Cap. 5. Rezolvarea numerică a ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii algebrice neliniare

5.0. Definiţii. Clasificare

Forma generală a ecuaţiei:

$$f(x)=0\ , \qquad (1)$$

cu f : $I \subset R \to R$.

Categorii de metode

În particular, f – polinom / adus la o formă polinomială, dar şi ecuaţiile transcendente. Ecuaţii algebrice şi transcendente.

Rezolvarea ecuaţiei (1) = găsirea zerourilor funcţiei f, adică a valorilor $x = c$ care satisfac (1).

Trei categorii de metode de rezolvare numerică a ecuaţiilor algebrice neliniare:

Categorii de metode (cont'd 1)

a) metode de *separare* sau *localizare* a soluţiilor ecuaţiei (1) – de izolare a unor subdomenii ale domeniului de definiţie *I*, care să conţină câte unul din zerourile funcţiei f (a se vedea *şirul lui Rolle*);

b) metode de *determinare, cu o precizie a priori fixată, a unei soluţii* care a fost izolată în prealabil, pornind de la o valoare aproximativă a acesteia;

c) metode de *determinare a tuturor soluţiilor* – aplicabile, de regulă, în cazul în care f este un polinom.

Soluţie aproximativă

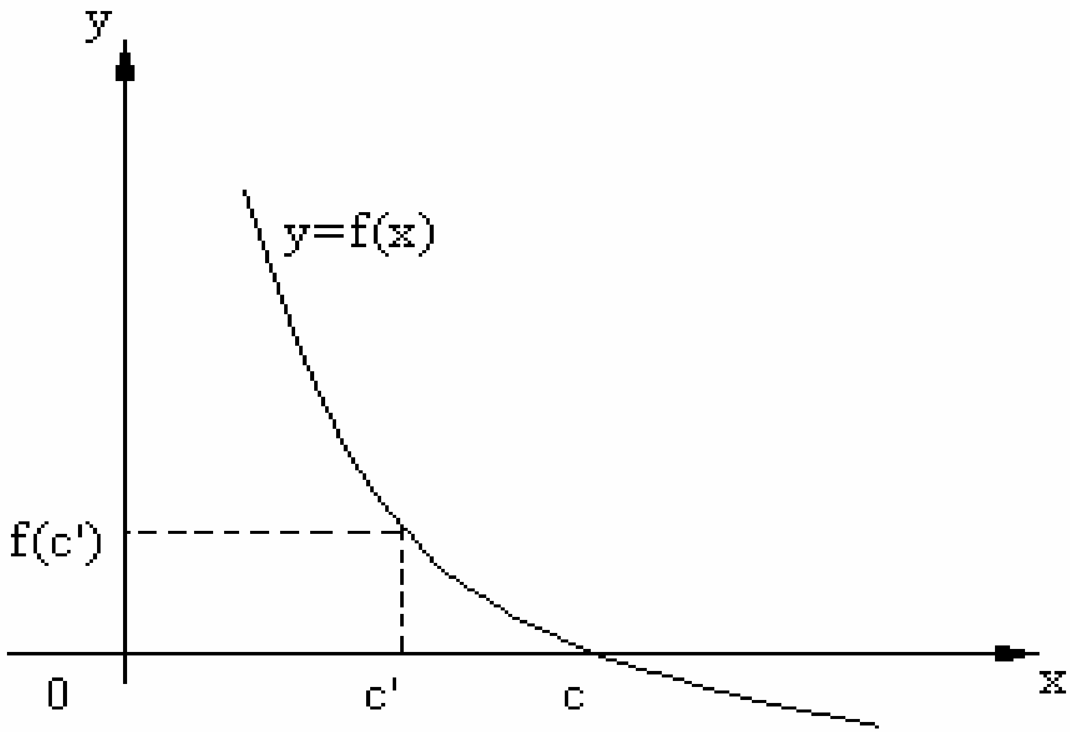
Se presupune că c este valoarea exactă a unei soluţii a ecuaţiei (1), iar c' o valoare aproximativă a acestei soluţii. Soluţia aproximativă se poate defini:

1) o valoare $x=c'$: $|c'-c| < \varepsilon_x$, cu $\varepsilon_x>0$ şi $f(c)=0$;

2) o valoare $x=c'$: $|f(c')| < \varepsilon_f$, cu $\varepsilon_f > 0$ şi $f(c)=0$.

