Análisis de — Capital Asset Prices — de W. F. Sharpe.

Por Erick I. Rodríguez Juárez.

VALUAMI.

August 9, 2024

Contenido.

Introducción

Ideas Generales.

Ideas Generales.

Definition

Un activo es un bien o servicio que se posee.

Ideas Generales.

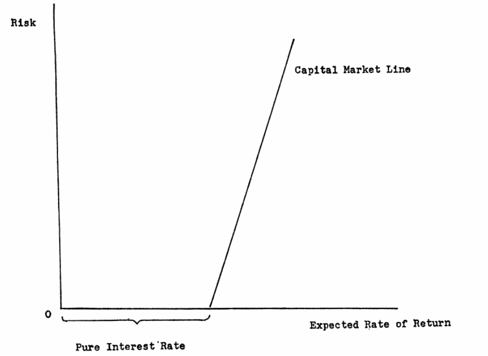
Definition

Un activo es un bien o servicio que se posee.

Ideas Generales.

Definition

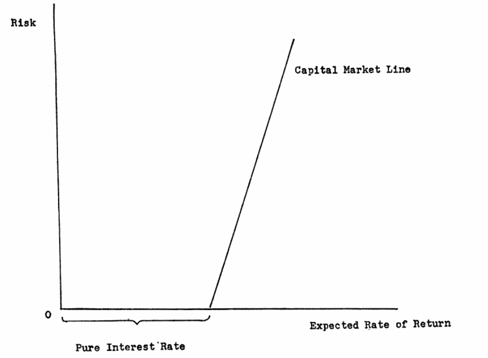
Un activo es un bien o servicio que se posee.



Ideas Generales.

Definition

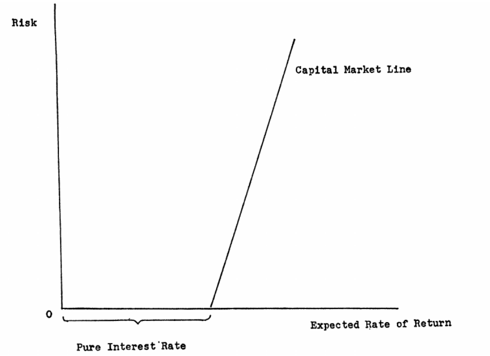
Un activo es un bien o servicio que se posee.



Ideas Generales.

Definition

Un activo es un bien o servicio que se posee.

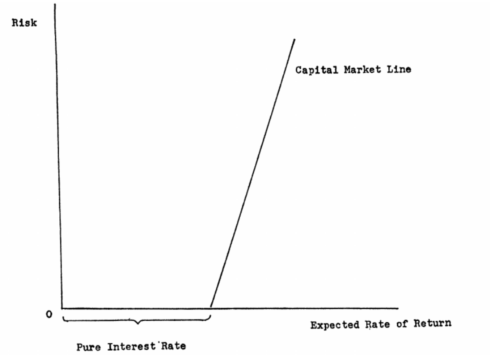


Modelo Básico:

Ideas Generales.

Definition

Un activo es un bien o servicio que se posee.



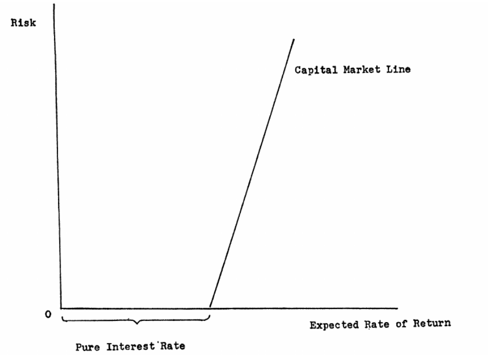
Modelo Básico:

- Precio del tiempo (Interés Puro).

Ideas Generales.

Definition

Un activo es un bien o servicio que se posee.



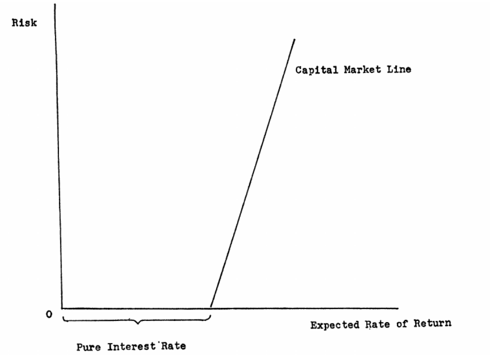
Modelo Básico:

- Precio del tiempo (Interés Puro).
- Precio del riesgo.

Ideas Generales.

Definition

Un activo es un bien o servicio que se posee.



Modelo Básico:

- Precio del tiempo (Interés Puro).
- Precio del riesgo.

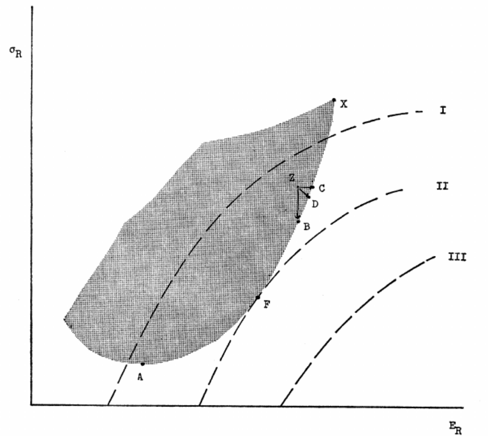
Supuesto:

Relaciones acordadas entre individuos.

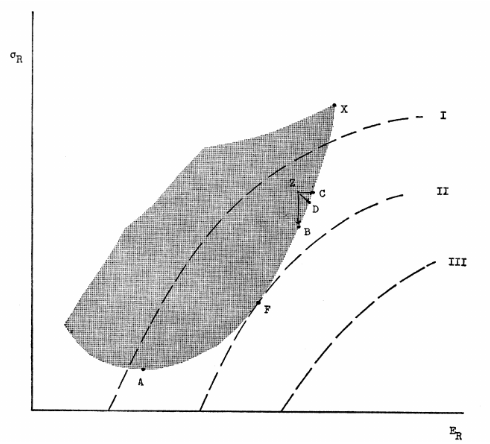
Ideas Generales.

