Examen Parcial 2. Variable Compleja I.

Por Erick I. Rodríguez Juárez.

May 13, 2022

1. *Suponga que γ es una curva de Jordan, que f es analític dentro dé, y sobre γ, y que $f = 0$ sobre γ. Deduzca que $f = 0$ dentro de γ.*

   Solución. Sea z en el interior de la curva. Si γ es una curva de Jordan, entonces $I(\gamma, z_0) = 1$. Entonces, por la Fórmula Integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f\big|_{Im\gamma}(x)dx}{x-z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{0 \cdot dx}{x-z} = 0. \qquad \blacksquare$$

2. *Calcule el máximo de* cos *en* $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

   Solución. Como cos es analítica, basta encontrar: $\max \cos(\partial[0, 2\pi]^2)$. Notamos que

$$\begin{aligned}
\cos(x+iy) &= \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} \\
&= \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2} \\
&= \frac{\cos x(e^{y} + e^{-y}) + i\sin x(e^{-y} - e^{y})}{2} \\
&= \cosh y \cdot \cos x - i\sinh y \cdot \sin x
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\big|\cos(x+iy)\big|^2 &= \cos^2 x\cosh^2 y + \sin^2 x\sinh^2 y \\
&= \cos^2 x\cosh^2 y + (1-\cos^2 x)\sinh^2 y \\
&= \sinh^2 y + \cos^2 x(\cosh^2 y - \sinh^2 y) \\
&= \cos^2 x + \sinh^2 y.
\end{aligned}$$

Como $\sinh^2 y$ es creciente, se tiene que $|\sinh y| \leqslant \sinh 2\pi$. Además $\big|\cos x\big| \leqslant 1 = \cos 0, \cos 2\pi$. De modo que los extremos de cos se encuentran en $(0, 2\pi)$ y $(2\pi, 2\pi)$. Finalmente, el valor máximo es

$$\big|\cos z\big| \leqslant \cos(0 + 2\pi i) = \sqrt{1 + \sinh^2(2\pi)} = \cosh 2\pi. \qquad \forall z \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]. \qquad \blacksquare$$

3. *Muestre que* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \sin nz$$

es analítica en el abierto $\mathbb{R} \times (-1, 1)$.

Demostración. Vemos que

$$e^{-n} \sin nz = e^{-n} \frac{e^{niz} - e^{-niz}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{iz}}{e}\right)^n - \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{-iz}}{e}\right)^n.$$

Entonces vemos que, $\left|e^{iz}\right| = \left|e^{i(x+iy)}\right| = e^{-y}$. Como $y \in (-1, 1)$, entonces $e^{-y} < e^1$.

$$\left|\frac{e^{iz}}{e}\right| = \frac{e^{-y}}{e} < 1.$$

teniéndose $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{iz}}{e}\right)^n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{e^{iz}}{e}\right|^n = \sum_{n=1}^{\infty}(e^{-y}/e)^n$ una serie geométrica, y por tanto converge absolutamente por el Teorema 3.1.3. De forma completamente análoga, tenemos que $e^y < e^1$, y en consecuencia $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-iz}/e)^n$ converge absolutamente. Entonces

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \sin nz \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{iz}}{e}\right)^n - \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-iz}}{e}\right)^n \\
&= \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1 - e^{iz}/e} - \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1 - e^{-iz}/e} \\
&= \frac{1}{2i} \cdot \frac{1 - e^{-iz}/e - (1 - e^{iz}/e)}{(1 - e^{iz}/e)(1 - e^{-iz}/e)} \\
&= \frac{1}{2i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e(1 - e^{iz}/e - e^{-iz}/e + 1/e^2)} = \frac{\sin z}{e + 1/e - 2\cos z}.
\end{aligned}$$

Notamos que ésta función es analítica.

Para probarlo, vemos lo siguiente.

$$\left|\cos(x + iy)\right| \leqslant \frac{\left|e^{i(x+iy)}\right| + \left|e^{-i(x+iy)}\right|}{2} = \frac{e^y + e^{-y}}{2}. \tag{1}$$

Sea $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g(y) = e^y + e^{-y}$. Entonces $g'(y) = e^y - e^{-y}$. Como exp es creciente, entonces

$$-y < 0 < y \quad \Rightarrow \quad e^{-y} < e^0 < e^y.$$

Así, $g'(y) > 0$, y g es estrictamente creciente.

$$g(y) < g(1) = e + 1/e, \qquad \forall y \in (0,1).$$

Notar que $h : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h(y) = e^y + e^{-y}$ es par. Así

$$h(y) < h(1) = e + 1/e, \qquad \forall y \in (-1,1). \tag{2}$$

Entonces, por (1) y (2) tenemos

$$2 \cdot \left| \cos z \right| \leqslant e^y + e^{-y} < e + 1/e, \qquad Imz \in (-1,1).$$

De ésta forma

$$f(z) = \frac{\sin z}{e + 1/e - 2\cos z} \qquad \text{es analítica en } Imz \in (-1,1). \qquad \blacksquare$$

4. *Calcule* a_0, a_3, a_5 *para* $\tan z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$*, alrededor de* 0.

Solución. Recordamos que $\tan z = \sin z / \cos z$. Supongamos que $\tan z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

$$\begin{aligned} \sin z &= (\cos z) \cdot (\tan z) \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \end{aligned}$$

con $c_n = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2}/n!, & n \text{ impar}, \\ 0, & n \text{ par}. \end{cases}$, y $b_n = \begin{cases} (-1)^{n/2}/n!, & n \text{ par}, \\ 0, & n \text{ impar}. \end{cases}$. Entonces

$$\begin{aligned} z + 0 - \frac{z^3}{3!} + 0 + \frac{z^5}{5!} + \sum_{n=6}^{\infty} c_n z^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n \\ &= \big[a_0(1) \big] \\ &\quad + \big[a_0(0) + a_1(1) \big] z \\ &\quad + \big[a_0(-1/2) + a_1(0) + a_2(1) \big] z^2 \\ &\quad + \big[a_0(0) + a_1(-1/2) + a_2(0) + a_3(1) \big] z^3 \\ &\quad + \big[a_0(1/4!) + a_1(0) + a_2(-1/2) + a_3(0) + a_4(1) \big] z^4 \\ &\quad + \big[a_0(0) + a_1(1/4!) + a_2(0) + a_3(-1/2) + a_4(0) + a_5(1) \big] z^5 \\ &\quad + \sum_{n=6}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} \right) z^n. \end{aligned}$$

5. *Sea f con un zero de multiplicidad k en z_0. Deduzca que el residuo de f'/f en z_0 es k.*

Solución. Si f tiene un cero de multiplicidad k en z_0, entonces

$$f(z) = (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

6. *Suponga que f tiene una singularidad aislada en z_0. Muestre que es escencial si y sólo si hay suesiones (z_n) y (w_n) ambas convergentes a z_0 y*

$$f(z_n) \longrightarrow 0 \quad f(w_n) \longrightarrow \infty.$$

Demostración.