Ecuaciones Diferenciales No Homogéneas.

Sandra Elizabeth Delgadillo Alemán.

Universidad Autónoma de Aguascalientes.

June 2, 2022

E.D. No Homogéneas.

Recordemos que una E.D. No Homogénea tiene la forma

$$a_m(x)y^{(n)} + a_{m-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

donde $a_i(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en I, y $a_n(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.

Solución de la E.D.N.H.

Sea $y_p(x)$ cualquier solución paricular de la E.D. No Homogénea de orden n en el intervalo I. Sea $y_c(x)$ la solución general de la E.D.H asociada a la E.D. en I, llamada *función complementaria*. Entonces la solución general de la E.D. No Homogénea en el intervalo I, es:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x).$$

Es decir:

$$y(x) + c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x).$$

$c_1, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias, donde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ es un c.f.s de la E.D.L.H asociada.

Para determinar la solución particular de una E.D. No Homogénea estudiaremos dos métodos:

1. Método de coeficientes indeterminados.
2. Método de variación de parámetros.

Método de Coeficientes Indeterminados.

La idea básica de éste método es proponer la forma de $y_p(x)$de acuerdo a los tipos de funciones que forman a $g(x)$, donde $g(x)$ puede ser: constante, función polinomial, función exponencial, función seno y/o cosenos, sumas y/o productos finitos de éstas funciones.

Para ilustrar el método considere los siguientes eventos.

Example

Determine la solución general de la E.D. $y'' + 2y' - 3y = g(x)$, donde

1. $g(x) = 8e^{2x}$.
2. $g(x) = (x-1)^2$.
3. $g(x) = 7\cos 3x$.

1. $y'' - 2y' - 3y = 8e^2$.

   Esta E.D. tiene solución del tipo exponencial $y(x) = e^{mx}$, siempre y cuando m sea raíz de la ecuación característica

$$\begin{aligned} m^2 + 2m - 3 &= 0 \\ \iff (m+3)(m-1) &= 0 \\ \iff m_1 = -3 & \qquad m_2 = 1. \end{aligned}$$

   $\therefore \quad y_1(x) = e^{-3x}, y_2(x) = e^x$ es un c.f.s para la E.D.H asociada. Luego, $y_c(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x$, c_1, c_2 constantes arbitrarias.

   Ahora, determinamos una solución particular de la E.D.N.H.

$$g(x) = 8e^{2x} \qquad y \qquad y = Ae^{2x}.$$

determinremos A tal que $y_p(x)$ sea solución de la E.D.N.H.

$$y_p'(x) = 2Ae^{2x} \longrightarrow y_p''(x) = 4Ae^{2x}.$$

Sustituyendo y_p, y_p', y_p'' en la E.D.N.H

$$\begin{aligned} 4Ae^{2x} + 2(2Ae^{2x}) - 3(Ae^{2x}) &= 8e^{2x} \\ 4Ae^{2x} + 4Ae^{2x} - 3Ae^{2x} &= 8e^{2x} \\ A &= 8/5. \\ \therefore \quad y_p(x) &= \frac{8}{5}e^{2x}. \end{aligned}$$

Es una solución particular de la E.D.N.H. Por consiguiente la solución general es:

$$\underline{y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x} + \frac{8}{5}e^{2x}}, \; c_1, c_2 \text{ constantes arbitrarias.}$$

2. $y'' - 2y' - 3y = (x-1)^2.$

Del inciso anterior, se tiene que la solución completamentaria es:

$$y_1(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x}.$$

Ahora, determinemos una solución particular de la E.D.N.H.

