

E.D. Lineales Homogéneas con Coeficientes Consantes.

Sandra Elizabeth Delgadillo Alemán.

Universidad Autónoma de Aguascalientes.

June 3, 2022

E.D. Lineales Homogéneas con Coeficientes Constantes.

Recordemos que una E.D. lineal homogénea de 1er orden con coeficientes constantes está dada por

$$a_1 y' + a_0 y = 0, \quad a_1 \neq 0$$

$$\iff y' + \frac{a_0}{a_1} y = \frac{0}{a_1} = 0$$

$$\iff \underbrace{y' + \alpha y = 0}_{\text{Forma Estándar}}. \quad \alpha = a_0/a_1$$

Resolvemos la E.D. usando un factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\int \alpha dx} = e^{\alpha x}.$$

Multipliquemos la E.D. por $\mu(x)$.

$$e^{\alpha x} y' + e^{\alpha x} y = e^{\alpha x} \cdot 0 = 0$$

$$\iff \frac{d}{dx}(e^{\alpha x} y) = 0$$

Integramos

$$\int \frac{d}{dx}(e^{\alpha x} y) = \int 0 dx$$

$$\iff e^{\alpha x} y = c \iff y(x) = ce^{-\alpha x}.$$

Por lo anterior, es natural tratar de determinar si existen soluciones exponenciales para las E.D.L.H. de 2^{do} orden con coeficientes constantes de la forma

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Veamos si ésta E.D. tiene soluciones exponenciales.

$$y(x) = e^{mx}$$

$$y'(x) = me^{mx}$$

$$y''(x) = m^2 e^{mx}.$$

Sustituyendo en la E.D.

$$a(m^2 e^{mx}) + b(me^{mx}) + c(e^{mx}) = 0$$

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0.$$

Como $e^{mx} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \implies \boxed{am^2 + bm + c = 0}$

Ecuación Característica

Luego, $y(x) = e^{mx}$ es solución de la E.D. siempre y cuando m sea una raíz de la ecuación característica.

La ecuación característica se puede resolver factorizando, o por fórmula general. En este caso las raíces están dadas por

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$m_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad m_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A $b^2 - 4ac$ se le conoce como el **discriminante**. Se tienen 3 casos dependiendo de lo siguiente.

- 1 $b^2 - 4ac > 0$, dos raíces reales distintas $m_1 \neq m_2$.
- 2 $b^2 - 4ac = 0$, dos raíces reales e iguales, $m_1 = m_2 = -b/2a$.
- 3 $b^2 - 4ac < 0$, raíces imaginarias conjugadas.

$$\begin{aligned} m_1 &= d + ie \\ m_2 &= d - ie \end{aligned} \quad d, e \in \mathbb{R}.$$

Caso 1. Raíces reales y distintas, $m_1 \neq m_2$.

En este caso, se tienen dos soluciones de la E.D. $y_1(x) = e^{m_1x}$, y $y_2(x) = e^{m_2x}$. Veamos que y_1, y_2 son L.I.

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](x) &= \begin{vmatrix} e^{m_2x} & e^{m_1x} \\ m_1 e^{m_1x} & m_2 e^{m_2x} \end{vmatrix} \\ &= e^{m_1x} m_2 e^{m_2x} - m_1 e^{m_1x} e^{m_2x} \\ &= m_2 e^{m_1x+m_2x} - m_1 e^{m_1x+m_2x} \\ &= e^{(m_1+m_2)x} (m_2 - m_1) \neq 0. \end{aligned}$$

ya que $e^{(m_1+m_2)x} > 0$, $\forall x$, y $m_1 \neq m_2$.

$\therefore y_1$ y y_2 son L.I.

Luego, y_1 y y_2 conforman un conjunto fundamental de soluciones de la E.D.

Por lo tanto, la solución general está dada por

$$y(x) = \underbrace{c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}}_{c_1, c_2 \text{ cts. arb.}}$$

Caso 2. Raíces reales e iguales $m_1 = m_2 = -\frac{b}{2a}$.

