E.D. Lineales Homgéneas con Coeficientes Consantes.

Sandra Elizabeth Delgadillo Alemán.

Universidad Autónoma de Aguascalientes.

May 12, 2022

Recordemos que una E.D. lineal homogénea de 1*er* orden con coeficientes constantes está dada por

$$\begin{aligned} a_1 y' + a_0 y &= 0 \,, \; a_1 \neq 0 \\ \iff y' + \frac{a_0}{a_1} y &= \frac{0}{a_1} = 0 \\ \iff \underbrace{\boxed{y' + \alpha y = 0}}_{\text{Forma Estándar}} \,. & \qquad \alpha = a_0/a_1 \end{aligned}$$

Resolvemos la E.D. usando un factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\int \alpha dx} = e^{\alpha x}.$$

Multipliquemos la E.D. por $\mu(x)$.

$$\begin{aligned} e^{\alpha x}y' + e^{\alpha x}y &= e^{\alpha x}\cdot 0 = 0 \\ \iff \frac{d}{dx}\left(e^{\alpha x}y\right) &= 0 \end{aligned}$$

Integramos

$$\int \frac{d}{dx}\left(e^{\alpha x}y\right) = \int 0dx$$

$$\iff e^{\alpha x}y = c \iff y(x) = ce^{-\alpha x}.$$

Por lo anterior, es natural tratar de determinar si existen soluciones exponenciales para las E.D.L.H. de 2^{do} orden con coeficientes constates de la forma

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Veamos si ésta E.D. tiene soluciones exponenciales.

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{mx} \\ y'(x) &= me^{mx} \\ y''(x) &= m^2 e^{mx}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la E.D.

$$\begin{aligned} a(m^2 e^{mx}) + b(me^{mx}) + c(e^{mx}) &= 0 \\ am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} &= 0 \\ e^{mx}(am^2 + bm + c) &= 0. \end{aligned}$$

Como $e^{mx} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \implies \underbrace{\boxed{am^2 + bm + c = 0}}_{\text{Ecuación Característica}}$

Luego, $y(x) = e^{mx}$ es solución de la E.D. siempre y cuando m sea una raíz de la ecuación característica.

La ecuación característica se puede resolver factorizando, o por fórmula general. En este caso las raíces están dadas por

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad m_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A $b^2 - 4ac$ se le conoce como el **discriminante**. Se tienen 3 casos dependiendo de lo siguiente.

1. $b^2 - 4ac > 0$, dos raíces reales distintas $m_1 \neq m_2$.
2. $b^2 - 4ac = 0$, dos raíces reales e iguales, $m_1 = m_2 = -b/2a$.
3. $b^2 - 4ac < 0$, raíces imaginarias conjugadas.

$$\begin{array}{rcl} m_1 & = & d + ie \\ m_2 & = & d - ie \end{array} \qquad d, e \in \mathbb{R}.$$

Caso 1. Raíces reales y distintas, $m_1 \neq m_2$.

En este caso, se tienen dos soluciones de la E.D. $y_1(x) = e^{m_1 x}$, y $y_2(x) = e^{m_2 x}$. Veamos que y_1, y_2 son L.I.

$$
\begin{aligned}
W[y_1, y_2](x) &= \begin{vmatrix} e^{m_2 x} & e^{m_2 x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} \end{vmatrix} \\
&= e^{m_1 x} m_2 e^{m_2 x} - m_1 e^{m_1 x} e^{m_2 x} \\
&= m_2 e^{m_1 x + m_2 x} - m_1 e^{m_1 x + m_2 x} \\
&= e^{(m_1 + m_2)x}(m_2 - m_1) \neq 0.
\end{aligned}
$$

ya que $e^{(m_1+m_2)x} > 0$, $\forall x$, y $m_1 \neq m_2$.

$$\therefore \quad y_1 \text{ y } y_2 \text{ son L.I.}$$

Luego, y_1 y y_2 conforman un conjunto fundamental de soluciones de la E.D.

Por lo tanto, la solución general está dada por

$$\underbrace{y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}}_{} \qquad c_1, c_1 \text{ cts. arb.}$$

Caso 2. Raíces reales e iguales $m_1 = m_2 = -\frac{b}{2a}$.

En este caso, se tiene una solución de la E.D. $y_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}$. Usamos reducción de orden para obtener una segunda solución L.I. a $y_1(x)$.

$$y_2(x) = \mu(x) y_1(x) \text{ donde } \mu(x) = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx.$$

$$ay'' + by' + cy = 0 \implies y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0,$$

$$
\begin{aligned}
\mu(x) &= \int \frac{e^{-\int b/a\,dx}}{\left(e^{-\frac{b}{2a}x}\right)^2}dx = \int \frac{e^{-b/a\,x}}{e^{-b/a\,x}}dx = \int dx \\
\therefore \quad \mu(x) &= x.
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$y_2(x) = xe^{-\frac{b}{2a}x}.$$

Verifiquemos que $y_2(x)$ también es solución:

$$
\begin{aligned}
y_2'(x) &= -\frac{b}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x} + e^{-\frac{b}{2a}x}. \\
y_2''(x) &= \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 xe^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x} = \frac{b^2}{4a^2}xe^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{a}e^{-\frac{b}{2a}x}.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en la E.D.

