Examen A.

Por Erick I. Rodríguez Juárez.

March 6, 2022

1. *Clasifica las siguientes ecuaciones diferenciales según su tipo,orden y linealidad.*

   Solución.

Ec.	Tipo	Orden	Linealidad	V.S.
$\dfrac{d^4x}{dt^4} = x \cdot t$	Ordinaria	4^{to} Orden	Lineal	V.S.
$y'' - t^2 y = \sin t + (y')^3$	Ordinaria	2^{do} Orden	No-lineal	No -V.S.

2. *Verifica que* $y(x) = e^{-x} + \frac{1}{3}x$ *es solución de*

$$y^{(4)} + 4y^{(3)} + 3y = x.$$

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} y' &= -e^{-x} + 1/3 \\ y'' &= e^{-x} \\ y''' &= -e^{-x} \\ y^{(4)} &= e^{-x} \end{aligned}$$

Entonces

$$(e^{-x}) + 4(-e^{-x}) + 3(e^{-x} + 1/3x) = x. \quad \blacksquare$$

3. *Compruebe que* $y + 2\ln y = x^2 + 1$ *es la solución general implícita de la ecuaci o diferencial*

$$y' = \frac{2xy}{y+2}.$$

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} y' + 2\frac{y'}{y} = 2x \quad &\Longrightarrow \quad y'\left(1 + \frac{2}{y}\right) = 2x \\ &\Longrightarrow \quad y' = \frac{2x}{1 + 2/y} = \frac{2xy}{y+2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4. *Determina si las siguientes ecuaciones diferenciales son de variables separables o lineales, y resuélvelas.*

(a) $x \cdot \dfrac{dy}{dx} - 2y = x^3 e^{-x} - 3x$.

Solución. $\boxed{\text{La ecuación diferencial es lineal, no es de V.S.}}$

Primero, como

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{dy}{dx} - 2y &= x^3 e^{-x} - 3x \\ \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} \cdot y &= x^2 e^{-x} - 3. \end{aligned}$$

Entonces, $p(x) = -\dfrac{2}{x}$. Y por tanto, es factor integrante,

$$\mu(x) = e^{\int p} = e^{\int -2/x dx} = e^{-2 \cdot \log x} = x^{-2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x^{-2} \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x^3} y &= e^{-x} - 3/x^2 \\ \frac{d}{dy}\left(x^{-2} \cdot y\right) &= e^{-x} - 3/x^2 \\ x^{-2} \cdot y &= \int (e^{-x} - 3/x^2) dx \\ &= -e^{-x} + 3/x + C. \end{aligned}$$

Así, es que

$$y = -x^2(e^{-x} + 3/x + C), \qquad C \in \boldsymbol{R}. \quad \blacksquare$$

(b) $xy^2 dx + e^{x^2}(y^2 - 1) dy = 0$.

Solución. $\boxed{\text{La ecuación diferencial es de variables separables. No es lineal}}$

Luego, vemos que

$$\begin{aligned} e^{x^2}(y^2 - 1) dy &= -xy^2 dx \\ y^{-2}(y^2 - 1) dy &= -e^{-x^2} x dx \\ \int (1 - y^{-2}) dy &= \frac{1}{2} \int e^{-x^2}(-2x) dx \\ y + \frac{1}{y} &= e^{-x^2}/2 + C \end{aligned}$$

Así, multiplicando por y en ambos lados, tenemos que resolver una función cuadrática.

$$y^2 - y(e^{-x^2}/2 + C) + 1 = 0.$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned} y &= \frac{+(e^{-x^2}/2+C) \pm \sqrt{(e^{-x^2}/2+C)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \\ y &= \frac{e^{-x^2}}{4} + C/2 \pm \sqrt{(e^{-x^2}/2+C)^2 - 4}. \qquad\qquad C \in \boldsymbol{R}. \end{aligned}$$

5. *Resuelve la siguiente ecuación diferencial* $x^2 \cdot \dfrac{dy}{dx} = x^2 y \cos x - 2xy$ *y determina la soluciión particular que pasa por el punto* $(\pi, 1)$.

Solución. Primero, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y \cos x - \frac{2y}{x} \\ &= y \cdot \left(\cos x - \frac{2}{x} \right) \end{aligned}$$

Entonces, es de variables separables, y por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= (\cos x - 2/x)dx \\ \int \frac{dy}{y} &= \int (\cos x - 2/x)dx \\ \log|y| &= \sin x - 2\log|x| + C \\ |y| &= e^{\sin x + \log x^{-2} + C} \qquad\qquad k = e^C > 0. \\ y &= \pm k \cdot e^{\sin x} \cdot e^{\log x^{-2}}, \qquad\qquad k > 0 \\ y &= k \cdot e^{\sin x} \cdot x^{-2}. \qquad\qquad k \neq 0. \end{aligned}$$

Ahora, se requiere que $y(\pi) = 1$, es decir

$$1 = y(\pi) = k \cdot e^{\sin \pi} \cdot \pi^{-2} = k \cdot \pi^{-2}.$$

Implica que $k = \pi^2$. La solución del P.V.I. $y(\pi) = 1$, es

$$y(x) = \pi^2 e^{\sin x} \cdot x^{-2}.$$