UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES.

Centro de Ciencias Básicas.

Departamento de Matemáticas y Física.

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas.

6 – A.

Práctica #2.

Variación de la Presión Atmosférica con la Altura.

Calor, Ondas y Fluidos.
Prof. Edgar Saucedo Casas.

Autores:
J. Beltrán — M. Llamas – J. Medina — E. Rodríguez.

28 de Febrero, 2021.

OBJETIVOS.

1. Estudiar la variación de la presión atmosférica con la altitud
2. Usar el barómetro analógico.

INTRODUCCIÓN.

La presión en un cierto punto corresponde a la fuerza (peso) que la columna atmosférica sobre ese lugar ejerce por unidad de área, debido a la atracción gravitacional de la Tierra.

Como la atmósfera es compresible, el efecto de la fuerza gravitacional hace que su densidad disminuye con la altura, lo cual a su vez explica que la disminución de la presión con la altura no sea lineal. Consúltese [3].

Dado lo anterior, un ejemplo claro y sencillo es el siguiente. Supongamos que vives en el estado de Aguascalientes, este estado se encuentra a $1888m$ sobre el nivel del mar, un día decides viajar a la playa de vacaciones, y en el transcurso del viaje comienzas a sentir un pequeño zumbido en el oído, esto se debe al cambio de presión de un lado al otro, esto es, la presión comenzó a aumentar conforme llegabas a la playa. Dicho de otra manera, el cambio de altitudes afecta la presión en la que te encuentres.

MARCO TEÓRICO.

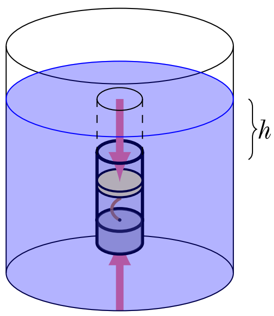
— *Dinámica de Fluidos* —

Definición. *La* **densidad** *es la cantidad de masa que hay en cada unidad de volumen y se denota por ρ.*

Definición. *La* **presión** *es la cantidad de fuerza que se aplica en cada unidad de área y se denota por P.*

Teorema. *La presión de un objeto sumergido en un fluido de densidad ρ, a una distancia h de la superficie del fluido es*

$$P = \rho g h$$



Notación. *Denotamos la altura de la atmósfera con h_0*

Observación. La densidad de la atmósfera no es constante pues varía de un sitio a otro y depende de varios factores, como lo son la temperatura y altitud en la que se mide. La densidad del aire disminuye con la altura por dos razones: la primera es que, a mayor altitud, hay menos aire empujando hacia abajo y la segunda es que la gravedad es menor entre más lejos se esté del centro de la tierra. Por lo tanto, a mayores alturas, las moléculas de aire pueden estar más separadas y la densidad del aire disminuye.

Observación. Dado que la presión de un fluido depende de la densidad del mismo, la presión atmosférica varía igualmente con los cambios de altitud. Principalmente, al aumentar la altitud la presión atmosférica disminuye ya que cuanto más alto se esté situado el objeto de medición menor será la capa de aire sobre éste, pero esta disminución no es lineal, sino que es más acentuada en las partes bajas de la atmósfera. Así, tenemos $\dfrac{\rho(h)}{\rho(0)} = \dfrac{P(h)}{P(0)}$. Consúltese [1].

