E.D. Lineales Homgéneas con Coeficientes Consantes.

Sandra Elizabeth Delgadillo Alemán.

Universidad Autónoma de Aguascalientes.

May 25, 2022

E.D. Lineales Homgéneas con Coeficientes Constantes.

Recordemos que una E.D. lineal homogénea de 1*er* orden con coeficientes constantes está dada por

$$\begin{aligned} a_1 y' + a_0 y &= 0 \ , \ a_1 \neq 0 \\ \iff y' + \frac{a_0}{a_1} y &= \frac{0}{a_1} = 0 \\ \iff \underbrace{\boxed{y' + \alpha y = 0}}_{\text{Forma Estándar}} \ . \qquad & \alpha = a_0/a_1 \end{aligned}$$

Resolvemos la E.D. usando un factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \alpha dx} = e^{\alpha x}.$$

Multipliquemos la E.D. por $\mu(x)$.

$$\begin{aligned} e^{\alpha x}y' + e^{\alpha x}y &= e^{\alpha x}\cdot 0 = 0 \\ \iff \frac{d}{dx}\left(e^{\alpha x}y\right) &= 0 \end{aligned}$$

Integramos

$$\int \frac{d}{dx}\left(e^{\alpha x}y\right) = \int 0dx$$

$$\iff e^{\alpha x}y = c \iff y(x) = ce^{-\alpha x}.$$

Por lo anterior, es natural tratar de determinar si existen soluciones exponenciales para las E.D.L.H. de 2^{do} orden con coeficientes constates de la forma

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Veamos si ésta E.D. tiene soluciones exponenciales.

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{mx} \\ y'(x) &= me^{mx} \\ y''(x) &= m^2 e^{mx}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la E.D.

$$\begin{aligned} a(m^2 e^{mx}) + b(me^{mx}) + c(e^{mx}) &= 0 \\ am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} &= 0 \\ e^{mx}(am^2 + bm + c) &= 0. \end{aligned}$$

Como $e^{mx} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \implies \underbrace{\boxed{am^2 + bm + c = 0}}_{\text{Ecuación Característica}}$

Luego, $y(x) = e^{mx}$ es solución de la E.D. siempre y cuando m sea una raíz de la ecuación característica.

La ecuación característica se puede resolver factorizando, o por fórmula general. En este caso las raíces están dadas por

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad m_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A $b^2 - 4ac$ se le conoce como el **discriminante**. Se tienen 3 casos dependiendo de lo siguiente.

1. $b^2 - 4ac > 0$, dos raíces reales distintas $m_1 \neq m_2$.
2. $b^2 - 4ac = 0$, dos raíces reales e iguales, $m_1 = m_2 = -b/2a$.
3. $b^2 - 4ac < 0$, raíces imaginarias conjugadas.

$$\begin{aligned} m_1 &= d + ie \\ m_2 &= d - ie \end{aligned} \qquad d, e \in \mathbb{R}.$$

Caso 1. Raíces reales y distintas, $m_1 \neq m_2$.

En este caso, se tienen dos soluciones de la E.D. $y_1(x) = e^{m_1 x}$, y $y_2(x) = e^{m_2 x}$. Veamos que y_1, y_2 son L.I.

$$
\begin{aligned}
W[y_1, y_2](x) &= \begin{vmatrix} e^{m_2 x} & e^{m_2 x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} \end{vmatrix} \\
&= e^{m_1 x} m_2 e^{m_2 x} - m_1 e^{m_1 x} e^{m_2 x} \\
&= m_2 e^{m_1 x + m_2 x} - m_1 e^{m_1 x + m_2 x} \\
&= e^{(m_1 + m_2)x}(m_2 - m_1) \neq 0.
\end{aligned}
$$

ya que $e^{(m_1+m_2)x} > 0$, $\forall x$, y $m_1 \neq m_2$.

$$\therefore \quad y_1 \text{ y } y_2 \text{ son L.I.}$$

Luego, y_1 y y_2 conforman un conjunto fundamental de soluciones de la E.D.

