# Ejercicio 13–4
# M. Spivak. Caluclus.

Por Erick I. Rodríguez Juárez.

VALUAMI

Miércoles, 7 de Agosto, 2024.

# Ejercicio 13–4. Spivak

# Ejercicio 13–4. Spivak

*4. Este problema describe una manera ingeniosa de hallar $\int_a^b x^p\,dx$ para $0 < a < b$. (El resultado para $a = 0$ se sigue por continuidad.) La idea consiste en utilizar particiones $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ para las que todas las *razones* $r = t_i/t_{i-1}$ son iguales en vez de particiones para las que son iguales todas las diferencias $t_i - t_{i-1}$.

(a) Demostrar que para una tal partición $P$ tenemos

$$t_i = a \cdot c^{i/n} \text{ siendo } c = \frac{b}{a}.$$

(b) Si $f(x) = x^p$, demostrar, utilizando la fórmula del problema 2-5, que

$$\begin{aligned} U(f, P) &= a^{p+1}(1 - c^{1/n}) \sum_{i=1}^{n} (c^{(p+1)/n})^i \\ &= (a^{p+1} - b^{p+1})c^{(p+1)/n}\frac{1 - c^{-1/n}}{1 - c^{(p+1)/n}}. \\ &= (b^{p+1} - a^{p+1})c^{p/n} \cdot \frac{1}{1 + c^{1/n} + \cdots + c^{p/n}} \end{aligned}$$

y hallar una fórmula análoga para $L(f, P)$.

(c) Concluir que

$$\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

# Particiones.

# Particiones.

# Particiones.

**Definition**

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.
Sea $n \in \mathbb{N}^+$.
Una ***partición*** $P \subseteq \mathbb{R}$ de $[a, b]$, es un conjunto bien ordenado con $n$ elementos, $P = \{t_0, \ \ldots, \ t_n\}$, tal que $t_0 = a$, $t_n = b$.

# Particiones.

## Definition

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.
Sea $n \in \mathbb{N}^{+}$.
Una ***partición*** $P \subseteq \mathbb{R}$ de $[a, b]$, es un conjunto bien ordenado con $n$ elementos, $P = \{t_0, \ \ldots, \ t_n\}$, tal que $t_0 = a$, $t_n = b$.

## *Inciso a)*

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $0 < a < b$.

Sea $P = \{t_0, \ \ldots, \ t_n\}$ partición de $[a, b]$, tal que $\forall i \leqslant n$, $r = \dfrac{t_i}{t_{i-1}}$.

# Particiones.

## Definition

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.
Sea $n \in \mathbb{N}^+$.
Una ***partición*** $P \subseteq \mathbb{R}$ de $[a, b]$, es un conjunto bien ordenado con $n$ elementos, $P = \{t_0, \ \dots, \ t_n\}$, tal que $t_0 = a$, $t_n = b$.

## *Inciso a)*

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $0 < a < b$.
Sea $P = \{t_0, \ \dots, \ t_n\}$ partición de $[a, b]$, tal que $\forall i \leqslant n$, $r = \dfrac{t_i}{t_{i-1}}$.
Probar que $\forall i \leqslant n$,

$$t_i = a \cdot c^{i/n} \qquad c = \frac{b}{a}$$

# Particiones.

***Observación.*** Notar que la partición $t_i = a \cdot c^{i/n}$ tiene sentido.

# Particiones.

***Observación.*** Notar que la partición $t_i = a \cdot c^{i/n}$ tiene sentido.

- $t_0 = a \cdot c^0 = a$.

# Particiones.

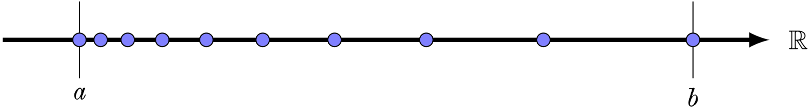
***Observación.*** Notar que la partición $t_i = a \cdot c^{i/n}$ tiene sentido.

- $t_0 = a \cdot c^0 = a$.
- $t_n = a \cdot c^{n/n} = b$.

# Particiones.

***Observación.*** Notar que la partición $t_i = a \cdot c^{i/n}$ tiene sentido.

- $t_0 = a \cdot c^0 = a$.
- $t_n = a \cdot c^{n/n} = b$.

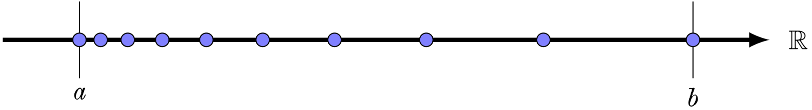



También observar que $c = b/a > 1$.

# Particiones.

***Observación.*** Notar que la partición $t_i = a \cdot c^{i/n}$ tiene sentido.

- $t_0 = a \cdot c^0 = a$.
- $t_n = a \cdot c^{n/n} = b$.