En este caso, se tiene una solución de la E.D. $y_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}$.
Usamos reducción de orden para obtener una segunda solución L.I. a $y_1(x)$.

$$y_2(x) = \mu(x)y_1(x) \text{ donde } \mu(x) = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx.$$

$$ay'' + by' + cy = 0 \implies y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0,$$

$$\mu(x) = \int \frac{e^{-\int b/a \, dx}}{\left(e^{-\frac{b}{2a}x}\right)^2} dx = \int \frac{e^{-b/a \, x}}{e^{-b/a \, x}} dx = \int dx$$

$$\therefore \mu(x) = x.$$

Entonces:

$$y_2(x) = xe^{-\frac{b}{2a}x}.$$

Verifiquemos que $y_2(x)$ también es solución:

$$y_2'(x) = -\frac{b}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x} + e^{-\frac{b}{2a}x}.$$

$$y_2''(x) = \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 xe^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x} = \frac{b^2}{4a^2}xe^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{a}e^{-\frac{b}{2a}x}.$$

Sustituyendo en la E.D.

$$\begin{aligned}
 a\left(\frac{b^2}{4a^2}xe^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{a}e^{-\frac{b}{2a}x}\right) + b\left(-\frac{b}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x} + e^{-\frac{b}{2a}x}\right) + c(xe^{-\frac{b}{2a}x}) &= 0 \\
 \frac{b^2}{4a}xe^{-\frac{b}{2a}x} - be^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b^2}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x} + be^{-\frac{b}{2a}x} + cxe^{-\frac{b}{2a}x} &= 0 \\
 \iff -\frac{b^2}{4a}xe^{-\frac{b}{2a}x} + cxe^{-\frac{b}{2a}x} &= 0 \\
 \iff \forall x, \quad xe^{-\frac{b}{2a}x}\left(-\frac{b^2}{4a} + c\right) &= 0. \\
 -\frac{b^2}{4a} + c = 0 \iff b^2 - 4ac = 0. \\
 \therefore y_2 \text{ es solución de la E.D.}
 \end{aligned}$$

Ahora, vamos que son L.I.

$$\begin{aligned}
 W[y_1, y_2](x) &= \begin{vmatrix} e^{-\frac{b}{2a}x} & xe^{-\frac{b}{2a}x} \\ \frac{b}{2a}xe^{-b/a} & -\frac{b}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x} + e^{-\frac{b}{2a}x} \end{vmatrix} \\
 &= -\frac{b}{2a}xe^{-b/a} + e^{-b/a}x + \frac{b}{2a}xe^{-b/a}x \\
 &= e^{-b/a}x \neq 0, \quad \forall x.
 \end{aligned}$$

Así pues, y_1, y_2 conforman un c.f.s y la solución general de la E.D. está dada por

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{b}{2a}x} + c_2 x e^{-\frac{b}{2a}x}.$$

Caso 3. Raíces Imaginarias $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha + i\beta$.

En este caso, se tienen soluciones complejas $y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}$, $y_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x}$.

Observemos lo siguiente

$$y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}.$$

Usemos la fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Luego:

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$
$$y_1(x) = \underbrace{e^{\alpha x} \cos \beta x}_{\text{Re}(y_1(x))} + i \underbrace{e^{\alpha x} \sin \beta x}_{\text{Im}(y_1(x))}.$$

De manera análoga, se obtiene que:

$$y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Ahora, si consideramos la suma de $y_1(x)$ y $y_2(x)$ y multiplicamos por $1/2$ obtenemos que

$$\tilde{y}_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{es solución de la E.D.}$$

Ahora, si restamos a y_2 de y_1 y lo multiplicamos por $-1/2$ se obtiene otra solución:

$$\tilde{y}_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Veamos que \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 sol L.I.

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](x) &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ -e^{\alpha x} \sin \beta x & e^{\alpha x} \cos \beta x \end{vmatrix} \\ &= e^{2\alpha x} (\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= e^{2\alpha x} \neq 0, \quad \forall x. \end{aligned}$$

Es fácil verificar que \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 son L.I. usando el wronskiano.

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ y } \tilde{y}_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Luego, \tilde{y}_1 y \tilde{y}_2 conforman un c.f.s para la E.D. Por consiguiente, la solución general está dada por:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

$$\alpha = \operatorname{Re}(m), \quad \beta = \operatorname{Im}(m) \quad m = \alpha + i\beta.$$

Example

Determine la solución general de las siguientes E.D.L.H. con coeficientes constantes de 2^{do} orden.

