



**ECUACIONES DIFERENCIALES.**  
**UNIDAD III. Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior.**  
**Tarea 10: Sistemas Masa-Resorte.**

**Elaboró:** Sandra Elizabeth Delgadillo Alemán.

**Alumno(a):** \_\_\_\_\_ **Carrera:** \_\_\_\_\_ **No. de ejercicios:** \_\_ / 8

**I. Plantea las ecuaciones diferenciales de 2do. Orden para los siguientes problemas de sistemas masa-resorte, revuélvelos y responde lo que se te pide. (8)**

**Sistemas Masa-Resorte: Movimiento Libre No-Amortiguado (3 ejercicios)**

1. Se fija un contrapeso de 4 lb. a un resorte cuya constante es 16 lb. /pie. ¿Cuál es el periodo del movimiento armónico simple? Esboza la gráfica del movimiento armónico simple para alguna condición específica.

**Solución.**  $\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$ .

2. Al fijar un contrapeso de 24 lb. al extremo de un resorte, lo estira 4 pulg. Deduzca la ecuación del movimiento cuando el contrapeso se suelta y parte del reposo desde un punto que está 3 pulg. arriba de la posición de equilibrio. Esboza la grafica de la ecuación de movimiento.

**Solución.**  $x(t) = -\frac{1}{4} \cos 4\sqrt{6}t$ .

3. Formule la ecuación del movimiento si el contrapeso del problema 2 parte de la posición de equilibrio con una velocidad inicial de 2 pie/s hacia abajo.
4. Un contrapeso de 20 lb. estira 6 pulg. a un resorte. En ese sistema, el contrapeso se suelta, partiendo del reposo, a 6 pulgadas abajo de la posición de equilibrio.

a) Calcule la posición del contrapeso cuando  $t = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ , y  $\frac{9\pi}{32}$  segundos.

b) ¿Cuál es la velocidad del contrapeso cuando  $t = \frac{3\pi}{16}$  s? ¿Hacia dónde se dirige el contrapeso en ese instante?

c) ¿Cuándo pasa el contrapeso por la posición de equilibrio?

**Solución.** a)  $x\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{4}, x\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{1}{2}, x\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}, x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}, x\left(\frac{9\pi}{32}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

b) 4 pies/s; hacia abajo. c)  $t = \frac{(2n+1)\pi}{16}$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$

5. Una fuerza de 400 N estira 2 m un resorte. Después, al extremo de ese resorte se fija una masa e 50Kg. Y parte de la Posición de equilibrio a una velocidad de 10m/s hacia arriba. Deduzca la ecuación de movimiento.
6. Otro resorte, cuya constante es 20 N/m, está colgado del mismo soporte rígido, pero en posición paralela a la del sistema masa-resorte del problema 5. Al segundo resorte se le fija una masa de 20 Kg., y ambas masas salen de su posición de equilibrio con una velocidad de 10m/s hacia arriba. hacia arriba.

a) ¿Cuál masa tiene la mayor amplitud de movimiento?

b) ¿Cuál masa se mueve con más rapidez cuando  $t = \frac{\pi}{4}$  s? ¿Y cuando  $t = \frac{\pi}{2}$  s?

- c) ¿En qué momento están las dos masas en la misma posición? ¿Dónde están en ese momento? ¿En qué direcciones se mueven?

**Solución.** a) La masa de  $20kg$  b) La masa de  $20kg$ ; la masa de  $50kg$  c)  $t = n\pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

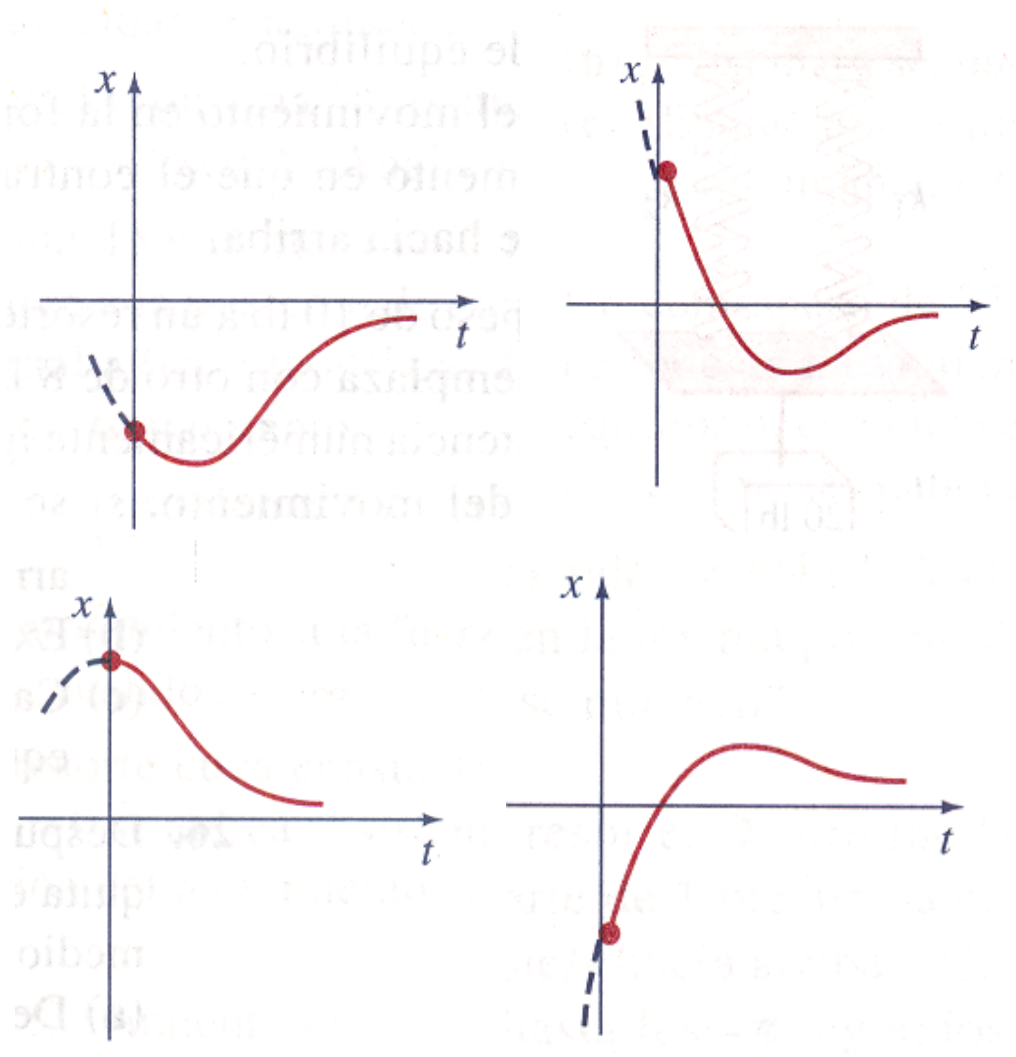
7. Un contrapeso de 8 lb., fijo a un resorte, tiene movimiento armónico simple. Deduzca la ecuación del movimiento si la constante del resorte es 1 lb. /pie y el contrapeso parte de 6 pulg. abajo del punto de equilibrio, con una velocidad de  $\frac{3}{2}$  pie/s hacia abajo. Expresé la solución en la forma de la ecuación (6).

