

# Ecuaciones Diferenciales No Homogéneas.

Sandra Elizabeth Delgadillo Alemán.

Universidad Autónoma de Aguascalientes.

April 14, 2022

## E.D. No Homogéneas.

Recordemos que una E.D. No Homogénea tiene la forma

$$a_m(x)y^{(n)} + a_{m-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde  $a_i(x)$  y  $g(x)$  son funciones continuas en  $I$ , y  $a_n(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in I$ .

### Solución de la E.D.N.H.

Sea  $y_p(x)$  cualquier solución particular de la E.D. No Homogénea de orden  $n$  en el intervalo  $I$ . Sea  $y_c(x)$  la solución general de la E.D.H asociada a la E.D. en  $I$ , llamada *función complementaria*. Entonces la solución general de la E.D. No Homogénea en el intervalo  $I$ , es:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x).$$

$$y(x) + c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x).$$

$c_1, \dots, c_n$  son constantes arbitrarias, donde  $y_1, y_2, \dots, y_n$  es un c.f.s de la E.D.L.H asociada.

Para determinar la solución particular de una E.D. No Homogénea estudiaremos dos métodos:

- 1 Método de coeficientes indeterminados.
- 2 Método de variación de parámetros.

# Método de Coeficientes Indeterminados.

La idea básica de éste método es proponer la forma de  $y_p(x)$  de acuerdo a los tipos de funciones que forman a  $g(x)$ , donde  $g(x)$  puede ser: constante, función polinomial, función exponencial, función seno y/o cosenos, sumas y/o productos finitos de éstas funciones.

Para ilustrar el método considere los siguientes eventos.

## Example

Determine la solución general de la E.D.  $y'' + 2y' - 3y = g(x)$ , donde

①  $g(x) = 8e^{2x}$ .

②  $g(x) = (x - 1)^2$ .

③  $g(x) = 7 \cos 3x$ .

E.D. No Homogéneas.

**Método de Coef. Indeterminados.**

Método de Variación de Parámetros.

Método de Variación de Parámetros para E.D. de Orden  $n$ .

## Excepción.

El método de Coeficientes Indeterminados falla cuando  $g(x)$  es solución de la Ecuación Diferencial Homogénea asociada.

## Example

Suponga que  $g(x) = e^{-3x}$  en el ejemplo anterior, luego, encuentre una solución particular de la E.D.N.H.

$$y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}.$$

E.D. No Homogéneas.

**Método de Coef. Indeterminados.**

Método de Variación de Parámetros.

Método de Variación de Parámetros para E.D. de Orden  $n$ .

## Ejercicio.

Obtener la solución del P.V.I.  $y'' + 4y' + 4y = (3 + x)e^{-2x}$ , con

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 5.$$



Sean  $y_1, y_2, \dots, y_k$  soluciones particulares de una E.D.N.H con  $g_1, g_2, \dots, g_k$ , respectivamente. Esto es,  $y_i$  representa la solución particular de la E.D.

$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0y = g_i(x)$ ,  
entonces

$$\implies y(x) = y_1 + y_2 + \dots + y_k(x),$$

es solución particular de la E.D.N.H.

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0y = g_1(x) + \dots + g_k(x).$$

### Example

Obtener la solución general de la E.D.N.H siguiente:

$$y''' - 4y' = 2x + 5 - e^{-2x}.$$

# Método de Variación de Parámetros.

Consideremos la E.D.L.N.H. de segundo orden en su forma estándar,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = G(x)$$

Luego, el método de variación de parámetros

$$y_p(x) = \mu_1(x)y_1(x) + \mu_2(x)y_2(x)$$

donde  $\{y_1, y_2\}$  conforman un conjunto fundamental de soluciones de la E.D. Homogénea asociada.

$$y(x) = c_1y_1 + c_2y_2.$$

Así pues, sustituyendo  $y_p$ ,  $yp'$ ,  $yp''$ , en la E.D. y después de factorizar de manera conveniente, se encuentra que  $\mu_1(x)$  y  $\mu_2(x)$  deben satisfacer las siguientes ecuaciones

$$y_1(x)\mu_1'(x) + y_2(x)\mu_2'(x) = 0$$

$$y_1'(x)\mu_1'(x) + y_2'(x)\mu_2'(x) = G(x).$$

Usamos la regla de Cramer para resolver este sistema.

$$\mu_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ G(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{-y_2(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)}$$

$$\mu_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & G(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{y_1(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)}$$

Luego, integramos con respecto a  $x$ ,

$$\mu_1(x) = \int \frac{-y_2(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad y \quad \mu_2(x) = \int \frac{y_1(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

Por consiguiente,

$$y_p(x) = \left( \int \frac{-y_2(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \right) y_1(x) + \left( \int \frac{y_1(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \right) y_2(x).$$

### Example

Considere la E.D.  $y'' + y = \tan x$ . Encuentre la solución general de la E.D.

E.D. No Homogéneas.

Método de Coef. Indeterminados.

**Método de Variación de Parámetros.**

Método de Variación de Parámetros para E.D. de Orden  $n$ .

## Ejercicio.

Resuelve el P.V.I.  $y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 6x)e^{2x}$ , con  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ . Use el método de variación de parámetros para encontrar una solución particular de la E.D.N.H.

E.D. No Homogéneas.

Método de Coef. Indeterminados.

**Método de Variación de Parámetros.**

Método de Variación de Parámetros para E.D. de Orden  $n$ .

## Example

Discuta, como se pueden utilizar los métodos de coeficientes indeterminados y el de variación de parámetros para resolver la E.D.

$$y'' - 2y' + y = 4x^2 - 3 + x^{-1}e^x.$$



# Método de Variación de Parámetros para E.D. de Orden $n$ .

El método de variación de parámetros se puede generalizar para E.D.L. de Orden  $n$ , de la forma

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = G(x).$$

Si:

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x).$$

es la solución genral de la E.D.H asociada, entonces, se propone como solución particular

$$y_p(x) = \mu_1(x)y_1(x) + \cdots + \mu_n(x)y_n(x),$$

donde  $\mu_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , están determinadas por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$y_1\mu'_1 + y_2\mu'_2 + \cdots + y_n\mu'_n = 0$$

$$y'_1\mu'_1 + y'_2\mu'_2 + \cdots + y'_n\mu'_n = 0$$

$$\vdots$$

$$y_1^{(n-1)}\mu'_1 + y_2^{(n-1)}\mu'_2 + \cdots + y_n^{(n-1)}\mu'_n = 0$$

La solución del sistema se obtiene con regla de Cramer

$$\mu'_i = \frac{W_i}{W}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$W$  = Wronskiano de  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ,

$W_i$  = es el determinante de la matriz de coeficientes por el vector del lado derecho del sistema.

Luego,  $\mu_i$  se obtiene integrando con respecto a  $x$ .

## Example

Resuelve por variación de parámetros la siguiente E.D.N.H

$$y''' + 4y' = \sec 2x.$$