Ideas Generales.

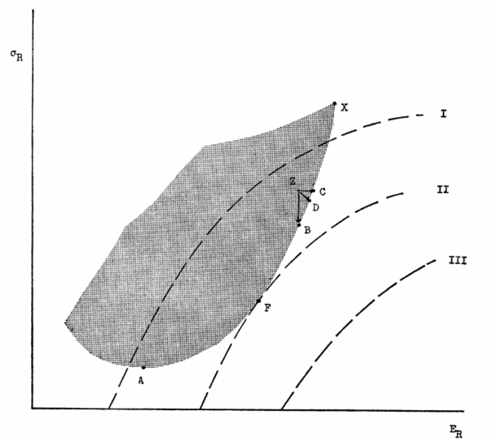
Ideas Generales.



Ideas Generales.



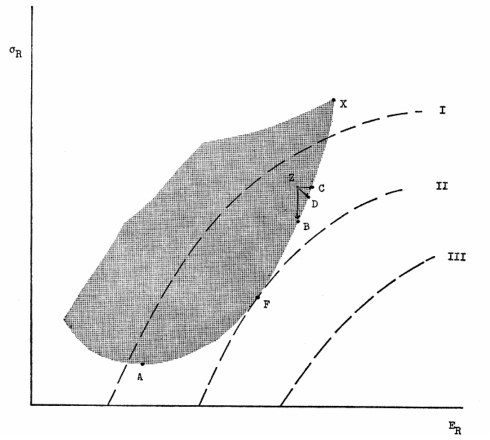
Ideas Generales.



Propuesta [1]:

Hacer que la función de utilidad dependa de:

Ideas Generales.

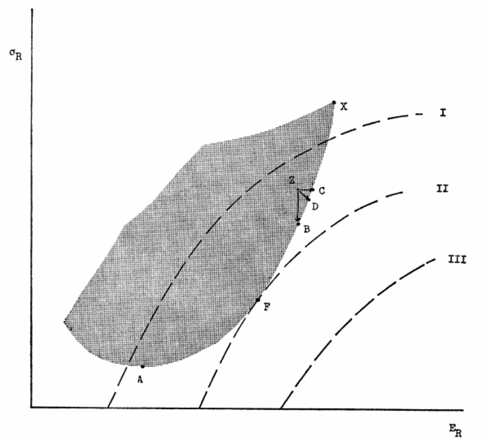


Propuesta [1]:

Hacer que la función de utilidad dependa de:

- $E(W)$,

Ideas Generales.

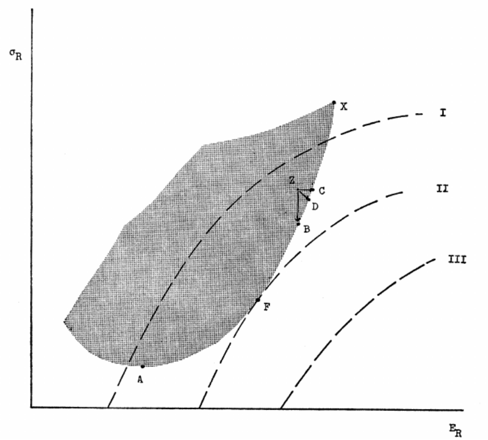


Propuesta [1]:

Hacer que la función de utilidad dependa de:

- $E(W)$,
- $\sigma(W)$.

Ideas Generales.



Propuesta [1]:

Hacer que la función de utilidad dependa de:

- $E(W)$,
- $\sigma(W)$.

Es decir, sea de la forma:

$$U = f(E_W, \sigma_W).$$

Con $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ideas Generales.

Ideas Generales.

Última simplificación:

Se supone al inicio del análisis, que el inversor, ya ha dado una cantidad W_0 al activo.

Ideas Generales.

Última simplificación:

Se supone al inicio del análisis, que el inversor, ya ha dado una cantidad W_0 al activo.

Supongamos que después de una cantidad fija T de tiempo (fija para cualquier inversión), devuelve una cantidad terminal W_T, al inversionista.

Ideas Generales.

Última simplificación:

Se supone al inicio del análisis, que el inversor, ya ha dado una cantidad W_0 al activo.

Supongamos que después de una cantidad fija T de tiempo (fija para cualquier inversión), devuelve una cantidad terminal W_T, al inversionista.

Por tanto, la taza de regreso es:

$$R_W = \frac{W_T - W_0}{W_0}.$$

Ideas Generales.

Última simplificación:

Se supone al inicio del análisis, que el inversor, ya ha dado una cantidad W_0 al activo.

Supongamos que después de una cantidad fija T de tiempo (fija para cualquier inversión), devuelve una cantidad terminal W_T, al inversionista.

Por tanto, la taza de regreso es:

$$R_W = \frac{W_T - W_0}{W_0}.$$

Es decir, $W_T = RW_0 + W_0$.

Ideas Generales.

Ideas Generales.

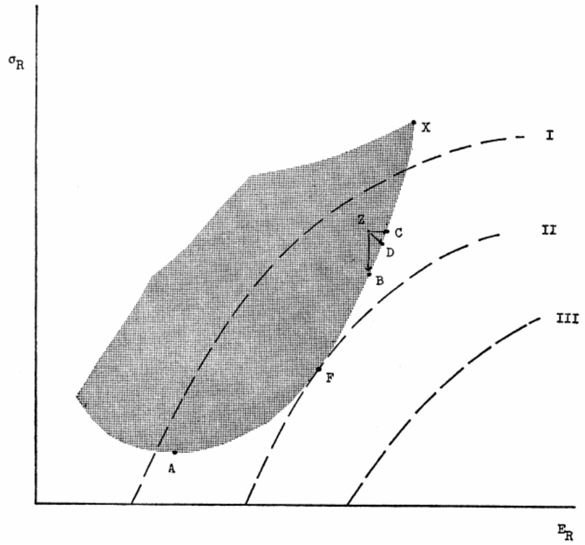
Así, ver a W_T como variable aleatoria es equivalente a ver

$$R_W$$

como variable aleatoria.
El artículo trabaja sobre R vista como variable aleatoria y

$$U = g(E_R, \sigma_R).$$

Definiciones.