**Solución.**  $x(t) = \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{3}{4} \sin 2t = \frac{\sqrt{13}}{4} \sin(2t - 0.5880)$ .

### Sistemas Masa-Resorte: Movimiento Libre Amortiguado (3 ejercicios)

1. La figura respectiva representa la gráfica de una ecuación del movimiento de una masa unida a un resorte. El sistema masa-resorte es amortiguado. Con la grafica, determine

- Si el desplazamiento inicial de la masa ocurre arriba o debajo de la posición de equilibrio.
- Si la masa está inicialmente en reposo o si está moviéndose hacia abajo o si está moviéndose hacia arriba.



2. Un contrapeso de 4 lb. se une a un resorte cuya constante es 2 lb. /pie. El medio presenta una resistencia al movimiento numéricamente igual a la velocidad instantánea. Si el contrapeso se suelta de un punto a 1 pie arriba de la posición de equilibrio con una velocidad de 8 pie/s hacia abajo, calcule el tiempo en que pasa por la posición de equilibrio. Encuentre el momento en que el contrapeso llega a su desplazamiento extremo respecto a la posición de equilibrio. ¿Cuál es su posición en ese instante?

**Solución.**  $\frac{1}{4}s, \frac{1}{2}s, x\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-2}$ ; esto es, el contrapeso está, aproximadamente a 0.14 pies abajo de la posición de equilibrio.

3. Una masa de 1 Kg. está unida a un resorte cuya constante es 16 N/m y todo el sistema se sumerge en un líquido que imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 10 veces la velocidad instantánea. Formule las ecuaciones del movimiento, si

- El contrapeso se suelta, partiendo del reposo a 1m abajo de la posición de equilibrio
- El contrapeso se suelta 1m abajo de la posición de equilibrio con una velocidad de 12m/s hacia arriba.

**Solución.** a)  $x(t) = \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-8t}$ . b)  $x(t) = -\frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-8t}$ .

4. Una fuerza de 2 lb. estira 1 pie un resorte. A ese resorte se le une un contrapeso de 3.2 lb. Y el sistema se sumerge en un medio que imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 0.4 la velocidad instantánea.

- Deduzca la ecuación del movimiento si el contrapeso parte del reposo 1 pie arriba de la posición de equilibrio.
- Expresa la ecuación del movimiento en la forma de la ecuación (23).
- Calcule el primer momento en que el contrapeso pasa por la posición de equilibrio

**Solución.** a)  $x(t) = e^{-2t} \left( -\cos 4t - \frac{1}{2} \sin 4t \right)$ . b)  $x(t) = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-2t} \sin(4t + 5.176)$ . c)  $t = 1.294s$ .

### Sistema de Masa-Resorte: Movimiento Forzado (2 ejercicios).

- Una masa de 10 kg. esta unida a un resorte con rigidez  $k = 49N/m$ . Se aplica una fuerza externa  $F(t) = 20 \cos 4t$  al sistema. La constante de amortiguamiento para el sistema es de  $3N \cdot s/m$ . Determina la ecuación de movimiento para el sistema y esboza su grafica.
- Un peso de 64 lb. esta unido a un resorte vertical, haciendo que éste se estire 3 pulgadas hasta llegar al reposo en equilibrio. La constante de amortiguamiento para el sistema es  $3lb \cdot s/pie$ . Se aplica una fuerza externa  $F(t) = 3 \cos 12t$ . Determinar la ecuación de movimiento y esboza su grafica (si es necesario utiliza un software matemático para graficar).

**Nota:** Revisa la resolución de las ecuaciones diferenciales usando WolframAlpha (<https://www.wolframalpha.com/>) y utiliza GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/KGWhcAqc>) para graficar la ecuación de movimiento.

**Bibliografía del curso:** Murray R. Spiegel, Ecuaciones Diferenciales Aplicadas, Pentice-Hall, 3er. Ed.