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-1)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p(x) &= Ax^2 + Bx + C \\ y_p{}'(x) &= 2Ax + B \\ y_p{}''(x) &= 2A. \end{aligned}$$

Sustituimos y_p, y_p', y_p'' en la E.D.

$$\begin{aligned} 2A + 2(2Ax + B) - 3(Ax^2 + Bx + C) &= x^2 - 2x + 1 \\ -3Ax^2 + (4A - 3B)x + (2A + 2B - 3C) &= x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3A &= 1 & \qquad A &= -1/3 \\ 4A-3B &= -2 & \qquad B &= 4/9 \\ 2A+2B-3C &= 1 & \qquad C &= -11/27. \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad y_p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{11}{27}.$$

Por lo tanto, la solución general de la E.D.N.H. es:

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{11}{27}.$$

c_1, c_2 constantes arbitrarias.

3. $y'' + 2y' - 3y = 7\cos 3x.$

Tenemos que:

$$y_c(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x}.$$

$g(x) = 7\cos 3x.$

$$\begin{aligned} y_p(x) &= A\cos 3x + B\sin 3x \\ y_p{}'(x) &= -3A\sin 3x + 3B\cos 3x \\ y_p{}''(x) &= -9A\cos 3x - 9B\sin 3x \end{aligned}$$

Sustituimos y_p, $y_p{}'$, $y_p{}''$ en la E.D.

$$\begin{aligned} (-9A\cos 3x - 9B\sin 3x) & \\ +2(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) & \\ -3(A\cos 3x + B\sin 3x) &= 7\cos 3x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-9A\cos 3x - 9B\sin 3x & \\
-6A\sin 3x + 6B\cos 3x & \\
-3A\cos 3x + 3B\sin 3x &= 7\cos 3x \\
-12A\cos 3x - 12B\sin 3x - 6A\sin 3x + 6B\cos 3x &= 7\cos 3x.
\end{aligned}$$

$$\cos 3x(6B - 12A) + \sin 3x(-6A - 12B) = 7\cos 3x + 0\sin 3x.$$

$$\begin{aligned}
-12A + 6B &= 7 \\
-6A - 12B &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cancel{-12A} + 6B &= 7 \\
\cancel{-12A} + 24B &= 0 \\
\hline
30B &= 7 \\
B &= 7/30.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -12A + 6(7/30) &= 7 \\ -12A + 7/5 &= 7 \\ -12A &= 26/5 \\ A &= -7/15. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad y_p(x) = -\frac{7}{15}\cos 3x + \frac{7}{30}\sin 3x.$$

Por lo tanto, la solución general de la E.D.N.H. es:

$$\underline{y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 - \frac{7}{15}\cos 3x + \frac{7}{3}\sin 3x}$$

Excepción.

El método de Coeficientes Indeterminados falla cuando $g(x)$ es solución de la Ecuación Diferencial Homogéna asociada.

Example

Suponga que $g(x) = e^{-3x}$ en el ejemplo anterior, luego, encuentre una solución particular de la E.D.N.H. $y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$.

Solución. Observemos que la solución general de la E.D.N.H. asociada a la E.D. es: $y_c(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x}$.

$$
g(x) = e^{-3x} \longrightarrow \begin{array}{rcl} y_p(x) & = & Ae^{-3x} \\ y_p{}'(x) & = & -3Ae^{-3x} \\ y_p{}''(x) & = & 9Ae^{-3x} \end{array}
$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} 9Ae^{-3x} + 2(-3Ae^{-3x}) - 3(Ae^{-3x}) &= e^{-3x} \\ \cancel{9Ae^{-3x}} - \cancel{9Ae^{-3x}} &= e^{-3x} \\ 0 &= e^{-3x}!!! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p(x) &= Axe^{-3x} \\ y_p{}'(x) &= 9Axe^{-3x} - 3Ae^{-3x} - 3Ae^{-3x} \\ y_p{}''(x) &= 9Axe^{-3x} - 6Ae^{-3x}. \end{aligned}$$

Sust. y_p, y'_p, y''_p.