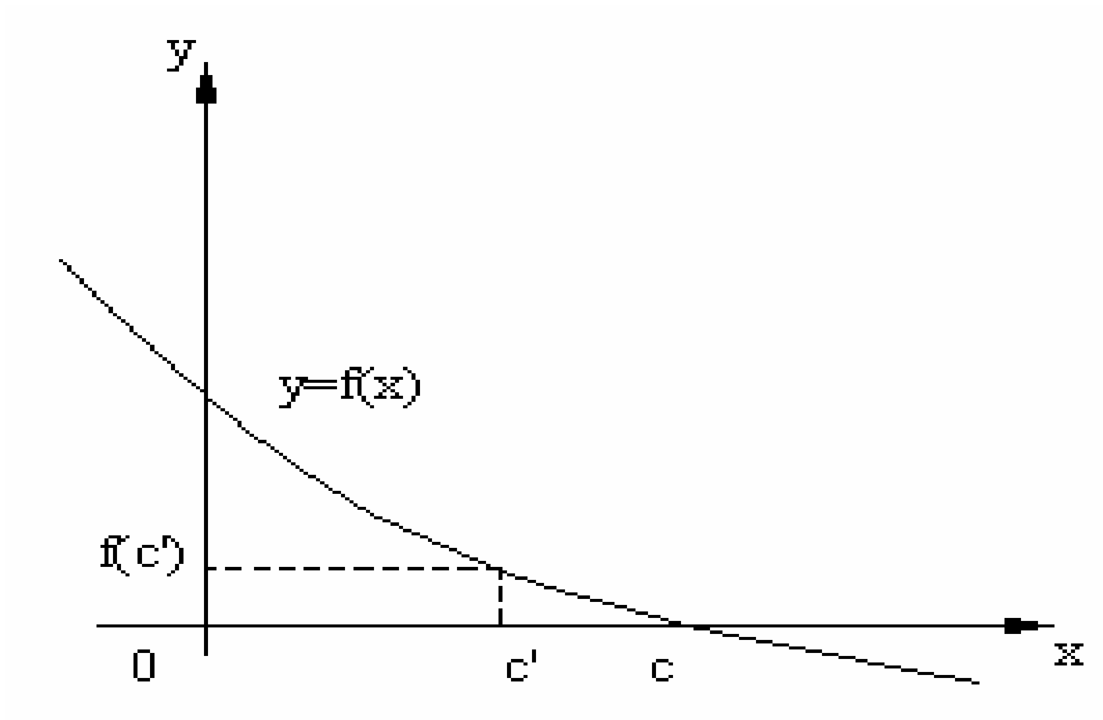
Soluţie aproximativă (cont'd 1)

Modul 1):



Soluţie aproximativă (cont’d 2)

Modul 2):



5.1. Metode de calcul al unei soluţii reale a unei ecuaţii algebrice neliniare

Soluţia reală a ecuaţiei (1) – separată în prealabil în intervalul $[a,b]$:

$$f(x) = 0, \quad x \in [a, b] \,. \tag{1.1}$$

Două metode de partiţionare a intervalului, bisecţiei şi falsei poziţii.

Metoda bisecţiei (înjumătăţirii intervalului)

Este destinată rezolvării ecuaţiei (1.1), pentru care s-a separat în prealabil o soluţie în intervalul [a, b]:

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \, . \tag{1.2}$$

Se consideră f – continuă pe [a, b]. Soluţia va fi determinată cu erorile admise ε_x (pentru soluţie) şi ε_f (pentru funcţie).

Trăsătură caracteristică: pornind de la [a, b], la fiecare pas este restrâns domeniul în care este căutată soluţia prin înjumătăţirea intervalului de la pasul anterior, până la atingerea preciziei dorite.

Metoda bisecţiei (cont'd 1)

Avantaj: simplă.

Dezavantaj: slab convergentă.

Algoritmul metodei bisecţiei – etape:

I) Iniţializarea limitelor intervalului de căutare, "*r*" şi "*s*", cu valorile limitelor intervalului în care s-a separat soluţia:

$$r^0 = a, \; s^0 = b \tag{1.3}$$

(indicele superior – iteraţia curentă).

Metoda bisecţiei (cont'd 2)

II) La pasul de calcul k, k = 1, 2, 3, ..., se determină noua valoare a soluţiei

$$x^k = \frac{r^{k-1} + s^{k-1}}{2} . \qquad (1.4)$$

III) La acelaşi pas k se calculează f(x^k) şi f(r^{k-1}) $\Rightarrow$ noile limite ale intervalului de căutare:

dacă f(x^k) $\cdot$ f(r^{k-1}) < 0 $\Rightarrow$ $r^k = r^{k-1}$ şi $s^k = x^k$; (1.5)

dacă f(x^k) $\cdot$ f(r^{k-1}) > 0 $\Rightarrow$ $r^k = x^k$ şi $s^k = s^{k-1}$; (1.6)

dacă f(x^k) $\cdot$ f(r^{k-1}) = 0 $\Rightarrow$ calcul terminat şi $c = x^k$; (1.7)

Metoda bisecţiei (cont'd 3)

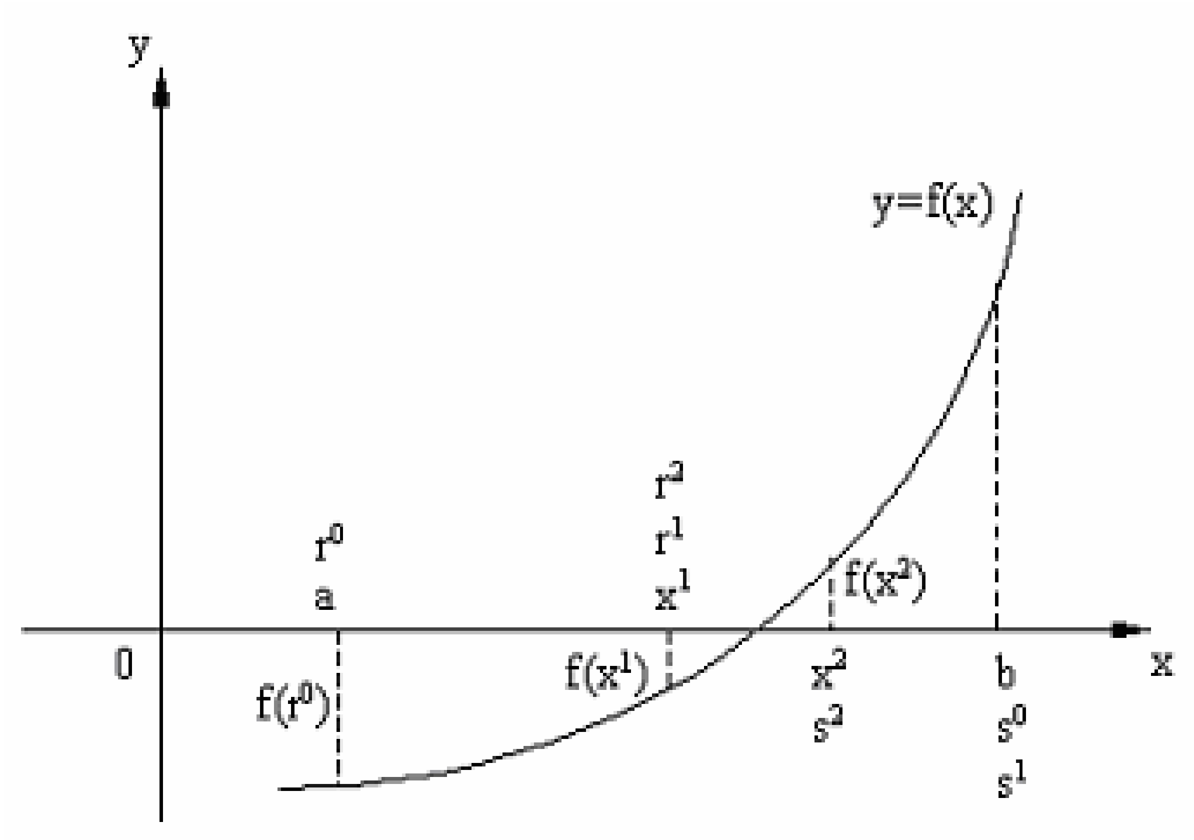
IV) Procesul de calcul se consideră terminat când sunt îndeplinite condiţiile (1.8) şi / sau (1.9):