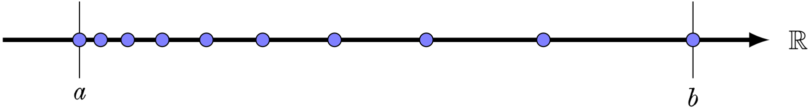



También observar que $c = b/a > 1$.
Así que $t_{i+1} - t_i > t_i - t_{i-1}$, $\forall i \leqslant n$.

# Particiones.

***Observación.*** Notar que la partición $t_i = a \cdot c^{i/n}$ tiene sentido.

- $t_0 = a \cdot c^0 = a$.
- $t_n = a \cdot c^{n/n} = b$.



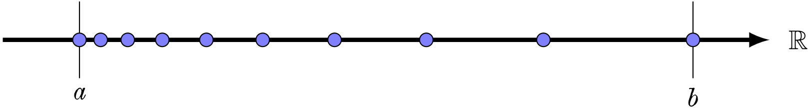

También observar que $c = b/a > 1$.
Así que $t_{i+1} - t_i > t_i - t_{i-1}$, $\forall i \leqslant n$.

$$t_{i+1} - t_i \quad = \quad a \cdot c^{(i+1)/n} - a \cdot c^{i/n}$$

# Particiones.

***Observación.*** Notar que la partición $t_i = a \cdot c^{i/n}$ tiene sentido.

- $t_0 = a \cdot c^0 = a$.
- $t_n = a \cdot c^{n/n} = b$.



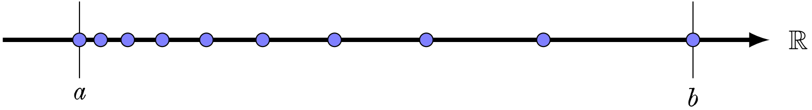

También observar que $c = b/a > 1$.
Así que $t_{i+1} - t_i > t_i - t_{i-1}$, $\forall i \leqslant n$.

$$t_{i+1} - t_i \quad = \quad a \cdot c^{(i+1)/n} - a \cdot c^{i/n} = c \cdot \left[ a \cdot c^{i/n} - a \cdot c^{(i-1)/n} \right]$$

# Particiones.

***Observación.*** Notar que la partición $t_i = a \cdot c^{i/n}$ tiene sentido.

- $t_0 = a \cdot c^0 = a$.
- $t_n = a \cdot c^{n/n} = b$.



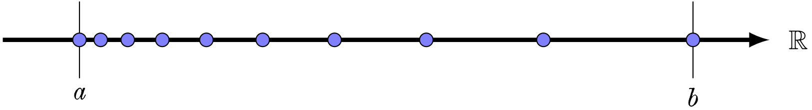

También observar que $c = b/a > 1$.
Así que $t_{i+1} - t_i > t_i - t_{i-1}$, $\forall i \leqslant n$.

$$\begin{aligned} t_{i+1} - t_i &= a \cdot c^{(i+1)/n} - a \cdot c^{i/n} = c \cdot \left[ a \cdot c^{i/n} - a \cdot c^{(i-1)/n} \right] \\ &> a \cdot c^{i/n} - a \cdot c^{(i-1)/n} \end{aligned}$$

# Particiones.

***Observación.*** Notar que la partición $t_i = a \cdot c^{i/n}$ tiene sentido.

- $t_0 = a \cdot c^0 = a$.
- $t_n = a \cdot c^{n/n} = b$.




También observar que $c = b/a > 1$.
Así que $t_{i+1} - t_i > t_i - t_{i-1}$, $\forall i \leqslant n$.

$$
\begin{aligned}
t_{i+1} - t_i &= a \cdot c^{(i+1)/n} - a \cdot c^{i/n} = c \cdot \left[ a \cdot c^{i/n} - a \cdot c^{(i-1)/n} \right] \\
&> a \cdot c^{i/n} - a \cdot c^{(i-1)/n} \\
&= t_i - t_{i-1}.
\end{aligned}
$$

# Particiones.

***Demostración.*** Sean $0 < a < b$.

Sea $P = \{t_0, \ \dots, \ , t_n\} \subseteq [a, b]$ tal que

$$t_0 = a \ , \ t_n = b \qquad , \qquad r = \frac{t_i}{t_{i-1}}, \forall i \leqslant n.$$

# Particiones.

***Demostración.*** Sean $0 < a < b$.
Sea $P = \{t_0, \ \ldots, \ , t_n\} \subseteq [a, b]$ tal que

$$t_0 = a \ , \ t_n = b \qquad , \qquad r = \frac{t_i}{t_{i-1}}, \forall i \leqslant n.$$