Por lo tanto, la solución general está dada por

$$\underbrace{y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}}_{} \qquad c_1, c_1 \text{ cts. arb.}$$

Caso 2. Raíces reales e iguales $m_1 = m_2 = -\frac{b}{2a}$.

En este caso, se tiene una solución de la E.D. $y_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}$.
Usamos reducción de orden para obtener una segunda solución L.I. a $y_1(x)$.

$$y_2(x) = \mu(x) y_1(x) \text{ donde } \mu(x) = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx.$$

$$ay'' + by' + cy = 0 \implies y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0,$$

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \int \frac{e^{-\int b/a\,dx}}{\left(e^{-\frac{b}{2a}x}\right)^2}dx = \int \frac{e^{-b/a\,x}}{e^{-b/a\,x}}dx = \int dx \\ \therefore \quad \mu(x) &= x. \end{aligned}$$

Entonces:

$$y_2(x) = xe^{-\frac{b}{2a}x}.$$

Verifiquemos que $y_2(x)$ también es solución:

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= -\frac{b}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x} + e^{-\frac{b}{2a}x}. \\ y_2''(x) &= \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 xe^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x} = \frac{b^2}{4a^2}xe^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{a}e^{-\frac{b}{2a}x}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la E.D.

$$
\begin{aligned}
a\left(\frac{b^2}{4a^2}xe^{-\frac{b}{2a}x}-\frac{b}{a}e^{-\frac{b}{2a}x}\right)+b\left(-\frac{b}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x}+e^{-\frac{b}{2a}x}\right)+c\left(xe^{-\frac{b}{2a}x}\right) &= 0\\
\frac{b^2}{4a}xe^{-\frac{b}{2a}x}-be^{-\frac{b}{2a}x}-\frac{b^2}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x}+be^{-\frac{b}{2a}x}+cxe^{-\frac{b}{2a}x} &= 0\\
\iff -\frac{b^2}{4a}xe^{-\frac{b}{2a}x}+cxe^{-\frac{b}{2a}x} &= 0\\
\iff \forall x,\qquad xe^{-\frac{b}{2a}x}\left(-\frac{b^2}{4a}+c\right) &= 0.
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{b^2}{4a}+c=0 \quad\iff\quad b^2-4ac=0.
$$

$$
\therefore \qquad y_2 \text{ es solución de la E.D.}
$$

Ahora, vamos que son L.I.

$$
\begin{aligned}
W[y_1,y_2](x) &= \begin{vmatrix} e^{-\frac{b}{2a}x} & xe^{-\frac{b}{2a}x}\\ \frac{b}{2a}xe^{-b/a} & -\frac{b}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x}+e^{-\frac{b}{2a}x}\end{vmatrix}\\
&= -\frac{b}{2a}xe^{-b/a}+e^{-b/a\,x}+\frac{b}{2a}xe^{-b/a\,x}\\
&= e^{-b/a\,x}\neq 0, \qquad \forall x.
\end{aligned}
$$

Así pues, y_1, y_2 conforman un c.f.s y la solución general de la E.D. está dada por

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{b}{2a}x} + c_2 x e^{-\frac{b}{2a}}.$$

Caso 3. Raíces Imaginarias $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha + i\beta$.

En este caso, se tienen soluciones complejas $y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}$, $y_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x}$.

Observemos lo siguiente

$$y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}.$$

Usemos la fórmula de Euler,

$$\underline{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= e^{\alpha x} \cdot \left(\cos \beta x + i \sin \beta x \right) \\
y_1(x) &= \underbrace{e^{\alpha x} \cos \beta x}_{Re(y_1(x))} + i \underbrace{e^{\alpha x} \sin \beta x}_{Im(y_1(x))} .
\end{aligned}
$$

De manera análoga, se obtiene que:

$$
y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x.
$$

Ahora, si consideramos la suma de $y_1(x)$ y $y_2(x)$ y multiplicamos por $1/2$ obtenemos que

$$
\tilde{y}_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{es solución de la E.D.}
$$

Ahora, si restamos a y_2 de y_1 y lo multiplicamos por $-1/2$ se obtiene otra solución:

$$\tilde{y_2}(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Veamos que $\tilde{y_1}, \tilde{y_2}$ sol L.I.

