***4.** Este problema describe una manera ingeniosa de hallar $\int_a^b x^p\,dx$ para $0 < a < b$. (El resultado para $a = 0$ se sigue por continuidad.) La idea consiste en utilizar particiones $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ para las que todas las *razones* $r = t_i/t_{i-1}$ son iguales en vez de particiones para las que son iguales todas las diferencias $t_i - t_{i-1}$.

(a) Demostrar que para una tal partición P tenemos

$$t_i = a \cdot c^{i/n} \text{ siendo } c = \frac{b}{a}.$$

(b) Si $f(x) = x^p$, demostrar, utilizando la fórmula del problema 2-5, que

$$\begin{aligned} U(f, P) &= a^{p+1}(1 - c^{1/n}) \sum_{i=1}^{n} (c^{(p+1)/n})^i \\ &= (a^{p+1} - b^{p+1})c^{(p+1)/n}\,\frac{1 - c^{-1/n}}{1 - c^{(p+1)/n}}. \\ &= (b^{p+1} - a^{p+1})c^{p/n} \cdot \frac{1}{1 + c^{1/n} + \cdots + c^{p/n}} \end{aligned}$$

y hallar una fórmula análoga para $L(f, P)$.

(c) Concluir que

$$\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p + 1}.$$