$$|s^k - r^k| \le \varepsilon_x ; \tag{1.8}$$

$$|f(x^k)| \le \varepsilon_f . \tag{1.9}$$

Interpretarea geometrică a metodei bisecţiei:

Metoda bisecţiei (cont'd 4)



Metoda bisecţiei (cont'd 5)

Exemplu: Se consideră ecuaţia

$$f(x) = 0\ ,\quad f(x) = 2 \cdot \mathrm{tg} x - 10 \cdot x + 3\ ,$$

pentru care a fost separată o soluţie în intervalul [−1, 1]. Să se determine soluţia ecuaţiei utilizând metoda bisecţiei, erorile admise fiind $\varepsilon_x = 10^{-3}$ şi $\varepsilon_f = 10^{-2}$.

Soluţie: Sunt parcurse etapele metodei bisecţiei:

I) Iniţializări:

$$r^0 = -1\ ,\ \ s^0 = 1\ ,\ \ |r^0 - s^0| = 2\ .$$

Metoda bisecţiei (cont'd 6)

Iteraţia k = 1

II) $x^1 = \dfrac{r^0 + s^0}{2} = 0$;

III) $f(x^1) = f(0) = 3$, $f(r^0) = f(-1) = 9.885$,

$f(x^1) \cdot f(r^0) > 0 \quad \Rightarrow \quad r^1 = x^1 = 0$, $s^1 = s^0 = 1$.

Se verifică dacă sunt îndeplinite condiţiile de terminare (1.8) şi (1.9):

$|r^1 - s^1| = 1 > \varepsilon_x$ şi $|f(x^1)| = 3 > \varepsilon_f$.

Nu sunt îndeplinite $\Rightarrow$ algoritmul se continuă cu

Metoda bisecţiei (cont'd 7)

Iteraţia k = 2

II) $x^2 = \dfrac{r^1 + s^1}{2} = 0.5$;

III) $f(x^2) = f(0.5) = -0.9074$, $f(r^1) = f(0) = 3$,

$f(x^2) \cdot f(r^1) < 0 \;\Rightarrow\; r^2 = r^1 = 0$, $s^2 = x^2 = 0.5$.

$|r^2 - s^2| = 0.5 > \varepsilon_x$ şi $|f(x^2)| = 0.9074 > \varepsilon_f \;\Rightarrow$

Se trece la iteraţia următoare:

Metoda bisecţiei (cont'd 8)

Iteraţia k = 3

II) $x^3 = \dfrac{r^2 + s^2}{2} = 0.25$;

III) $f(x^3) = f(0.25) = 1.011$, $f(r^2) = f(0) = 3$,

$f(x^3) \cdot f(r^2) > 0 \Rightarrow r^3 = x^3 = 0.25$, $s^3 = s^2 = 0.5$.

$|r^3 - s^3| = 0.25 > \varepsilon_x$ şi $|f(x^3)| = 1.011 > \varepsilon_f \Rightarrow$

Este continuat algoritmul:

Metoda bisecţiei (cont'd 9)

Iteraţia k = 4

II) $x^4 = \dfrac{r^3 + s^3}{2} = 0.375$;

III) $f(x^4) = f(0.375) = 0.037$, $f(r^3) = f(0.25) = 1.011$,

$f(x^4) \cdot f(r^3) > 0 \;\; \Rightarrow \;\; r^4 = x^4 = 0.375$, $s^4 = s^3 = 0.5$.

$|r^4 - s^4| = 0.125 > \varepsilon_x$ şi $|f(x^4)| = 0.375 > \varepsilon_f$.