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](x) &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ -e^{\alpha x} \sin \beta x & e^{\alpha x} \cos \beta x \end{vmatrix} \\ &= e^{2\alpha x}(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= e^{2\alpha x} \neq 0, \quad \forall x. \end{aligned}$$

Es fácil verificar que $\tilde{y_1}$, $\tilde{y_2}$ son L.I. usando el wronskiano.

$$\tilde{y_1} = e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ y } \tilde{y_2}(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Luego, $\tilde{y_1}$ y $\tilde{y_2}$ conforman un c.f.s para la E.D. Por consiguiente, la solución general está dada por:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

$$\alpha = Re(m) \ , \ \beta = Im(m) \quad m = \alpha + i\beta.$$

Example

Determine la solución general de las siguientes E.D.L.H. con coeficientes constantes de 2^{do} orden.

1. $y'' - 10y' + 25y = 0.$
2. $2y'' - 3y' + 4y = 0.$
3. $y'' + 4y' - 2y = 0.$

Solución.

1. Supongamos que $y(x) = e^{mx}$ es la solución de la E.D.

$$\begin{aligned} (m^2 e^{mx}) - 10(me^{mx}) + 25(e^{mx}) &= 0 \\ \iff m^2 e^{mx} - 10me^{mx} + 25e^{mx} &= 0 \\ \iff e^{mx}(m^2 - 10m + 25) &= 0 \qquad e^{mx} > 0 \ , \ \forall x \\ \iff \underbrace{m^2 - 10m + 25 = 0}_{\text{Ec. Característica}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff (m-5)^2 &= 0 \\ m-5 &= 0 \\ m &= 5, \text{ de multiplicidad } 2. \end{aligned}$$

O bien, $m_1 = 5 = m_2$.

Luego se tiene $y_1(x) = e^{5x}$ y $y_2(x) = xe^{5x}$, que son L.I. Por lo tanto, la solución general de la E.D.

$$y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}, \qquad c_1, c_2, \text{ constantes arbitrarias.}$$

2. Supongamos que $y(x) = e^{mx}$.

$$\begin{aligned} y'(x) &= me^{mx} \\ y''(x) &= m^2 e^{mx}. \end{aligned}$$

Sustituyendo y, y', y'' en la E.D.

$$\begin{aligned} 2m^2e^{mx} - 3me^{mx} + 4e^{mx} &= 0 \\ \iff e^{mx}(2m^2 - 3m + 4) &= 0 \qquad e^{mx} > 0 \ , \ \forall x \\ \iff \underbrace{2m^2 - 3m + 4 = 0}_{\text{Ec. Característica}} \end{aligned}$$

$y(x) = e^{mx}$ es la solución de la E.D. siempre y cuando m es raíz de la ecuación característica. Usamos la fórmula general para encontrar las raíces.

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(4)}}{2(2)} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{-23}}{4} = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{-1}\sqrt{23}}{4} \end{aligned}$$

$m_{1,2} = \frac{3}{4} \pm i\frac{\sqrt{23}}{4}$, $\alpha = Re(m_1) = \frac{3}{4}$, $\beta = Im(m_1) = \frac{\sqrt{23}}{4}$.

