 2\ ,\ y'(0) = 5.$$

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_k$ soluciones particulares de una E.D.N.H con $g_1, g_2, \ldots, g_k$, respectivamente. Esto es, y_i representa la solución particular de la E.D.
$a_n(x)y^(n) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0 y = g_i(x)$,
entonces

$$\Longrightarrow \quad y(x) = y_1 + y_2 + \cdots + y_k(x),$$

es solución paicular de la E.D.N.H.

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0 y = g_1(x) + \cdots g_k(x).$$

Example

Obtener la solución general de la E.D.N.H siguiente:

$$y''' - 4y' = 2x + 5 - e^{-2x}.$$

Método de Variación de Parámetros.

Consideremos la E.D.L.N.H. de segundo orden en su forma estándar,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = G(x)$$

Luego, el método de variación de parámetros

$$y_p(x) = \mu_1(x)y_1(x) + \mu_2(x)y_2(x)$$

donde $\{y_1, y_2\}$ conforman un conjunto fundamental de soluciones de la E.D. Homogńea asociada.

$$y(x) = c_1y_1 + c_2y_2.$$

Así pues, sustituyendo y_p, yp', yp'', en la E.D. y después de factorizar de manera conveniente, se encuentra que $\mu_1(x)$ y $\mu_2(x)$ deben satisfacer las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1(x)\mu_1'(x) + y_2(x)\mu_2'(x) &= 0 \\ y_1'(x)\mu_1'(x) + y_2'(x)\mu_2'(x) &= G(x). \end{aligned}$$

Usamos la regla de Cramer para resolver este sistema.

$$\mu_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ G(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{-y_2(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)}$$

$$\mu_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & G(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{y_1(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)}$$

Luego, integramos con respecto a x,

$$\mu_1(x) = \int \frac{-y_2(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad y \quad \mu_2(x) = \int \frac{y_1(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

Por consiguiente,

$$y_p(x) = \left(\int \frac{-y_2(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \right) y_1(x) + \left(\int \frac{y_1(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \right) y_2(x).$$

Example

Considere la E.D. $y'' + y = \tan x$. Encuentre la solución general de la E.D.

Ejercicio.

Resuelve el P.V.I. $y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 6x)e^{2x}$, con $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Use el método de variación de parámetros para encontrar una solución particular de la E.D.N.H.

Example

Discuta, como se pueden utilizar los métodos de coeficientes indeterminados y el de variación de parámetros para resolver la E.D.

$$y'' - 2y' + y = 4x^2 - 3 + x^{-1}e^x.$$

Método de Variación de Parámetros para E.D. de Orden n.

El método de variación de parámetros se puede generalizar para E.D.L. de Orden n, de la forma

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = G(x).$$

Si:

$$y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x).$$

es la solución genral de la E.D.H asociada, entonces, se propone como solución particular

$$y_p(x) = \mu_1(x)y_1(x) + \cdots \mu_ny_n(x),$$

donde $\mu_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, están determinadas por el siguiente sistema de ecuaciones:e

$$\begin{aligned}
y_1\mu_1' + y_2\mu_2' \quad &+ \cdots + y_n\mu_n' &= 0\\
y_1'\mu_1' + y_2'\mu_2' \quad &+ \cdots + y_n'\mu_n' &= 0\\
&&\vdots\\
y_1^{(n-1)}\mu_1' + y_2^{(n-1)}\mu_2' \quad &+ \cdots + y_n^{(n-1)}\mu_n' &= 0
\end{aligned}$$

La solución del sistema se obtiene con regla de Cramer

$$\mu_i' = \frac{W_i}{W}, \qquad i = 1, 2, \ \ldots, \ n$$

$W =$ Wronskiano de $y_1, y_2, \ \ldots, \ y_n$,

$W_i =$ es el determinante de la matriz de coeficientes por el vector del lado derecho del sistema.

Luego, μ_i se obtiene integrando con respecto a x.

Example

Resueve por variación de parámetros la siguiente E.D.N.H
$y''' + 4y' = \sec 2x.$