Definiciones.

Definiciones.

Definition

Sea (Ω, Σ, P) espacio de probablidad

Definiciones.

Definition

Sea (Ω, Σ, P) espacio de probablidad
Decimos que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible si

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad X^{-1}((-\infty, a]) \in \Sigma.$$

Definiciones.

Definition

Sea (Ω, Σ, P) espacio de probablidad
Decimos que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible si

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad X^{-1}((-\infty, a]) \in \Sigma.$$

Definimos $Med(\Omega) = \{X \in \mathbb{R}^{\Omega} : X \text{ es medible}\}$.

Definiciones.

Definition

Sea (Ω, Σ, P) espacio de probablidad
Decimos que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible si

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad X^{-1}((-\infty, a]) \in \Sigma.$$

Definimos $Med(\Omega) = \{X \in \mathbb{R}^{\Omega} : X \text{ es medible}\}$.

Definiciones.

Definition

Sea (Ω, Σ, P) espacio de probablidad
Decimos que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible si

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad X^{-1}((-\infty, a]) \in \Sigma.$$

Definimos $Med(\Omega) = \{X \in \mathbb{R}^{\Omega} : X \text{ es medible}\}$.

Definition

Sea $\mathscr{R} \subseteq Med(\Omega)$.

Definiciones.

Definition

Sea (Ω, Σ, P) espacio de probablidad
Decimos que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible si

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad X^{-1}((-\infty, a]) \in \Sigma.$$

Definimos $Med(\Omega) = \{X \in \mathbb{R}^{\Omega} : X \text{ es medible}\}$.

Definition

Sea $\mathscr{R} \subseteq Med(\Omega)$.

En nuestro caso, $\mathscr{R}$ representa el conjunto de opciones de inversión.

Definiciones.

Definiciones.

Axiomas de vNM:

Supondremos que existen dos relaciones $\leqslant, \sim \subseteq \mathscr{R}^2$ tales que se tienen las sig. propiedades:

Definiciones.

Axiomas de vNM:

Supondremos que existen dos relaciones $\leqslant, \sim \subseteq \mathscr{R}^2$ tales que se tienen las sig. propiedades:

- (Completez)
  $\mathscr{R}$ es totalmente ordenado.
  Es decir, existe $\leqslant \subseteq \mathscr{R}^2$, tal que

$$\forall L, M \in \mathscr{R} \ , \ (L \leqslant M) \ \vee \ (M \leqslant L).$$

Definiciones.

Axiomas de vNM:

Supondremos que existen dos relaciones $\leqslant, \sim \subseteq \mathscr{R}^2$ tales que se tienen las sig. propiedades:

- (Completez)
  $\mathscr{R}$ es totalmente ordenado.
  Es decir, existe $\leqslant \subseteq \mathscr{R}^2$, tal que

$$\forall L, M \in \mathscr{R} \ , \ (L \leqslant M) \ \vee \ (M \leqslant L).$$

- (Transitividad)

$$(L \leqslant M) \ \wedge \ (M \leqslant N) \quad \Rightarrow \quad (L \leqslant N).$$

Definiciones.

Definiciones.

Axiomas de vNM:

Definiciones.

Axiomas de vNM:

- (Indiferencia)
  $\sim$ es relación de equivalencia.
  $L \sim M$ se interpreta que al individuo le es *indiferente* seguir el plan L al plan M.

Definiciones.

Axiomas de vNM:

- (Indiferencia)
  $\sim$ es relación de equivalencia.
  $L \sim M$ se interpreta que al individuo le es *indiferente* seguir el plan L al plan M.
- (Continuidad)
  Si $L \leqslant M \leqslant N$, entonces $\exists p \in [0,1]$,

$$pL + (1-p)N \sim M.$$

Definiciones.

Axiomas de vNM:

- (Indiferencia)
  $\sim$ es relación de equivalencia.
  $L \sim M$ se interpreta que al individuo le es *indiferente* seguir el plan L al plan M.
- (Continuidad)
  Si $L \leqslant M \leqslant N$, entonces $\exists p \in [0,1]$,
  $$pL + (1-p)N \sim M.$$
- (Independencia)
  $\forall L, M, N \in \mathscr{R}$, $\forall p \in [0,1)$,
  $$L \leqslant N \iff (1-p)L + pM \leqslant (1-p)N + pM.$$

Definiciones.

Definiciones.

Theorem (von-Neumann Morgenstern)

Si se satisfacen los axiomas anteriores, $\exists u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, tal que*

$$L \leqslant M \iff E(u(L)) \leqslant E(u(M)).$$

Definiciones.

Theorem (von-Neumann Morgenstern)

Si se satisfacen los axiomas anteriores, $\exists u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, tal que*

$$L \leqslant M \iff E(u(L)) \leqslant E(u(M)).$$

Así, se tienen ordenadas las esperanzas, y el eje E_R.