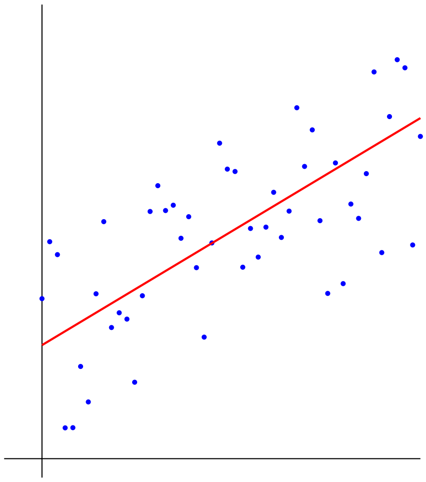
Observación. La variación de la densidad de un fluido a una altura h es proporcional a la misma densidad, dado que la concentración de su masa en un volumen dado, depende de la fuerza gravitacional ejercida sobre el fluido mismo. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dh}\rho(h) &= -\rho(h)\cdot g \\
\frac{d}{dh}\rho(h) &= -\frac{\rho(0)}{P(0)}g\cdot\rho(h) \\
\int_0^h \frac{\rho'(h)}{\rho(h)}dh &= -\frac{\rho(0)}{P(0)}g\cdot\int_0^h dh \\
\log\circ\rho(h)\Big|_0^h &= -\frac{\rho(0)}{P(0)}g(h-0) \\
\log\circ\rho(h) &= -\frac{\rho(0)}{P(0)}gh+\log\circ\rho(0) \\
\rho(h) &= \rho(0)\exp\left(-\frac{\rho(0)}{P(0)}gh\right)
\end{aligned}$$

Entonces $\rho(h) = 1.2\exp\left(-\frac{1.2}{1.013\times 10^5}(9.81)h\right)$.

— *Método de Mínimos Cuadrados* —

Objetivo. Al aplicar el método de mínimos cuadrados, buscamos la función lineal que minimiza su distancia vertical a todo un conjunto de puntos dados en $\boldsymbol{R}^2$.



Solución. Una línea recta queda completamente determinada con su pendiente y con su intersección al eje Y.
Así, existe un funcional que a cada elemento de $\boldsymbol{R}^2$ asigna una línea recta en el plano.
Sean $(x_i, y_i)\in\boldsymbol{R}^2$, con $i=1,\ \ldots,\ n$. Encontraremos $a,b\in\boldsymbol{R}$ que minimicen a la función $f:\boldsymbol{R}^2\longrightarrow\boldsymbol{R}$

$$f(a,b)=\sum_{i=1}^n\big|y_i-ax_i-b\big|.$$

Es claro que f no es diferenciable en todo $\boldsymbol{R}^2$, y para encontrar su mínimo sería conveniente que $f\in\mathcal{C}^2$. Notamos, que podemos minimizar las distancias de cada $|y_i-ax_i-b|$ minimizando su cuadrado. Así, definimos

$$g(a,b)=\sum_{i=1}^n(y_i-ax_i-b)^2$$

Obtengamos sus puntos críticos respecto a los ejes coordenados

$$(1)\quad 0=\frac{\partial}{\partial a}g(a,b)=2\sum_{i=1}^n\big[y_i-ax_i-b\big](-x_i).$$

$$(2)\quad 0=\frac{\partial}{\partial b}g(a,b)=2\sum_{i=1}^n\big[y_i-ax_i-b\big](-1).$$

Así, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rlcl} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) a & +\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) b & = & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) a & + \qquad nb & = & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{array}\right.$$

Si denotamos como 1 el punto en $\boldsymbol{R}^n$ que contiene 1's en sus componentes, $x = (x_1,\ \dots,\ x_n)$, $y = (y_1,\ \dots,\ y_n)$

$$\left\{\begin{array}{rrcl} |x|^2 a & +\langle x, 1\rangle b & = & \langle x, y\rangle. \\ \langle x, 1\rangle a & + \quad nb & = & \langle y, 1\rangle. \end{array}\right.$$

Usamos la teorema de Cramer para obtener la solución. Se tiene $Ax = B$ con

$$A = \begin{bmatrix} |x|^2 & \langle x, 1\rangle \\ \langle x, 1\rangle & n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \langle x, y\rangle \\ \langle y, 1\rangle \end{bmatrix}$$

Denotamos $A = [A_1,\ A_2]$, donde A_i es la columna i de A. Obtenemos los siguientes determinantes.

(1) $detA = n|x|^2 - \langle x, 1\rangle^2$.