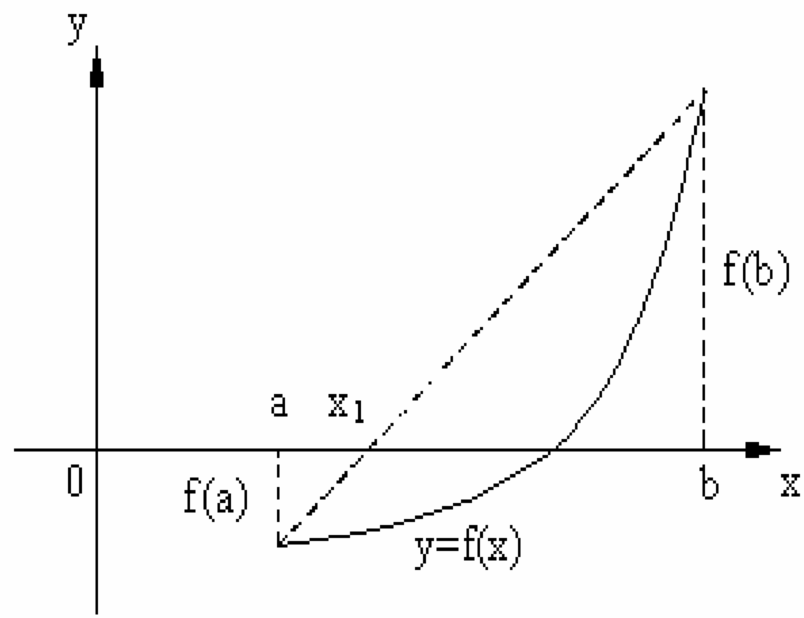
Erorile au scăzut, însă nu suficient de mult pentru ca cele două condiţii de terminare să fie îndeplinite $\Rightarrow$ alte iteraţii ...

Metoda falsei poziţii (metoda împărţirii intervalului în părţi proporţionale)

Avantaj: mai rapid convergentă.

Trăsătură caracteristică: pornind de la [a, b], la fiecare pas se restrânge domeniul de căutare a soluţiei, prin împărţirea intervalului de la pasul anterior în raportul valorilor funcţiei la capetele intervalului.

Interpretarea geometrică:



Coarda:

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(b)-\mathrm{f}(a)}\ , \qquad (1.10)$$

Metoda falsei poziţii (cont'd 1)

$\Rightarrow$ abscisa punctului de intersecţie cu *Ox*:

$$x_1 = \frac{a \cdot \mathrm{f}(b) - b \cdot \mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)} \quad . \tag{1.11}$$

Algoritmul metodei falsei poziţii – etape:

I) Iniţializarea limitelor intervalului curent de căutare, "*r*" şi "*s*":

$$r^0 = a\,,\ \ s^0 = b \tag{1.12}$$

şi calculul lui f(r^0) şi f(s^0).

II) La un pas oarecare *k*, *k* = 1, 2, 3, …, al procesului iterativ de calcul, este calculată noua valoare a soluţiei:

Metoda falsei poziţii (cont'd 2)

$$x^k = \frac{r^{k-1} \cdot \mathrm{f}(s^{k-1}) - s^{k-1} \cdot \mathrm{f}(r^{k-1})}{\mathrm{f}(s^{k-1}) - \mathrm{f}(r^{k-1})} . \qquad (1.13)$$

III) La acelaşi pas k este calculată f(x^k), rezultând noile limite ale intervalului de căutare, r^k şi s^k, conform (1.5) … (1.7), împreună cu f(r^k) şi f(s^k).

IV) Calculul este terminat când sunt îndeplinite condiţiile (1.8) şi / sau (1.9).

Metoda falsei poziţii (cont'd 3)

Exemplu: Se consideră ecuaţia din cadrul exemplului anterior. Să se rezolve utilizând metoda falsei poziţii.

Soluţie: Se aplică algoritmul metodei falsei poziţii:

I) Iniţializări:

$r^0 = -1$, $s^0 = 1$,

sunt calculate valorile funcţiei f în r^0 şi s^0:

$f(r^0) = f(-1) = 9.885$, $f(s^0) = f(1) = -3.885$.

Metoda falsei poziţii (cont'd 4)

Pentru k = 1, 2, 3, …, se repetă etapele II) … IV), până când sunt îndeplinite condiţiile etapei IV).

Iteraţia k = 1

II) Este calculat x^1 cu (1.13):

$$x^1 = \frac{r^0 \cdot \mathrm{f}(s^0) - s^0 \cdot \mathrm{f}(r^0)}{\mathrm{f}(s^0) - \mathrm{f}(r^0)} = \frac{-(-3.885) - 9.885}{-3.885 - 9.885} = 0.4357 \, .$$

III) Este determinată valoarea funcţiei f în x^1:

Metoda falsei poziţii (cont'd 5)

$f(x^1) = f(0.4375) = -0.426$.

$f(x^1) \cdot f(r^0) < 0 \Rightarrow$ din (1.5): $r^1 = r^0 = -1$, $s^1 = x^1 = 0.4357$

şi valorile corespunzătoare ale funcţiei f:

$f(r^1) = f(-1) = 9.855$, $f(s^1) = f(0.4357) = -0.426$.

Sunt verificate condiţiile de terminare a algoritmului:

$|r^1 - s^1| = 1.4357 > \varepsilon_x$, $|f(x^1)| = 0.426 > \varepsilon_f$.

(1.8) şi (1.9) nu sunt satisfăcute $\Rightarrow$ iteraţia următoare:

Metoda falsei poziţii (cont'd 6)

Iteraţia k = 2

II) Este calculat x^2:

$$x^2 = \frac{r^1 \cdot \mathrm{f}(s^1) - s^1 \cdot \mathrm{f}(r^1)}{\mathrm{f}(s^1) - \mathrm{f}(r^1)} = \frac{-(-0.426) - 0.4357 \cdot 9.885}{-0.426 - 9.885} = 0.3764 \quad .$$

III) Este determinată valoarea f(x^2):

f(x^2) = f(0.3764) = 0.265 .

f(x^2) $\cdot$ f(r^1) $>$ 0 $\Rightarrow$ din (1.6): r^2=x^{22}=0.3764, s^2=s^1=0.4357.

f(r^2) = f(0.3764) = 0.265 , f(s^2) = f(0.4357) = –0.426 .