$$\begin{aligned} (9Axe^{-3x} - 6Ae^{-3x}) & \\ +2(-3Axe^{-3x} + Ae^{-3x}) & \\ -3(Axe^{-3x}) &= e^{-3x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cancel{9Axe^{-3x}} - 6Ae^{-3x} - \cancel{6Axe^{-3x}} + 2Ae^{-3x} - \cancel{3Axe^{-3x}} &= e^{-3x} \\
\iff -4Ae^{-3x} &= e^{-3x} \\
\iff -4A &= 1 \\
\iff A &= -1/4.
\end{aligned}$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{4}e^{-3x}.$$

Luego, la solución general para ésta E.D. es:

$$y(x) = c_1e^{-3x} + c_2e^{x} - \frac{1}{4}xe^{-3x}.$$

c_1, c_2 constantes arbitrarias.

Ejercicio.

Obtener la solución del P.V.I. $y'' + 4y' + 4y = (3 + x)e^{-2x}$, con

$$y(0) = 2\ ,\ y'(0) = 5.$$

Solución.

1. La E.D. Homogénea asociada es:

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

La ecuación característica es:

$$\begin{aligned} m^2 + 4m + 4 &= 0 \\ (m + 2)^2 &= 0 \\ m_1 = -2 &= m_2. \end{aligned}$$

Luego:

$$\underline{y_c(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-2x}}$$

2. Obtener una solución particular de la E.D.N.H.

$$g(x) = (3+x)e^{-2x} \longrightarrow \begin{array}{rcl} y_p(x) & = & (Ax+B)e^{-2x} \quad ✗ \\ y_p(x) & = & x(Ax+B)e^{-2x} \quad ✗ \\ & = & Ax^2e^{-2x} + \underbrace{Bxe^{-2x}} \quad ✗ \end{array}$$

$$\longrightarrow y_p(x) = x^2(Ax+B)e^{-2x} \quad ✓$$

Derivamos

$$\begin{array}{rcl} y_p(x) & = & Ax^3e^{-2x} + Bx^2e^{-2x} = e^{-2x}(Ax^3 + Bx^2) \\ y_p'(x) & = & 3Ax^2e^{-2x} - 2Ax^3e^{-2x} + 2Bxe^{-2x} - 2Bx^2e^{-2x} \\ & = & e^{-2x}\big[-2Ax^3 + (3A-2B)x^2 + 2Bx\big]. \\ y_p''(x) & = & 6Axe^{-2x} - 6Ax^2e^{-2x} - 6Ax^2 + 4Ax^3e^{-2x} + 2Be^{-2x} \\ & & -4Bxe^{-2x} - 4Bxe^{-2x} + 4Bx^2e^{-2x}. \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
y_p'' &= 4Ax^3e^{-2x} - 12Ax^2e^{-2x} + 4Bx^2e^{-2x} + 6Axe^{-2x} - 8Bxe^{-2x} + 2Be^{-2x} \\
&= e^{-2x}\big[4Ax^3 + (-12A + 4B)x^2 + (6A - 8B)x + 2B\big]
\end{aligned}
$$

Sustituimos y_p, $y_p{}'$, $y_p{}''$ en la E.D.N.H. $y'' + 4y' + 4y = 0.$

$$
\begin{aligned}
\big[4Ax^3 + (-12A + 4B)x^2 + (6A - 8B)x + 2B\big]e^{-2x} & \\
+4\big[-2Ax^3 + (3A - 2B)x^2 + 2Bx\big]e^{-2x} & \\
+4(Ax^3 + Bx^2)e^{-2x} &= (3 + x)e^{-2x} \\
\big[(0)x^3 + (0)x^2 + (6A + 0B)x + 2B\big]e^{-2x} &= (x + 3)e^{-2x} \\
6A = 1 \quad &, \quad A = 1/6 \\
2B = 3 \quad &, \quad B = 3/2.
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \underline{y_p(x) = x^2\big(1/6x + 3/2\big)e^{-2x}}
$$

Por lo tanto, la solución general de la E.D.N.H. es:

$$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + x^2(1/6x + 3/2)e^{-2x}.$$

Determinemos c_1 y c_2 tales que $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$.

