3. Problemas de Valor Inicial de 1^{er} Orden.

Sandra Elizabeth Delgadillo Alemán.

Universidad Autónoma de Aguascalientes.

April 8, 2022

3. Problemas de Valor Inicial.

Cuando modelamos matemáticamente un fenómeno a través de ecuaciones diferenciales, generalmente nos interesa resolver la ecuación diferencial, sujeta a condiciones prescritas sobre la función y sus derivadas, la cuál nos conduce a:

Problema de Valor Inicial.

Este problema consiste en resolver la E.D.

$$F\left(x\ ,\ y(x)\ ,\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)\right) = 0, \text{ en un intervalo } I,$$

que contiene a t_0, sujeto a las condiciones:

$$y(t_0) = y_0\ ,\ y'(t_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1},$$

donde $y_0\ ,\ y_1,\ \ldots,\ y_{n-1}$, son constantes reales específicas.
A los valores dados de la función y sus derivadas se les conoce como **condiciones iniciales**.

P.V.I. de 1^{er} Orden.

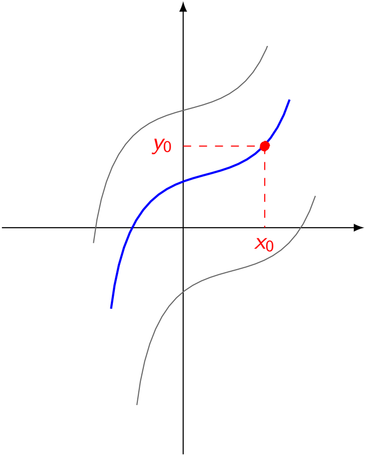
Definition

Se define un **Problema de Valor Inicial de Primer Orden**, como el sistema,

$$F\left(x\ ,\ y(x)\ ,\ y'(x)\right) = 0\ , \qquad y(x_0) = y_0.$$

ó, en forma normal,

$$y'(x) = f\left(x\ ,\ y(x)\right)\ ,\ y(x_0) = y_0.$$



Ejemplo.

Example

Sea $y(x) = ce^{-2x} + e^x$ una familia monoparamétrica de soluciones de la E.D.

$$y' + 2y = 3e^x.$$

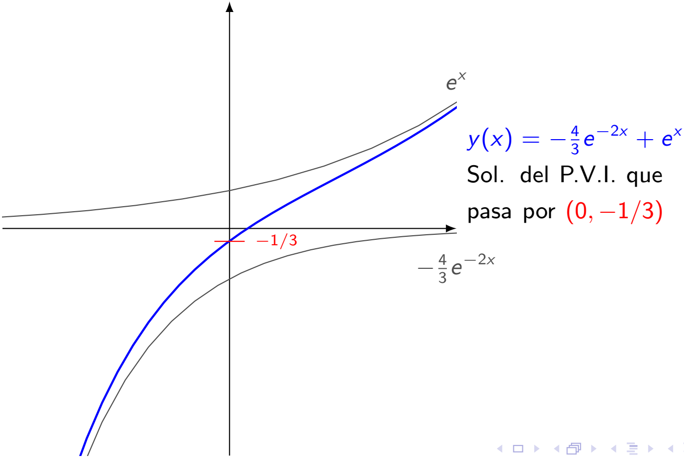
Determine la solución del P.V.I. formado pr la E.D. y la C.I. $y(0) = 1/3$. y esboza su curva integral. Luego, determina la curva integral que pasa por $(-1, 2)$ y esboza su gráfica.

Solución. Debemos determinar el valor de c en la solución general de tal forma que $y(0) = -1/3$.

$$\begin{aligned} y(0) &= ce^{-2(0)} + e^0 = -\frac{1}{3} \\ \iff \quad c + 1 &= -\frac{1}{3} \iff c = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo.

$\therefore \quad y(x) = -\frac{4}{3}e^{-2x} + e^{x}$ es una solución particular que satisface el P.V.I dado.



Ejemplo.

Debemos ver el valor de c en la solución general, de tal forma que $y(-1)=2$.