Metoda falsei poziţii (cont'd 7)

Sunt verificate din nou condiţiile de terminare a calculelor:

$|r^2 - s^2| = 0.0587 > \varepsilon_x$, $|\mathrm{f}(x^2)| = 0.265 > \varepsilon_f$.

(1.8) şi (1.9) nu sunt satisfăcute $\Rightarrow$ iteraţia următoare.

Erorile au scăzut semnificativ, scăderea lor fiind mai rapidă decât în cazul metodei bisecţiei, însă încă nu s-a ajuns la îndeplinirea condiţiilor de terminare a calculelor $\Rightarrow$ algoritmul se continuă ...

Alte metode: Newton, secantei, de punct fix.

5.2. Generalităţi privind soluţionarea numerică a sistemelor de ecuaţii algebrice neliniare

Forma implicită a unui sistem de ecuaţii algebrice neliniare de ordinul n – întotdeauna posibilă:

$$\begin{cases} \mathrm{f}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \mathrm{f}_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{f}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}, \tag{2.1}$$

f_1, f_2, ..., f_n, de variabile x_1, x_2, ..., x_n – continue.

Sisteme

Notaţii matriceale: $$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathrm{f}} = \begin{bmatrix} \mathrm{f}_1 \\ \mathrm{f}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{f}_n \end{bmatrix}, \qquad (2.2)$$

$\Rightarrow$ forma compactă a sistemului:

$$\underline{\mathrm{f}}(\underline{x}) = \underline{0}\,,\ \ \underline{\mathrm{f}} : D \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n\,. \qquad (2.3)$$

Forme intermediare:

$$\mathrm{f}_i(\underline{x}) = 0\,,\ \ i = 1 \ldots n\,. \qquad (2.4)$$

Determinarea unei soluţii a sistemului (2.1) =

Sisteme (cont'd 1)

găsirea unui set de valori $\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, (2.5)

care satisfac (2.1) $\Leftrightarrow$ $\underline{f}(\underline{c}) = \underline{0}$.

Categorii de metode numerice:

I. *metode de **separare*** a unei / unor soluţii de interes;

II. *metode de **determinare***, cu o precizie fixată a priori, a unei soluţii separate în prealabil.

Sisteme (cont'd 2)

În categoria II.:

a) metode bazate pe **exprimarea explicită echivalentă** a ecuaţiilor sistemului (2.1) – ***metode de aproximaţii succesive***;

b) metode care utilizează derivatele parţiale ale funcţiilor f_i – ***metode de tip Newton***;

c) metode de ***descreştere*** (de ***coborâre***, de ***gradient***).

Doar a) şi b).

5.3. Metode bazate pe exprimarea explicită echivalentă a ecuaţiilor sistemului

Se cere să se determine o soluţie $\underline{c}$ a sistemului (2.1), separată în prealabil în domeniul $D = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \subset \boldsymbol{R}^n$, cu erorile maxim admise ε_x (pentru valorile variabilelor) şi ε_f (pentru valorile funcţiilor).

Trăsătură caracteristică: înlocuirea exprimărilor implicite (2.1) ale ecuaţiilor sistemului cu exprimările explicite echivalente

Exprimarea explicită echivalentă

$$\begin{cases} x_1 = \mathrm{g}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2 = \mathrm{g}_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \mathrm{g}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$, cu g_i, $i = 1 \ldots \mathrm{n}$ – continue. (3.1)

Notaţie: $$\underline{\mathrm{g}} = \begin{bmatrix} \mathrm{g}_1 \\ \mathrm{g}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{g}_n \end{bmatrix},$$ (3.2)

Exprimarea explicită echivalentă (cont'd 1)

$\Rightarrow$ exprimarea matriceală: $\underline{x} = \underline{\mathrm{g}}(\underline{x})$, $\underline{x} \in D \subset \boldsymbol{R}^n$, (3.3)

cu forma intermediară: $x_i = \mathrm{g}_i(\underline{x})$, $i = 1 \ldots n$. (3.4)

Exprimările explicite sunt întotdeauna posibile şi, în plus, uneori sunt posibile mai multe variante.

Algoritmul metodei aproximaţiilor succesive în versiunea Jacobi

I) Iniţializare (indicele superior – iteraţia curentă):

$$\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix} \in D \quad . \tag{3.5}$$

II) La un pas oarecare *k*, *k* = 1, 2, 3, …, al procesului iterativ de calcul, se determină noile valori ale variabilelor:

Metoda Jacobi

$$x_i^k = \mathrm{g}_i(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \ldots, x_n^{k-1}),\ i = \overline{1,n} \quad . \tag{3.6}$$

III) Calculul este terminat atunci când sunt îndeplinite condiţiile (3.7) şi / sau (3.8):

$$\left| x_i^k - x_i^{k-1} \right| \le \varepsilon_x,\ i = \overline{1,n} \quad , \tag{3.7}$$

$$\left| \mathrm{f}_i(\underline{x}^k) \right| \le \varepsilon_f,\ i = \overline{1,n} \quad . \tag{3.8}$$

Condiţiile suficiente de convergenţă:

$$\left| \frac{\partial \mathrm{g}_i(\underline{x})}{\partial x_j} \right| < 1,\ i, j = \overline{1,n} \quad . \tag{3.9}$$

Metoda aproximaţiilor succesive în versiunea Gauss-Seidel

Diferenţă: relaţia (3.6) modificată:

$$x_i^k = \mathrm{g}_i(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{i-1}^k, x_i^{k-1}, \ldots, x_n^{k-1}),\ i = \overline{1,n}\ , \qquad (3.10)$$

$\Leftrightarrow$ apar valorile “noi” ale variabilelor care au fost recalculate deja la iteraţia *k*.