$$
\begin{aligned}
a\left(\frac{b^2}{4a^2}xe^{-\frac{b}{2a}x}-\frac{b}{a}e^{-\frac{b}{2a}x}\right)+b\left(-\frac{b}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x}+e^{-\frac{b}{2a}x}\right)+c\left(xe^{-\frac{b}{2a}x}\right) &= 0\\
\frac{b^2}{4a}xe^{-\frac{b}{2a}x}-be^{-\frac{b}{2a}x}-\frac{b^2}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x}+be^{-\frac{b}{2a}x}+cxe^{-\frac{b}{2a}x} &= 0\\
\iff -\frac{b^2}{4a}xe^{-\frac{b}{2a}x}+cxe^{-\frac{b}{2a}x} &= 0\\
\iff \forall x, \qquad xe^{-\frac{b}{2a}x}\left(-\frac{b^2}{4a}+c\right) &= 0.
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{b^2}{4a}+c=0 \quad \iff \quad b^2-4ac=0.
$$

$$
\therefore \qquad y_2 \text{ es solución de la E.D.}
$$

Ahora, vamos que son L.I.

$$
\begin{aligned}
W[y_1,y_2](x) &= \begin{vmatrix} e^{-\frac{b}{2a}x} & xe^{-\frac{b}{2a}x} \\ \frac{b}{2a}xe^{-b/a} & -\frac{b}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x}+e^{-\frac{b}{2a}x} \end{vmatrix}\\
&= -\frac{b}{2a}xe^{-b/a}+e^{-b/a\,x}+\frac{b}{2a}xe^{-b/a\,x}\\
&= e^{-b/a\,x}\neq 0, \qquad \forall x.
\end{aligned}
$$

Así pues, y_1, y_2 conforman un c.f.s y la solución general de la E.D. está dada por

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{b}{2a}x} + c_2 x e^{-\frac{b}{2a}}.$$

Caso 3. Raíces Imaginarias $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha + i\beta$.

En este caso, se tienen soluciones complejas $y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}$, $y_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x}$.

Observemos lo siguiente

$$y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}.$$

Usemos la fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Luego:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\alpha x}\cdot\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) \\ y_1(x) &= \underbrace{e^{\alpha x}\cos\beta x}_{Re(y_1(x))} + i\,\underbrace{e^{\alpha x}\sin\beta x}_{Im(y_1(x))}. \end{aligned}$$

De manera análoga, se obtiene que:

$$y_2(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Ahora, si consideramos la suma de $y_1(x)$ y $y_2(x)$ y multiplicamos por $1/2$ obtenemos que

$$\tilde{y}_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{es solución de la E.D.}$$

Ahora, si restamos a y_2 de y_1 y lo multiplicamos por $-1/2$ se obtiene otra solución:

$$\tilde{y_2}(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Veamos que $\tilde{y_1}, \tilde{y_2}$ sol L.I.

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](x) &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ -e^{\alpha x} \sin \beta x & e^{\alpha x} \cos \beta x \end{vmatrix} \\ &= e^{2\alpha x}(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= e^{2\alpha x} \neq 0, \quad \forall x. \end{aligned}$$

Es fácil verificar que $\tilde{y_1}$, $\tilde{y_2}$ son L.I. usando el wronskiano.

$$\tilde{y_1} = e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ y } \tilde{y_2}(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Luego, $\tilde{y_1}$ y $\tilde{y_2}$ conforman un c.f.s para la E.D. Por consiguiente, la solución general está dada por:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

$$\alpha = Re(m)\ ,\ \beta = Im(m) \qquad m = \alpha + i\beta.$$

Example

Determine la solución general de las siguientes E.D.L.H. con coeficientes constantes de 2^{do} orden.

1. $y'' - 10y' + 25y = 0.$
2. $2y'' - 3y' + 4y = 0.$
3. $y'' + 4y' - 2y = 0.$

Ejercicio.

Determine la solución del P.V.I. $4y'' + 4y' + 17y = 0$, con $y(0) = 1$, y $y'(0) = 2$. Además, esboce la gráfica de la curva solución.

Para resolver una E.D. de orden n de la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ \ldots \ + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

donde a_i, $i = 1, \ \ldots, \ n$, son constantes reales y $a_n \neq 0$.

Se debe resolver una ecuación polinomial de la forma:

$$\underbrace{a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \ \ldots \ + a_1 m + a_0 = 0}_{\text{Ecuación Característica.}}$$

1. Si todas las raíces de la ecuación son reales y distintos, la solución de la ecuación será:

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ \cdots \ + c_n e^{m_n x},$$

donde $c_1, \ \ldots, \ c_n$ son cts. arb. y $m_1, \ \ldots, \ m_n$ son las raíces.

2. Cuando la raíz real m_1 tiene multiplicidad k, la solución general de la ecuación diferencial debe contenter la sig. combinación lineal

$$c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + c_3 x^2 e^{m_1 x} + \cdots + c_k x^{k-1} e^{m_1 x}.$$

3. La ecuación característica tiene raíces complejas. Puesto que las raíces complejas aparecen en pares, la solución general deberá contener:
   - Si la multiplicidad de las raíces $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, es 1:

$$c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x. \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

   - Si la multiplicidad de las raíces $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$, es k:

$$c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x + c_3 x e^{\alpha x} \cos \beta x + c_4 x e^{\alpha x} \sin \beta + \cdots +$$
$$+ \cdots + c_{2k-1} x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x + c_{2k} x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Example

Determine la solución general de las siguientes E.D.L.H.

1. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 4\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0.$
2. $y''' + 3y'' - 4y = 0.$
3. $y''' + 3y'' - 4y = 0.$
4. Suponga que las soluciones dela ec. característica de una E.D. son $-1, 0, 3 + 2i, \pi, -1 + i.$