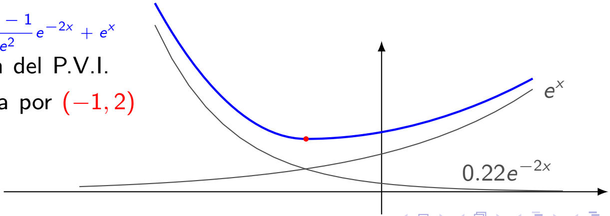
$$\begin{aligned} y(-1) &= ce^{-2(-1)}+e^{-1}=2 \\ \Longleftrightarrow \quad ce^2+\frac{1}{e} &= 2 \\ \Longleftrightarrow \quad c &= \frac{2}{e^2}-\frac{1}{e^3}=\frac{2e-1}{e^3}=\frac{2-e^{-1}}{e^2}\approx 0.22 \end{aligned}$$

$\therefore\ y(x)=\dfrac{2e-1}{e^3}e^{-2x}+e^x$ es una sol. particular que satisface el P.V.I.

$y(x)=\dfrac{2e-1}{e^2}e^{-2x}+e^x$

Solución del P.V.I.

que pasa por $(-1,2)$



Ejemplo.

Example

Resuelve el P.V.I. dado por $y' = -\dfrac{y}{x}$, $y(2) = -3$, $y \neq 0$, y esboza su gráfica de su curva solución.

Solución. Sabemos que la solución general de la E.D. es $x^2 + y^2 = c$.
Observamos que la ec. es equivalente a $x^2 + y(x)^2 = c$.
Debemos determinar el valor de c en la sol. gral. de tal forma que $y(2) = -3$. Evaluamos en $x = 2$

$$\begin{array}{rrcl} & (2)^2 + y(2)^2 & = & c \\ \Longleftrightarrow & (2)^2 + (-3)^2 & = & c \\ \Longleftrightarrow & c & = & 13. \end{array}$$

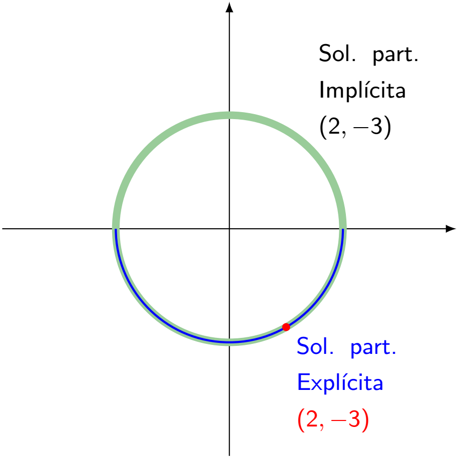
Ejemplo.

$\therefore$ La solución implícita que satisface la condición inicial es

$$x^2 + y^2 = 13$$

y la solución particular explícita que satisface la C.I. $y(2) = -3$ es

$$y(x) = -\sqrt{13 - x^2}.$$



Ejercicio.

Ejercicio.

Sea $xy = 3(y-1) + ce^{-y}$ la sol. gral de la E.D.

$$y + (xy + x - 3y)y' = 0.$$

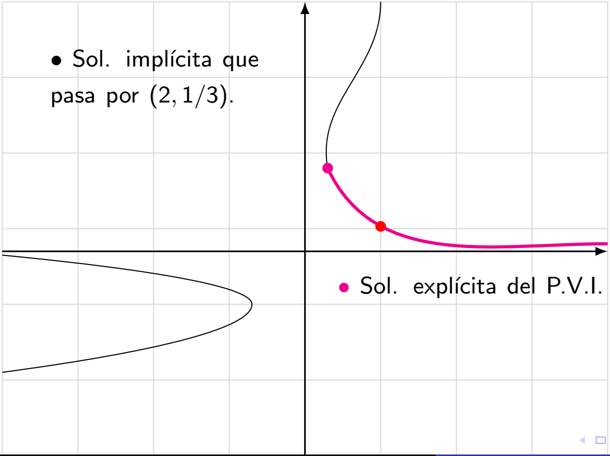
Determina la solución imlpícita y explícita (si es posible) que satisface la condición inicial $y(2) = 1/3$.

Solución. Sustituimos $x = 2$ y $y = 1/3$ en la solución general $xy = 3(y-1)ce^{-y}$, para determinar el valor de c.

$$\begin{aligned} (2)(1/3) &= 3(1/3 - 1) + ce^{-1/3} \\ 2/3 &= -2 + ce^{-1/3} \\ 8 &= ce^{-1/3} \\ c &= 8e^{1/3}/3 \approx 3.72 \end{aligned}$$

Ejercicio.