Luego, se tienen dos soluciones reales de la forma

$$y_1(x) = e^{\frac{3}{4}x} \cos \frac{\sqrt{23}}{4}x \, , \; y_2(x) = e^{\frac{3}{4}x} \sin \frac{\sqrt{23}}{4}x. \quad L.I.$$

Por tanto $\{y_1, y_2\}$ conforman un c.f.s Por lo cual, la solución general de la E.D. es:

$$y(x) = c_1 e^{\frac{3}{4}x} \cos \frac{\sqrt{23}}{4}x + c_2 e^{\frac{3}{4}x} \sin \frac{\sqrt{23}}{4}x, \quad c_1, c_2 \text{ constantes arb.}$$

3. Suponiendo $y(x) = e^{mx}$.

$$\begin{aligned} y'(x) &= me^{mx} \\ y''(x) &= m^2 e^{mx} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la E.D.

$$\begin{aligned} m^2e^{mx} + 4(me^{mx}) - 2(e^{mx}) &= 0 \\ \iff e^{mx}(m^2 + 4m - 2) &= 0 \\ \iff \underbrace{m^2 + 4m - 2 = 0}_{\text{Ec. Característica}} \end{aligned}$$

Obtenemos raíces

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{-4}{2} \pm \frac{\sqrt{24}}{2} \end{aligned}$$

$$m_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6} \implies \begin{cases} m_1 = -2 + \sqrt{6}, \\ m_2 = -2 - \sqrt{6}. \end{cases}$$

Luego, se tienen dos soluciones

$$y_1(x) = e^{(-2+\sqrt{6})x}, \quad y_2(x) = e^{(-2-\sqrt{6})x}.$$

Luego, la solución general de la E.D. es:

$$y(x) = c_1 e^{(-2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2-\sqrt{6})x}, \quad c_1, c_2 \text{ constantes arbitrarias.}$$

Ejercicio.

Determine la solución del P.V.I. $4y'' + 4y' + 17y = 0$, con $y(0) = 1$, y $y'(0) = 2$. Además, esboce la gráfica de la curva solución.

Solución. Suponiendo que $y(x) = e^{mx}$,

$$\begin{aligned} y'(x) &= me^{mx} \\ y''(x) &= m^2 e^{mx}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la E.D.

$$\begin{aligned} 4(m^2 e^{mx}) + 4(me^{mx}) + 17(e^{mx}) &= 0 \\ \iff 4m^2 e^{mx} + 4me^{mx} + 17e^{mx} &= 0 \\ \iff e^{mx}(4m^2 + 4m + 17) &= 0 \\ \iff \underbrace{4m^2 + 4m + 17 = 0}_{\text{Ecuación característica}} \end{aligned}$$

Encontramos las raíces

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(4)(17)}}{2(4)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16-272}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{-256}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{-1}\sqrt{256}}{8} \\ m_{1,2} &= \frac{4}{8} \pm \frac{i\sqrt{256}}{8}\,,\ \alpha = Re(m_1) = -\frac{4}{8}\,,\ \beta = Im(m_1) = \frac{\sqrt{256}}{8} \end{aligned}$$

$$\alpha = Re(m_1) = -1/2 \quad \beta = Im(m_1) = 2.$$

Luego, se tienen dos soluciones reales de la forma

$$y_1(x) = e^{-1/2x} \cos 2x \quad y_2(x) = e^{-1/2x} \sin 2x. \quad L.I.$$

Por tanto $\{y_1, y_2\}$ conforman un c.f.s. por lo cual, la solución general de la E.D. es:

$$y(x) = c_1 e^{-1/2x}\cos 2x + \underline{c_2 e^{-1/2x}\sin 2x}$$

Para obtener la solución del P.V.I. aplicamos las C.I. dadas:

1. Aplicando $y(0) = 1$.

$$\begin{aligned} y(0) = \cancelto{c_1}{c_1 e^{-1/2(0)}\cos(0)} + \cancelto{0}{c_2 e^{-1/2(0)}\sin(0)} &= 1 \\ c_1 &= 1. \end{aligned}$$

2. Aplicando $y'(0) = 2$.

   Primero, obtenemos $y'(x)$.