Metoda Gauss-Seidel

Exemplu: Să se rezolve sistemul neliniar

$$\begin{cases} 2x_1^2 - x_2 x_3 - 5x_1 + 1 = 0 \\ x_2^2 - 2x_1 - \ln x_3 = 0 \\ x_3^2 - x_1 x_2 - 2x_3 - 8 = 0 \end{cases}$$

cu metoda Gauss-Seidel, cu erorile maxime admise ε_x = 0,001 şi ε_f = 0,1, cunoscând că s-a separat o soluţie în domeniul D = [0; 10] × [0; 10] × [1; 10].

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 1)

Soluţie: Rescrierea sistemului într-o formă cu exprimarea explicită

a variabilelor, de forma (3.1): $$\begin{cases} x_1 = \sqrt{0.5 \cdot (x_2 x_3 + 5x_1 - 1)} \\ x_2 = \sqrt{2x_1 + \ln x_3} \\ x_3 = \sqrt{x_1 x_2 + 2x_3 + 8} \end{cases} .$$

Iteraţia k = 0

I) Iniţializare (exemplu): $$\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} .$$

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 2)

Valorile funcţiilor f_1, f_2 şi f_3 pentru valorile iniţiale ale variabilelor:

$f_1(\underline{x}^0) = 2\cdot 10^2 - 10\cdot 10 - 5\cdot 10 + 1 = 51$,

$f_2(\underline{x}^0) = 10^2 - 2\cdot 10 - \ln 10 = 77.7$,

$f_3(\underline{x}^0) = 10^2 - 10\cdot 10 - 2\cdot 10 - 8 = -28$.

Iniţializarea se poate face şi cu alte valori şi se pot urmări efectele asupra evoluţiei convergenţei procesului de calcul în funcţie de aceste valori iniţiale.

Iteraţia k = 1

II) (3.10) $\Rightarrow$

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 3)

$$x_1^1 = \sqrt{0.5 \cdot (x_2^0 \cdot x_3^0 + 5 \cdot x_1^0 - 1)} = \sqrt{0.5 \cdot (10 \cdot 10 + 5 \cdot 10 - 1)} = 8.631 \ ,$$

$$x_2^1 = \sqrt{2 \cdot x_1^1 + \ln x_3^0} = \sqrt{2 \cdot 8.631 + \ln 10} = 4.423 \ ,$$

$$x_3^1 = \sqrt{x_1^1 \cdot x_2^1 + 2 \cdot x_3^0 + 8} = \sqrt{8.631 \cdot 4.423 + 2 \cdot 10 + 8} = 8.135 \ .$$

Se calculează erorile:

$|x_1^1 - x_1^0| = |8.631 - 10| = 1.369 > \varepsilon_x$,

$|x_2^1 - x_2^0| = |4.423 - 10| = 5.577 > \varepsilon_x$,

$|x_3^1 - x_3^0| = |8.135 - 10| = 1.865 > \varepsilon_x$.

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 4)

$|f_1(\underline{x}^1)| = 70.86 > \varepsilon_f$,

$|f_2(\underline{x}^1)| = 0.206 > \varepsilon_x$,

$|f_3(\underline{x}^1)| = 3.73 > \varepsilon_x$.

Condiţiile de terminare a calculelor nu sunt îndeplinite $\Rightarrow$ necesară continuarea algoritmului cu iteraţia următoare:

Iteraţia k = 2

II) Se calculează $\underline{x}^2$: (3.10) $\Rightarrow$

$$x_1^2 = \sqrt{0.5 \cdot (x_2^1 \cdot x_3^1 + 5 \cdot x_1^1 - 1)} = \sqrt{0.5 \cdot (4.423 \cdot 8.135 + 5 \cdot 8.631 - 1)} = 6.251 \text{ ,}$$

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 5)

$$x_2^2 = \sqrt{2 \cdot x_1^2 + \ln x_3^1} = \sqrt{2 \cdot 6.251 + \ln 8.135} = 3.821 \, ,$$

$$x_3^2 = \sqrt{x_1^2 \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_3^1 + 8} = \sqrt{6.251 \cdot 3.821 + 2 \cdot 8.135 + 8} = 6.939 \, .$$

Se determină erorile:

$$|x_1^2 - x_1^1| = |6.251 - 8.631| = 2.38 > \varepsilon_x \, ,$$

$$|x_2^2 - x_2^1| = |3.821 - 4.423| = 0.602 > \varepsilon_x \, ,$$

$$|x_3^2 - x_3^1| = |6.939 - 8.135| = 1.196 > \varepsilon_x \, .$$

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 6)

$|f_1(\underline{x}^2)| = 21.4 > \varepsilon_f$,

$|f_2(\underline{x}^2)| = 0.16 > \varepsilon_x$,

$|f_3(\underline{x}^2)| = 2.39 > \varepsilon_x$.

Erorile au scăzut, dar nu sunt încă îndeplinite condiţiile de terminare a procesului de calcul $\Rightarrow$ etapele II) şi III) ale algoritmului se repetă pentru $k = 3, 4, \ldots, 12$.