(2) $det[B,\ A_2] = det \begin{bmatrix} \langle x, y\rangle & \langle x, 1\rangle \\ \langle y, 1\rangle & n \end{bmatrix} = n\langle x, y\rangle - \langle x, 1\rangle\langle y, 1\rangle$.

(3) $det[A_1,\ B] = det \begin{bmatrix} |x|^2 & \langle x, y\rangle \\ \langle x, 1\rangle & \langle y, 1\rangle \end{bmatrix} = |x|^2\langle y, 1\rangle - \langle x, y\rangle\langle x, 1\rangle$.

En consecuencia tenemos $a = det[B,\ A_2]/detA$, y $b = det[A_1,\ B]/detA$, con el supuesto de que $detA \neq 0$.

$$\boxed{a = \frac{n\langle x, y\rangle - \langle x, 1\rangle\langle y, 1\rangle}{n|x|^2 - \langle x, 1\rangle^2}} \qquad \boxed{b = \frac{|x|^2\langle y, 1\rangle - \langle x, y\rangle\langle x, 1\rangle}{n|x|^2 - \langle x, 1\rangle^2}}$$

Consúltese [4].

— *Métodos de regresión lineal* —

Definición. *Un conjunto Ω es una* **sigma–álgebra** *si la unión, intrersección y completemento de sus subconjuntos se encuentra en Ω.*

Definición. *Una función de* **probabilidad** *en una sigma–álgebra es una función $P : 2^\Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ con las siguientes propiedades*

(a) $P(A) \geqslant 0$ para todo $A \subseteq \Omega$.

(b) $P(\Omega) = 1$.

(c) $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ cuando $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$.

Definición. *Un espacio de probabilidad es un par (Ω, P).*

Definición. *Una* **variable aleatoria** *es una función $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ donde Ω es una sigma–álgebra. Cuando ImX es un conjunto finito $\{x_1,\ \dots,\ x_n\}$ decimos que X es* **discreta**. *Denotamos para algún $x \in ImX$*

$$P(X = x) = P\big(\omega \in \Omega \bigm| X(\omega) = x\big)$$

Denotamos para $A, B \in \Omega$, el número $P(A,\ B) = P(\omega \in \Omega \bigm| \omega \in A \cap B)$

Definición. *La variable aleatoria discreta X tiene una* **distribución uniforme** *si cada una de sus imágenes $\{x_1, \ \dots, \ x_n\}$ es equiprobable, i.e. $P(X = x_i) = 1/n$ para todo i.*

Definición. *La* **esperanza** *de una variable aleatoria discreta X en un espacio de probabilidad (Ω, P) se define por*

$$\boldsymbol{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

Observación. Con los supuestos $X \geqslant 0$ y $\boldsymbol{E}(X) = 0$, tenemos que $x_i = 0$ para cada i. Por tanto $X = 0$.

Teorema. *Sea $g : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ una función, si X es una variable aleatoria discreta, $\boldsymbol{E}\big[g(X)\big] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)P(X = x_i)$*

Definición. *Definimos la* **varianza** *de una variable aleatoria discreta X, como*

$$var(X) = \boldsymbol{E}\big[X - \boldsymbol{E}(X)\big]^2$$

Definición. *Definimos la* **covarianza** *de dos variables aleatorias discretas X y Y, por*

$$cov(X, Y) = \boldsymbol{E}\Big[(X - \boldsymbol{E}X)(Y - \boldsymbol{E}Y)\Big]$$

Teorema. *Sean X, Y variables aleatorias discretas, entonces $var(X + Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X, Y)$.*

Definición. *Definimos el* **coeficiente de correlación** *de las variables aleatorias discretas X y Y, con varianza positiva*

$$r(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{var(X) \cdot var(Y)}}$$

Teorema. *Sean X, Y variables aleatorias discretas. Entonces $r(X, Y) \in [-1, 1]$.*

Teorema. *Si X, Y son variables aleatorias discretas con distribución uniforme, entonces*

(a) $var(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \Big/ \, n = |x|^2 - \langle x, 1\rangle^2/n$