Entonces

$$r^n = \prod_{i=1}^{n} r$$

# Particiones.

***Demostración.*** Sean $0 < a < b$.
Sea $P = \{t_0, \ \ldots, \ , t_n\} \subseteq [a, b]$ tal que

$$t_0 = a \ , \ t_n = b \qquad , \qquad r = \frac{t_i}{t_{i-1}}, \forall i \leqslant n.$$

Entonces

$$r^n = \prod_{i=1}^{n} r = \prod_{i=1}^{n} \frac{t_i}{t_{i-1}}$$

# Particiones.

***Demostración.*** Sean $0 < a < b$.
Sea $P = \{t_0, \ \dots, \ , t_n\} \subseteq [a, b]$ tal que

$$t_0 = a \ , \ t_n = b \qquad , \qquad r = \frac{t_i}{t_{i-1}}, \forall i \leqslant n.$$

Entonces

$$r^n = \prod_{i=1}^{n} r = \prod_{i=1}^{n} \frac{t_i}{t_{i-1}} = \frac{t_1}{t_0} \cdot \frac{t_2}{t_1} \cdot \frac{t_3}{t_2}$$

# Particiones.

***Demostración.*** Sean $0 < a < b$.

Sea $P = \{t_0, \ \ldots, \ , t_n\} \subseteq [a, b]$ tal que

$$t_0 = a \ , \ t_n = b \qquad , \qquad r = \frac{t_i}{t_{i-1}}, \forall i \leqslant n.$$

Entonces

$$r^n = \prod_{i=1}^{n} r = \prod_{i=1}^{n} \frac{t_i}{t_{i-1}} = \frac{t_1}{t_0} \cdot \frac{t_2}{t_1} \cdot \frac{t_3}{t_2} \ \cdots \ \frac{t_{n-1}}{t_{n-2}} \cdot \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

# Particiones.

***Demostración.*** Sean $0 < a < b$.
Sea $P = \{t_0, \ \ldots, \ , t_n\} \subseteq [a, b]$ tal que

$$t_0 = a \ , \ t_n = b \qquad , \qquad r = \frac{t_i}{t_{i-1}}, \forall i \leqslant n.$$

Entonces

$$r^n = \prod_{i=1}^{n} r = \prod_{i=1}^{n} \frac{t_i}{t_{i-1}} = \frac{t_1}{t_0} \cdot \frac{t_2}{t_1} \cdot \frac{t_3}{t_2} \ \cdots \ \frac{t_{n-1}}{t_{n-2}} \cdot \frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{t_n}{t_0}$$

# Particiones.

***Demostración.*** Sean $0 < a < b$.
Sea $P = \{t_0, \ \ldots, \ , t_n\} \subseteq [a, b]$ tal que

$$t_0 = a \ , \ t_n = b \qquad , \qquad r = \frac{t_i}{t_{i-1}}, \forall i \leqslant n.$$

Entonces

$$r^n = \prod_{i=1}^{n} r = \prod_{i=1}^{n} \frac{t_i}{t_{i-1}} = \frac{t_1}{t_0} \cdot \frac{t_2}{t_1} \cdot \frac{t_3}{t_2} \ \cdots \ \frac{t_{n-1}}{t_{n-2}} \cdot \frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{t_n}{t_0} = \frac{b}{a} = c.$$

Así, $r = c^{1/n}$.

# Particiones.

***Demostración.*** Sean $0 < a < b$.
Sea $P = \{t_0, \ \ldots, \ , t_n\} \subseteq [a, b]$ tal que

$$t_0 = a \ , \ t_n = b \qquad , \qquad r = \frac{t_i}{t_{i-1}}, \forall i \leqslant n.$$

Entonces

$$r^n = \prod_{i=1}^{n} r = \prod_{i=1}^{n} \frac{t_i}{t_{i-1}} = \frac{t_1}{t_0} \cdot \frac{t_2}{t_1} \cdot \frac{t_3}{t_2} \ \cdots \ \frac{t_{n-1}}{t_{n-2}} \cdot \frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{t_n}{t_0} = \frac{b}{a} = c.$$

Así, $r = c^{1/n}$. Ahora, para $i \leqslant n$,

$$\frac{t_i}{t_0} =$$

# Particiones.

***Demostración.*** Sean $0 < a < b$.
Sea $P = \{t_0, \ \ldots, \ , t_n\} \subseteq [a, b]$ tal que

$$t_0 = a \ , \ t_n = b \qquad , \qquad r = \frac{t_i}{t_{i-1}}, \forall i \leqslant n.$$

Entonces

$$r^n = \prod_{i=1}^{n} r = \prod_{i=1}^{n} \frac{t_i}{t_{i-1}} = \frac{t_1}{t_0} \cdot \frac{t_2}{t_1} \cdot \frac{t_3}{t_2} \ \cdots \ \frac{t_{n-1}}{t_{n-2}} \cdot \frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{t_n}{t_0} = \frac{b}{a} = c.$$