Iteraţia k = 13

II) Se calculează $\underline{x}^{13}$:

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 7)

$$x_1^{13} = \sqrt{0.5 \cdot (x_2^{12} \cdot x_3^{12} + 5 \cdot x_1^{12} - 1)} = \sqrt{0.5 \cdot (3.292 \cdot 5.89 + 5 \cdot 4.531 - 1)} = 4.53 \ ,$$

$$x_2^{13} = \sqrt{2 \cdot x_1^{13} + \ln x_3^{12}} = \sqrt{2 \cdot 4.53 + \ln 5.89} = 3.291 \ ,$$

$$x_3^{13} = \sqrt{x_1^{13} \cdot x_2^{13} + 2 \cdot x_3^{12} + 8} = \sqrt{4.53 \cdot 3.291 + 2 \cdot 5.89 + 8} = 5.89 \ .$$

Se determină erorile:

$|x_1^{13} - x_1^{12}| = |4.53 - 4.531| = 0.001 \le \varepsilon_x$,

$|x_2^{13} - x_2^{12}| = |3.291 - 3.292| = 0.001 \le \varepsilon_x$,

$|x_3^{13} - x_3^{12}| = |5.89 - 5.89| = 0 \le \varepsilon_x$.

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 8)

$|f_1(\underline{x}^{13})| = 0.008 \le \varepsilon_f$,

$|f_2(\underline{x}^{13})| = 0.003 \le \varepsilon_f$,

$|f_3(\underline{x}^{13})| = 0.004 \le \varepsilon_f$.

Erorile calculate sunt mai mici sau cel mult egale cu erorile maxim admisibile $\Rightarrow$ algoritmul se opreşte.

$\Rightarrow$ soluţia aproximativă $\underline{x} = \begin{bmatrix} 4.43 \\ 3.291 \\ 5.89 \end{bmatrix}$.

5.4. Metode de tip Newton

Versiunea clasică a ***metodei lui Newton*** utilizează explicit *derivatele parţiale* de ordinul I ale funcţiilor $f_i(\underline{x})$, $i = 1 \ldots n$.

Se presupune că s-a ajuns la pasul k al procesului iterativ de calcul, ultima valoare aproximativă a soluţiei fiind $\underline{x}^{k-1}$. Se doreşte determinarea unei corecţii $\underline{h}^{k-1}$ care, adăugată la $\underline{x}^{k-1}$, să conducă la soluţia exactă $\underline{c}$:

$$\underline{c} = \underline{x}^{k-1} + \underline{h}^{k-1} . \qquad (4.1)$$

Metode de tip Newton (cont'd 1)

Dezvoltând în serie Taylor funcţiile $\mathrm{f}_i(\underline{x})$, $i = 1 \dots n$,

în vecinătatea lui $\underline{x}^{k-1} \Rightarrow$

$\mathrm{f}_i(\underline{c}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{f}_i(\underline{x}^{k-1} + \underline{h}^{k-1}) = 0 \;\Leftrightarrow$

$$\mathrm{f}_i(\underline{x}^{k-1}) + \frac{\partial \mathrm{f}_i(\underline{x}^{k-1})}{\partial x_1} h_1^{k-1} + \frac{\partial \mathrm{f}_i(\underline{x}^{k-1})}{\partial x_2} h_2^{k-1} + \cdots + \frac{\partial \mathrm{f}_i(\underline{x}^{k-1})}{\partial x_n} h_n^{k-1} + \cdots = 0, \; i = \overline{1,n} \, . \tag{4.2}$$

Dacă din această dezvoltare se reţin doar termenii care conţin derivatele de ordinul I (restul termenilor se neglijează) $\Rightarrow$

Metode de tip Newton (cont'd 2)

se poate aproxima acea valoare a lui $\underline{h}^{k\text{-}1}$ care nu va mai conduce la soluţia exactă $\underline{c}$, ci la noua valoare aproximativă $\underline{x}^{k}$ a soluţiei (evident, mai bună decât $\underline{x}^{k\text{-}1}$, în cazul convergenţei).

$\Rightarrow$ relaţiile (4.2) conduc la sistemul liniar de ordinul n în necunoscutele $h_1^{k-1}, h_2^{k-1}, \ldots, h_n^{k-1}$:

Metode de tip Newton (cont'd 4)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial x_1} h_1^{k-1} + \dfrac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial x_2} h_2^{k-1} + \cdots + \dfrac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial x_n} h_n^{k-1} = -\mathrm{f}_1(\underline{x}^{k-1}) \\ \dfrac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial x_1} h_1^{k-1} + \dfrac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial x_2} h_2^{k-1} + \cdots + \dfrac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial x_n} h_n^{k-1} = -\mathrm{f}_2(\underline{x}^{k-1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \mathrm{f}_n}{\partial x_1} h_1^{k-1} + \dfrac{\partial \mathrm{f}_n}{\partial x_2} h_2^{k-1} + \cdots + \dfrac{\partial \mathrm{f}_n}{\partial x_n} h_n^{k-1} = -\mathrm{f}_n(\underline{x}^{k-1}) \end{cases}, \qquad (4.3)$$

la care toate derivatele sunt calculate în $\underline{x}^{k-1}$.

Metode de tip Newton (cont'd 5)

Matricea Jacobian:

$$\underline{J}^{k-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \mathrm{f}_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathrm{f}_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \mathrm{f}_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \qquad (4.4)$$

$\Rightarrow$ sistemul (4.3) rescris sub formă restrânsă:

$$\underline{J}^{k-1} \cdot \underline{h}^{k-1} = -\underline{\mathrm{f}}^{k-1} \;. \qquad (4.5)$$

Metode de tip Newton (cont'd 6)

Algoritmul versiunii clasice a metodei lui Newton:

I) Se iniţializează $\underline{x}$ cu $\underline{x}^0 \in D$ (indicele superior – iteraţia curentă).

II) La un pas oarecare *k*, *k* = 1, 2, ..., al procesului iterativ de calcul, se calculează elementele vectorului $\underline{f}^{k-1}$ şi matricea $\underline{J}^{k-1}$ pentru $\underline{x} = \underline{x}^{k-1}$.