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)e^{-2x} \\
y'(x) &= -2c_1e^{-2x} + c_2e^{-2x} - 2c_2xe^{-2x} + (1/2x^2 + 3x)e^{-2x} \\
&\quad -2\big(1/6x^3 + 3/2x^2\big)e^{-2x}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
y(0) &= c_1e^{-2(0)} + \cancelto{0}{c_2(0)e^{-2(0)}} + \cancelto{0}{\big(1/6(0)^3 + 3/2(0)^2\big)}e^{-2(0)} = 2 \\
&\therefore \quad c_1 = 2. \\
y'(0) &= -2c_1e^{-2(0)} + c_2e^{-2(0)} - 2c_2(0)e^{-2(0)} + (1/2(0)^2 + 3(0))e^{-2(0)} \\
&\quad -2(1/6(0)^3 + 3/2(0)^2)e^{-2(0)} = 5 \\
\iff y'(0) &= -2c_1 + c_2 = 5 \\
\iff c_2 &= 5 + 2c_1 = 5 + 2(2) = 9 \\
&\therefore \quad c_2 = 9.
\end{aligned}$$

$\therefore$ La solución del P.V.I. es:

$$y(x) = 2e^{-2x} + 9xe^{-2x} + x^2(1/6x + 3/2)e^{-2x}$$

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_k$ soluciones particulares de una E.D.N.H con $g_1, g_2, \ldots, g_k$, respectivamente. Esto es, y_i representa la solución particular de la E.D.
$a_n(x)y^(n) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0 y = g_i(x)$, entonces

$$\longrightarrow y(x) = y_1 + y_2 + \cdots + y_k(x),$$

es solución paicular de la E.D.N.H.

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0 y = g_1(x) + \cdots g_k(x).$$

Example

Obtener la solución general de la E.D.N.H siguiente:

$$y''' - 4y' = 2x + 5 - e^{-2x}.$$

Solución. La E.D. Homogénea asociada es:

$$y''' + 0y'' - 4y' + 0y = 0.$$

La ecuación característica es:

$$\begin{aligned} m^3 - 4m &= 0 \\ m(m^2 - 4) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad m_1 = 0\,,\ m_2 = 2 \quad , \quad m_3 = -2.$$

$$\begin{aligned} y_c(x) &= c_1 e^0 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} \\ &= c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}. \end{aligned}$$

Para obtener $y_{p_1}(x)$:

$$\begin{aligned} y_{p_1}(x) &= Ax+B \quad ✗ \\ y_{p_1}(x) &= Ax^2+Bx \quad ✓ \\ y'_{p_1}(x) &= 2Ax+B \\ y''_{p_1}(x) &= 2A \\ y'''_{p_1}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Sistutyendo en la E.D.

$$\begin{aligned} (0)-4(2Ax+B) &= 2x+5 \\ -8Ax-4B &= 2x+5 \\ -8A=2 & \qquad -4B=5 \\ A=-2/8=-1/4 & \qquad B=-5/4. \end{aligned}$$

Para obtener $y_{p_2}(x)$

$$
\begin{aligned}
y_{p_2}(x) &= Ae^{-2x} \quad ✗\\
y_{p_2}(x) &= Axe^{-2x} \quad ✓\\
y'_{p_2}(x) &= -2Axe^{-2x} + Ae^{-2x}\\
y''_{p_2}(x) &= 4Axe^{-2x} - 2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} = 4Axe^{-2x} - 4Ae^{-2x}\\
y'''_{p_2}(x) &= -8Axe^{-2x} + 4Ae^{-2x} + 8Ae^{-2x} = -8Axe^{-2x} + 12Ae^{-2x}.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo

$$
\begin{aligned}
-8Axe^{-2x} + 12AAe^{-2x} - 4\big(-2Axe^{-2x} + Ae^{-2x}\big) &= -e^{-2x}\\
-8Axe^{-2x} + 12Ae^{-2x} + 8Axe^{-2x} - 4Ae^{-2x} &= -e^{-2x}\\
8Ae^{-2x} &= -e^{-2x}\\
8A &= -1\\
A &= -1/8.
\end{aligned}
$$

$$\therefore \qquad y_{p_2} = -1/8xe^{-2x}.$$

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\ &= x(-1/4x - 5/4) + (-1/8xe^{-2x}) \\ y_p(x) &= -1/4x^2 - 5/4x - 1/8xe^{-2x}. \end{aligned}$$

$\therefore$ La solución general de la E.D.N.H. es:

$$y(x) = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} - 1/4x^2 \underline{-5/4x - 1/8xe^{-2x}}$$

c_1, c_2, c_3 constantes arbitrarias.

Método de Variación de Parámetros.

Consideremos la E.D.L.N.H. de segundo orden en su forma estándar,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = G(x)$$

Luego, el método de variación de parámetros

$$y_p(x) = \mu_1(x)y_1(x) + \mu_2(x)y_2(x)$$

donde $\{y_1, y_2\}$ conforman un conjunto fundamental de soluciones de la E.D. Homogńea asociada.

$$y(x) = c_1y_1 + c_2y_2.$$

Así pues, sustituyendo y_p, yp', yp'', en la E.D. y después de factorizar de manera conveniente, se encuentra que $\mu_1(x)$ y $\mu_2(x)$ deben satisfacer las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1(x)\mu_1'(x) + y_2(x)\mu_2'(x) &= 0 \\ y_1'(x)\mu_1'(x) + y_2'(x)\mu_2'(x) &= G(x). \end{aligned}$$

Usamos la regla de Cramer para resolver este sistema.

$$\mu_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ G(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{-y_2(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)}$$

$$\mu_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & G(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{y_1(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)}$$

Luego, integramos con respecto a x,

$$\mu_1(x) = \int \frac{-y_2(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad y \quad \mu_2(x) = \int \frac{y_1(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

Por consiguiente,

$$y_p(x) = \left(\int \frac{-y_2(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx\right)y_1(x) + \left(\int \frac{y_1(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx\right)y_2(x).$$

Example

Considere la E.D. $y'' + y = \tan x$. Encuentre la solución general de la E.D.

Solución. La E.D. homogénea asociada es:

$$y'' + y = 0.$$

Luego, usamos la ecuación característica para resolverlo

$$m^2 + 1 = 0 \iff m^2 = -1 \iff m = \pm\sqrt{-1} = \pm i.$$

$$\alpha = Re(m_1) = 0 \quad \beta = Im(m_1) = 1.$$

Así pues, se tienen dos soluciones reales L.I.

$$y_1(x) = \cos x \qquad y_2(x) = \sin x.$$

Por lo tanto, la solución complementaria es:

$$\underline{y_c(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x}$$

Ahora, determinemos la solución particular $y_p(x)$ para la E.D.N.H. usando variación de parámetros.

$$y_p(x) = \mu_1(x) \underbrace{\cos x}_{y_1(x)} + \mu_2(x) \underbrace{\sin x}_{y_2(x)}.$$

donde:

$$\mu_1(x) = \int \frac{-y_2(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \qquad \mu_2(x) = \int \frac{y_1(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \mu_1(x) &= \int \frac{-(\sin x)\tan x}{1} dx = \int \frac{-\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} dx \\ &= -\int \frac{1}{\cos x} dx + \int \cos x dx = -\int \sec x dx + \int \cos x dx \\ &= -\ln\left|\sec x + \tan x\right| + \sin x \cancelto{0}{+C}. \\ \mu_2(x) &= \int \frac{\cos x \tan x}{1} dx = \int \cos x \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \sin x dx = \cos x. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y_p(x) = \left(-\ln\left|\sec x + \tan x\right| + \sin x\right) - \cos x \sin x.$

$$\iff \underline{y_p(x) = -\cos x \ln\left|\sec x + \tan x\right|}$$

Por consiguiente, la solución general de la E.D. es:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln\left|\sec x + \tan x\right|.$$

c_1, c_2, c_3 constantes arbitrarias.

