Cap. 2. Elemente de calcul numeric matriceal (cont'd)

2.2. Metode de calcul al inversei

Metoda reducerii la matricea unitate / ***metoda eliminării în versiunea Gauss-Jordan, a diagonalizării*** / **metoda eliminării**.

Avantaj: Obţinerea valorii determinantului fără calcule suplimentare.

Metoda eliminării

Baza = **teoremă** din algebra matriceală: *Dacă o matrice nesingulară $\underline{A}$ poate fi redusă la $\underline{I}$ prin înmulţirea la stânga cu un şir de matrice, atunci inversa* $\underline{A}^{-1}$ *se poate calcula prin înmulţirea lui $\underline{I}$ la stânga cu acelaşi şir de matrice în ordine inversă*.

Algoritmul de inversare –două procese de calcul derulate în paralel + *n* paşi:

I. Iniţializări:

$$\underline{A}^{0} = \underline{A}; \tag{2.1}$$

Metoda eliminării (cont'd 1)

$$\underline{D}^0 = \underline{I}\,. \tag{2.2}$$

II. La pasul *k*, $k = \overline{1,n}$, se calculează elementele matricelor $\underline{A}^k$ şi $\underline{D}^k$:

$$a_{kj}^{k} = \frac{a_{kj}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}, \quad j = \overline{k+1,n}\;; \tag{2.3}$$

$$d_{kj}^{k} = \frac{d_{kj}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}, \quad j = \overline{1,k}\;; \tag{2.4}$$

Metoda eliminării (cont'd 2)

$$a_{ii}^{k} = 1, \quad i = \overline{1,k} \;; \tag{2.5}$$

$$d_{ii}^{k} = 1, \quad i = \overline{k+1,n} \;; \tag{2.6}$$

$$a_{ij}^{k} = a_{ij}^{k-1} - a_{ik}^{k-1} \cdot a_{kj}^{k}, \quad i = \overline{1,n}, i \neq k, \; j = \overline{k+1,n} \;; \tag{2.7}$$

$$d_{ij}^{k} = d_{ij}^{k-1} - a_{ik}^{k-1} \cdot d_{kj}^{k}, \quad i = \overline{1,n}, i \neq k, \; j = \overline{1,k} \;; \tag{2.8}$$

$$a_{ij}^{k} = 0, \quad i = \overline{1,n}, i \neq j, \; j = \overline{1,k} \;; \tag{2.9}$$

$$d_{ij}^{k} = 0, \quad i = \overline{1,n}, i \neq j, \; j = \overline{k+1,n} \;. \tag{2.10}$$

Metoda eliminării (cont'd 3)

III. În final se obţin matricea unitate, inversa şi valoarea determinantului:

$$\underline{I} = \underline{A}^{n} \ , \tag{2.11}$$

$$\underline{A}^{-1} = \underline{D}^{n} \ , \tag{2.12}$$

$$\det \underline{A} = a_{11}^{0} \cdot a_{22}^{1} \cdot a_{33}^{2} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{n-1} \ . \tag{2.13}$$

Observaţii:

1. Indicele superior corespunde pasului de calcul.

Metoda eliminării (cont'd 4)

2. (2.3), (2.4): dacă elementul a_{kk}^{k-1} – **pivot**, are valoare nulă sau modulul său este sub un *prag de zero* prestabilit $\Rightarrow$ probleme la efectuarea împărţirilor.

Pivot nul nu implică neapărat că matricea este singulară; trebuie încercate toate posibilităţile: poate fi adus în poziţia de pivot orice element $a_{ij}^{k-1}, \quad i, j = \overline{k, n}$, cu permutarea liniilor *k* şi *i* şi a coloanelor *k* şi *j*. Dacă toate aceste posibilităţi duc la eşec $\Rightarrow$ $\underline{A}$ este singulară.

Metoda eliminării (cont'd 4)

3. În scopul reducerii erorilor de rotunjire: recomandare – la fiecare pas să fie adus pe poziţia pivotului elementul de valoare absolută maximă prin procedeul de la observaţia 2 – **pivotare**. În final: din nou permutările de linii şi / sau coloane.