$\therefore$ la solución particular implícita que cumple con la condición inicial dada es $xy = 3(y-1) + \frac{8e^{1/3}}{3}e^{-y}$. Gráficamente



No es posible determinar de manera algebraica la solición explícita que pasa por $(2, 1/3)$.

Observamos que existen E.D. que pueden tener una única solución que satisface una condición inicial dada, o puede tener un número infinito de soluciones, o no puede existir ninguna solución.

Example

Por ejemplo. Sea $y(x) = kx$ la solución general de la E.D. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$.

1. *Determine la solución que satisface la C.I.* $y(0) = 1$.

   Solución. $y(0) = k(0) = 1 \iff 0 = 1!!!$

   $\therefore$ No existe k tal que $y(0) = 1$.

   $\therefore$ No existe solución que pase por $(0, 1)$.

2. *Determine la solución que satisface* $y(1) = 1$.

   Solución.

   Encontremos $k \in \mathbb{R}$ para $y(x) = kx$ tal que $y(1) = 1$

$$\begin{aligned} y(1) &= k(1) = 1 \\ \therefore \quad k &= 1 \end{aligned}$$

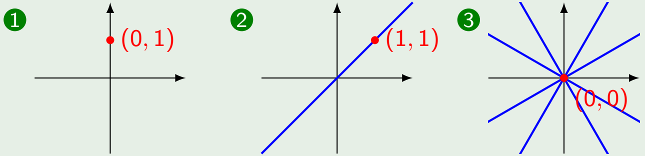
Por lo tanto $y(x) = x$ es la solución única que pasa por $(1, 1)$.

3. *Determine la solución que satisface $y(0) = 0$.*

Solución. Encontremos $k \in \mathbb{R}$, para $y(x) = kx$ tal que $y(0) = 0$.

$$\begin{aligned} y(0) = k(0) &= 0 \\ \iff 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad y(x) = kx \;,\; k \in \mathbb{R}, \text{ satisface la condición inicial dada.}$$



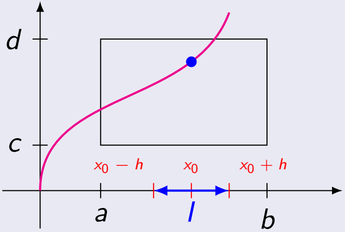
4. Teorema de Existencia y Unicidad (P.V.I. de 1^{er} Orden).

Theorem

Dado el P.V.I. $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ *con* $y(x_0) = y_0$. *Suponga qe* f *y* $\dfrac{df}{dy}$ *son continuas en un rectángulo* R *definido por*

$$R = \{(x,y) \mid a < x < b\ ,\ c < y < d\}, \qquad \text{que contiene a } (x_0, y_0).$$

Entonces el P.V.I. tiene solución y es única, $\varphi(x)$ *en el intervalo* I_0 *definido por* $x_0 - h < x < x_0 + h$ *con* $h > 0$ *y además* $I_0 \subseteq (a,b)$.



1. La continuidad de f nos asegura la existencia de la solución del P.V.I.
2. La continuidad de $\dfrac{df}{dy}$ nos da la unicidad de la solución del P.V.I.

Example

Considere la E.D. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$, $x \neq 0$, con la condición inicial

1. $y(0) = 1$.
2. $y(1) = 1$.
3. $y(0) = 0$.

Veamos que nos dice el T. E. Y U. acerca de la solución del P.V.I.

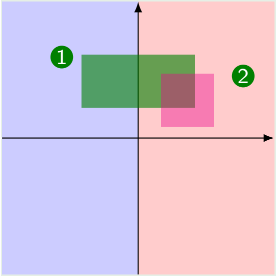
Solución. La E.D. en su forma normal es:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{y}{x}}_{f(x,y)}.$$

Decimos que $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$.

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x = 0\}$.

Además $\dfrac{df}{dy} = \dfrac{1}{x}$, con $D_{\frac{df}{dy}} = \mathbb{R} \setminus \{(x,y) \mid x = 0\}$.



Se tienen las siguientes regiones de continuidad

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{(x,y) \mid \; -\infty < x < 0 \,, \\
&\qquad\qquad\quad -\infty < y < \infty\} \\
R_2 &= \{(x,y) \mid \; 0 < x < \infty \,, \\
&\qquad\qquad\quad -\infty < y < \infty\}
\end{aligned}
$$

1. $y(0) = 1 \implies (0,1) \in \operatorname{Im} y$.