Ejercicio.

Resuelve el P.V.I. $y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 6x)e^{2x}$, con $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Use el método de variación de parámetros para encontrar una solución particular de la E.D.N.H.

Solución. La E.D. homogénea asociada es:

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Resolvendo la ecuación característica:

$$m^2 - 4m + 4 = 0.$$

Por fórmula general:

$$m_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Así pues, se tienen dos soluciones reales L.I., y son:

$$y_1(x) = e^{2x} \qquad y_2(x) = xe^{2x}.$$

Por tanto, la solución complementaria es:

$$y_c(x) = c_1 e^{2x} + c_2 xe^{2x}.$$

Ahora, determinemos la solución particular $y_p(x)$ para la E.D.N.H., donde

$$\mu_1(x) = \int \frac{-y_2(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \qquad \mu_2(x) = \int \frac{y_1(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](x) &= \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} \\ &= 2xe^{4x} + e^{4x} - 2xe^{4x} = e^{4x} \neq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_1(x) &= \int \frac{-xe^{2x}(12x^2-6x)e^{2x}dx}{e^{4x}} = \int \frac{-x\cancel{e^{4x}}(12x^2-6x)dx}{\cancel{e^{4x}}} \\
&= \int (-12x^3+6x^2)dx = -12\left(\frac{x^4}{4}\right)+6\left(\frac{x^3}{3}\right) = -3x^4+2x^3. \\
\mu_2(x) &= \int \frac{e^{2x}(12x^2-6x)e^{2x}dx}{e^{4x}} = \int \frac{\cancel{e^{4x}}(12x^2-6x)dx}{\cancel{e^{4x}}} \\
&= \int (12x^2-6x)dx = 12\left(\frac{x^3}{3}\right)-6\left(\frac{x^2}{2}\right) = 4x^3-3x^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $y_p(x) = (-3x^4+2x^3)(e^{2x})+(4x^3-3x^2)(xe^{2x})$,

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= -3x^4e^{2x}+2x^3e^{2x}+4x^4e^{2x}-3x^2e^{2x} \\
\therefore \quad y_p(x) &= x^4e^{2x}-x^3e^{2x}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente la solución general de la E.D. es:

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + x^4e^{2x} - x^3e^{2x}$$

Para determinar c_1 y c_2,

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2c_1e^{2x} + c_2 2xe^{2x} + c_2e^{2x} + 2x^4e^{2x} \\ &\quad + 4x^3e^{2x} - 2x^3e^{2x} - 3x^2e^{2x}. \end{aligned}$$

Aplicando la C.I. $y(0) = 1$.

$$\begin{aligned} y(0) = \cancelto{c_1}{e^{2(0)}} + \cancelto{0}{c_1(0)e^{2(0)}} + \cancelto{0}{(0)^4e^{2(0)}} - \cancelto{0}{(0)^3e^{2(0)}} &= 1 \\ c_1 &= 1. \end{aligned}$$

Aplicando la C.I. $y'(0) = 1$, y sustituyendo $c_1 = 1$,

$$\begin{aligned} y'(0) &= \cancelto{2}{2e^{2(0)}} + c_2\cancelto{0}{2(0)e^{2(0)}} + \cancelto{c_2}{c_2e^{2(0)}} + \cancelto{0}{2(0)^4e^{2(0)}} \\ &\quad + \cancelto{0}{4(0)^3e^{2(0)}} - \cancelto{0}{2(0)^3e^{2(0)}} - \cancelto{0}{3(0)^2e^{2(0)}} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 + c_2 &= 1 \\ c_2 &= -1. \end{aligned}$$

