7. Ecuaciones de Variables Searables.

Sandra Elizabeth Delgadillo Alemán.

Universidad Autónoma de Aguascalientes.

February 9, 2022

7. Ecuaciones de Variables Searables.

Definition

Se dice que una ecuación diferencial es **de variables separables** si tiene la siguiente forma.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = g(x)\cdot h(y).$$

Example

Identifique si las siguientes ecuaciones diferenciales son de variables separables.

1. $\dfrac{dy}{dx} = x^2y^2e^{3x+4y}$.

   Solución. $\dfrac{dy}{dx} = x^2y^2e^{3x+4y} = x^2y^2e^{3x}e^{4y} = \underbrace{(x^2e^{3x})}_{g(x)}\underbrace{(y^2e^{4y})}_{h(y)}$.

   E.D. de variables separables.

2. $\dot{x} = 1 + xy$. **Solución.** No es E.D. de variables separables.
3. $y' = y + \sin x$. **Solución.** No es E.D. de variables separables.
4. $dye^x y + (x + xy^2)dx = 0$.
   Solución.

$$\begin{aligned} -dye^x y &= (x + xy^2)dx \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x(1+y^2)}{e^x y} \\ \frac{dy}{dx} &= \underbrace{\left(\frac{-x}{e^x}\right)}_{g(x)}\underbrace{\left(\frac{1+y^2}{y}\right)}_{h(y)}. \end{aligned}$$

Si $y = y(x)$ es equivalente:
$(x + xy^2) + e^x y\dfrac{dy}{dx} = 0.$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{-(x + xy^2)}{e^x y} \\ &= \frac{-x(1+y^2)}{e^x y} \\ &= \left(\frac{-x}{e^x}\right)\left(\frac{1+y^2}{y}\right) \end{aligned}$$

$\therefore$ Es una E.D. de variables separables.

La E.D. de variables separables más sencilla que existe es:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot 1} \qquad i.e. \ \frac{dy}{dx} = g(x)$$

Para obtener la función $y = y(x)$ se debe integrar de ambos lados:

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int g(x) dx.$$

Supongamos que existe la antiderivada de $g(x)$, es decir, $G(x)$, tal que $G'(x) = g(x)$.
Luego sustituyendo $g(x)$ por su antiderivada $G'(x)$, se tiene

$$y(x) = \int G'(x) dx = \int \frac{d}{dx} G(x) dx = G(x) + c.$$

$$\iff y(x) = G(x) + c. \qquad \text{Solución gral. explícita.}$$

Example

Considere la E.D. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + e^{2x}$ y resuélvala.

Solución. Integramos de ambos lados:

$$\int \frac{dy}{dx}dx = \int (1 + e^{2x})dx = \int dx + \int e^{2x}dx.$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{y(x) = x + \frac{1}{2}e^{2x} + c} \quad \text{Sol. gral. explícita de la E.D.}$$

Consideremos nuevamente la E.D. de variables separables para ilustrar el método de solución

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \quad , \qquad h(y) \neq 0.$$

dividimos $h(y)$ a ambos lados de la E.D. $\dfrac{1}{h(y)}\dfrac{dy}{dx} = g(x)$.

Hagamos $p(y) = \dfrac{1}{h(y)}$ en la E.D. anterior,

$$p(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(x).$$

integramos de ambos lados con respecto a x.

$$\int p(y)\frac{dy}{dx}dx = \int g(x)dx.$$

Supongamos que existen las antiderivadas de $p(y)$ y $g(x)$. Es decir, que existen $P(y)$ tt $G(x)$ tales que

$$P'(y) = p(y) \quad G'(x) = g(x).$$

Luego, sustituyendo se tiene:

$$\int P'(y)dy = \int P'(y)\frac{dy}{dx}dx = \int g'(x)dx.$$

Observemos que $\dfrac{d}{dx}P(y) = P'(y)\dfrac{dy}{dx}$.

