Movimiento Vibratorio de Sistemas Mecánicos.

Sandra Elizabeth Delgadillo Alemán.

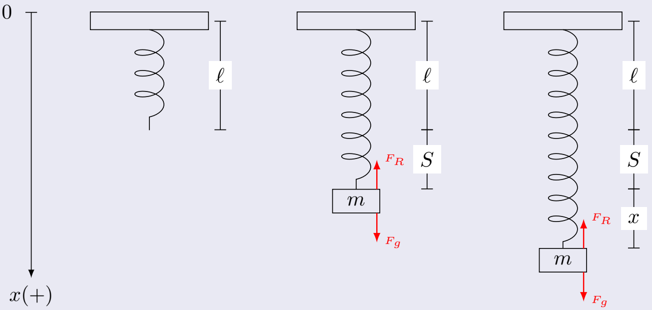
Universidad Autónoma de Aguascalientes.

June 3, 2022

Movimiento Vibratorio de Sistemas Mecánicos.

Suponga una masa m unida a un resorte flexible colgado sobre un soporte rígido. La distancia de alargamiento dependerá de la masa. Según la Ley de Hooke, el resorte mismo ejerce una fuerza de restitución opuesta a la dirección de alargamiento y proporcional al dicho alargamiento S, es decir:

$$F = kS \;, \;\; k = \text{constante del resorte.}$$



Equilibrio

$$\begin{aligned} F_g - F_R &= 0 \\ F_g - kS &= 0 \\ \Longleftrightarrow \quad mg &= kS. \end{aligned}$$

Movimiento

$$\begin{aligned} F_T &= F_g - F_R \\ F_T &= mg - k(S + x) \\ F_T &= mg - kS - kx \\ F_T &= -kx. \end{aligned}$$

Por la 2^{da} Ley de Newton $F_T = ma = m\dfrac{dv}{dt} = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$. Luego, igualando $F_T = m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$, $k, m > 0$,

$$\iff m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \iff \frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{w^2=k/m>0} x = 0$$

Luego, la ecuación que describe el movimiento de m está dada por

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0}$$

E.D. para describir el Movimiento Armónico Simple.

Resolvemos la E.D. usando la ecuación característica
$m^2 + w^2 = 0 \iff m^2 = -w^2 \iff m_{1,2} = \pm iw$, $\alpha = 0$, $\beta = w$.

Luego, la solución general de la E.D. de movimiento es:
$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin wt.$

Establecemos las condiciones iniciales como $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$, aplicando las CI's.

$$\begin{aligned} x'(t) &= -wc_1 \sin wt - wc_2 \cos wt \\ x(0) &= c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = x_0 \\ x'(0) &= -wc_1 \sin w(0) + wc_2 \cos w(0) = x_1 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{x(t) = x_0 \cos wt + \frac{x_1}{w} \sin wt}$$

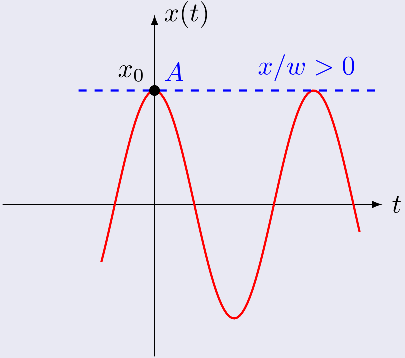
Ecuación de movimiento armónico simple.

$$x(t) = A \sin(wt + \phi) \qquad A = \sqrt{x_0^2 + (x_1/w)^2}.$$

Amplitud.

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{x_0 w}{x_1}\right) \quad T = \frac{2\pi}{w}\ ,\ [T] = seg \quad f = \frac{w}{2\pi}\ ,\ [f] = 1/s = Hz.$$

Angulo de fase Periodo Frecuencia.



Example

Una masa que pesa $2lb$ hace que un resorte se estire 6 in. Cuando $t = 0$ la masa se suelta desde un punto a $8i\ n$ abajo de la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de $4/3\ ft/s$. Deduzca la ecuación de movimiento libre.

Solución.

$W = 2lb$
$S = 6in = 0..5ft$
$g = 32.2ft/s^2$

$x(0) = 8in = 2/3ft$
$x'(0) = -4/3ft/s$

La E.D. que describe el movimiento libre es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

Determinemos m, $W = mg \implies m = \frac{W}{g} = \frac{2lb}{32.2ft/s} = \frac{1}{61} slug$.

Por la Ley de Hooke,

$$W = mg = ks \implies k = W/s = \frac{2lb}{1/2ft} = 4\frac{lb}{ft}.$$

Por lo tanto, $\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{4lb/ft}{1/6.1slug} = 64.4rad/s.$

Luego, la ecuación diferencial es:

$$\underline{\frac{d^2x}{dt^2} + 64.4x = 0}$$

Luego, la ecuación

$$m^2 + 64.4 = 0 \implies m^2 = -64.4 \implies m_{1,2} = \pm\sqrt{-64.4}$$

$$m_{1,2} = \pm i8.02 \implies \alpha = 0\ ,\ \beta = 8.02.$$

$\therefore$ La ecuación de movimiento general es:

$$x(t) = c_1\cos(8.02t) + c_2\sin(8.02t).$$

Aplicamos las C.I. $x(0) = 2/3$, $x'(0) = -4/3$.

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1\cancelto{1}{\cos(8.02\cdot 0)} + c_2\cancelto{0}{\sin(8.02\cdot 0)} = 2/3 \\ c_1 &= 2/3. \\ x'(t) &= -c_1\sin(8.02t) + c_2\cos(8.02t) \end{aligned}$$

Aplciamos la C.I. $x'(0) = -4/3$,

$$\begin{aligned} x'(0) &= -c_1\cancelto{0}{\sin(8.02\cdot 0)} + c_2\cancelto{1}{\cos(8.02\cdot 0)} = -4/3 \\ c_2 &= -4/3. \end{aligned}$$

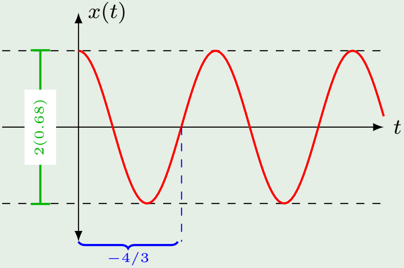
Luego, la ecuación del movimiento es:

$$\underline{x(t) = 2/3\cos(8.02t) - 0.16\sin(8.02t)}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= A\sin(8.02t+\varphi) \\ A &= \sqrt{(2/3)^2+(0.16)^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{2/3}{0.16}\right) = -1.33 \end{aligned}$$

La ecuación del movimiento se puede escribir como:

$$\underline{x(t) = 0.68\sin(8.02t-1.33)}$$



$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{8.02}{2\pi} \\ &= 1.27Hz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8.02} \\ &= 0.78s. \end{aligned}$$