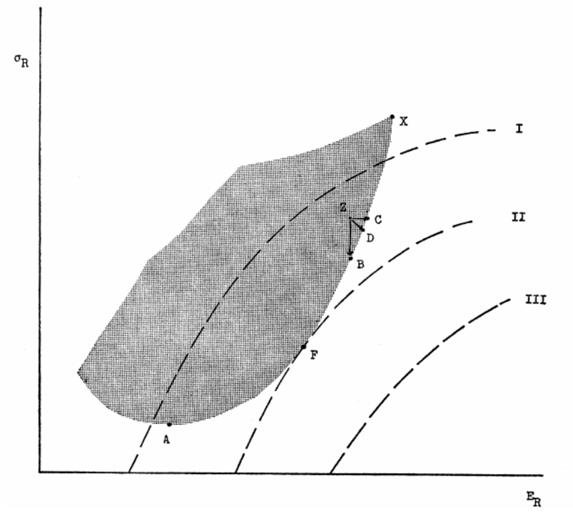
Política de Inversión Óptima

2. Política de Inversión Óptima
   - Función de Preferencia del Inversor.

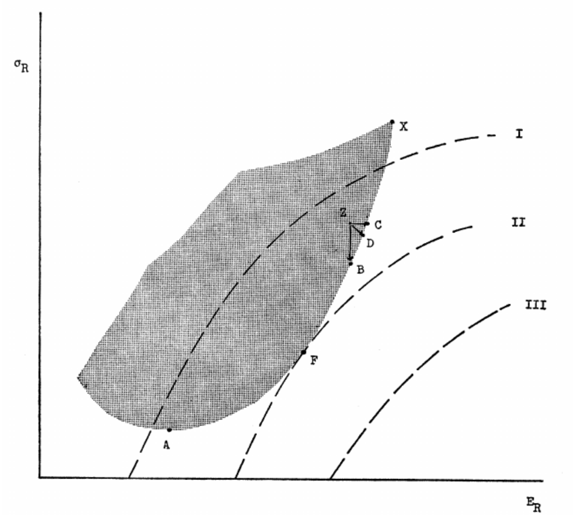
Función de Preferencia del Inversor.

Función de Preferencia del Inversor.

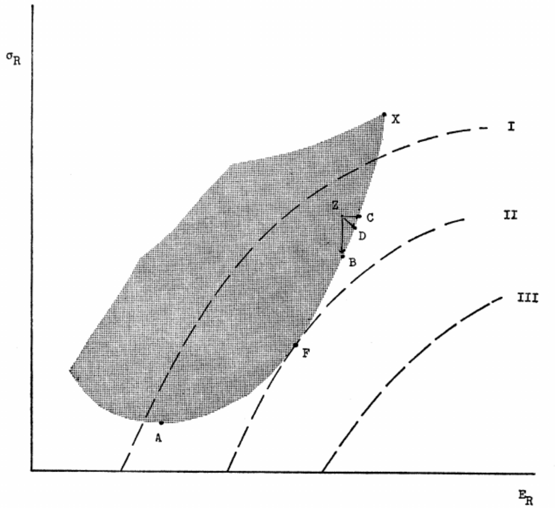
Función de Preferencia del Inversor.



Función de Preferencia del Inversor.

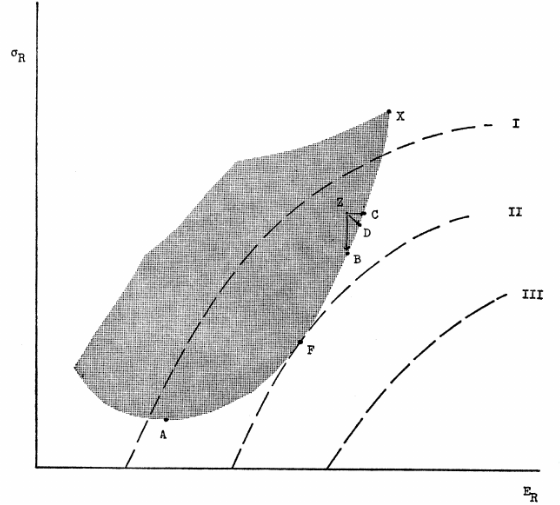


Función de Preferencia del Inversor.



Se espera que

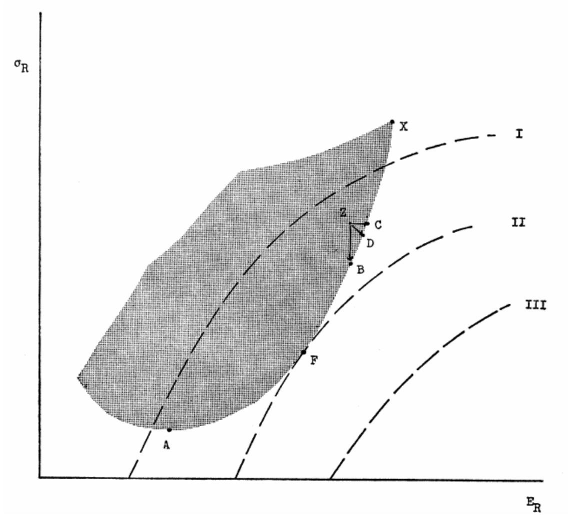
Función de Preferencia del Inversor.



Se espera que

- $\dfrac{\partial U}{\partial E_W} > 0,$

Función de Preferencia del Inversor.



Se espera que

- $\dfrac{\partial U}{\partial E_W} > 0$,
- $\dfrac{\partial U}{\partial \sigma_W} < 0$.

Función de Preferencia del Inversor.

Función de Preferencia del Inversor.

Justificación de las curvas de nivel:

Suponer que $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.

Función de Preferencia del Inversor.

Justificación de las curvas de nivel:

Suponer que $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.

Suponer que existe una curva diferenciable $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

Función de Preferencia del Inversor.

Justificación de las curvas de nivel:

Suponer que $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.
Suponer que existe una curva diferenciable $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$F \circ \gamma \equiv k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

Función de Preferencia del Inversor.

Justificación de las curvas de nivel:

Suponer que $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.
Suponer que existe una curva diferenciable $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$F \circ \gamma \equiv k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

Entonces, por la Regla de la Cadena:

$$0 = Dk = D(F \circ \gamma)$$

Función de Preferencia del Inversor.

Justificación de las curvas de nivel:

Suponer que $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.
Suponer que existe una curva diferenciable $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$F \circ \gamma \equiv k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

Entonces, por la Regla de la Cadena:

$$0 = Dk = D(F \circ \gamma) \quad = \quad DF(\gamma) \cdot \gamma'$$

Función de Preferencia del Inversor.

Justificación de las curvas de nivel:

Suponer que $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.
Suponer que existe una curva diferenciable $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$F \circ \gamma \equiv k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

Entonces, por la Regla de la Cadena:

$$\begin{aligned} 0 = Dk = D(F \circ \gamma) &= DF(\gamma) \cdot \gamma' \\ &= \nabla F(\gamma) \cdot \gamma' \end{aligned}$$

Función de Preferencia del Inversor.

