Teorema de Existencia y Unicidad.

Sandra Elizabeth Delgadillo Alemán.

Universidad Autónoma de Aguascalientes.

May 19, 2022

Teorema de Existencia y Unicidad.

Teorema de Existencia y Unicidad.

Considere el P.V.I. siguiente

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Sujeto a $a_n(x), a_{n-1}(x), \cdots a_1(x), a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en el intervalo I y además, $a_n(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Si $x = x_0$ en cualquier punto en el intervalo I, entonces existe una única solución para el P.V.I. en I.

Example

Determina si el P.V.I. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 6$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$, para $x \in (-\infty, \infty)$ tiene solución única usando e T.E. y U.

Solución. Sean $a_2(x) = x^2$, $a_1(x) = -2x$, $a_0(x) = 2$, $g(x) = 6$ funciones continuas en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Pero

$$\begin{aligned} a_2(x) &= x^2 = 0 \iff x = 0 \\ a_2(x) &= x^2 \neq 0 \text{ en } (-\infty, 0) \text{ o } (0, \infty) \text{ pero éstos intervalos} \\ &\quad \text{no contienen a } x = 0. \\ \therefore &\quad \text{no se garantiza la existencia y unicidad de la} \\ &\quad \text{solución del P.V.I.} \end{aligned}$$

Verifiquemos que $y(x) = cx^2 + x + 3$ es solución del P.V.I. $\forall c$.

Derivando:

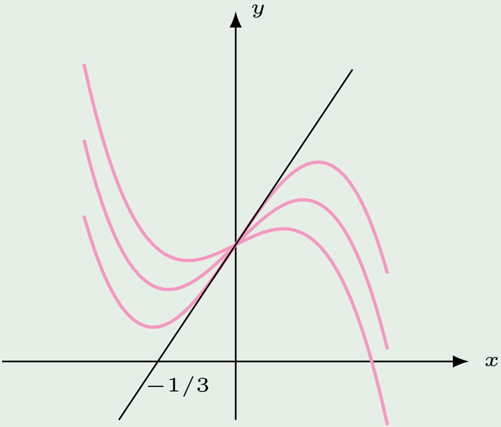
$$\begin{aligned} y' &= 2cx + 1 \\ y'' &= 2c. \end{aligned}$$

Sustiyuendo y, y', y'' en la E.D

$$\begin{aligned} x^2(2c) - 2x(2cx+1) + 2(c^2+x+3) &= 6 \\ \iff \cancel{2cx^2} - \cancel{4cx^2} - \cancel{2x} + \cancel{2cx^2} + \cancel{2x} + 6 &= 6 \\ 6 &= 6. \quad \forall c. \end{aligned}$$

Veamos si $y(x)$ satisface las C.I. $y(0) = 3$ y $y'(0) = 1$,

$$\left.\begin{aligned} y(0) = c(0)^2 + 0 + 3 &= 3 \\ 3 &= 3. \\ y'(0) = 2c(0) + 1 &= 1 \\ 1 &= 1. \end{aligned}\right\} \quad \forall c.$$



Al igual que los P.V.I., los P.V.F. pueden tener muchas soluciones, sólo una, o ninguna.

Example

Considere la E.D. $x'' + 16x = 0$, y $x(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$, la solución general explícita de dicha E.D. Encuentra la solución del problema de valor en la frontera cuyas condiciones son:

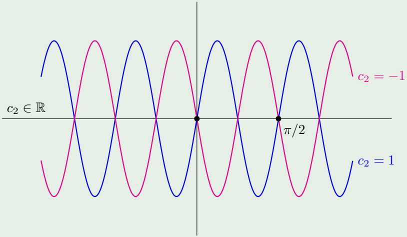
1. $x(0) = 0$, $x(\pi/2) = 0$.
2. $x(0) = 0$, $x(\pi/2) = 1$.
3. $x(0) = 0$, $x(\pi/8) = 0$.

Solución.

1. Apliquemos la C.F. en la solución general

$$\begin{aligned}
x(0) = c_1 \cancelto{1}{\cos 4(0)} + c_2 \cancelto{0}{\sin 4(0)} &= 0 \\
\iff c_1 &= 0. \\
x(\pi/2) = c_1 \cos(4\pi/2) + c_2 \sin(4\pi/2) &= 0 \\
\iff c_1 \cancelto{1}{\cos(2\pi)} + c_2 \cancelto{0}{\sin(2\pi)} &= 0 \\
\iff c_1 &= 0. \qquad c_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$\therefore \quad x(t) = c_2 \sin 4t$ es una familia de soluciones que satisfacen el P.V.F. Es decir, hay un número infinito de soluciones.



2

$$
\begin{aligned}
x(0) = c_1 \cancelto{1}{\cos 4(0)} + c_2 \cancelto{0}{\sin 4(0)} &= 0 \\
\iff c_1 &= 0. \\
x(\pi/2) = c_1 \cos(4\pi/2) + c_2 \sin(4\pi/2) &= 1 \\
\iff c_1 \cancelto{1}{\cos(2\pi)} + c_2 \cancelto{0}{\sin(2\pi)} &= 1 \\
c_1 &= 1.
\end{aligned}
$$

3. Aplicando las condiciones $x(0) = 0$, $x(\pi/8) = 0$,

$$
\begin{aligned}
x(0) = c_1 \cancelto{1}{\cos 4(0)} + c_2 \cancelto{0}{\sin 4(0)} &= 0 \\
\iff c_1 &= 0. \\
x(\pi/8) = c_1 \cancelto{0}{\cos(4\pi/8)} + c_2 \cancelto{1}{\sin(4\pi/8)} &= 0 \\
\iff c_2 &= 0. \\
\therefore \quad x(t) &= 0.
\end{aligned}
$$