Así, $r = c^{1/n}$. Ahora, para $i \leqslant n$,

$$\frac{t_i}{t_0} = \prod_{k=1}^{i} \frac{t_k}{t_{k-1}} =$$

# Particiones.

***Demostración.*** Sean $0 < a < b$.
Sea $P = \{t_0, \ldots, , t_n\} \subseteq [a, b]$ tal que

$$t_0 = a \ , \ t_n = b \qquad , \qquad r = \frac{t_i}{t_{i-1}}, \forall i \leqslant n.$$

Entonces

$$r^n = \prod_{i=1}^{n} r = \prod_{i=1}^{n} \frac{t_i}{t_{i-1}} = \frac{t_1}{t_0} \cdot \frac{t_2}{t_1} \cdot \frac{t_3}{t_2} \ \cdots \ \frac{t_{n-1}}{t_{n-2}} \cdot \frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{t_n}{t_0} = \frac{b}{a} = c.$$

Así, $r = c^{1/n}$. Ahora, para $i \leqslant n$,

$$\frac{t_i}{t_0} = \prod_{k=1}^{i} \frac{t_k}{t_{k-1}} = \prod_{k=1}^{i} r = r^i = c^{i/n}.$$

Entonces

$$t_i = t_0 \cdot c^{i/n} = a \cdot c^{i/n}. \quad \blacksquare$$

# Suma Superior e Inferior.

# Suma Superior e Inferior.

# Suma Superior e Inferior.

# Suma Superior e Inferior.

# Suma Superior e Inferior.

**Definition**

Sean $a < b$. Sea $P = \{t_0, \ \ldots, \ t_n\}$ partición de $[a, b]$. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Definimos

$$\begin{aligned} m_i &= \inf f([t_{i-1}, t_i]) \\ M_i &= \sup f([t_{i-1}, t_i]) \end{aligned}$$

# Suma Superior e Inferior.

**Definition**

Sean $a < b$. Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ partición de $[a, b]$. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Definimos

$$\begin{aligned} m_i &= \inf f([t_{i-1}, t_i]) \\ M_i &= \sup f([t_{i-1}, t_i]) \\ L(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ U(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

# Suma Superior e Inferior.

**Definition**

Sean $a < b$. Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ partición de $[a, b]$. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Definimos

$$\begin{aligned}
m_i &= \inf f([t_{i-1}, t_i]) \\
M_i &= \sup f([t_{i-1}, t_i]) \\
L(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \\
U(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1})
\end{aligned}$$

# Suma Superior e Inferior.

**Definition**

Sean $a < b$. Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ partición de $[a, b]$. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Definimos

$$
\begin{aligned}
m_i &= \inf f([t_{i-1}, t_i]) \\
M_i &= \sup f([t_{i-1}, t_i]) \\
L(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \\
U(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1})
\end{aligned}
$$

Usaremos fuertemente el sig. Lema.

# Suma Superior e Inferior.

**Definition**

Sean $a < b$. Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ partición de $[a, b]$. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Definimos

$$\begin{aligned} m_i &= \inf f([t_{i-1}, t_i]) \\ M_i &= \sup f([t_{i-1}, t_i]) \\ L(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ U(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Usaremos fuertemente el sig. Lema.

**Lemma**

*Sea* $n \in \mathbb{N}$.
*Sea* $x \in \mathbb{R}$, *con* $x \neq 1$.

# Suma Superior e Inferior.

### Definition

Sean $a < b$. Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ partición de $[a, b]$. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Definimos

$$\begin{aligned} m_i &= \inf f([t_{i-1}, t_i]) \\ M_i &= \sup f([t_{i-1}, t_i]) \\ L(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ U(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Usaremos fuertemente el sig. Lema.

### Lemma

*Sea $n \in \mathbb{N}$.*
*Sea $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 1$.*
*Entonces*

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

# Suma Superior e Inferior.

**Definition**

Sean $a < b$. Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ partición de $[a, b]$. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Definimos

$$\begin{aligned} m_i &= \inf f([t_{i-1}, t_i]) \\ M_i &= \sup f([t_{i-1}, t_i]) \\ L(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ U(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Usaremos fuertemente el sig. Lema.

**Lemma**

*Sea* $n \in \mathbb{N}$.
*Sea* $x \in \mathbb{R}$, *con* $x \neq 1$.
*Entonces*

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Notar que la suma se inicia en $i = 0$.

# Suma Superior e Inferior.

# Suma Superior e Inferior.

*Inciso b).*

Sea $p \in \mathbb{N}$. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$.
Sea $P \subseteq [a, b]$ la partición definida anteriormente.