(b) $cov(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \Big/ \, n = \langle x, y\rangle - \langle x, 1\rangle\langle y, 1\rangle/n$

Observación. Dado el teorema anterior tenemos

$$r^2(X, Y) = \frac{\Big[\langle x, y\rangle - \langle x, 1\rangle\langle y, 1\rangle/n\Big]^2}{\Big(|x|^2 - \langle x, 1\rangle^2/n\Big)\,\Big(|y|^2 - \langle y, 1\rangle^2/n\Big)} = \frac{\Big[n\langle x, y\rangle - \langle x, 1\rangle\langle y, 1\rangle\Big]^2}{\Big(n|x|^2 - \langle x, 1\rangle^2\Big)\,\Big(n|y|^2 - \langle y, 1\rangle^2\Big)}$$

Teorema. *Si $r^2(X, Y) = 1$, entonces existen $m, b \in \boldsymbol{R}$ tales que $Y = mX + b$.*

Demostración. Definimos $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ por $f(t) = \boldsymbol{E}\Big[(Y - \boldsymbol{E}Y) + t(X - \boldsymbol{E}X)\Big]^2$, entonces

$$\begin{aligned} f(t) &= \boldsymbol{E}(Y - \boldsymbol{E}Y)^2 + 2t \cdot \boldsymbol{E}(Y - \boldsymbol{E}Y)(X - \boldsymbol{E}X) + t^2\boldsymbol{E}(X - \boldsymbol{E}X)^2 \\ &= var(Y) + 2cov(X, Y) \cdot t + var(X) \cdot t^2. \end{aligned}$$

Entonces f es un polinomio en t. Si $r^2(X, Y) = 1$, entonces $\dfrac{cov^2(X, Y)}{var(X) \cdot var(Y)} = 1$ implica que

$$\therefore \quad cov^2(X, Y) - var(X) \cdot var(Y) = 0$$

$$\therefore \quad \big[2cov(X, Y)\big]^2 - 4var(X)var(Y) = 0$$

i.e. el discriminante de f es 0. Y por tanto f se anula una única vez en un número $a \in \boldsymbol{R}$,

$$0 = f(a) = \boldsymbol{E}\Big[(Y - \boldsymbol{E}Y) + a(X - \boldsymbol{E}X)\Big]^2$$

Dada una de las obervaciones anteriores, vemos que $Y - \boldsymbol{E}Y + a(X - \boldsymbol{E}X) = 0$, y en consecuencia,

$$Y = -aX + (a\boldsymbol{E}X + \boldsymbol{E}Y). \quad \blacksquare$$

Consúltese [4] y [5].

MATERIALES.

1. Globo aerostático.

METODOLOGÍA.

1. *Asciende con el globo en la animación de la Figura 1. y ve anotando altitud y presión atmosférica en la siguiente Tabla 1.*

Figure 1: Laboratorio Virtual. Variación de la Presión Atomesférica con la Altura. Consúltse [2].

Altura(m)$\pm 5m$	*0*	*100*	*200*	*300*	*400*	*500*	*600*	*700*	*800*
Presión(mb)$\pm 1.25mb$									

Tabla 1. Laboratorio Virtual. Véase [2].

RESULTADOS.

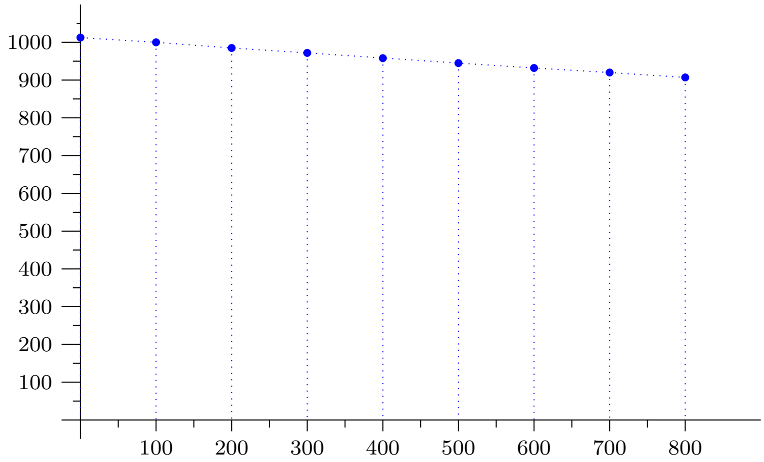
Incertidumbres.