$\therefore$ La solución del P.V.I. es:

$$\underline{y(x) = e^{2x} - xe^{2x} + x^4 e^{2x} - x^3 e^{2x}}$$

Example

Discuta, como se pueden utilizar los métodos de coeficientes indeterminados y el de variación de parámetros para resolver la E.D.

$$y'' - 2y' + y = 4x^2 - 3 + x^{-1}e^x.$$

Solución. La homogénea asociada es:

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

La ecuación característica es:

$$\begin{aligned} m^2 - 2m + 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (m-1)^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad m_1 = 1 = m_2. \end{aligned}$$

$$y_1(x) = e^x \qquad , \qquad y_2(x) = xe^x.$$

$$\Longrightarrow \quad y_c(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Ahora,

$$y_{p_2}(x) = \mu_1 e^x + \mu_2 x e^x.$$

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x + e^x \end{vmatrix} = xe^{2x} + e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x} \neq 0.$$

$$\begin{aligned}
\mu_1(x) &= \int \frac{-y_2(x)G(x)dx}{W[y_1, y_2](x)} = \int \frac{(-xe^x)(x^{-1}e^x)dx}{e^{2x}} = \int \frac{-e^{2x}}{2x}dx \\
&= -\int 1dx = -x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2(x) &= \int \frac{y_1(x)G(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx = \int \frac{e^x(x^{-1}e^x)dx}{e^{2x}} = \int \frac{x^{-1}e^{2x}}{e^{2x}}dx \\
&= \int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|.
\end{aligned}$$

Ahora:

$$g_1(x) = 4x^2 - 3 \longrightarrow y_p(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2Ax + B \\ y_p''(x) &= 2A \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} 2A - 2(2Ax + B) + Ax^2 + Bx + C &= 4x^2 - 3 \\ 2A - 4Ax - 2B + Ax^2 + Bx + C &= 4x^2 - 3 \\ Ax^2 + (-4A + B)x + (2A - 2B + C) &= 4x^2 + 0x - 3. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \; A = 4, -4A + B = 0, \; \Longrightarrow \; -4(4) + B = 0 \; \Longrightarrow \; B = \; \Longrightarrow \; B = 16.$$

$$\begin{aligned} 2A - 2B + C = -3 \quad \Longrightarrow \quad 2(4) - 2(16) + C &= -3 \\ 8 - 32 + C &= -3 \\ C &= 21. \end{aligned}$$

Como $y_{p_1}(x) = 4x^2 + 16x + 21$, y $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$.

$$y_p(x) = 4x^2 + 16x + 21 + (-xe^x + xe^x \ln|x|)$$

Por consiguiente, la solución general de la E.D. es:

$$\underline{y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + 4x^2 + 16x + 21 - xe^x + xe^x \ln|x|}$$

Método de Variación de Parámetros para E.D. de Orden n.

El método de variación de parámetros se puede generalizar para E.D.L. de Orden n, de la forma

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = G(x).$$

Si:

$$y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x).$$

es la solución genral de la E.D.H asociada, entonces, se propone como solución particular

$$y_p(x) = \mu_1(x)y_1(x) + \cdots \mu_n y_n(x),$$

donde $\mu_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, están determinadas por el siguiente sistema de ecuaciones:e

$$
\begin{aligned}
y_1\mu_1' + y_2\mu_2' \quad & + \cdots + y_n\mu_n' &= 0\\
y_1'\mu_1' + y_2'\mu_2' \quad & + \cdots + y_n'\mu_n' &= 0\\
& &\vdots\\
y_1^{(n-1)}\mu_1' + y_2^{(n-1)}\mu_2' \quad & + \cdots + y_n^{(n-1)}\mu_n' &= 0
\end{aligned}
$$

La solución del sistema se obtiene con regla de Cramer

$$\mu_i' = \frac{W_i}{W}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$W =$ Wronskiano de $y_1, y_2, \ldots, y_n$,

$W_i =$ es el determinante de la matriz de coeficientes por el vector del lado derecho del sistema.