# Suma Superior e Inferior.

## *Inciso b).*

Sea $p \in \mathbb{N}$. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$.
Sea $P \subseteq [a, b]$ la partición definida anteriormente.
Prueba que

$$\begin{aligned} U(f,P) &= a^{p+1}(1 - c^{-1/n}) \sum_{i=1}^{n} \left(c^{(p+1)/n}\right)^i \\ &= (a^{p+1} - b^{p+1}) c^{(p+1)/n} \frac{1 - c^{-1/n}}{1 - c^{(p+1)/n}} \\ &= (b^{p+1} - a^{p+1}) c^{p/n} \frac{1}{\sum_{i=0}^{p} c^{i/n}}. \end{aligned}$$

# Suma Superior e Inferior.

***Demostración.***

Notar que

# Suma Superior e Inferior.

***Demostración.***

Notar que

- $r = c^{1/n}$,

# Suma Superior e Inferior.

***Demostración.***

Notar que

- $r = c^{1/n}$,
- $t_i = a \cdot c^{i/n} = a \cdot r^i$,

# Suma Superior e Inferior.

***Demostración.***

Notar que

- $r = c^{1/n}$,
- $t_i = a \cdot c^{i/n} = a \cdot r^i$,
- $f$ es cresciente.

# Suma Superior e Inferior.

***Demostración.***

Notar que

- $r = c^{1/n}$,
- $t_i = a \cdot c^{i/n} = a \cdot r^i$,
- $f$ es cresciente. Así que

$$M_i = \sup f([t_{i-1}, t_i]) = t_i^p = (ar^i)^p = a^p r^{ip}.$$

# Suma Superior e Inferior.

***Demostración.***

Notar que

- $r = c^{1/n}$,
- $t_i = a \cdot c^{i/n} = a \cdot r^i$,
- $f$ es cresciente. Así que

$$M_i = \sup f([t_{i-1}, t_i]) = t_i^p = (ar^i)^p = a^p r^{ip}.$$

- Calculemos $t_i - t_{i-1}$.

# Suma Superior e Inferior.

***Demostración.***

Notar que

- $r = c^{1/n}$,
- $t_i = a \cdot c^{i/n} = a \cdot r^i$,
- $f$ es cresciente. Así que

$$M_i = \sup f([t_{i-1}, t_i]) = t_i^p = (ar^i)^p = a^p r^{ip}.$$

- Calculemos $t_i - t_{i-1}$.

$$t_i - t_{i-1} = ar^i - ar^{i-1}$$

# Suma Superior e Inferior.

***Demostración.***

Notar que

- $r = c^{1/n}$,
- $t_i = a \cdot c^{i/n} = a \cdot r^i$,
- $f$ es cresciente. Así que

$$M_i = \sup f([t_{i-1}, t_i]) = t_i^p = (ar^i)^p = a^p r^{ip}.$$

- Calculemos $t_i - t_{i-1}$.

$$t_i - t_{i-1} = ar^i - ar^{i-1} = ar^i(1 - r^{-1}).$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} a^p r^{ip} \cdot ar^i(1 - r^{-1}) =$$

# Suma Superior e Inferior.

$$= \sum_{i=1}^{n} a^p r^{ip} \cdot a r^i (1 - r^{-1})$$

# Suma Superior e Inferior.

$$= \sum_{i=1}^{n} a^p r^{ip} \cdot ar^i (1 - r^{-1})$$

$$= a^{p+1}(1 - r^{-1}) \sum_{i=1}^{n} r^{ip} r^i$$

# Suma Superior e Inferior.

$$= \sum_{i=1}^{n} a^p r^{ip} \cdot a r^i (1 - r^{-1})$$

$$= a^{p+1}(1 - r^{-1}) \sum_{i=1}^{n} r^{ip} r^i$$

$$= a^{p+1}(1 - r^{-1}) \sum_{i=1}^{n} r^{ip+i}$$

# Suma Superior e Inferior.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} a^p r^{ip} \cdot ar^i(1 - r^{-1}) \\
&= a^{p+1}(1 - r^{-1}) \sum_{i=1}^{n} r^{ip} r^i \\
&= a^{p+1}(1 - r^{-1}) \sum_{i=1}^{n} r^{ip+i} \\
&= a^{p+1}(1 - r^{-1}) \sum_{i=1}^{n} r^{i(p+1)}
\end{aligned}
$$

# Suma Superior e Inferior.

$$= \quad a^{p+1}(1 - r^{-1}) \sum_{i=1}^{n} r^{i(p+1)}$$

# Suma Superior e Inferior.

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{-1})\sum_{i=1}^{n} r^{i(p+1)}$$

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{-1})\sum_{i=1}^{n} \left(r^{p+1}\right)^{i}$$

# Suma Superior e Inferior.

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{-1})\sum_{i=1}^{n} r^{i(p+1)}$$