   No es posible construir un rectángulo que contenga a $(0,1)$ en donde, tanto f, como $\dfrac{df}{dy}$ sean continuas.

2. $y(1) = 1 \implies (1,1) \in \text{Im}\, y.$

   En este caso, sí es posible construir un rectángulo qu contenga a $(1,1)$ donde tanto f , $\dfrac{df}{dy}$ son continuas.

   $\therefore$ por el T. E. Y U., existe $\dfrac{dy}{dx}$ y es única, la sol. que pasa por $(1,1)$ en un intervalo $I_0 \subseteq (a,b)$.

3. $y(0) = 0 \implies (0,0) \in \text{Im}\, y.$

   No es posible construir un rectángulo cerrado que contenga a $(0,0)$ en el cuál f , $\dfrac{df}{dy}$ sean continuas.

   $\therefore$ T. E. Y U. no es posible aplicarlo.

5. Campos Direccionales y Métodos de las Isoclinas.

Forma Analítica

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y &= y(x) \end{aligned}$$

Geométricamente

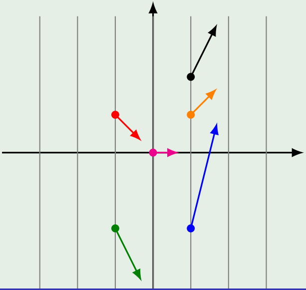
Campo de direccines o pendientes.

Curva Integral.

Example

Considere la E.D. $\dfrac{dy}{dx} = xy^2$, esboce el campo de pendientes y algunas curvas solución o integrales.

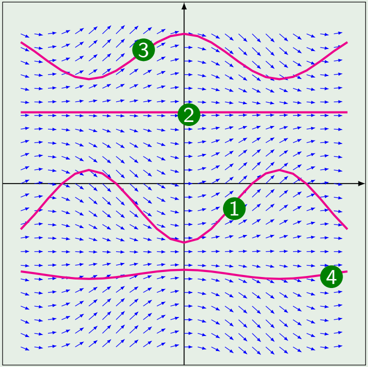
Puntos	Pendientes
$(1,1)$	$dy/dx = (1)(1)^2 = 1$
$(1,-2)$	$dy/dx = (1)(-2)^2 = 4$
$(-1,1)$	$dy/dx = (-1)(1) = -1$
$(0,0)$	$dy/dx = (0)(0) = 0$
$(-1,-2)$	$dy/dx = (-1)(-2)^2 = -4$
$(1,2)$	$dy/dx = (1)(2)^2 = 4$



Example

Considere el campo direccional hecho por computadora de la E.D. $\dfrac{dy}{dx} = \sin x \cos y$ y trace a mano las gráfias de las curvas solución que satisfacen las sig. condiciones iniciales.

1. $y(1) = -1/2$.
2. $y(0) = \pi/2$.
3. $y(-1) = 3$.
4. $y(\pi) = -2$.



Notamos que $\frac{dy}{dx} = \sin x \cos y = 0$ implica que

$$\sin x = 0 \quad \text{o} \quad \cos y = 0$$

$$x = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \quad \text{o} \quad y = k\pi + \frac{\pi}{2} \ , \ k \in \mathbb{Z}.$$

Método de las Isoclinas (igualación)

Definition

Una **isoclina** para una E.D. es un conjunto de puntos (x, y) del plano donde la ecuación diferencial $y' = f(x, y) = c$. Es decir, que las isoclinas son las curvas de nivel de f, es decir $f(x, y) = c$.

Example

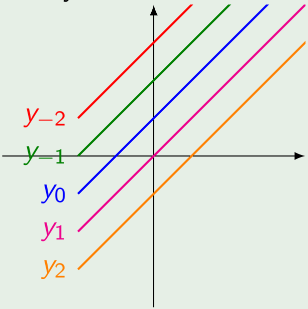
Considere la E.D. $y' = 1 + x - y$. Obtenga el campo direccional de la E.D. usando el método de las isoclinas.

1. Bosquea la solución que satisface la C.I. $y(2) = 1$ y la sol. que pasa por $(-1, 2)$.
2. ¿Qué se puede decir acerca de las soluciones del inciso anterior cuando $x \longrightarrow \infty$ o $x \longrightarrow -\infty$?.