$$\begin{aligned} y'(x) = \ & c_1\left\{e^{-1/2x}(-2\sin 2x) + \cos 2x\left(-\tfrac{1}{2}e^{-1/2x}\right)\right\} \\ & + c_2\left\{e^{-1/2x}(2\cos 2x) + \sin 2x\left(-\tfrac{1}{2}e^{-1/2x}\right)\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= -2c_1 e^{-\frac{1}{2}x}\sin 2x - \frac{1}{2}c_1 e^{-\frac{1}{2}x}\cos 2x \\
&\quad +2c_2 e^{-\frac{1}{2}x}\cos 2x - \frac{1}{2}c_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin 2x, \qquad \boxed{c_1 = 1} \\
y'(x) &= e^{-\frac{1}{2}x}\Big(-2\sin 2x - \tfrac{1}{2}\cos 2x + 2c_2\cos 2x - \tfrac{1}{2}c_2\sin 2x\Big)
\end{aligned}
$$

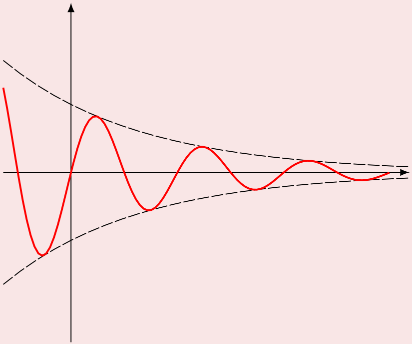
Aplciando $y'(0) = 2$

$$
\begin{aligned}
y'(0) &= \cancelto{1}{e^{-\frac{1}{2}(0)}}\Big(-\cancelto{0}{2\sin 2(0)} - \cancelto{-1/2}{\tfrac{1}{2}\cos 2(0)} \\
&\quad +\cancelto{2c_2}{2c_2\cos 2(0)} - \tfrac{1}{2}\cancelto{0}{c_2\sin 2(0)}\Big) \\
2 &= 2c_2 - 1/2 \\
2c_2 &= 5/2 \\
\underline{c_2} &\underline{= 5/4}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ La solución del P.V.I. es:

$$\underline{y(x) = e^{-1/2x}\cos 2x + \tfrac{5}{4}e^{-1/2x}\sin 2x}$$

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\underbrace{\left(\cos 2x + \frac{5}{4}\sin 2x\right)}_{A\sin(2x+\phi)}$$



E.D.L.H. de Orden Superior.

Para resolver una E.D. de orden n de la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ \ldots \ + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

donde a_i, $i = 1, \ \ldots, \ n$, son constantes reales y $a_n \neq 0$.

Se debe resolver una ecuación polinomial de la forma:

$$\underbrace{a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \ \ldots \ + a_1 m + a_0 = 0}_{\text{Ecuación Característica.}}$$

1. Si todas las raíces de la ecuación son reales y distintos, la solución de la ecuación será:

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ \cdots \ + c_n e^{m_n x},$$

donde $c_1, \ \ldots, \ c_n$ son cts. arb. y $m_1, \ \ldots, \ m_n$ son las raíces.

2. Cuando la raíz real m_1 tiene multiplicidad k, la solución general de la ecuación diferencial debe contenter la sig. combinación lineal

$$c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + c_3 x^2 e^{m_1 x} + \cdots + c_k x^{k-1} e^{m_1 x}.$$

3. La ecuación característica tiene raíces complejas. Puesto que las raíces complejas aparecen en pares, la solución general deberá contener:
   - Si la multiplicidad de las raíces $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, es 1:

$$c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x. \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

   - Si la multiplicidad de las raíces $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$, es k:

$$c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x + c_3 x e^{\alpha x} \cos \beta x + c_4 x e^{\alpha x} \sin \beta + \cdots +$$
$$+ \cdots + c_{2k-1} x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x + c_{2k} x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Example

Determine la solución general de las siguientes E.D.L.H.

1. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 4\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0.$
2. $y''' + 3y'' - 4y = 0.$
3. $y''' + 3y'' - 4y = 0.$
4. Suponga que las soluciones dela ec. característica de una E.D. son $-1, 0, 3 + 2i, \pi, -1 + i.$