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{-1})\sum_{i=1}^{n} \left(r^{p+1}\right)^{i}$$

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{-1})\left[-1+\sum_{i=0}^{n} \left(r^{p+1}\right)^{i}\right]$$

# Suma Superior e Inferior.

$$= a^{p+1}(1-r^{-1})\sum_{i=1}^{n} r^{i(p+1)}$$

$$= a^{p+1}(1-r^{-1})\sum_{i=1}^{n} \left(r^{p+1}\right)^{i}$$

$$= a^{p+1}(1-r^{-1})\left[-1+\sum_{i=0}^{n} \left(r^{p+1}\right)^{i}\right]$$

$$= a^{p+1}(1-r^{-1})\left[-1+\frac{1-r^{(p+1)(n+1)}}{1-r^{p+1}}\right]$$

# Suma Superior e Inferior.

$$= \quad a^{p+1}(1 - r^{-1})\left[-1 + \frac{1 - r^{(p+1)(n+1)}}{1 - r^{p+1}}\right]$$

# Suma Superior e Inferior.

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{-1})\left[-1+\frac{1-r^{(p+1)(n+1)}}{1-r^{p+1}}\right]$$

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{-1})\cdot\frac{r^{p+1}-1+1-r^{(p+1)(n+1)}}{1-r^{p+1}}$$

# Suma Superior e Inferior.

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{-1})\left[-1+\frac{1-r^{(p+1)(n+1)}}{1-r^{p+1}}\right]$$

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{-1})\cdot\frac{r^{p+1}-1+1-r^{(p+1)(n+1)}}{1-r^{p+1}}$$

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{-1})\frac{r^{p+1}-r^{(p+1)n}\cdot r^{p+1}}{1-r^{p+1}}$$

# Suma Superior e Inferior.

$$
\begin{aligned}
&= a^{p+1}(1-r^{-1})\left[-1+\frac{1-r^{(p+1)(n+1)}}{1-r^{p+1}}\right]\\
&= a^{p+1}(1-r^{-1})\cdot\frac{r^{p+1}-1+1-r^{(p+1)(n+1)}}{1-r^{p+1}}\\
&= a^{p+1}(1-r^{-1})\frac{r^{p+1}-r^{(p+1)n}\cdot r^{p+1}}{1-r^{p+1}}\\
&= a^{p+1}(1-r^{-1})r^{p+1}\frac{1-r^{(p+1)n}}{1-r^{p+1}}
\end{aligned}
$$

# Suma Superior e Inferior.

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{-1})r^{p+1}\frac{1-r^{(p+1)n}}{1-r^{p+1}}$$

# Suma Superior e Inferior.

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{-1})r^{p+1}\frac{1-r^{(p+1)n}}{1-r^{p+1}}$$

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{(p+1)n})r^{p+1}\frac{1-r^{-1}}{1-r^{p+1}}$$

# Suma Superior e Inferior.

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{-1})r^{p+1}\frac{1-r^{(p+1)n}}{1-r^{p+1}}$$

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{(p+1)n})r^{p+1}\frac{1-r^{-1}}{1-r^{p+1}}$$

**Notar que** $r^{(p+1)n} =$

# Suma Superior e Inferior.

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{-1})r^{p+1}\frac{1-r^{(p+1)n}}{1-r^{p+1}}$$

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{(p+1)n})r^{p+1}\frac{1-r^{-1}}{1-r^{p+1}}$$

**Notar que** $r^{(p+1)n} = (c^{1/n})^{(p+1)n} =$

# Suma Superior e Inferior.

$$= \quad a^{p+1}(1 - r^{-1})r^{p+1}\frac{1 - r^{(p+1)n}}{1 - r^{p+1}}$$

$$= \quad a^{p+1}(1 - r^{(p+1)n})r^{p+1}\frac{1 - r^{-1}}{1 - r^{p+1}}$$

**Notar que** $r^{(p+1)n} = (c^{1/n})^{(p+1)n} = c^{(p+1)n/n} =$

# Suma Superior e Inferior.

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{-1})r^{p+1}\frac{1-r^{(p+1)n}}{1-r^{p+1}}$$

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{(p+1)n})r^{p+1}\frac{1-r^{-1}}{1-r^{p+1}}$$

**Notar que** $r^{(p+1)n} = (c^{1/n})^{(p+1)n} = c^{(p+1)n/n} = c^{p+1} =$

# Suma Superior e Inferior.

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{-1})r^{p+1}\frac{1-r^{(p+1)n}}{1-r^{p+1}}$$

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{(p+1)n})r^{p+1}\frac{1-r^{-1}}{1-r^{p+1}}$$

**Notar que** $r^{(p+1)n} = (c^{1/n})^{(p+1)n} = c^{(p+1)n/n} = c^{p+1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{p+1}$.