Justificación de las curvas de nivel:

Suponer que $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.
Suponer que existe una curva diferenciable $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$F \circ \gamma \equiv k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

Entonces, por la Regla de la Cadena:

$$\begin{aligned} 0 = Dk = D(F \circ \gamma) &= DF(\gamma) \cdot \gamma' \\ &= \nabla F(\gamma) \cdot \gamma' \\ &= [\partial F/\partial x \,,\ \partial F/\partial y] \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Función de Preferencia del Inversor.

Justificación de las curvas de nivel:

Suponer que $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.
Suponer que existe una curva diferenciable $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$F \circ \gamma \equiv k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

Entonces, por la Regla de la Cadena:

$$\begin{aligned} 0 = Dk = D(F \circ \gamma) &= DF(\gamma) \cdot \gamma' \\ &= \nabla F(\gamma) \cdot \gamma' \\ &= [\partial F/\partial x \,,\ \partial F/\partial y] \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Es decir: $\gamma(t)$ es ortogonal a $\nabla F(\gamma(t))$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Función de Preferencia del Inversor.

Función de Preferencia del Inversor.

Función de Preferencia del Inversor.

Función de Preferencia del Inversor.

En nuestro caso:

$$\nabla U = [\partial U / \partial E_W \, , \; \partial U / \partial \sigma_W]$$

con $\dfrac{\partial U}{\partial E_W} > 0$, y $\dfrac{\partial U}{\partial \sigma_W} < 0$.

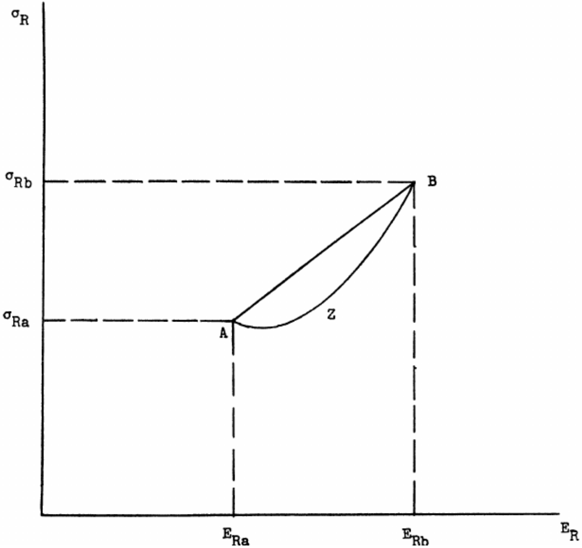
Función de Preferencia del Inversor.

En nuestro caso:

$$\nabla U = [\partial U / \partial E_W \, , \; \partial U / \partial \sigma_W]$$

con $\dfrac{\partial U}{\partial E_W} > 0$, y $\dfrac{\partial U}{\partial \sigma_W} < 0$.

Función de Preferencia del Inversor.



Función de Preferencia del Inversor.

Función de Preferencia del Inversor.

Suponer que hay dos posibles inversiones a y b.
Con variables aleatorias $R_a, R_b : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
Queremos expresar la inversión combinada de ambos planes.
Se define, para $\alpha \in [0, 1]$,

$$R_c = \alpha R_a + (1 - \alpha) R_b.$$

Por tanto,

$$E(R_c) = \alpha(E_a) + (1 - \alpha)E(R_b).$$

Función de Preferencia del Inversor.

Función de Preferencia del Inversor.

Además

$$
\begin{aligned}
var(R_c) &= \alpha^2 var(R_a) + (1-\alpha)^2 var(R_b) + 2 \cdot cov(R_a, R_b) \\
&= \alpha^2 \sigma_a^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_b^2 + 2 \cdot \rho_{a,b} \cdot \sigma_a \sigma_b.
\end{aligned}
$$

Puesto que $\rho_{a,b} = \dfrac{cov(R_a, R_b)}{\sigma_a \sigma_b}$. Finalmente

$$
\sigma_c = \sqrt{\alpha^2 \sigma_a^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_b^2 + 2 \cdot \rho_{a,b} \cdot \sigma_a \cdot \sigma_b}.
$$

Función de Preferencia del Inversor.

Función de Preferencia del Inversor.

A value of $\rho_{a,b} = 1$, would indicate an investor's belief that there is a precise positive relation- ship between the outcomes of the two investments.

Función de Preferencia del Inversor.

A value of $\rho_{a,b} = 1$, would indicate an investor's belief that there is a precise positive relation- ship between the outcomes of the two investments.

Teorema. *Si $r(X, Y) = 1$, entonces existen $m, b \in \mathbf{R}$ tales que $Y = mX + b$.*

Función de Preferencia del Inversor.

A value of $\rho_{a,b} = 1$, would indicate an investor's belief that there is a precise positive relation- ship between the outcomes of the two investments.

Teorema. *Si $r(X, Y) = 1$, entonces existen $m, b \in \boldsymbol{R}$ tales que $Y = mX + b$.*

Demostración. Definimos $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ por

$f(t) = \boldsymbol{E}\Big[(Y - \boldsymbol{E}Y) + t(X - \boldsymbol{E}X)\Big]^2$, entonces

Función de Preferencia del Inversor.

A value of $\rho_{a,b} = 1$, would indicate an investor's belief that there is a precise positive relation- ship between the outcomes of the two investments.

Teorema. *Si $r(X, Y) = 1$, entonces existen $m, b \in \boldsymbol{R}$ tales que $Y = mX + b$.*

Demostración. Definimos $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ por $f(t) = \boldsymbol{E}\Big[(Y - \boldsymbol{E}Y) + t(X - \boldsymbol{E}X)\Big]^2$, entonces

$$f(t) = \boldsymbol{E}(Y - \boldsymbol{E}Y)^2 + 2t \cdot \boldsymbol{E}(Y - \boldsymbol{E}Y)(X - \boldsymbol{E}X) + t^2\boldsymbol{E}(X - \boldsymbol{E}X)^2$$

FUNCIÓN DE PREFERENCIA DEL INVERSOR.