Luego, μ_i se obtiene integrando con respecto a x.

Example

Resueve por variación de parámetros la siguiente E.D.N.H
$y''' + 4y' = \sec 2x$.

Solución. La ecuación diferencial homogénea es:

$$y''' + 4y' = 0.$$

Usamos la ecuación característica correspondiente:

$$\begin{aligned} m^3 + 4m = 0 \iff m(m^2+4) = 0 \quad \iff \quad & m_1 = 0 \text{ o } m^2 + 4 = 0 \\ & m^2 = -4 \\ & m_{2,3} = \pm 2i. \end{aligned}$$

$\alpha = 0$, $\beta = 2$. Luego, se tienen tres soluciones L.I.

$$y_1(x) = e^{0x} = 1 \qquad y_2(x) = \cos 2x \qquad y_3(x) = \sin 2x.$$

Por consiguiente, la solución complementaria es:

$$y_c(x) = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x \qquad c_1, c_2, c_3 \text{ constantes arbitrarias.}$$

Ahora, biem, el método de variación de parámetros propone:

$$y_p(x) = \mu_1(x) + \mu_2(x) \cos 2x + \mu_3(x) \sin 2x.$$

μ_i satisfacen el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} {\mu_1}' + \cos 2x {\mu_2}' + \sin 2x {\mu_3}' &= 0 \\ 0\mu_1' - 2 \sin 2x {\mu_2}' + 2 \cos 2x {\mu_3}' &= 0 \\ 0{\mu_1}' - 4 \cos 2x \mu_2' - 4 \sin 2x \mu_3' &= 0. \end{aligned}$$

Usamos la regla de Cramer:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & \sin 2x \\ 0 & -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \\ 0 & -4 \cos 2x & -4 \sin 2x \end{vmatrix} = 1(-1)^2 \left[8 \sin^2 2x + 8 \cos^2 2x \right] = 8.$$

$$\begin{aligned}
{\mu_1}' = \frac{W_1}{W} &= \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & \cos 2x & \sin 2x \\ 0 & -2\sin 2x & 2\cos 2x \\ \sec 2x & -4\cos 2x & -4\sin 2x \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{8}\sec 2x(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{8}\sec 2x(2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x) \\
&= \frac{1}{4}\sec 2x.
\end{aligned}$$

$$\mu_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin 2x \\ 0 & 0 & 2\cos 2x \\ 0 & \sec 2x & -3\sin 2x \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
{\mu_3}' &= \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & 0 \\ 0 & .2\sin 2x & 0 \\ 0 & -4\cos 2x & \sec x \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(-2\sin 2x\sec 2x) \\
&= -\frac{1}{4}\tan 2x.
\end{aligned}$$

Integramos con respecto a x.

$$\begin{aligned}
\mu_1(x) &= \int \frac{1}{4}\sec 2x dx = \frac{1}{2}\ln\left|\sec 2x + \tan 2x\right| \\
\mu_2(x) &= \int -\frac{1}{4} dx = -\frac{1}{4}x \\
\mu_3(x) &= \int -\frac{1}{4}\tan 2x dx = \frac{1}{4\cdot 2}\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx = \frac{1}{8}\ln\left|\cos 2x\right| \\
&= -\frac{1}{8}\ln\left|\cos 2x\right|^{-1} = -\frac{1}{8}\ln(\sec 2x).
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad y_p(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\sec 2x + \tan 2x\right| - \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\ln\left|\sec^2 2x\right|\sin 2x.$$

Por consiguiente, la solución general es:

$$y(x) = c_1 + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x + y_p(x).$$