Reducción de Orden.

Sandra Elizabeth Delgadillo Alemán.

Universidad Autónoma de Aguascalientes.

May 20, 2022

Uno de los hechos más interesantes al estudiar a ecuaciones diferenciales de 2^{do} orden, es que podemos formar una 2^{da} solución $y_2(x)$ de la E.D.H

$$a_2(x)y'' + a_1(x) + a_0(x)y = 0 \qquad a_2(x) \neq 0 \text{ en } I.$$

Siempre y cuando se conozca una solución $y_1(x)$ no trivial (es decir, $y_1(x) \neq 0$) en I, de tal forma que $\{y_1, y_2\}$ sea linealmente independiente.

Observemos que dos soluciones son linealmente dependientes si una es un múltiplo escalar de la otra. Dados y_1, y_2 son L.D. si y sólo si $y_2(x) = cy_1(x)$.

$$\iff \frac{y_2(x)}{y_1(x)} = c \quad \forall x \in I.$$

Ahora, estamos interesados en determinar $y_2(x)$ tal que sea L.I: a $y_1(x)$, por lo cual, proponemos $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} = \mu(x)$

$$\iff y_2(x) = \mu(x) y_1(x).$$

Derivemos $y_2(x) = \mu(x) y_1(x)$

$$y_2'(x) = \mu' y_1 + \mu y_1' \qquad \begin{aligned} y'' &= \mu'' y_1 + \mu' y_1' + \mu' y_1' + \mu y'' \\ &= \mu'' y_1 + 2\mu' y_1' + \mu y''. \end{aligned}$$

ahora sustituyendo y_2, y_2', y_2'' en la E.D. en su forma estándar $y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$, donde

$$p(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\ ,\ q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}.$$

esto es

$$
\begin{aligned}
(\mu'' y_1 + 2\mu' y_1' + \mu y'') + p(x)(y_2'(x) + \mu' y_1 + \mu y_1') + q(x)(\mu y_1) &= 0 \\
(\mu y_1'' + p(x)\mu y_1' + q(x)\mu y_1) + (\mu'' y_1 + 2\mu' y_1' + p(x)\mu' y_1) &= 0 \\
\mu\cancel{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)} + (\mu'' + 2\mu' y_1' + p(x)\mu' y_1) &= 0 \\
\underline{\mu'' y_1 + \mu'(2y_1' + p(x)y_1) = 0} \qquad E.D.\ \ \mu = \mu(x)
\end{aligned}
$$

Hagamos un cambio de variable

$$\tilde{\mu} = \mu' \implies \tilde{\mu}' = \mu''.$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mu}' y_1 + \tilde{\mu}(2y_1' + p(x)y_1) &= 0 \\
\tilde{\mu}' y_1 + \tilde{\mu}(2y_1' + p(x)y_1) &= 0 \\
\iff y_1\tilde{\mu}' &= -(2y_1' + p(x)y_1)\tilde{\mu} \\
\iff \frac{\tilde{\mu}'}{\tilde{\mu}} &= -\frac{2y_1' + p(x)y_1}{y_1}.
\end{aligned}
$$

Integramos con respecto a x,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tilde{\mu}'}{\mu} dx &= -\int \frac{2y_1' + p(x)y_1}{y_1} dx = -\left[2\int \frac{y_1'}{y_1} dx + \int p(x)dx\right] \\
\iff \ln|\tilde{\mu}| &= -2\ln|y_1| - \int p(x)dx = \ln|y_1|^{-2} - \int p(x)dx + C \\
e^{\ln|\tilde{\mu}|} &= e^{\ln|y_1|^{-2} - \int p(x)dx + C} = e^{\ln|y_1|^{-2}} \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot e^{C} \\
\tilde{\mu} &= C\big|y_1\big|^{-2} e^{-\int p(x)dx}.
\end{aligned}$$

Como $\tilde{\mu} = \mu'$, entonces obtenemos a μ integrando.

$$\mu(x) = \int \mu' dx = \int c\big|y_1\big|^{-2} e^{-\int p(x)dx} dx.$$

$$\boxed{\tilde{\mu} = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx} \qquad \text{con } c = 1.$$

Luego, dada $y_1 \neq 0$ solución de la E.D., una 2^{da} solción linealmente independiente a y_1 está dada por

$$y_2(x) = \mu(x) y_1(x) \quad \text{donde } \mu(x) = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx.$$

Así pues, $\{y_1, y_2\}$ conforman una c.f.s y la solución general de la E.D. está dado por la combinación lineal de éstas.

Example

Sea $y_1(x) = x^2$ una solución de la E.D. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$. Determine la solución general de la E.D. en el intervalo $I = (0, \infty)$.

Solución. La E.D. en su forma estándar está dada por

$$y'' - \underbrace{\frac{3}{x}}_{p(x)} y' + \frac{4}{x^2} y = 0.$$

$$\mu(x) = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y^2(x)}dx = \int \frac{e^{-\int \frac{-3}{x}dx}}{(x^2)^2}dx \;=\; \int \frac{e^{3\ln x}}{x^4}dx$$
$$= \int \frac{x^3}{x^4}dx$$
$$= \int \frac{1}{x}dx$$
$$= \ln x.$$

$\therefore \quad y_2(x) = (\ln x)x^2 = x^2 \ln x.$

Verifiquemos que $y_1(x) = x^2$, y $Y_2(x) = x^2 \ln x$ conforman un c.f.s.

Es fácil verificar que y_1, y_2 son soluciones de la E.D. Veamos que son L.I. usando el wronskiano.

$$
\begin{aligned}
W[y_1, y_2](x) &= \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \ln x \\ 2x & x + 2x \ln x \end{vmatrix} \\
&= x^2(x + 2x \ln x) - 2x(x^2 \ln x) \\
&= x^3 + \cancel{2x^3 \ln x} - \cancel{2x^2 \ln x} = x^3 \neq 0.
\end{aligned}
$$

y_1, y_2 son L.I. $\forall x \in (0, \infty)$.

Por consiguiente, y_1, y_2 conforman un c.f.s y la sol. gral. está dada por

$$
y(x) = c_x^2 + c_2 x^2 \ln x, \qquad c_1, c_2 \text{ constantes arbitrarias.}
$$

Ejercicio.

Si $y_1(x) = e^x$ es solución de $y'' - y = 0$, en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Aplique reducción de orden para determinar $y_2(x)$, L.I. a $y_1(x)$ y determine explícitamente la solución general de la E.D.

Solución. $y'' + \underbrace{0}_{p(x)} y' \underbrace{-}_{q(x)} y = 0.$

$$y_2(x) = \mu(x) \cdot y_1(x), \qquad \mu(x) = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx.$$

$$\begin{aligned}
\mu(x) = \int \frac{e^{-\int 0 dx}}{(e^x)^2} dx = \int \frac{e^0}{e^{2x}} dx \quad &= \quad \int \frac{1}{e^{2x}} dx \\
&= \quad \int e^{-2x} dx \\
&= \quad -\frac{1}{2} \int -2e^{-2x} dx \\
&= \quad -\frac{1}{2} e^{-2x}.
\end{aligned}$$

Luego $\{y_1, y_2\}$ son dos soluciones L.I. para la E.D. de segundo orden.

$$\therefore \quad \text{conforman un c.f.s.}$$

$$\underline{\therefore \quad y(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}} \text{ sol. gral. explícita de la E.D.}$$