4. (2.3) … (2.10) – echivalente cu:

$$a_{k\,j}^{k} = \frac{a_{k\,j}^{k-1}}{a_{k\,k}^{k-1}}, \qquad d_{k\,j}^{k} = \frac{d_{k\,j}^{k-1}}{a_{k\,k}^{k-1}}, \qquad j = \overline{1,n} \quad , \tag{2.14}$$

Metoda eliminării (cont'd 5)

$$a_{i\,j}^{k} = a_{i\,j}^{k-1} + (-a_{i\,k}^{k-1}) \cdot a_{k\,j}^{k},$$

$$d_{i\,j}^{k} = d_{i\,j}^{k-1} + (-a_{i\,k}^{k-1}) \cdot d_{k\,j}^{k}, \qquad j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,n},\ i \neq k \quad , \qquad (2.15)$$

cu *interpretările*:

Liniile corespunzătoare pivotului (liniile *k*) ale matricelor $\underline{A}^{k}$ şi $\underline{D}^{k}$ se obţin prin împărţirea liniilor matricelor $\underline{A}^{k-1}$, respectiv $\underline{D}^{k-1}$, corespunzătoare pivotului, la pivot ($a_{k\,k}^{k-1}$).

Metoda eliminării (cont'd 6)

Liniile $i,\ i=\overline{1,n}, i \neq k$, ale matricelor $\underline{A}^k$ şi $\underline{D}^k$ se obţin adunând la liniile *i* ale matricelor $\underline{A}^{k-1}$, respectiv $\underline{D}^{k-1}$, liniile *k* ale matricelor $\underline{A}^k$ şi $\underline{D}^k$ înmulţite cu ($-a_{ik}^{k-1}$).

Exemplu: Fie matricea $\underline{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{bmatrix}$. Să se determine $\underline{A}^{-1}$ utilizând metoda eliminării în versiunea Gauss-Jordan.

Metoda eliminării (cont'd 7)

Soluţie: Se aplică algoritmul metodei eliminării:

I. Iniţializări:

$$\underline{A}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \underline{D}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

II. Pentru k = 1, 2 , 3 se aplică (2.3) … (2.10) ţinând seama şi de observaţii.

Metoda eliminării (cont'd 8)

Iteraţia k = 1. Pentru reducerea erorilor de rotunjire poate fi adus pe poziţia pivotului, (1, 1), elementul de valoare absolută maximă $a_{33} = 6$ ($i = 3,\ j = 3$). Pentru aceasta: permutate liniile 1 şi 3, apoi schimbate coloanele 1 şi 3. Nu se mai efectuează permutările (simplificare calcule). Deci *pivotul* este $a_{11} = 1$.

$$\underline{A}^0 = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{matrix}, \quad \underline{D}^0 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Metoda eliminării (cont'd 9)

Tabel cu calculul elementelor matricelor $\underline{A}^1$ şi $\underline{D}^1$

linii	matricea $\underline{A}^1$			matricea $\underline{D}^1$		
linia 1	1/1 = **1**	1/1 = **1**	1/1 = **1**	1/1 = **1**	**0**	**0**
linia 2	**0**	$2+(-1)\cdot 1$ = **1**	$3+(-1)\cdot 1$ = **2**	$0+(-1)\cdot 1$ = **−1**	**1**	**0**
linia 3	**0**	$3+(-1)\cdot 1$ = **2**	$6+(-1)\cdot 1$ = **5**	$0+(-1)\cdot 1$ = **−1**	**0**	**1**

Metoda eliminării (cont'd 10)

La prima iteraţie $\Rightarrow$ $\underline{A}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\underline{D}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\underline{A}^1 = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{matrix}, \quad \underline{D}^1 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Iteraţia k = 2. Pivotul: $a_{22}^1 = 1$.

Metoda eliminării (cont'd 11)

Tabel cu calculul elementelor matricelor $\underline{A}^2$ şi $\underline{D}^2$

linii	matricea $\underline{A}^2$			matricea $\underline{D}^2$		
linia 1	**1**	**0**	$1+(-1)\cdot 2$ = **−1**	$1+(-1)\cdot(-1)$ = **2**	$0+(-1)\cdot 1$ = **−1**	**0**
linia 2	**0**	1/1 = **1**	2/1 = **2**	−1/1 = **−1**	1/1 = **1**	**0**
linia 3	**0**	**0**	$5+(-2)\cdot 2$ = **1**	$-1+(-2)\cdot(-1)$ = **1**	$0+(-2)\cdot 1$ = **−2**	**1**

Metoda eliminării (cont'd 12)

$$\Rightarrow \quad \underline{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{D}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\underline{A}^2 = \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}, \quad \underline{D}^2 = \begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix}$$

Iteraţia k = 3. Pivotul: $a_{33}^2 = 1$.