A value of $\rho_{a,b} = 1$, would indicate an investor's belief that there is a precise positive relation- ship between the outcomes of the two investments.

Teorema. *Si $r(X, Y) = 1$, entonces existen $m, b \in \boldsymbol{R}$ tales que $Y = mX + b$.*

Demostración. Definimos $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ por
$f(t) = \boldsymbol{E}\Big[(Y - \boldsymbol{E}Y) + t(X - \boldsymbol{E}X)\Big]^2$, entonces

$$\begin{aligned} f(t) &= \boldsymbol{E}(Y - \boldsymbol{E}Y)^2 + 2t \cdot \boldsymbol{E}(Y - \boldsymbol{E}Y)(X - \boldsymbol{E}X) + t^2 \boldsymbol{E}(X - \boldsymbol{E}X)^2 \\ &= var(Y) + 2cov(X, Y) \cdot t + var(X) \cdot t^2. \end{aligned}$$

Función de Preferencia del Inversor.

A value of $\rho_{a,b} = 1$, would indicate an investor's belief that there is a precise positive relation- ship between the outcomes of the two investments.

Teorema. *Si $r(X,Y) = 1$, entonces existen $m, b \in \boldsymbol{R}$ tales que $Y = mX + b$.*

Demostración. Definimos $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ por
$f(t) = \boldsymbol{E}\Big[(Y - \boldsymbol{E}Y) + t(X - \boldsymbol{E}X)\Big]^2$, entonces

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \boldsymbol{E}(Y - \boldsymbol{E}Y)^2 + 2t \cdot \boldsymbol{E}(Y - \boldsymbol{E}Y)(X - \boldsymbol{E}X) + t^2 \boldsymbol{E}(X - \boldsymbol{E}X)^2 \\
&= var(Y) + 2cov(X,Y) \cdot t + var(X) \cdot t^2.
\end{aligned}
$$

Entonces f es un polinomio en t.

Función de Preferencia del Inversor.

Si $r(X,Y)=1$ $(r^2(X,Y)=1)$, entonces $\dfrac{cov^2(X,Y)}{var(X)\cdot var(Y)}=1$,

Función de Preferencia del Inversor.

Si $r(X, Y) = 1$ $(r^2(X, Y) = 1)$**, entonces** $\dfrac{cov^2(X, Y)}{var(X) \cdot var(Y)} = 1$**,**

$$\therefore \qquad cov^2(X, Y) - var(X) \cdot var(Y) = 0$$

$$\therefore \quad \Big[2cov(X, Y)\Big]^2 - 4var(X)var(Y) = 0$$

Función de Preferencia del Inversor.

Si $r(X,Y)=1$ $(r^2(X,Y)=1)$, entonces $\dfrac{cov^2(X,Y)}{var(X)\cdot var(Y)}=1$,

$$\therefore \qquad cov^2(X,Y)-var(X)\cdot var(Y)=0$$

$$\therefore \quad \Big[2cov(X,Y)\Big]^2-4var(X)var(Y)=0$$

i.e. el discriminante de f es 0. Y por tanto f se anula una única vez en un número $a\in\boldsymbol{R}$,

$$0=f(a)=\boldsymbol{E}\Big[(Y-\boldsymbol{E}Y)+a(X-\boldsymbol{E}X)\Big]^2$$

Función de Preferencia del Inversor.

Si $r(X,Y) = 1$ ($r^2(X,Y) = 1$), entonces $\dfrac{cov^2(X,Y)}{var(X) \cdot var(Y)} = 1$,

$$\therefore \qquad cov^2(X,Y) - var(X) \cdot var(Y) = 0$$

$$\therefore \quad \left[2cov(X,Y)\right]^2 - 4var(X)var(Y) = 0$$

i.e. el discriminante de f es 0. Y por tanto f se anula una única vez en un número $a \in \boldsymbol{R}$,

$$0 = f(a) = \boldsymbol{E}\Big[(Y - \boldsymbol{E}Y) + a(X - \boldsymbol{E}X)\Big]^2$$

Ahora, si U es variable aleatoria discreta con

Función de Preferencia del Inversor.

Si $r(X,Y)=1$ ($r^2(X,Y)=1$), entonces $\dfrac{cov^2(X,Y)}{var(X)\cdot var(Y)}=1$,

$$\therefore \qquad cov^2(X,Y)-var(X)\cdot var(Y)=0$$

$$\therefore \quad \Big[2cov(X,Y)\Big]^2-4var(X)var(Y)=0$$

i.e. el discriminante de f es 0. Y por tanto f se anula una única vez en un número $a\in\boldsymbol{R}$,

$$0=f(a)=\boldsymbol{E}\Big[(Y-\boldsymbol{E}Y)+a(X-\boldsymbol{E}X)\Big]^2$$

Ahora, si U es variable aleatoria discreta con

- $U\geqslant 0$,

Función de Preferencia del Inversor.

Si $r(X,Y)=1$ ($r^2(X,Y)=1$), entonces $\dfrac{cov^2(X,Y)}{var(X)\cdot var(Y)}=1$,

$$\therefore \qquad cov^2(X,Y)-var(X)\cdot var(Y)=0$$

$$\therefore \quad \big[2cov(X,Y)\big]^2-4var(X)var(Y)=0$$

i.e. el discriminante de f es 0. Y por tanto f se anula una única vez en un número $a\in \boldsymbol{R}$,

$$0=f(a)=\boldsymbol{E}\Big[(Y-\boldsymbol{E}Y)+a(X-\boldsymbol{E}X)\Big]^2$$

Ahora, si U es variable aleatoria discreta con

- $U\geqslant 0$,
- $E(U)=0$.

Función de Preferencia del Inversor.

Por tanto, $\forall x_i \in ImU$**,**

$$0 \geqslant \boldsymbol{E}(U) =$$

Función de Preferencia del Inversor.