① $y'' - 10y' + 25y = 0.$

② $2y'' - 3y' + 4y = 0.$

③ $y'' + 4y' - 2y = 0.$

Solución.

① Supongamos que $y(x) = e^{mx}$ es la solución de la E.D.

$$(m^2 e^{mx}) - 10(me^{mx}) + 25(e^{mx}) = 0$$

$$\iff m^2 e^{mx} - 10me^{mx} + 25e^{mx} = 0$$

$$\iff e^{mx}(m^2 - 10m + 25) = 0 \quad e^{mx} > 0, \forall x$$

$$\iff \underbrace{m^2 - 10m + 25}_{\text{Ec. Característica}} = 0$$

Ec. Característica

$$\Longleftrightarrow (m - 5)^2 = 0$$

$$m - 5 = 0$$

$$m = 5, \text{ de multiplicidad } 2.$$

O bien, $m_1 = 5 = m_2$.

Luego se tiene $y_1(x) = e^{5x}$ y $y_2(x) = xe^{5x}$, que son L.I. Por lo tanto, la solución general de la E.D.

$$y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}, \quad c_1, c_2, \text{ constantes arbitrarias.}$$

② Supongamos que $y(x) = e^{mx}$.

$$y'(x) = m e^{mx}$$

$$y''(x) = m^2 e^{mx}.$$

Sustituyendo y , y' , y'' en la E.D.

$$2m^2 e^{mx} - 3m e^{mx} + 4e^{mx} = 0$$

$$\iff e^{mx}(2m^2 - 3m + 4) = 0 \quad e^{mx} > 0, \forall x$$

$$\iff \underbrace{2m^2 - 3m + 4 = 0}$$

Ec. Característica

$y(x) = e^{mx}$ es la solución de la E.D. siempre y cuando m es raíz de la ecuación característica. Usamos la fórmula general para encontrar las raíces.

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(4)}}{2(2)} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{-23}}{4} = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{-1}\sqrt{23}}{4} \end{aligned}$$

$$m_{1,2} = \frac{3}{4} \pm i \frac{\sqrt{23}}{4}, \quad \alpha = \operatorname{Re}(m_1) = \frac{3}{4}, \quad \beta = \operatorname{Im}(m_1) = \frac{\sqrt{23}}{4}.$$

Luego, se tienen dos soluciones reales de la forma

$$y_1(x) = e^{\frac{3}{4}x} \cos \frac{\sqrt{23}}{4}x, \quad y_2(x) = e^{\frac{3}{4}x} \sin \frac{\sqrt{23}}{4}x. \quad L.I.$$

Por tanto $\{y_1, y_2\}$ conforman un c.f.s Por lo cual, la solución general de la E.D. es:

$$y(x) = c_1 e^{\frac{3}{4}x} \cos \frac{\sqrt{23}}{4}x + c_2 e^{\frac{3}{4}x} \sin \frac{\sqrt{23}}{4}x, \quad c_1, c_2 \text{ constantes arb.}$$

③ Suponiendo $y(x) = e^{mx}$.

$$\begin{aligned} y'(x) &= m e^{mx} \\ y''(x) &= m^2 e^{mx} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la E.D.

$$m^2 e^{mx} + 4(me^{mx}) - 2(e^{mx}) = 0$$

$$\iff e^{mx}(m^2 + 4m - 2) = 0$$

$$\iff \underbrace{m^2 + 4m - 2 = 0}_{\text{Ec. Característica}}$$

Obtenemos raíces

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{-4}{2} \pm \frac{\sqrt{24}}{2} \end{aligned}$$

$$m_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6} \implies \begin{cases} m_1 = -2 + \sqrt{6}, \\ m_2 = -2 - \sqrt{6}. \end{cases}$$

Luego, se tienen dos soluciones

$$y_1(x) = e^{(-2+\sqrt{6})x}, \quad y_2(x) = e^{(-2-\sqrt{6})x}.$$

Luego, la solución general de la E.D. es:

$$y(x) = c_1 e^{(-2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2-\sqrt{6})x}, \quad c_1, c_2 \text{ constantes arbitrarias.}$$

Ejercicio.

Determine la solución del P.V.I. $4y'' + 4y' + 17y = 0$, con $y(0) = 1$, y $y'(0) = 2$. Además, esboce la gráfica de la curva solución.