Solución.

1. Isoclinas $y' = 1 + x - y = c \iff y = 1 + x - c$.

c	Isoclina
-2	$y_{-2} = 1 + x + 2 = x + 3$
-1	$y_{-1} = 1 + x + 1 = x + 2$
-0	$y_{-1} = 1 + x + 0 = x + 1$
1	$y_{-1} = 1 + x - 1 = x$
1	$y_{-1} = 1 + x - 2 = x - 1$



2. La solución que pasa por $(2, -1)$ tiende a la recta $y = x$ cuando $x \longrightarrow \infty$ y tiende a $-\infty$ cuando $x \longrightarrow -\infty$.

   La solución que pasa por $(-1, 2)$ tiende asintóticamente a la recta $y = x$ cuando $x \longrightarrow -\infty$ y tiende a ∞ cuando $x \longrightarrow \infty$.

Example

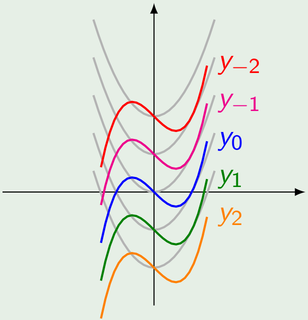
Utilice el método de las isoclinas para dibujar el campo de pendientes de la ecuación diferencial $y' + y = x^2$.

Esboce algunas curvas solución, incluyendo la que satisface la condición inicial $y(0) = 1$ y predice el comportamiento de esta cuando $x \longrightarrow \infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.

Solución.

$$\begin{aligned} y' &= x^2 - y = c \\ y &= x^2 - c \end{aligned}$$

c	Isoclina
-2	$y_{-2} = x^2 + 2$
-1	$y_{-1} = x^2 + 1$
0	$y_0 = x^2$
1	$y_1 = x^2 - 1$
2	$y_2 = x^2 - 2$



La solución que pasa por $(0,1)$ tiende a ∞ cuando $x \longrightarrow \infty$, y tiende a $-\infty$ cuando $x \longrightarrow -\infty$.

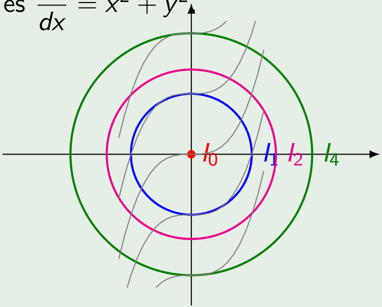
Example

Trace el campo direccional de la E.D. $\frac{dy}{dx} - y^2 = x^2$. Y bosqueje las curvas solución.

Solución. La E.D. en forma normal es $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

$$x^2 + y^2 = c.$$

c	Isoclina
0	$l_0 = x^2 + y^2 = 0$
1	$l_1 = x^2 + y^2 = 1$
2	$l_1 = x^2 + y^2 = 2$
4	$l_4 = x^2 + y^2 = 4$



Note que $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \geqslant 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto, todas las soluciones $y(x)$ de la E.D. son crecientes $\forall x \in \mathbb{R}$.

6. Análisis Cualitativo para E.D. Autónomas.

Definition

Se dice que una E.D. de Primer Orden es una ecuación diferencial **autónoma** si tiene la forma $y' = f(y)$, donde f es una función de valor real ($f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$), esto es, independiente de x.

Example

Veamos si las sig. E.D. son autónomas.

1. $\dfrac{dA}{dt} = kA$, con $A = A(t)$. **(Desintegración Radioactiva)**.
   Solución. k es constante. E.D. autónoma.
2. $\dot{x} = k(x)(n + 1 - x)$, con $x = x(t)$, $k, n \in \mathbb{R}$. **(Poblaciones).**
   Solución. E.D. autónoma.
3. $\dfrac{dN}{dt} = 6t - \dfrac{N}{100}$. **(Mezclas)**.
   Solución. E.D. no autónoma.

4. $\dfrac{dT}{dt} = k(T - T_n)$. **(Ley de Enfriamiento de Newton).**
Solución. $T = T(t)$, k, $T_n \in \mathbb{R}$, E.D. autónoma.

