Seminar 7. Derivabilitate pentru funcţii de o singură variabilă. Derivate parţiale ale funcţiilor de mai multe variabile.

EXERCIŢII PROPUSE

1. Calculaţi derivatele de ordin unu şi doi ale funcţiilor:
   (a) $f(x) = (1+x)^{\alpha}$;
   (b) $f(x) = (1+x^2)\arctan x$.
2. Găsiţi derivata de ordin n pentru funcţia: $f(x) = \ln(2x+1)$.
3. Calculaţi derivatele parţiale de ordin unu şi doi în următoarele cazuri:
   (a) $f(x,y) = x^3 + 5xy^2 - 4xy^4 + y^5$;
   (b) $f(x,y,z) = x^2yz + \alpha x^2z^2 - 2x^3y^3$.
4. Aflaţi matricea Jacobi şi determinantul său(dacă este posibil):
$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y,z) = (x^3 - xy^{\alpha}z, x^2 + \alpha yz^2 - \beta z^2), \quad \alpha, \beta > 1.$$
5. Arătaţi că funcţia
$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   este continuă în $(0,0)$, dar f nu are derivate parţiale în raport cu x în $(0,0)$.
6. Arătaţi că funcţia
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   are derivate în $(0,0)$ în raport cu vectorul $v = (v_1, v_2)$ dar f nu este continuă în $(0,0)$.
7. Demonstraţi că funcţia $f(x,y) = \frac{xy}{x^2-y^2}$ verifică următoarea ecuaţie:
$$xy^2\frac{\partial f}{\partial x} + x^2y\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2+y^2)f(x,y).$$
8. Calculaţi gradientul funcţiei $f(x,y,z) = xy + 2yz$ în punctul $A(2,3,-4)$.
9. Calculaţi $div(F)$ şi $rot(F)$ unde $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F = (x+z, y+z, x^2+z)$.