Metoda eliminării (cont'd 13)

Tabel cu calculul elementelor matricelor $\underline{A}^3$ şi $\underline{D}^3$

linii	matricea $\underline{A}^3$			matricea $\underline{D}^3$		
linia 1	**1**	**0**	**0**	$2+1\cdot 1$ = **3**	$-1+1\cdot(-2)$ = **−3**	$0+1\cdot 1$ = **1**
linia 2	**0**	**1**	**0**	$-1+(-2)\cdot 1$ = **−3**	$1+(-2)\cdot(-2)$ = **5**	$0+(-2)\cdot 1$ = **−2**
linia 3	**0**	**0**	**1**	$1/1$ = **1**	$-2/1$ = **−2**	$1/1$ = **1**

Metoda eliminării (cont’d 14)

$$\Rightarrow \quad \underline{A}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{D}^3 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

În final:

(2.12) $\Rightarrow$ Inversa $\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(2.13) $\Rightarrow$ Determinantul $\det \underline{A} = a_{11}^0 \cdot a_{22}^1 \cdot a_{33}^2 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

Cap. 3. Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii algebrice liniare

3.0. Introducere

Sistem de *n* ecuaţii algebrice liniare având:

- coeficienţii $a_{ij} \in R,\ \ i, j = \overline{1, n}$ şi
- termenii liberi $b_i \in R,\ \ i = \overline{1, n}$,
- cu *n* necunoscute $x_i \in R,\ \ i = \overline{1, n}$:

Definiţii şi notaţii

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} . \quad (1)$$

Forma restrânsă corespunzătoare lui (1):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1,n} . \quad (2)$$

Definiţii şi notaţii (cont'd 1)

$$\underline{A} = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ – matricea coeficienţilor, (3)

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ – vectorul coloană al termenilor liberi, (4)

Definiţii şi notaţii (cont'd 2)

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$ – vectorul coloană al necunoscutelor, (5)

$\Rightarrow$ ***forma matriceală*** a sistemului (1): $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$. (6)

$\underline{b} = \underline{0}$ $\Rightarrow$ sistem **omogen**; $\underline{b} \neq \underline{0}$ $\Rightarrow$ sistem **neomogen**.

Definiţii şi notaţii (cont'd 3)

Sistemele **neomogene** au soluţie unică $\Leftrightarrow$ $\underline{A}$ este nesingulară ($\det \underline{A} \neq 0$). Dacă $\underline{A}$ este singulară ($\det \underline{A} = 0$) $\Rightarrow$ sistemul are o infinitate de soluţii (este compatibil nedeterminat), ori nu are nici o soluţie (este incompatibil).

Sistemele **omogene** admit totdeauna soluţia banală $\underline{x} = \underline{0}$. Admit şi alte soluţii $\Leftrightarrow$ $\underline{A}$ este singulară.

Definiţii şi notaţii (cont'd 4)

"Sistem **consistent** = sistem compatibil"; "sistem **inconsistent** = sistem incompatibil".

Dacă mici modificări ale elementelor lui $\underline{A}$ şi $\underline{b}$ conduc la modificări reduse ale elementelor soluţiei $\underline{x}$ $\Rightarrow$ sistem **bine condiţionat**. ***Măsuri pentru ameliorarea gradului de condiţionare:***

Definiţii şi notaţii (cont'd 5)

1) Înainte de începerea efectivă a rezolvării *se modifică ordinea* ecuaţiilor şi / sau a necunoscutelor astfel încât să se asigure **dominanţa elementelor diagonale** ale matricei $\underline{A}$.

2) Înainte de rezolvare se aplică *scalarea* – determină ca necunoscutele şi termenii liberi să aibă acelaşi ordin de mărime.

Definiţii şi notaţii (cont'd 6)

Se fixează *factorii de scară* (*coeficienţii de scalare*) $n_{xj}, j=\overline{1,n}$, şi $n_{bi}, i=\overline{1,n}$:

$$x_j = n_{xj}\hat{x}_j,\ j=\overline{1,n},\qquad (7)$$

$$b_i = n_{bi}\hat{b}_i, i=\overline{1,n}.\qquad (8)$$

Înlocuiri în (2) $\Rightarrow$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} n_{xj}\hat{x}_j = n_{bi}\hat{b}_i, i=\overline{1,n}$.

Definiţii şi notaţii (cont'd 6)

Împărţire cu $n_{bi} \neq 0,\ i = \overline{1,n} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{n_{xj}}{n_{bi}} \hat{x}_j = \hat{b}_i, i = \overline{1,n}$.