Solución. Suponiendo que $y(x) = e^{mx}$,

$$y'(x) = me^{mx}$$

$$y''(x) = m^2 e^{mx}.$$

Sustituyendo en la E.D.

$$4(m^2 e^{mx}) + 4(me^{mx}) + 17(e^{mx}) = 0$$

$$\iff 4m^2 e^{mx} + 4me^{mx} + 17e^{mx} = 0$$

$$\iff e^{mx}(4m^2 + 4m + 17) = 0$$

$$\iff \underbrace{4m^2 + 4m + 17}_{\text{Ecuación característica}} = 0$$

Ecuación característica

Encontramos las raíces

$$\begin{aligned}m_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(4)(17)}}{2(4)} \\&= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 272}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{-256}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{-1}\sqrt{256}}{8} \\m_{1,2} &= \frac{4}{8} \pm \frac{i\sqrt{256}}{8}, \alpha = \operatorname{Re}(m_1) = -\frac{4}{8}, \beta = \operatorname{Im}(m_1) = \frac{\sqrt{256}}{8} \\&\alpha = \operatorname{Re}(m_1) = -1/2 \quad \beta = \operatorname{Im}(m_1) = 2.\end{aligned}$$

Luego, se tienen dos soluciones reales de la forma

$$y_1(x) = e^{-1/2x} \cos 2x \quad y_2(x) = e^{-1/2x} \sin 2x. \quad L.I.$$

Por tanto $\{y_1, y_2\}$ conforman un c.f.s. por lo cual, la solución general de la E.D. es:

$$y(x) = c_1 e^{-1/2x} \cos 2x + \underline{c_2 e^{-1/2x} \sin 2x}$$

Para obtener la solución del P.V.I. aplicamos las C.I. dadas:

① Aplicando $y(0) = 1$.

$$y(0) = \cancel{c_1 e^{-1/2(0)}}^{\rightarrow c_1} \cos(0) + \cancel{c_2 e^{-1/2(0)}}^{\rightarrow 0} \sin(0) = 1$$

$$c_1 = 1.$$

② Aplicando $y'(0) = 2$.

Primero, obtenemos $y'(x)$.

$$y'(x) = c_1 \left\{ e^{-1/2x} (-2 \sin 2x) + \cos 2x \left(-\frac{1}{2} e^{-1/2x} \right) \right\} \\ + c_2 \left\{ e^{-1/2x} (2 \cos 2x) + \sin 2x \left(-\frac{1}{2} e^{-1/2x} \right) \right\}$$

$$y'(x) = -2c_1 e^{-\frac{1}{2}x} \sin 2x - \frac{1}{2}c_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos 2x$$

$$+ 2c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos 2x - \frac{1}{2}c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin 2x, \quad \boxed{c_1 = 1}$$

$$y'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(-2 \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + 2c_2 \cos 2x - \frac{1}{2}c_2 \sin 2x \right)$$

Aplicando $y'(0) = 2$

$$y'(0) = e^{-\frac{1}{2}(0)} \left(-2 \sin 2(0) - \frac{1}{2} \cos 2(0) + 2c_2 \cos 2(0) - \frac{1}{2}c_2 \sin 2(0) \right)$$

$$+ 2c_2 \cos 2(0) - \frac{1}{2}c_2 \sin 2(0)$$

$$2 = 2c_2 - 1/2$$

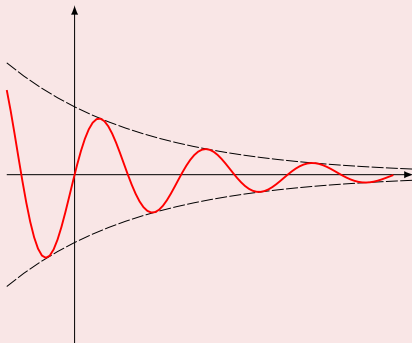
$$2c_2 = 5/2$$

$$\underline{c_2 = 5/4}$$

∴ La solución del P.V.I. es:

$$\underline{y(x) = e^{-1/2x} \cos 2x + \frac{5}{4} e^{-1/2x} \sin 2x}$$

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \underbrace{\left(\cos 2x + \frac{5}{4} \sin 2x \right)}_{A \sin(2x+\phi)}$$



Para resolver una E.D. de orden n de la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

donde $a_i, i = 1, \dots, n$, son constantes reales y $a_n \neq 0$.