# Suma Superior e Inferior.

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{-1})r^{p+1}\frac{1-r^{(p+1)n}}{1-r^{p+1}}$$

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{(p+1)n})r^{p+1}\frac{1-r^{-1}}{1-r^{p+1}}$$

**Notar que** $r^{(p+1)n} = (c^{1/n})^{(p+1)n} = c^{(p+1)n/n} = c^{p+1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{p+1}$**.**

**Entonces**

$$U(f,P) \quad = \quad (a^{p+1}-b^{p+1})r^{p+1}\cdot\frac{1-r^{-1}}{1-r^{p+1}}$$

# Suma Superior e Inferior.

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{-1})r^{p+1}\frac{1-r^{(p+1)n}}{1-r^{p+1}}$$

$$= \quad a^{p+1}(1-r^{(p+1)n})r^{p+1}\frac{1-r^{-1}}{1-r^{p+1}}$$

**Notar que** $r^{(p+1)n} = (c^{1/n})^{(p+1)n} = c^{(p+1)n/n} = c^{p+1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{p+1}$.

**Entonces**

$$\begin{aligned} U(f,P) &= (a^{p+1}-b^{p+1})r^{p+1}\cdot\frac{1-r^{-1}}{1-r^{p+1}} \\ &= (a^{p+1}-b^{p+1})r^{p}\cdot\frac{r-1}{1-r^{p+1}} \end{aligned}$$

# Suma Superior e Inferior.

$$= \quad (a^{p+1} - b^{p+1})r^p \cdot \frac{r-1}{1-r^{p+1}}$$

# Suma Superior e Inferior.

$$
\begin{aligned}
&= (a^{p+1} - b^{p+1}) r^p \cdot \frac{r-1}{1-r^{p+1}} \\
&= (b^{p+1} - a^{p+1}) r^p \cdot \frac{1-r}{1-r^{p+1}}
\end{aligned}
$$

# Suma Superior e Inferior.

$$
\begin{aligned}
&= (a^{p+1} - b^{p+1}) r^p \cdot \frac{r-1}{1-r^{p+1}} \\
&= (b^{p+1} - a^{p+1}) r^p \cdot \frac{1-r}{1-r^{p+1}} \\
&= (b^{p+1} - a^{p+1}) r^p \cdot \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=0}^{p} r^i}
\end{aligned}
$$

## Suma Superior e Inferior.

$$
\begin{aligned}
&= (a^{p+1} - b^{p+1}) r^p \cdot \frac{r-1}{1 - r^{p+1}} \\
&= (b^{p+1} - a^{p+1}) r^p \cdot \frac{1-r}{1 - r^{p+1}} \\
&= (b^{p+1} - a^{p+1}) r^p \cdot \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=0}^{p} r^i} \\
&= r^p \cdot \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{p} r^i}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

# Suma Superior e Inferior.

***Solución.*** Recordar que

# Suma Superior e Inferior.

## *Inciso b)*

Encontrar una fórmula análoga para $L(f, P)$.

***Solución.*** Recordar que

# Suma Superior e Inferior.

## *Inciso b)*

Encontrar una fórmula análoga para $L(f, P)$.

***Solución.*** Recordar que

- $M_i = t_i^p$

# Suma Superior e Inferior.

## *Inciso b)*

Encontrar una fórmula análoga para $L(f, P)$.

***Solución.*** Recordar que

- $M_i = t_i^p = (ar^i)^p$

# Suma Superior e Inferior.

## *Inciso b)*

Encontrar una fórmula análoga para $L(f, P)$.

***Solución.*** Recordar que

- $M_i = t_i^p = (ar^i)^p = a^p r^{ip}$.

Como $f$ es cresciente,

$m_i = t_{i-1}^p =$

# Suma Superior e Inferior.

## *Inciso b)*

Encontrar una fórmula análoga para $L(f, P)$.

***Solución.*** Recordar que

- $M_i = t_i^p = (ar^i)^p = a^p r^{ip}$.
- $m_i = \inf f([t_{i-1}, t_i])$.

Como $f$ es cresciente,

$$m_i = t_{i-1}^p =$$

# Suma Superior e Inferior.

## *Inciso b)*

Encontrar una fórmula análoga para $L(f, P)$.

***Solución.*** Recordar que

- $M_i = t_i^p = (ar^i)^p = a^p r^{ip}$.
- $m_i = \inf f([t_{i-1}, t_i])$.
- $L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$.

Como $f$ es cresciente,

$$m_i = t_{i-1}^p =$$

# Suma Superior e Inferior.

## *Inciso b)*

Encontrar una fórmula análoga para $L(f, P)$.