Notaţie:

$$\hat{a}_{ij} = a_{ij} \frac{n_{xj}}{n_{bi}},\ i, j = \overline{1,n} \quad . \tag{9}$$

Definiţii şi notaţii (cont'd 7)

$\Rightarrow$ o formă echivalentă a sistemului (1):

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} \hat{x}_j = \hat{b}_i, i = \overline{1, n} \,. \qquad (10)$$

$\Rightarrow$ noile valori ale elementelor lui $\underline{A}$ şi $\underline{b}$. Urmează rezolvarea sistemului (10) şi, în final, calculul necunoscutelor originale cu ajutorul relaţiilor (7).

Categorii de **metode** de rezolvare numerică:

- directe sau “exacte”;
- indirecte sau iterative.

3.1. Metode directe de rezolvare

Obţin soluţia sistemului printr-o secvenţă de operaţii care se execută o singură dată, numărul total de operaţii algebrice elementare fiind finit şi cunoscut din start.

Metoda inversării matriceale – cea mai simplă, bazată pe înmulţirea la stânga cu $\underline{A}^{-1}$ (dacă $\underline{A}$ este nesingulară) a relaţiei (6) $\Rightarrow$ $\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}$. (1.1)

Metoda inversării matriceale

(1.1) $\Rightarrow$ **fazele** metodei:

- inversarea lui $\underline{A}$ (capitolul anterior);
- efectuarea produsului matriceal $\underline{A}^{-1}\underline{b}$.

Exemplu: Să se rezolve sistemul de ecuaţii algebrice liniare (1.2) prin metoda inversării matriceale:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2, \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 13. \end{cases} \tag{1.2}$$

Metoda inversării matriceale (cont'd 1)

Soluţie: Identificarea matricelor care apar în forma (6):

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \\ 13 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Inversarea matricei $\underline{A}$: det $\underline{A}$ = 55 ,

$$\underline{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{A}^+ = \begin{bmatrix} 18 & 13 & -2 \\ 11 & 11 & 11 \\ 10 & -5 & 5 \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Metoda inversării matriceale (cont'd 2)

$$\Rightarrow \quad \underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{A}} \cdot \underline{A}^{+} = \begin{bmatrix} \frac{18}{55} & \frac{13}{55} & -\frac{2}{55} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}. \qquad (1.5)$$

(1.1) $\Rightarrow$ soluţia sistemului:

Metoda inversării matriceale (cont'd 2)

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{18}{55} & \frac{13}{55} & -\frac{2}{55} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}. \qquad (1.6)$$

Dezavantaj: Timp de calcul mare datorită numărului mare de operaţii aritmetice elementare.

Metode directe de rezolvare

Alte metode directe:

- metoda eliminării în versiunea Gauss-Jordan (diagonalizării) sau Gauss (triangularizării),
- metodele bazate pe factorizarea $\underline{L}\underline{R}$ sau $\underline{Q}\underline{R}$ a matricei coeficienţilor – aplicabile cu succes şi la inversarea matricelor (capitolul anterior).

3.2. Metode iterative

Soluţia se obţine printr-un proces de aproximaţii succesive cu convergenţă teoretic infinită şi practic finită.

Trăsătură caracteristică: o secvenţă de operaţii (în număr mai mic faţă de metodele directe) este parcursă de mai multe ori, obţinând aproximaţii din ce în ce mai bune ale soluţiei, până la atingerea unei precizii fixate în prealabil.

Metoda aproximaţiilor succesive în versiunea Gauss-Seidel

Se consideră sistemul de ecuaţii algebrice liniare de ordinul "n" sub forma restrânsă (2). Poate fi evidenţiat distinct termenul din sumă corespunzător elementului diagonal al matricei $\underline{A}$ $\Rightarrow$

$$a_{ii} \cdot x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i ,\ i = \overline{1, n} \quad . \tag{2.1}$$

Metoda Gauss-Seidel

$a_{ii} \neq 0$ $\Rightarrow$ explicitarea expresiei necunoscutei x_i :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right),\ i=\overline{1,n} \quad . \qquad (2.2)$$

Algoritmul metodei Gauss-Seidel – etape:

I) Iniţializare $\underline{x}$ cu $\underline{x}^0$ (indicele superior – numărul iteraţiei curente):

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 1)

$$\underline{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \ldots \\ x_n^0 \end{bmatrix}. \qquad (2.3)$$

II) La un pas de calcul *k*, *k* = 1, 2 ,3 , ..., sunt determinate noile valori ale variabilelor:

$$x_i^k = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{k-1}\right),\ i = \overline{1,n}\ . \qquad (2.4)$$

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 2)

III) Condiţia de terminare a procesului de calcul:

$$\max_i \{ | x_i^k - x_i^{k-1} | \} \leq \varepsilon, \ i = \overline{1, n}, \qquad (2.5)$$

cu eroarea ε > 0 prestabilită.