(a) La unidad de medida que se manejará para la altura son los decámetros,

(b) Para los mb se tiene que la mínima medida es $2.5mb$ entonces para las incertidumbres tomaremos $2.5mb/2 = 1.25mb$

Altura(m)$\pm 5m$	0	100	200	300	400	500	600	700	800
Presión(mb)$\pm 1.25mb$	1012.5	1000	985	972	958	945	932	920	907

2. *Representa los valores obtenidos en una gráfica.*
   Solución.



DISCUSIÓN DE RESULTADOS.

3. *¿Por qué se obtiene esta variación en la presión?*

   Solución. La cantidad de masa que se encuentra encima del objeto de medición es la que determina la cantidad de fuerza ejercida sobre él. Entre mayor peso se tenga, mayor será la presión registrada. Esto dice que $h_0 - h$ es proporcional a la presión ejercida sobre el objeto de medición. Sea $p : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, donde $p(h)$ es la presión atmosférica a la altura h. Entonces p es una línea recta con pendiente negativa.

4. *Calcula la pendiente de la gráfica. A partir de ella, calcula la densidad del aire en el intervalo entre 0 y 600 m de altura.*

   Solución. La pendiente es $m = \dfrac{P(800) - P(0)}{800 - 0} = \dfrac{907 - 1012.5}{800 - 0} = -0.131$. Por tanto, la estimación de la presión es

$$\begin{aligned} P(h) &= P(0) + m \cdot h \\ &= 1012.5 - 0.131h \end{aligned}$$

   Hemos visto que la presión es proporcional a la densidad, esto implica que $\dfrac{\rho(h)}{\rho(0)} = \dfrac{P(h)}{P(0)}$, y por tanto $\rho(h) = \dfrac{\rho_0}{P(0)} P(h)$. En consecuencia

$$\begin{aligned} \rho(h) &= \frac{\rho(0)}{P(0)} \big[P(0) + mh \big] \\ &= \rho(0) + \frac{\rho(0)}{P(0)} mh \\ &= 1.2 - \frac{1.2}{1012.5}(0.131)h \\ &= 1.2 - 1.552 \times 10^4 h \end{aligned}$$

   Así, obtenemos los extremos del intervalo $\rho[0, 600]$. Como ρ es decreciente, entonces

$$\big[\rho(6000)\ ,\ \rho(0)\big] = [1.22372\ , 1.2\ ].$$

5. *¿Se pueden extrapolar estos resultados a cualquier altura?*

   Solución. Hemos visto que $P(h) = \rho g h$, donde h es la distancia a la superficie del fluido. Esto quiere decir que la distancia h es proporcional a la presión efectuada sobre el objeto, y por tanto, podemos extrapolar $P(h)$ a cualquier altura dada.

Observación. De la gráfica que se obtuvo observamos que los datos parecen tener un comportamiento lineal, por lo que aplicamos el método de mínimos cuadrados para aproximar nuestros resultados a una recta. Recordemos que las expresiones para encontrar la pendiente y ordenada al origen de dicha recta son:

$$m = \frac{n\langle x, y\rangle - \langle x, 1\rangle\langle y, 1\rangle}{n|x|^2 - \langle x, 1\rangle^2} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2},$$

