Movimiento Vibratorio de Sistemas Mecánicos.

Sandra Elizabeth Delgadillo Alemán.

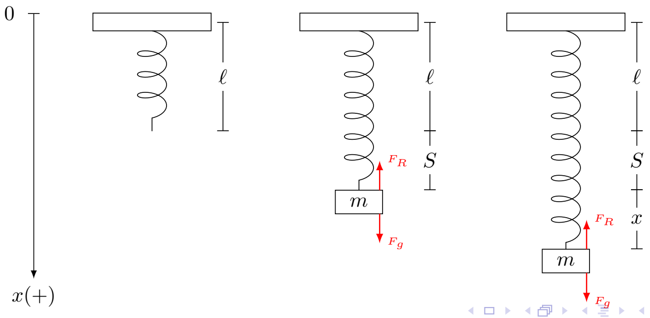
Universidad Autónoma de Aguascalientes.

May 3, 2022

Movimiento Vibratorio de Sistemas Mecánicos.

Suponga una masa m unida a un resorte flexible colgado sobre un soporte rígido. La distancia de alargamiento dependerá de la masa. Según la Ley de Hooke, el resorte mismo ejerce una fuerza de restitución opuesta a la dirección de alargamiento y proporcional al dicho alargamiento S, es decir:

$$F = kS\ ,\ \ k = \text{constante del resorte.}$$



Equilibrio

$$
\begin{aligned}
F_g - F_R &= 0 \\
F_g - kS &= 0
\end{aligned}
$$

$$\iff mg = kS.$$

Movimiento

$$
\begin{aligned}
F_T &= F_g - F_R \\
F_T &= mg - k(S + x) \\
F_T &= mg - kS - kx \\
F_T &= -kx.
\end{aligned}
$$

Por la 2^{da} Ley de Newton $F_T = ma = m\dfrac{dv}{dt} = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$. Luego, igualando $F_T = m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$, $k, m > 0$,

$$\iff m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \iff \frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{w^2 = k/m > 0} x = 0$$

Luego, la ecuación que describe el movimiento de m está dada por

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0}$$

E.D. para describir el Movimiento Armónico Simple.

Resolvemos la E.D. usando la ecuación característica $m^2 + w^2 = 0 \iff m^2 = -w^2 \iff m_{1,2} = \pm iw$, $\alpha = 0$, $\beta = w$.

Luego, la solución general de la E.D. de movimiento es:
$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin wt$.

Establecemos las condiciones iniciales como $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$, aplicando las CI's.

$$\begin{aligned} x'(t) &= -wc_1 \sin wt - wc_2 \cos wt \\ x(0) &= c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = x_0 \\ x'(0) &= -wc_1 \sin w(0) + wc_2 \cos w(0) = x_1 \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \boxed{x(t) = x_0 \cos wt + \frac{x_1}{w} \sin wt}$$

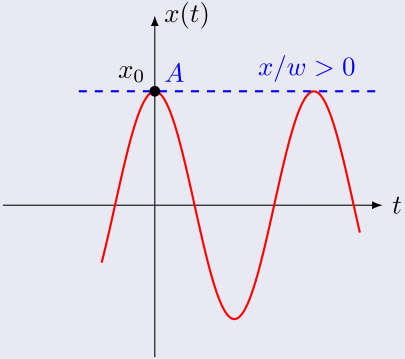
Ecuación de movimiento armónico simple.

$$x(t) = A \sin(wt + \phi) \qquad A = \sqrt{x_0^2 + (x_1/w)^2}.$$

Amplitud.

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{x_0 w}{x_1}\right) \quad T = \frac{2\pi}{w}\ ,\ [T] = seg \quad f = \frac{w}{2\pi}\ ,\ [f] = 1/s = Hz.$$

Angulo de fase　　Periodo　　Frecuencia.



Example

Una masa que pesa $2lb$ hace que un resorte se estire 6 in. Cuando $t = 0$ la masa se suelta desde un punto a $8i\ n$ abajo de la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de $4/3\ ft/s$. Deduzca la ecuación de movimiento libre.