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 3)

Condiţia suficientă de convergenţă a procesului iterativ de calcul:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,\ i = \overline{1,n}, \quad (\underline{A} - \textbf{diagonal dominantă}) \qquad (2.6)$$

$\Rightarrow$ o bună condiţionare a sistemului.

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 4)

Pentru **iniţializarea** procesului de calcul (în caz de convergenţă) este recomandată:

$$x_i^0 = \frac{b_i}{a_{ii}}, \; i = \overline{1, n} \quad . \qquad (2.7)$$

De la aplicaţie la aplicaţie poate prezenta interes studiul efectelor unor alte variante de iniţializare.

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 5)

Exemplu: Să se rezolve sistemul (2.8) prin metoda aproximaţiilor succesive în versiunea Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 8, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 22, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 10, \end{cases} \tag{2.8}$$

admiţând o eroare ε = 0.01.

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 6)

Soluţie: În scopul îndeplinirii condiţiei de convergenţă (2.6) (diagonal dominanţei) se permută liniile 2 şi 3 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 8, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 10, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases} \tag{2.9}$$

$\Rightarrow$ este îndeplinită condiţia (2.6) $\Rightarrow$ garantarea convergenţei procesului de calcul.

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 7)

Aplicarea algoritmului metodei Gauss-Seidel:

I) Iniţializarea conform (2.7), particularizată:

$$x_1^0 = 8/3 = 2.666\,,\quad x_2^0 = 10/4 = 2.5\,,\quad x_3^0 = 22/4 = 5.5\,. \tag{2.10}$$

II) Pentru k = 1, 2, 3, …, se aplică (2.4) $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} x_1^k &= (8 + x_2^{k-1} + x_3^{k-1})/3\,, \\ x_2^k &= (10 - x_1^k + 2x_3^{k-1})/4\,, \\ x_3^k &= (22 - x_1^k + 2x_2^k)/4\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 7)

Iteraţia k = 1

$$x_1^1 = \frac{1}{3}\left(8 + 2.5 + 5.5\right) = 5.333 \quad ,$$

$$x_2^1 = \frac{1}{4}\left(10 - 5.333 + 2 \cdot 5.5\right) = 3.916 \quad , \qquad (2.12)$$

$$x_3^1 = \frac{1}{4}\left(22 - 5.333 + 2 \cdot 3.916\right) = 6.124 \quad .$$

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 8)

III) Se calculează erorile:

$$|x_1^{\,1} - x_i^{\,0}| = |5.333 - 2.666| > \varepsilon \,;$$
$$|x_2^{\,1} - x_2^{\,0}| = |3.916 - 2.5| > \varepsilon \,; \qquad (2.13)$$
$$|x_3^{\,1} - x_3^{\,0}| = |6.124 - 5.5| > \varepsilon \,.$$

Nu este satisfăcută condiţia (2.5) $\Rightarrow$ este necesară o nouă iteraţie.

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 9)

Iteraţia k = 2

$$x_1^2 = \frac{1}{3}\left(8 + 3.916 + 6.124\right) = 6.013 \,,$$

$$x_2^2 = \frac{1}{4}\left(10 - 6.013 + 2 \cdot 6.124\right) = 4.058 \,, \qquad (2.14)$$

$$x_3^2 = \frac{1}{4}\left(22 - 6.013 + 2 \cdot 4.058\right) = 6.011 \,.$$

Metoda Gauss-Seidel (cont'd 9)

III) Se calculează erorile:

$$\left|x_1^2 - x_1^1\right| = \left|6.013 - 5.333\right| = 0.680 > \varepsilon\,;$$

$$\left|x_2^2 - x_2^1\right| = \left|4.058 - 3.916\right| = 0.142 > \varepsilon\,; \qquad (2.15)$$

$$\left|x_3^2 - x_3^1\right| = \left|6.011 - 6.124\right| = 0.113 > \varepsilon\,.$$

Erorile au scăzut semnificativ. Cu toate acestea, nu este satisfăcută condiţia (2.5) $\Rightarrow$ este necesară o nouă iteraţie ...