Por tanto, $\forall x_i \in ImU$,

$$0 \geqslant \boldsymbol{E}(U) = \sum_{i=0}^{n} x_i P(U = x_i)$$

Función de Preferencia del Inversor.

Por tanto, $\forall x_i \in ImU$**,**

$$0 \geqslant \boldsymbol{E}(U) = \sum_{i=0}^{n} x_i P(U = x_i) \geqslant x_i P(U = x_i) \geqslant 0.$$

Entonces $x_i \cdot P(U = x_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_i = 0\ ,\ \forall x_i \in ImU$**.**

Función de Preferencia del Inversor.

Por tanto, $\forall x_i \in ImU$,

$$0 \geqslant \boldsymbol{E}(U) = \sum_{i=0}^{n} x_i P(U = x_i) \geqslant x_i P(U = x_i) \geqslant 0.$$

Entonces $x_i \cdot P(U = x_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_i = 0 \ , \ \forall x_i \in ImU$.
Luego $U = 0$.

Función de Preferencia del Inversor.

Por tanto, $\forall x_i \in ImU$,

$$0 \geqslant \boldsymbol{E}(U) = \sum_{i=0}^{n} x_i P(U = x_i) \geqslant x_i P(U = x_i) \geqslant 0.$$

Entonces $x_i \cdot P(U = x_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_i = 0 \ , \ \forall x_i \in ImU$.
Luego $U = 0$. Hemos provado que

$$\boldsymbol{E}\Big[(Y - \mathbb{E}Y) + a(X - \mathbb{E}X)\Big]^2 = 0$$

Función de Preferencia del Inversor.

Por tanto, $\forall x_i \in ImU$,

$$0 \geqslant \boldsymbol{E}(U) = \sum_{i=0}^{n} x_i P(U = x_i) \geqslant x_i P(U = x_i) \geqslant 0.$$

Entonces $x_i \cdot P(U = x_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_i = 0\ ,\ \forall x_i \in ImU$.
Luego $U = 0$. Hemos provado que

$$\boldsymbol{E}\Big[(Y - \mathbb{E}Y) + a(X - \mathbb{E}X)\Big]^2 = 0$$

Vemos que $Y - \boldsymbol{E}Y + a(X - \boldsymbol{E}X) = 0$, y en consecuencia,

$$Y = -aX + (a\boldsymbol{E}X + \boldsymbol{E}Y).$$

Función de Preferencia del Inversor.

El número a en el que se anula

$$f(t) = var(Y) + 2cov(X,Y) \cdot t + var(X) \cdot t^2,$$

es:

$$a = \frac{-2cov(X,Y) \pm \sqrt{0}}{2var(X)}.$$

Entonces $(-a) > 0$, porque $r(X,Y) = 1$, indica que $cov(X,Y) > 0$.

$$Y = -aX + (a\boldsymbol{E}X + \boldsymbol{E}Y).$$

La correlación lineal es positiva. ▮

Función de Preferencia del Inversor.

Función de Preferencia del Inversor.

A value of $\rho_{a,b} = 0$ would indicate a belief that the outcomes of the two investments are completely independent

Función de Preferencia del Inversor.

A value of $\rho_{a,b} = 0$ would indicate a belief that the outcomes of the two investments are completely independent

Contraejemplo: Considere una variable aleatoria discreta $X : \Omega \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$ sobreyectiva con

$$P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{3}.$$

Considere $Y = X^2$.

Función de Preferencia del Inversor.

A value of $\rho_{a,b} = 0$ would indicate a belief that the outcomes of the two investments are completely independent

Contraejemplo: Considere una variable aleatoria discreta $X : \Omega \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$ sobreyectiva con

$$P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{3}.$$

Considere $Y = X^2$.
Entonces

$$P(X = -1, Y = 0) =$$

Función de Preferencia del Inversor.

A value of $\rho_{a,b} = 0$ would indicate a belief that the outcomes of the two investments are completely independent

Contraejemplo: Considere una variable aleatoria discreta $X : \Omega \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$ sobreyectiva con

$$P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{3}.$$

Considere $Y = X^2$.
Entonces

$$P(X = -1, Y = 0) = P(X = -1, X^2 = 0) \quad = \quad P(X = -1, X = 0)$$

Función de Preferencia del Inversor.

A value of $\rho_{a,b} = 0$ would indicate a belief that the outcomes of the two investments are completely independent

Contraejemplo: Considere una variable aleatoria discreta $X : \Omega \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$ sobreyectiva con

$$P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{3}.$$

Considere $Y = X^2$.
Entonces

$$\begin{aligned} P(X = -1, Y = 0) = P(X = -1, X^2 = 0) &= P(X = -1, X = 0) \\ &= P(\varnothing) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Función de Preferencia del Inversor.

Pero

$$P(X=-1)\cdot P(Y=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\neq 0=P(X=-1,Y=0).$$

Función de Preferencia del Inversor.

Pero

$$P(X=-1)\cdot P(Y=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\neq 0=P(X=-1,Y=0).$$

Entonces X y Y no son independientes.

Función de Preferencia del Inversor.

Pero

$$P(X=-1)\cdot P(Y=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\neq 0=P(X=-1,Y=0).$$

Entonces X y Y no son independientes.

Notar que

$$E(X)=\frac{1}{3}\cdot(-1)+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1=0.$$

Función de Preferencia del Inversor.

Pero

$$P(X=-1)\cdot P(Y=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\neq 0=P(X=-1,Y=0).$$

Entonces X y Y no son independientes.

Notar que

$$E(X)=\frac{1}{3}\cdot(-1)+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1=0.$$

Indicando

$$E(XY)=$$

Función de Preferencia del Inversor.

Pero

$$P(X=-1)\cdot P(Y=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\neq 0=P(X=-1,Y=0).$$

Entonces X y Y no son independientes.

Notar que

$$E(X)=\frac{1}{3}\cdot(-1)+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1=0.$$

Indicando

$$E(XY)=E(X^3)=$$

Función de Preferencia del Inversor.

Pero

$$P(X=-1)\cdot P(Y=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\neq 0=P(X=-1,Y=0).$$

Entonces X y Y no son independientes.