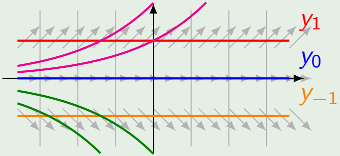
El bosquejo del cambio de dirección de una E.D. de la forma $y' = f(y)$, autónoma, es particularmente sencillo, dado que f es independiente de x. Por lo cual, las pendientes son idénticas a lo largo de rectas (ecuaciones) horizontales.

Example

Considere la E.D. $y' = y$. Usemos el método de las isoclinas para esbozar su gráfica de las soluciones de la E.D.

$y' = y$.

c	Isoclinas
1	$y_{-1} = -1$
0	$y_0 = 0$
1	$y_1 = 1$



Definition

Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un **punto de equilibrio** de una ecuación diferencial autónoma $y' = f(y)$ si a es un cero o raíz de f. A un punto de equilibrio también se le conoce como **punto estacionario**, **punto fijo**, o **punto crítico**.

Todo punto de equilibrio a define una solución constante de la E.D. autónoma.

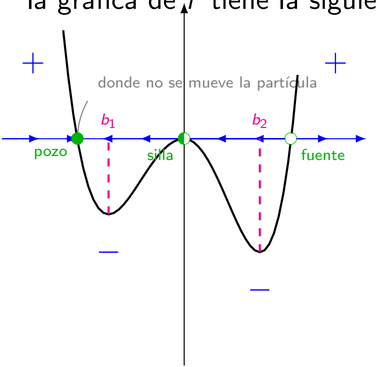
$$y(x) \equiv a, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a tal solución se le conoce como **solución de equilibrio** o **estacionaria**. Veamoslo.
Sea $a \in \mathbb{R}$, un punto de equilibrio de E.D. $f(a) = 0$.
Luego, sea $y(x) \equiv a$, veamos si es solución de la E.D.

$$\begin{aligned} y' &= f(y) \\ 0 = (a)' &= f(a) = 0 \end{aligned}$$

Para las E.D. autónomas su interpretación geométrica queda determinada por $f(y)$. Así pues, averigüar cómo es la pendiente sobre el eje y a partir de la gráfica de f, es de gran utilidad para esbozar las soluciones de la ecuación diferencial y obtener información acerca de su comprtamiento.

Para ilustrar lo anterior, consideremos una E.D. $y' = f(y)$ donde la gráfica de f tiene la siguiente forma.



Imaginemos que $y = y(x)$ es la posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta con el tiempo.

La gráfica de f proporciona información sobre la característica de monotonía y concavidad de las soluciones $y = y(x)$.

Monotonía

1. Si $y' = f(y) > 0$ entonces $y(x)$ es creciente.
2. Si $y' = f(y) < 0$ entonces $y(x)$ es decreciente.

Concavidad

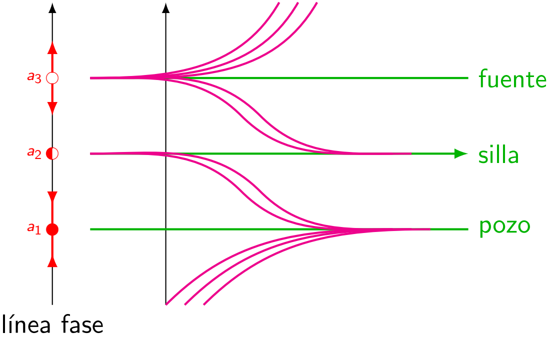
1. $y'' = f'(y) \cdot y' > 0$ entonces $y(x)$ es convexa (cóncava hacia arriba).
2. $y'' = f'(y) \cdot y' < 0$ entonces $y(x)$ es cóncava (cóncava hacia abajo).

También es posible encontrar puntos de inflexión.

$$y \; : \; y'' = f'(y) \cdot y' = 0. \qquad f'(y) \cdot f(y) = 0.$$

$$\iff \underbrace{f'(y) = 0}_{\text{Pts. Inflexión}} \quad \text{o} \quad \underbrace{y' = f(y) = 0.}_{\text{Pts. de Equilibrio}}$$

Para este ejemplo, los puntos de inflexión son $y_1 = b_1$, $y_2 = b_2$ para soluciones.