Sustituimos en la ecuación antrerior,

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx}(P(y))dx &= \int \frac{d}{dx}(G(x))dx \\ \Longleftrightarrow P(y) + c_1 &= G(x) + c_2 \\ \Longleftrightarrow P(y) - G(x) &= c_2 - c_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(y) - G(x) = c}$$

Solución General Implícita.

Ahora, bien, consideremos la E.D. $\dfrac{dy}{dx} = g(t(h(t)))$ sujeta a una C.I. dada por $y(t_0) = y_0$, $t_0 \in I$.

Este P.V.I. se puede resolver de dos maneras.

1. Determinar la solución general de la E.D. de variables separables y luego encontrar el valor de la cte. arbitraria C de tal forma que satisfaga la condición inicial $y(t_0) = y_0$.
2. Otra manera de determinar la solución es integrando de t_0 a t la ecuación estrella

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}(P(y(s)))\,ds = \int_{t_0}^{t} G(s)ds$$

$$\iff P(y(s))\Big|_{t_0}^{t} = G(s)\Big|_{t_0}^{t}$$

$$\iff P(y(t)) - P(y(t_0)) = G(t) - G(t_0)$$

$$\iff \underline{P(y(t)) - G(t) = P(y(t_0)) - G(t_0)}$$

Así, $P(y(t) - G(t) = P(y(t_0))) - G(t_0)$ es la sol. particular implícita de la E.D.

Example

Determine la solución de la E.D. $(t+1)e^y \cdot \dfrac{dy}{dx} - (t-1) = 0.$ que satisface la C.I. $y(1) = 2.$

Solución. La E.D. en su forma normal es:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = \frac{t-1}{e^y(t+1)} &= \underbrace{\left(\frac{t-1}{t+1}\right)}_{g(t)} \underbrace{e^{-y}}_{h(y)} \\ \Longleftrightarrow \quad e^y \frac{dy}{dx} &= \frac{t-1}{t+1} \end{aligned}$$

Integramos de ambos lados con respecto a t,

$$\begin{aligned} \int e^y dy = \int e^y \frac{dy}{dt} dt &= \int \frac{t-1}{t+1} dt \\ e^y &= \int \frac{t-1}{t+1} dt \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{t-1}{t+1}dt &= \int \frac{t-1+1-1}{t-1}dt \\
&= \int \frac{(t+1)-2}{t+1}dt \\
&= \int \left[1-\frac{2}{t+1}\right]dt \\
&= t-2\ln(t+1)+c
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ec. (1) es equivalente a:

$$\underline{e^y = t-\ln(t+1)^2+c} \ , \qquad y \in (-1,\infty)$$

Solución gral. implícita de la E.D.

Despejamos y aplicando ln de ambos lados

$$\begin{aligned}
\ln e^y &= \ln(t-\ln(t+1)^2+c) \\
y(t) &= \ln(t-\ln(t+1)^2+c), \quad \text{Sol. gral. explícita de la E.D.}
\end{aligned}$$

Ahora, determinemos el valor de c de tal forma que $y = 2$, en $t = 1$.

Sustituimos $t = 1$, y $y = 2$ en la sol. gral. implícita,

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 - \ln 4 + c \\ c &= e^2 + \ln 4 - 1 \approx 7.77 \\ \therefore \quad y(t) &= \ln(t - \ln(t+1)^2 + e^2 - 1 + \ln 4) \quad \text{Sol. del P.V.I} \end{aligned}$$

Forma alternativa

Otra manera de resolver el P.V.I.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{t-1}{(t+1)e^y} \\ \Longleftrightarrow \quad e^y \frac{dy}{dt} &= \frac{t-1}{t+1} \end{aligned}$$

Integramos de 1 a t.