Notar que

$$E(X)=\frac{1}{3}\cdot(-1)+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1=0.$$

Indicando

$$E(XY)=E(X^3)=E(X)=$$

Función de Preferencia del Inversor.

Pero

$$P(X=-1)\cdot P(Y=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\neq 0=P(X=-1,Y=0).$$

Entonces X y Y no son independientes.

Notar que

$$E(X)=\frac{1}{3}\cdot(-1)+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1=0.$$

Indicando

$$E(XY)=E(X^3)=E(X)=0=$$

Función de Preferencia del Inversor.

Pero

$$P(X=-1)\cdot P(Y=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\neq 0=P(X=-1,Y=0).$$

Entonces X y Y no son independientes.

Notar que

$$E(X)=\frac{1}{3}\cdot(-1)+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1=0.$$

Indicando

$$E(XY)=E(X^3)=E(X)=0=0\cdot E(Y)=$$

Función de Preferencia del Inversor.

Pero

$$P(X=-1)\cdot P(Y=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\neq 0=P(X=-1,Y=0).$$

Entonces X y Y no son independientes.

Notar que

$$E(X)=\frac{1}{3}\cdot(-1)+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1=0.$$

Indicando

$$E(XY)=E(X^3)=E(X)=0=0\cdot E(Y)=E(X)\cdot E(Y).$$

Finalmente

$$r(X,Y)=cov(X,Y)/\sigma_X\sigma_Y$$

Función de Preferencia del Inversor.

Pero

$$P(X=-1)\cdot P(Y=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\neq 0=P(X=-1,Y=0).$$

Entonces X y Y no son independientes.

Notar que

$$E(X)=\frac{1}{3}\cdot(-1)+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1=0.$$

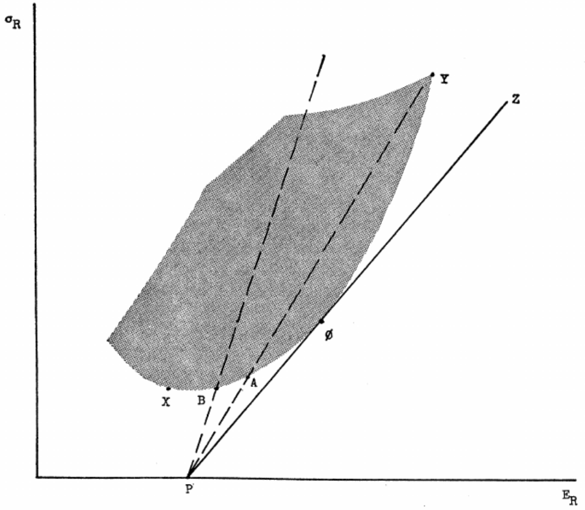
Indicando

$$E(XY)=E(X^3)=E(X)=0=0\cdot E(Y)=E(X)\cdot E(Y).$$

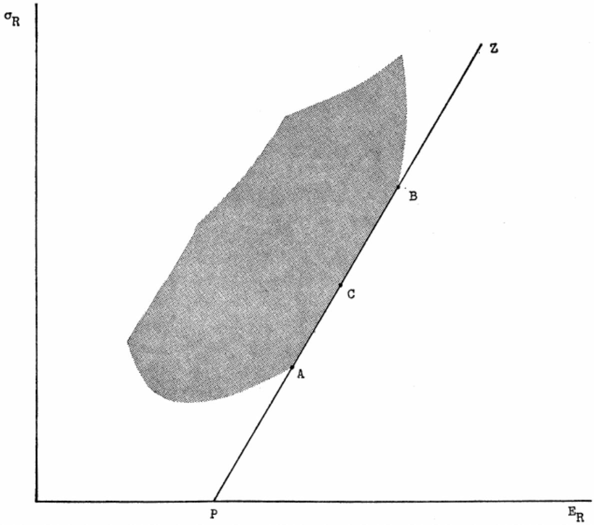
Finalmente

$$r(X,Y)=cov(X,Y)/\sigma_X\sigma_Y=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=0. \quad \blacksquare$$

Función de Preferencia del Inversor.



Función de Preferencia del Inversor.



Conclusiones

Conclusiones

Conclusiones

Hipótesis:

Conclusiones

Hipótesis:

- Continuidad (y ordenamiento) en el eje E_W.

Conclusiones

Hipótesis:

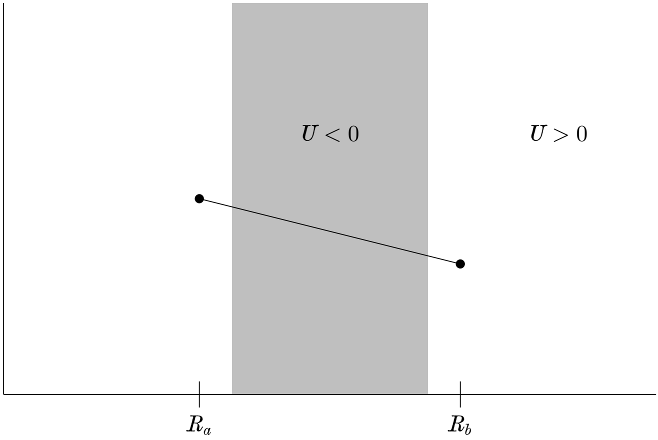
- Continuidad (y ordenamiento) en el eje E_W.
- Se conoce donde $U > 0$ y $U < 0$.

Conclusiones

Hipótesis:

- Continuidad (y ordenamiento) en el eje E_W.
- Se conoce donde $U > 0$ y $U < 0$.
- Zona de Riesgo.

Conclusiones



Conclusiones

Conclusiones

No se puede aplicar el modelo con:

Conclusiones

No se puede aplicar el modelo con:

- La zona de riesgo no permite encontrarse un punto tangente.

Conclusiones

No se puede aplicar el modelo con:

- La zona de riesgo no permite encontrarse un punto tangente.
- $r_{a,b} = -1$.

Referencias

Referencias

Referencias

William F. Sharpe.
Capital assets prices.
1964.