Intervalos de y	Signo de $y' = f(y)$	Pts. Inflexión	Subintervalos	Signo y''	Características y
$(-\infty, a_1)$	$(+)$	—	—	$y'' = (+)(-) = (-)$	Creciente, cóncava.
(a_1, a_2)	$(-)$	$y_1 = b$	(a_1, b_1)	$y'' = (-)(-) = (+)$	Decreciente, convexa
			(b_1, b_2)	$y'' = (-)(+) = (-)$	Decreciente, cóncava
(a_2, a_3)	$(-)$	$y_2 = b_2$	(a_2, b_3)	$y'' = (-)(-) = (+)$	Decreciente, convexa
			(b_2, a_3)	$y'' = (-)(+) = (-)$	Decreciente, cóncava
(a_3, ∞)	$(+)$	—	—	$y'' = (+)(+) = (+)$	Creciente, convexa

Definition

1. Un punto de equilibrio se dice que un **pozo** o **sumidero** cuando el flujo local a su alrededor del punto se dirige hacia él.
2. Un punto de equilibrio se dice que es una **fuente** cuando el flujo local alrededor del punto se aleja de él.
3. Y un punto de equilibrio se dice **silla** o **nodo** cuando el flujo local por un lado se dirige hacia él, y por el otro lado se aleja,

Definition

Al punto de equilibrio pozo o sumidero, se le conoce como **punto de equilibrio estable**, a la fuente como **punto de equilibrio inestable** y a los puntos silla como **semiestables**.

Definition

El **retrato fase** es el conjunto de todas las soluciones y se acostumbra a representarlo con una recta real, donde las flechas representan al campo vectorial y los puntos corresponden a los puntos de equilibrio y su estabilidad.

También se le conoce como **línea fase** o **retrato fase unidimensional**.

Example

Considere la E.D. autónoma $y' - y^3 + 2y^2 - y = 0$.

1. Determine las soluciones de equilibrio y utilice la línea fase para clasificarlas como pozos, fuentes o sillas.
2. Esboza algunas curvas solución de la E.D. incluyendo las soluciones de equilibrio.
3. Indica el comportamiento de la solución que satisface la condición inicial $y(0) = 1/2$, cuando $t \longrightarrow \infty$.

Solución.

1. La forma normal de la E.D. es

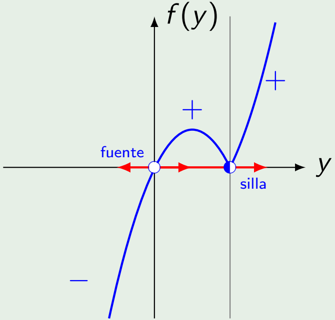
$$y' = y^3 - 2y^2 + y = y(y^2 - 2y + 1) = y(y-1)^2 = f(y).$$

Encontremos y tal que $f(y) = 0$, es decir

$$\begin{aligned} y(y-1)^2 &= 0 \\ \iff y_1 = 0 \quad &\text{ó} \quad (y-1)^2 = 0. \\ \iff \quad &\quad y_2 = 1. \end{aligned}$$

$\therefore$ se tienen 2 puntos.
Luego, las soluciones de equilibrio son $y_1(x) = 0$ y $y_2(x) = 1$.

Grafiquemos $f(y)$, para determinar la línea fase.



Por lo tanto $y_1 = 0$ es fuente, y $y_2 = 1$ es silla.

Los puntos de inflexión son los y tal que $f(y) = 0$, pero no son puntos de equilibrio. Derivemos.

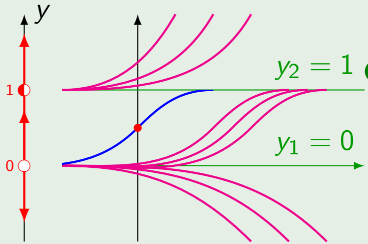
$$\begin{aligned} f'(y) &= 3y^2 - 4y + 1 \\ &= (3y-1)(y-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\iff 3y - 1 = 0 \quad \text{ó} \quad y - 1 = 0$$

$$\iff y_1 = \frac{1}{3} \qquad\qquad y_2 = 1$$

pto. inflexión — pto. de equlibrio

2



3 La solución que pasa por $(0, 1/2)$ tiende a la recta $y = 1$ cuando $t \longrightarrow \infty$,

Intervalos	Signo de $y' = f(y)$	P.I.	Subintervalos	Signo y''	Características $y(t)$
$(-\infty, 0)$	$(-)$	—	$(-\infty, 0)$	$(-)(+) = (-)$	Decreciente, cóncava
$(0, 1)$	$(+)$	$y_1 = 1/3$	$(0, 1/3)$	$(+)(+) = (+)$	Creciente, convexa
		—	$(1/3, 1)$	$(+)(-) = (-)$	Creciente, cóncava
$(1, \infty)$	$(+)$	—	$(1, \infty)$	$(+)(+) = (+)$	Creciente, convexa

