Examen B.

Por Erick I. Rodríguez Juárez.

March 6, 2022

1. *Calsifica las siguientes ecuaciones diferenciales según su tipo, orden y linealidad.*

   Solución.

Ec.	Tipo	Orden	Lineal	V.S.
$\sqrt{1-x}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+2x\cdot\frac{dy}{dx}=y$	Ordinaria	2^{do} Orden	Lineal	No
$y''-t^2yy'=\sin t$	Ordinaria	2^{do} Orden	No lineal	No.

2. *Verifica que la función* $y(x)=3\sin 2x+e^{-x}$ *es solución explícita de la ecuación diferencial*

$$y''+4y=5e^{-x}.$$

   Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} y' &= 6\cos 2x - e^{-x} \\ y'' &= -12\sin 2x + e^{-x} \end{aligned}$$

   Así que

$$(-12\sin 2x+e^{-x})+4(3\sin 2x+e^{-x})=5e^{-x}.$$

3. *Compruebe que* $y-\ln y=x^2+1$ *es solución general de la ecuación diferencial*

$$y'=\frac{2xy}{y-1}.$$

   Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} y'+2\frac{y'}{y}=2x \quad &\Longrightarrow \quad y'\left(1+\frac{2}{y}\right)=2x \\ &\Longrightarrow \quad y'=\frac{2x}{1+2/y}=\frac{2xy}{y+2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4. *Determina si las siguientes ecuciones diferneciales son de V.S. o lineales y resuélvelas con el método correspondiente. En cada inciso, indica cuál es solución general implícita y encuentra la explícita.*

(a) $x \cdot \dfrac{dy}{dx} - 2y = x^3 e^{-x} - 5x$.

Solución. $\boxed{\text{Es lineal. No es de V.S.}}$

Tenemos que

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2 e^{-x} - 5.$$

Entocnes $p(x) = -\dfrac{2}{x}$, luego

$$\mu(x) = e^{\int p} = e^{\int -2/x} = e^{-2\log x} = e^{\log x^{-2}} = x^{-2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
x^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x^3}y &= e^{-x} - 5x^{-2} \\
\frac{d}{dx}\left(x^{-2}y\right) &= e^{-x} - 5x^{-2} \\
\int \frac{d}{dx}\left(x^{-2}y\right)dx &= \int (e^{-x} - 5x^{-2})dx \\
yx^{-2} &= -e^{-x} + \frac{5}{x} + C, \qquad C \in \boldsymbol{R} \\
y &= -x^2 e^{-x} + 5x + Cx^2, \qquad C \in \boldsymbol{R}.
\end{aligned}$$

(b) $(x + xy^2)dx + e^{x^2} y dy = 0$.

Solución. $\boxed{\text{La ecuación es de V.S.}}$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
x(1+y^2)dx + e^{x^2} y dy &= 0 \\
e^{x^2} y dy &= -x(1+y^2)dx \\
\frac{ydy}{1+y^2} &= \frac{-xdx}{e^{x^2}} \\
\int \frac{ydy}{1+y^2} &= \int \frac{-xdx}{e^{x^2}} \\
\frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u} &= -\frac{1}{2}\int \frac{dw}{e^w}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\log(1+u) &= +e^{-w}+C \\
\log(1+y^2) &= e^{-x^2}+C \\
1+y^2 &= e^{e^{-x^2}+C} \\
y &= \pm\sqrt{e^{e^{-x^2}+C}-1}\,, \qquad\qquad C \in \boldsymbol{R}.
\end{aligned}
$$

5. *Resuelve la siguiente ecuación diferencial* $x \cdot \dfrac{dy}{dx} = xy\cos x - 2xy$, *y determina la solución particular explícita que pasa por el punto* $(\pi, 1)$.

Solución. Dividamos entre x, todos los términos.

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= y\cos x - 2y \\
\frac{dy}{dx} - y(\cos x - 2) &= 0.
\end{aligned}
$$

Entonces, se tiene $p(x) = -\cos x + 2$. Luego

$$
\mu(x) = e^{\int p} = e^{\int(-\cos x+2)dx} = e^{-\sin x+2x}.
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
e^{\sin x-2x}\frac{dy}{dx} - ye^{-\sin x+2x}(\cos x-2) &= 0 \\
\frac{d}{dy}\left(ye^{-\sin x+2x}\right) &= 0 \\
ye^{-\sin x+2x} &= k, \qquad\qquad k \in \boldsymbol{R} \\
y &= ke^{\sin x-2x}, \qquad\qquad k \in \boldsymbol{R}.
\end{aligned}
$$

Ahora, se requiere que $y(\pi) = 1$, entonces

$$
1 = y(\pi) = ke^{\sin\pi-2\pi} = ke^{-2\pi}.
$$

Entonces, $k = e^{2\pi}$. La solución del P.V.I. $y(\pi) = 1$, es

$$
y = e^{2\pi}\cdot e^{\sin x-2x}.
$$