$$\begin{aligned}
\int_2^y e^r dr \int_1^t e^y \frac{dy}{ds} ds &= \int_1^t \frac{s-1}{s+1} ds \\
\Longleftrightarrow \quad e^r\Big|_2^y &= \int_1^t \left(1 - \frac{2}{s+1}\right) ds \\
\Longleftrightarrow \quad e^r\Big|_2^y &= \int_1^t ds - 2\int_1^t \frac{ds}{s+1} \\
\Longleftrightarrow \quad e^y - e^2 &= s - 2\ln\left|s+1\right|\Big|_1^t \\
\Longleftrightarrow \quad e^y &= t - 2\ln\left|t+1\right| - 1 + \ln 4 + e^2
\end{aligned}$$

Aplicamos ln de ambos lados,

$$\begin{aligned}
\ln(e^y) &= \ln\left(t - 2\ln\left|t+1\right| - 1 + \ln 4 + c^2\right) \\
\Longleftrightarrow y &= \ln\left(t + \ln\left(\frac{4}{(t+1)^2}\right) - 1 + e^2\right) \quad \text{sol. de P.V.I}
\end{aligned}$$

Example

Resuelve la E.D. $(x+xy^2)dx+e^x y dy=0$.

Solución. La E.D. es equivalente a la siguiente

$$\begin{aligned} x(1+y^2)dx+e^x y dy &= 0 \\ \Longleftrightarrow \quad e^x y dy &= -x(1+y^2)dx \\ \Longleftrightarrow \quad \frac{y}{1+y^2}dy &= -\frac{x}{e^x}dx \end{aligned}$$

Integramos de ambos lados,

$$\begin{aligned} \int \frac{y}{1+y^2}dy &= \int -\frac{x}{e^x}dx \\ \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| &= xe^{-x}-\int e^{-x}dx \\ \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| &= xe^{-x}+e^{-x}+c, \end{aligned}$$

sol. gral. implícita de la E.D.

Despejamos y, y multiplicamos por 2,

$$\begin{aligned} \ln(1+y^2) &= 2xe^{-x} + 2e^{-x} + c_1 \\ e^{\ln(1+y^2)} &= e^{2xe^{-x}+2e^{-x}+c_1} \\ 1+y^2 &= e^{2xe^{-x}} e^{2e^{-x}} e^{c_1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sol. explícita de la E.D. es

$$\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{c_2 e^{2xe^{-x}} e^{2e^{-x}} - 1}, \quad c_2 > 0 \\ y(x) &= \pm\sqrt{c_2 e^{2e^{-x}(x+1)} - 1}, \quad c_2 > 0 \end{aligned}$$

Ejercicio.

Resuelve la siguiente E.D. y P.V.I.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - x + y^2 - xy^2$.
2. $(e^{2y} - y)\cos x dy - e^y \sin 2x dx = 0$.

1. **Solución.** La E.D. es equivalente a la siguiente:

$$\frac{dy}{(1+y^2)} = (1-x)dx$$

Integrando ambos lados

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{1+y^2} &= \int (1-x) \\ \arctan y &= x - \frac{x^2}{2} + c \ , \quad \text{solución gral. implícita} \end{aligned}$$

Despejando y

$$y = \tan\left(x - \frac{x^2}{2} + c\right) \ , \quad \text{solución gral. implícita}$$

2 **Solución.** La E.D. es equivalente a la siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{2y}-y}{e^y}dy &= \frac{2\sin x\cos x dx}{\cos x} \\
\left(e^y-\frac{y}{e^y}\right)dy &= 2\sin x dx
\end{aligned}$$

Integrando en ambos lados

$$\begin{aligned}
\int\left(e^y-\frac{y}{e^y}\right)dy &= 2\int \sin x dx \\
\Longleftrightarrow\ e^y+ye^{-y}+e^{-y} &= -2\cos x+c\ ,
\end{aligned}$$

Es la solución gral. implícita de la E.D.
Determinemos el valor de c que cumpla con el P.V.I.
Sustituimos $y=0$, y $x=0$

$$\begin{aligned}
e^0+0+e^0 &= -2(1)+c \\
c &= 4
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad e^y + ye^{-y} + e^{-y} = -2\cos x + 4.$$

es la solución particular implícita que cumple con la condición inicial dada.