Example

Considere la E.D. $y' = -(y-1)^{5/3}(y-2)^2(y-3)$. Encuentre la solución de equilibrio de la ecuación diferencial y clasifíquelos usando la línea fase. Esboce algunas soluciones incluyendo las soluciones de equilibrio, considerando su característica de monotonía y concavidad. Por último, predecir el comportamiento que tiene la solución que satisface $y(0) = 2.1$ cuando $t \longrightarrow \infty$.

Solución. La forma normal de la E.D. es

$$y' = -(y-1)^{5/3}(y-2)^2(y-3) = f(y).$$

Encontremos y tal que $f(y) = 0$, es decir

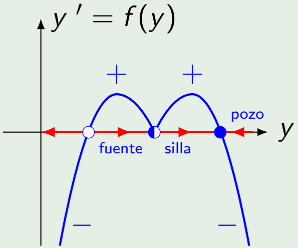
$$\begin{aligned}
-(y-1)^{5/3}(y-2)^2(y-3) &= 0 \\
\iff (y-1)^{5/3} = 0 \text{ ó } (y-2)^2 &= 0 \text{ ó } y-3=0 \\
\iff y_1 = 1 \qquad \text{ó} \quad y_2 = 2 & \qquad \text{ó } y_3 = 3.
\end{aligned}$$

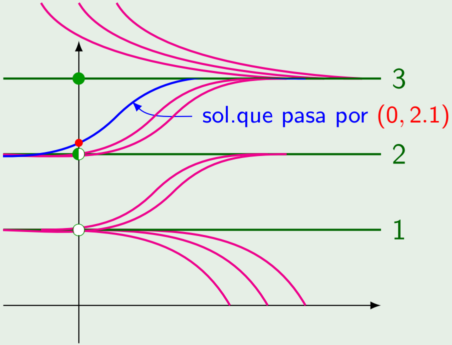
$\therefore$ se tienen 3 puntos de equilibrio.

Luego, las soluciones de equilibrio son

$$y(x) = 1\ ,\ y(x) = 2\ ,\ y_3(x) = 3.$$

grafiquemos para determinar la línea fase.





$$f'(y) = -\frac{2}{3}(y-2)(y-1)^{2/3}(7y^2 - 29y + 27) = 0$$
$$\tilde{y}_1 = 2\ ,\ \tilde{y}_2 = 1\ ,\ \tilde{y}_3 = 2.73\ ,\ \tilde{y}_4 = 1.41.$$

Intervalos de y	Signo de $y' = f(y)$	P.I.	Subintervalos	Signo de	Características $y(x)$
$(-\infty, 1)$	$(-)$	—	$(-\infty, 1)$	$(-)(+) = (-)$	Decreciente, cóncava
$(1, 2)$	$(+)$	$y_4 = 1.41$	$(1, 1.41)$	$(+)(+) = (+)$	Creciente, convexa
			$(1.41, 2)$	$(+)(-) = (-)$	Creciente, cóncava
$(2, 3)$	$(+)$	$y_3 = 2.73$	$(2, 273)$	$(+)(+) = (+)$	Creciente, cóncava
			$(2.73, 3)$	$(+)(-) = (-)$	Creciente convexa
$(3, \infty)$	$(-)$	—	$(3, \infty)$	$(-)(-) = (+)$	Decreciente, convexa

La solución que pasa por $(0, 2.1)$ tiende a la recta $y = 3$, cuando $t \longrightarrow \infty$.

Ejercicio

Considere la E.D. $\dfrac{y'}{y+2})y^2 - 2y + \frac{3}{4}$.

1. Determine los puntos de equilibrio de la E.D. autónoma y clasifícalos usando la línea fase.
2. Indica cuál es el comportamiento de la solución de la E.D. que satisface la C.I. $y(2/3) = 1$, cuando $x \longrightarrow \infty$, usando la línea fase.
3. ¿Qué ocurre con la solución que pasa por $y(1) = 0$ cuando $x \longrightarrow \infty$? Usando la línea fase.