Se debe resolver una ecuación polinomial de la forma:

$$\underbrace{a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_1 m + a_0 = 0}_{\text{Ecuación Característica.}}$$

- 1 Si todas las raíces de la ecuación son reales y distintos, la solución de la ecuación será:

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x},$$

donde c_1, \dots, c_n son cts. arb. y m_1, \dots, m_n son las raíces.

- ② Cuando la raíz real m_1 tiene multiplicidad k , la solución general de la ecuación diferencial debe contener la siguiente combinación lineal

$$c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + c_3 x^2 e^{m_1 x} + \dots + c_k x^{k-1} e^{m_1 x}.$$

- ③ La ecuación característica tiene raíces complejas. Puesto que las raíces complejas aparecen en pares, la solución general deberá contener:

- Si la multiplicidad de las raíces $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, es 1:

$$c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Si la multiplicidad de las raíces $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$, es k :

$$c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x + c_3 x e^{\alpha x} \cos \beta x + c_4 x e^{\alpha x} \sin \beta x + \dots + \\ + \dots + c_{2k-1} x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x + c_{2k} x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Example

Determine la solución general de las siguientes E.D.L.H.

① $\frac{d^4 y}{dx^4} + 4\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0.$

② $y''' + 3y'' - 4y = 0.$

③ $y''' + 3y'' - 4y = 0.$

④ Suponga que las soluciones de la ec. característica de una E.D. son $-1, 0, 3 + 2i, \pi, -1 + i.$

Solución.

① La ecuación característica correspondiente a la E.D. es:

$$m^4 + 4m^2 + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (m^2 + 2)^2 = 0$$

$$\text{haciendo } x = m^2 \implies x^2 + 4x = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x + 2)^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow x + 2 = 0$$

$$x = -2 \text{ con multiplicidad } 2.$$

$\Leftrightarrow m^2 = x = -2 \Rightarrow m = \pm\sqrt{-2} = \pm i\sqrt{2}$, con multiplicidad 2.

Luego, se tienen 4 soluciones, $y_1(x) = e^{0x} \overset{1}{\cos \sqrt{2}x}$,

$y_2(x) = e^{0x} \overset{1}{\sin \sqrt{2}x}$, $y_3(x) = x \cos \sqrt{2}x$, y $y_4(x) = x \sin \sqrt{2}x$.

Por lo tanto, la solución general de la E.D. está dada por

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sin \sqrt{2}x + \underline{c_3 x \cos \sqrt{2}x + c_4 x \sin \sqrt{2}x}$$

donde c_1, c_2, c_3, c_4 son constantes arbitrarias.

② La ecuación característica correspondiente a la E.D. es:

$$\underbrace{m^3}_{a_3} + \underbrace{3m^2}_{a_2} - \underbrace{4}_{a_0} = 0$$

$$m^3 + 3m^2 = 4 \quad 1 \text{ posible raíz positiva}$$

$$(-m)^3 + 3(-m)^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -m^3 + 3m^2 = -4 \quad 2 \text{ posibles raíces negativas.}$$

Posibles raíces racionales $\frac{\text{div}a_0}{\text{div}a_3} = \pm 1, \pm 2, \pm 4$.

$$a_0 = -4, \quad \text{div} : \pm 1, \pm 2, \pm 4$$

$$a_3 = 1, \quad \text{div} : \pm 1$$

Usamos división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 0 & -4 & -1 \\ & -1 & -2 & 2 & \\ \hline 1 & 2 & -2 & -2 & \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 0 & -4 & -2 \\ & -2 & -2 & 4 & \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & = 0 \end{array}$$

$$m^3 + 3m^2 - 4 = (m + 2)(m^2 + m - 2) = 0$$

$$m_1 = -2 \quad \text{o} \quad m^2 + m - 2 = 0$$

$$(m + 2)(m - 1) = 0$$

$$m_2 = -2 \quad m_3 = 1.$$

$m_1 = -2$ de multiplicidad 2, $m_2 = 1$.

Luego, la solución general está dada por:

$$\underline{y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-2x}}, \quad c_1, c_2, c_3 \text{ constantes arbitrarias.}$$