***Solución.*** Recordar que

- $M_i = t_i^p = (ar^i)^p = a^p r^{ip}$.
- $m_i = \inf f([t_{i-1}, t_i])$.
- $L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$.

Como $f$ es cresciente,

$$m_i = t_{i-1}^p = (a \cdot r^{i-1})^p =$$

# Suma Superior e Inferior.

## *Inciso b)*

Encontrar una fórmula análoga para $L(f, P)$.

***Solución.*** Recordar que

- $M_i = t_i^p = (ar^i)^p = a^p r^{ip}$.
- $m_i = \inf f([t_{i-1}, t_i])$.
- $L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$.

Como $f$ es cresciente,

$$m_i = t_{i-1}^p = (a \cdot r^{i-1})^p = a^p \cdot r^{(i-1)p} =$$

# Suma Superior e Inferior.

## *Inciso b)*

Encontrar una fórmula análoga para $L(f, P)$.

***Solución.*** Recordar que

- $M_i = t_i^p = (ar^i)^p = a^p r^{ip}$.
- $m_i = \inf f([t_{i-1}, t_i])$.
- $L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$.

Como $f$ es creciente,

$$m_i = t_{i-1}^p = (a \cdot r^{i-1})^p = a^p \cdot r^{(i-1)p} = a^p r^{ip} \cdot r^{-p} =$$

# Suma Superior e Inferior.

## *Inciso b)*

Encontrar una fórmula análoga para $L(f, P)$.

***Solución.*** Recordar que

- $M_i = t_i^p = (ar^i)^p = a^p r^{ip}$.
- $m_i = \inf f([t_{i-1}, t_i])$.
- $L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$.

Como $f$ es cresciente,

$$m_i = t_{i-1}^p = (a \cdot r^{i-1})^p = a^p \cdot r^{(i-1)p} = a^p r^{ip} \cdot r^{-p} = M_i \cdot r^{-p}.$$

Por tanto $L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot r^{-p} \cdot (t_i - t_{i-1})$

# Suma Superior e Inferior.

## *Inciso b)*

Encontrar una fórmula análoga para $L(f, P)$.

***Solución.*** Recordar que

- $M_i = t_i^p = (ar^i)^p = a^p r^{ip}$.
- $m_i = \inf f([t_{i-1}, t_i])$.
- $L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$.

Como $f$ es cresciente,

$$m_i = t_{i-1}^p = (a \cdot r^{i-1})^p = a^p \cdot r^{(i-1)p} = a^p r^{ip} \cdot r^{-p} = M_i \cdot r^{-p}.$$

Por tanto $L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot r^{-p} \cdot (t_i - t_{i-1}) = r^{-p} \cdot U(f, P)$.

# Suma Superior e Inferior.

Hemos probado que

$$U(f,P) = (b^{p+1} - a^{p+1})r^p \cdot \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{p} r^i}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} L(f,P) &= r^{-p} \cdot U(f,P) \\ &= r^{-p}(b^{p+1} - a^{p+1})r^p \cdot \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{p} r^i} \\ &= \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{\sum\limits_{i=0}^{p} r^i}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

# Integral de $f$.

# Integral de $f$.

# Integral de $f$.

## Inciso c)

Probar que $\displaystyle\int_a^b f = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$.

# Integral de $f$.

## Inciso c)

Probar que $\displaystyle\int_a^b f = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$.

***Demostración.*** Recordar que para $x > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1.$$

Aplicaremos este resultado a $r_n = c^{1/n}$

# Integral de $f$.

## Inciso c)

Probar que $\displaystyle\int_a^b f = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$.

***Demostración.*** Recordar que para $x > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1.$$

Aplicaremos este resultado a $r_n = c^{1/n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}$.

Hemos probado que

$$L(f, P_n) = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{\sum_{i=0}^{p} r_n^i}, \qquad U(f, P_n) = r_n^p \cdot \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{\sum_{i=0}^{p} r_n^i}.$$

# Integral de $f$.

Notamos que

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) \leqslant \sup_P L(f,P) \leqslant \inf_P U(f,P) \leqslant \lim_{n\to\infty} U(f,P_n).$$

Y además

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{\sum_{i=0}^{p} r_n^i} = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{\sum_{i=0}^{p} \left(\lim_{n\to\infty} r_n\right)^i}$$

$$= \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{\sum_{i=0}^{p} 1}$$

$$= \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}.$$

# Integral de $f$.

Además, como $L(f, P_n) = r_n^{-p} \cdot U(f, P_n)$,

# Integral de $f$.

Además, como $L(f, P_n) = r_n^{-p} \cdot U(f, P_n)$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} r_n^p \cdot L(f, P_n) &= \left(\lim_{n\to\infty} r_n^p\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} L(f, P_n)\right) \\
&= 1 \cdot \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\int_a^b f = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}. \quad \blacksquare$$