III) La acelaşi pas se rezolvă sistemul (4.5) $\Rightarrow$ noile valori ale variabilelor:

Metode de tip Newton (cont'd 7)

$$\underline{x}^{k} = \underline{x}^{k-1} + \underline{h}^{k-1} \,. \tag{4.6}$$

Calculul este terminat când sunt îndeplinite condiţiile (4.7) şi / sau (4.8):

$$\left|h_i^{k-1}\right| \le \varepsilon_x ,\ i = \overline{1,n} \,, \tag{4.7}$$

$$\left|\mathrm{f}_i(\underline{x}^{k})\right| \le \varepsilon_f ,\ i = \overline{1,n} \,. \tag{4.8}$$

Exemplu: Să se rezolve sistemul de ecuaţii din exemplul anterior utilizând metoda clasică a lui Newton,

Metode de tip Newton (cont'd 8)

cu erorile maxim admise ε_x=0.01 şi ε_f =0.1, cunoscând că s-a separat o soluţie în domeniul $D = [0; 10] \times [0; 10] \times [1; 10]$.

Soluţie: Se parcurg etapele algoritmului:

I) Iniţializarea: $\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$.

Iteraţia k = 1

II) Se calculează elementele vectorului $\underline{f}^0 = \underline{f}(\underline{x}^0)$:

Metode de tip Newton (cont'd 9)

$$\underline{\mathrm{f}}^{0}=\begin{bmatrix}2(x_1^0)^2-x_2^0x_3^0-5x_1^0+1\\(x_2^0)^2-2x_1^0-\ln x_3^0\\(x_3^0)^2-x_1^0x_2^0-2x_3^0-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}51\\77.697\\-28\end{bmatrix}$$

şi elementele matricei Jacobian:

$$\underline{J}^{0}=\begin{bmatrix}4x_1^0-5 & -x_3^0 & -x_2^0\\-2 & 2x_2^0 & -\dfrac{1}{x_3^0}\\-x_2^0 & -x_1^0 & 2x_3^0-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}35 & -10 & -10\\-2 & 20 & -0.1\\-10 & -10 & 18\end{bmatrix}.$$

Metode de tip Newton (cont'd 10)

$\Rightarrow$ sistemul (4.5) devine
$$\begin{cases} 35h_1^0 - 10h_2^0 - 10h_3^0 = -51 \\ -2h_1^0 + 20h_2^0 - 0{,}1h_3^0 = -77.697 \\ -10h_1^0 - 10h_2^0 + 18h_3^0 = 28 \end{cases} .$$

III) Se rezolvă sistemul $\Rightarrow$
$$\underline{h}^0 = \begin{bmatrix} -3.445 \\ -4.243 \\ -2.716 \end{bmatrix} .$$

$\Rightarrow$ noile valori ale lui $\underline{x}$:
$$\underline{x}^1 = \underline{x}^0 + \underline{h}^0 = \begin{bmatrix} 6.555 \\ 5.757 \\ 7.284 \end{bmatrix} .$$

Metode de tip Newton (cont'd 11)

Însă $|h_1^0| = |3.445| > \varepsilon_x$, $|h_2^0| > \varepsilon_x$, $|h_3^0| > \varepsilon_x \Rightarrow$ nu sunt îndeplinite condiţiile de terminare a calculelor $\Rightarrow$ algoritmul se continuă cu iteraţia următoare:

Iteraţia k = 2

II) Se calculează elementele vectorului $\underline{f}^1 = \underline{f}(\underline{x}^1)$ şi ale matricei Jacobian:

Metode de tip Newton (cont'd 12)

$$\underline{\mathrm{f}}^{1}=\begin{bmatrix}2(x_1^1)^2-x_2^1x_3^1-5x_1^1+1\\(x_2^1)^2-2x_1^1-\ln x_3^1\\(x_3^1)^2-x_1^1x_2^1-2x_3^1-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12.227\\18.047\\-7.248\end{bmatrix},$$

$$\underline{J}^{1}=\begin{bmatrix}4x_1^1-5 & -x_3^1 & -x_2^1\\-2 & 2x_2^1 & -\dfrac{1}{x_3^1}\\-x_2^1 & -x_1^1 & 2x_3^1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21.22 & -7.284 & -5.757\\-2 & 11.514 & -0.137\\-5.757 & -6.555 & 12.568\end{bmatrix}.$$

Metode de tip Newton (cont'd 13)

$\Rightarrow$ sistemul (4.5):

$$\begin{cases} 21.22h_1^1 - 7.284h_2^1 - 5.757h_3^1 = -12.227 \\ -2h_1^1 + 11.514h_2^1 - 0.137h_3^1 = -18.047 \\ -5.757h_1^1 - 6.555h_2^1 + 12.568h_3^1 = 7.248 \end{cases}.$$

III) Rezolvarea sistemului $\Rightarrow$ $\underline{h}^1 = \begin{bmatrix} -1.498 \\ -1.84 \\ -1.069 \end{bmatrix}$.

Metode de tip Newton (cont'd 14)

$\Rightarrow$ noile valori ale lui $\underline{x}$: $$\underline{x}^2 = \underline{x}^1 + \underline{h}^1 = \begin{bmatrix} 5.057 \\ 3.917 \\ 6.215 \end{bmatrix}.$$

Însă, din nou $|h_1^1| = |1.498| > \varepsilon_x$, $|h_2^1| > \varepsilon_x$, $|h_3^1| > \varepsilon_x \Rightarrow$

calculele se continuă cu iteraţia următoare ...

Alte variante ale metodei lui Newton: eliminarea calculului derivatei.