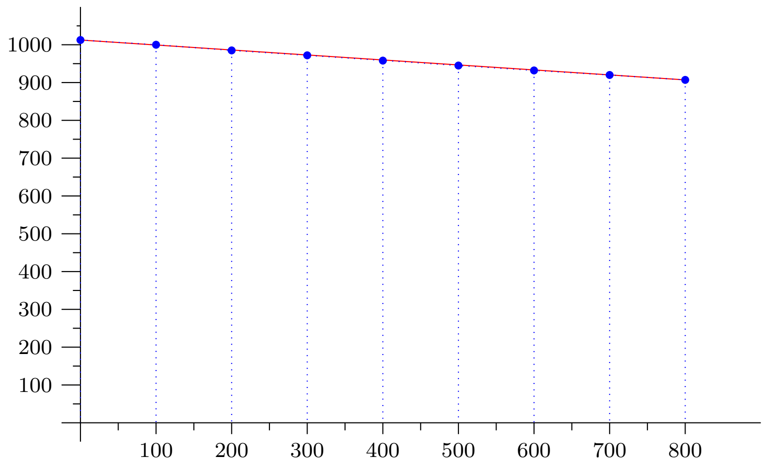
$$b = \frac{|x|^2\langle y, 1\rangle - \langle x, y\rangle\langle x, 1\rangle}{n|x|^2 - \langle x, 1\rangle^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Entonces, aplicándolas a las observaciones conseguidas tenemos lo siguiente:

$$m = \frac{9\,(3373100) - (3600)\,(8631.5)}{9\,(2040000) - 12960000} = -\frac{53}{400} = -0.1325$$

$$b = \frac{(2040000)\,(8631.5) - (3600)\,(3373100)}{9\,(2040000) - 12960000} = \frac{18217}{18} \approx 1012.0555$$

Por tanto, la recta que mejor se aproxima a nuestros datos experimentales obtenida por el método de mínimos cuadrados es $y = -\frac{53}{400}x + \frac{18217}{18}$. Notar que, a partir del método de mínimos cuadrado podemos obtener el número



r^2, conocido como *coeficiente de correlación* y que se obtiene mediante la expresión

$$r^2 = \frac{\left[n\langle x, y\rangle - \langle x, 1\rangle\langle y, 1\rangle\right]^2}{\left(n|x|^2 - \langle x, 1\rangle^2\right)\left(n|y|^2 - \langle y, 1\rangle^2\right)} = \frac{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\right]^2}{\left[n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}$$

Se sabe que si $r^2 = 1$ todas las observaciones se encuentran sobre la recta existiendo una correlación que es perfecta, esto es, entre más cercano sea r^2 a 1, más garantizado se tiene la proximidad de la recta al gráfico de los puntos experimentales. Calculemos entonces r^2 con nuestros datos.

$$r^2 = \frac{[9(3373100) - (3600)(8631.5)]^2}{[9(2040000) - 12960000]\,[9(8288627.25) - 74502792]} = 0.9995$$

CONCLUSIONES.

Con esta práctica obtuvimos algunos valores de la presión atmosférica con respecto a la altura y nos dimos cuenta que dichos valores seguían un comportamiento lineal. Al aplicar el método de mínimos cuadrados encontramos una recta que mejor se aproximaba a nuestros datos, y al calcular el coeficiente de correlación se observó que dicha recta describe a nuestras observaciones de manera casi perfecta, al tener un número muy cercano a uno. El comportamiento de la presión atmosférica con respecto a la altitud no es lineal, a pesar de que el coeficiente de correlación indica que es muy similar a una recta. Esto significa, que la compresión del aire a esta altura es suficientemente pequeña para considerar la función $P(h)$ como una función lineal a nivel local.

REFERENCIAS.

[1]. Resnick, Halliday. *Física vol. 1*, 5*ta* Ed. CECSA.

[2]. Laboratorio Virtual. Variación de la presión atmosférica. Salvador Hurtado Fernández. `https://labovirtual.blogspot.com/search/label/Variaci%C3%B3n%20de%20la%20presi%C3%B3n%20atmosf%C3%A9rica`

[3]. `http://www.atmosfera.cl/HTML/temas/estructura/estructura2.htm`

[4]. Luis Rincón. *Introducción a la Probabilidad.* (2014) UNAM.

[5]. Luis Rincón. *Introducción a la Inferencia Estadística.* (2019) UNAM.