ECUACIONES DIFERENCIALES.
UNIDAD III. Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior.
Tarea 9: Ecuaciones Diferenciales No-Homogéneas.

Elaboró: Sandra Elizabeth Delgadillo Alemán.
Alumno(a): ______________________________ **Carrera:** _____ **No. de ejercicios:** __ / 15

I. Resuelve correctamente los siguientes ejercicios:

Coeficientes Indeterminados (8).

(Hacer 3 ejercicios) En los problemas del 1 al 8 resuelva las ecuaciones diferenciales por coeficientes indeterminados.

1. $y'' + 3y\,' + 2y = 6$. **Solución.** $y = c_1e^{-x}c_2e^{-2x} + 3$.
2. $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$. **Solución.** $y = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x} + \frac{6}{5}x + \frac{3}{5}$.
3. $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$. **Solución.** $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + x^2 - 4x + \frac{7}{2}$.
4. $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$. **Solución.** $y = c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\sin\sqrt{3}x + \left(-4x^2 + 4x - \frac{4}{3}\right)e^{3x}$.
5. $y'' - y' = -3$. **Solución.** $y = c_1 + c_2e^x + 3x$.
6. $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{x/2}$. **Solución.** $y = c_1e^{x/2} + c_2xe^{x/2} + 12 + \frac{1}{2}x^2e^{x/2}$.
7. $y'' + 4y = 3\sin(2x)$. **Solución.** $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{3}{4}x\cos 2x$.
8. $y'' + y = 2x\sin x$. **Solución.** $y = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{2}x^2\cos x + \frac{1}{2}x\sin x$.

(Hacer 2 ejercicios) En los problemas del 9 al 13 resuelva las ecuaciones diferenciales por coeficientes indeterminados.

9. $y'' - 2y' + 5y = e^x\cos 2x$. **Solución.** $y = c_1e^x\cos 2x + c_2e^x\sin 2x + \frac{1}{4}xe^x\sin 2x$.
10. $y'' + 2y' + y = \sin x + 3\cos 2x$. **Solución.** $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{12}{25}\sin 2x - \frac{9}{25}\cos 2x$.
11. $y''' - 6y'' = 3 - \cos x$. **Solución.** $y = c_1 + c_2x + c_3e^{6x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{6}{37}\cos x + \frac{1}{37}\sin x$.
12. $y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^x$. **Solución.** $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x - x - 3 - \frac{2}{3}x^3e^x$.
13. $y^{(4)} + 2y'' + y = (x-1)^2$. **Solución.** $y = c_1\cos + c_2\sin x + c_3x\cos x + c_3x\sin x + x^2 - 2x - 3$.

(Hacer 2 ejercicios) En los problemas 14 a 18, resuelva el problema de valor inicial respectivo.

14. $y'' + 4y = -2$, $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2$. **Solución.** $y = \sqrt{2}\sin 2x - \frac{1}{2}$.
15. $5y'' + y' = -6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -10$. **Solución.** $y = -200 + 200e^{-x/5} - 3x^2 + 30x$.

16. $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$. **Solución.** $y = -10e^{-2x}\cos x + 9e^{-2x}\sin x + 7e^{-4x}$.

17. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + w^2 x = F_0 \sin wt$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. **Solución.** $x = \dfrac{F_0}{2w^2}\sin wt - \dfrac{F_0}{2w} t\cos wt$.

18. $y''' - 2y'' + y' = 2 - 24e^x + 40e^{5x}$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$, $y'(0) = \dfrac{5}{2}$, $y''(0) = -\dfrac{9}{2}$. **Solución.** $y = 11 - 11e^x + 9xe^x + 2x - 12x^2e^x + \dfrac{1}{2}e^{5x}$.

(Hacer este ejercicio) Resuelva el problema de valores en la frontera indicado. Esboza su gráfica usando Geogebra e ilustra la interpretación geométrica de las condiciones dadas.
$y'' + y = x^2 + 1$, $y(0) = 5$, $y'(1) = 0$. **Solución.** $y = 6\cos x - 6(\cot 1)\sin x + x^2 - 1$.

Variación de Parámetros (7).

(Hacer 3 ejercicios) Resuelva cada una de las ecuaciones diferenciales en los problemas 20 al 28 por variación de parámetros.

19. $y'' + y = \sec x$. **Solución.** $y = c_1\cos x + c_2\sin x + x\sin x + \cos x \ln\big|\cos x\big|$.

20. $y'' + y = \sin x$. **Solución.** $y = c_1\cos x + c_2\sin x - \dfrac{1}{2}x\cos x$.

21. $y'' + y = \cos^2 x$. **Solución.** $y = c_1\cos x + c_2\sin x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}\cos 2x$.

22. $y'' - y = \cosh x$. **Solución.** $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + \dfrac{1}{2}x\sinh x$.

23. $y'' - 4y = \dfrac{e^{2x}}{x}$. **Solución.** $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \dfrac{1}{4}\left(e^{2x}\ln|x| - e^{-2x}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{e^{4t}}{t}dt\right)$, $x_0 > 0$.

24. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^x}$. **Solución.** $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(1+e^x)$.

25. $y'' + 3y' + 2y = \sin e^x$. **Solución.** $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-x} - e^{-2x}\sin e^x$.

26. $y'' + 2y' + y = e^{-t}\ln t$. **Solución.** $y = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + \dfrac{1}{2}t^2e^{-t}\ln t - \dfrac{3}{4}t^2e^{-t}$.

27. $3y'' - 6y' + 6y = e^x\sec x$. **Solución.** $y = c_1e^x\sin x + c_2e^x\cos x + \dfrac{1}{3}xe^x\sin x + \dfrac{1}{3}e^x\cos x\ln\big|\cos x\big|$.

(Hacer estos ejercicios) En los siguientes problemas, resuelva por variación de parámetros la ecuación respectiva, sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Esboza su gráfica usando Geogebra e ilustra la interpretación geométrica de las condiciones dadas.

28. $4y'' - y = xe^{x/2}$. **Solución.** $y = \dfrac{1}{4}e^{-x/2} + \dfrac{3}{4}e^{x/2} + \dfrac{1}{8}x^2e^{x/2} - \dfrac{1}{4}xe^{x/2}$.

29. $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$. **Solución.** $y = \dfrac{4}{9}e^{-4x} + \dfrac{25}{36}e^{2x} - \dfrac{1}{4}e^{-2x} + \dfrac{1}{9}e^{-x}$.

(Hacer este ejercicio) En el problema 31 las funciones se saben que son soluciones linealmente independientes de las ecuaciones diferenciales homogéneas asociadas en $(0, \infty)$. Determine la solución general de la ecuación no homogénea.

31. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right)y = x^{3/2}$. **Solución.** $y_1 = x^{-1/2}\cos x$, $y_2 = x^{-1/2}\sin x$. $y = c_1x^{-1/2}\cos x + c_2x^{-1/2}\sin x + x^{-1/2}$.

(Hacer este ejercicio) En el problema 32, discuta como se pueden combinar los métodos de coeficientes indeterminados y variación de parámetros, para resolver la ecuación diferencial. Ejecute sus ideas.

32. $3y'' - 6y' + 30y = 15\sin x + e^x\tan 3x$.

*Puedes usar GeoGebra `https://www.geogebra.org/m/KGWhcAqc` o WolframAlpha `https://www.wolframalpha.com/` para esbozar o verificar las graficas de las soluciones de PVI o PVF.

Dennis G. Zill, A First Course of Differential Equations with Modeling Applications, 9a Ed., Cengage Learning.