Matematici asistate de calculator. Bibliografie

R.-E. Precup, *Matematici asistate de calculator. Algoritmuri*, Editura Orizonturi Universitare, Timişoara, 2007.

A. Kovács, A., R.-E. Precup, B. Paláncz, L. Kovács: *Modern numerical methods in engineering*, Editura Politehnica, Timişoara, 2012.

R.-E. Precup, L. Dragomir, I. Bulaviţchi: *Matematici asistate de calculator. Aplicaţii*, Editura Politehnica, Timişoara, 2002.

L. Dragomir, *Aplicaţii de matematică asistată de calculator*, Editura Politehnica, Timişoara, 2010.

S. Kilyeni, *Metode numerice*, vol. 1 şi 2, ediţiile 1, 2, … Editura Orizonturi Universitare, Timişoara, 1997, 2000 şi alte ediţii.

P. Năslău, *Metode numerice*, Editura Politehnica, Timişoara, 1999 şi alte ediţii.

G. Babescu, A. Kovacs, I. Stan, Gh. Tudor, R. Anghelescu, A. Filipescu, *Analiză numerică*, Editura Politehnica, Timişoara, 2000.

V. Ionescu, C. Popeea, *Optimizarea sistemelor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

I. Dumitrache, C. Buiu, *Algoritmi genetici. Principii fundamentale şi aplicaţii în automatică*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2000.

J. Penny, G. Lindfield, *Numerical Methods Using MATLAB, Second edition*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.

M. Ghinea, V. Fireţeanu, *MATLAB. Calcul numeric. Grafică. Aplicaţii*, Editura Teora, Bucureşti, 1997 şi alte ediţii.

T. A. Beu, *Calcul numeric în C*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000.

Cap. 1. Aspecte introductive privind teoria erorilor

Rezolvarea unor ***probleme*** de natură stiinţifică şi tehnică implică aplicarea ***metodelor numerice***. O metodă numerică este considerată ***eficientă*** atunci când ***precizia calculelor*** numerice este bună, ceea ce se traduce prin ***erori reduse***.

1.1. Eroare. Aproximaţie

Fie o mărime numerică reală având **valoarea exactă** x, pentru care se cunoaşte **valoarea aproximativă** $x^{\sim}$ (rezultată în urma unui calcul numeric sau a unui experiment). $x^{\sim}$ = o ***aproximaţie*** a valorii exacte x.

Eroarea ε a aproximaţiei $x^{\sim}$ a lui x – definiţie:

$$\varepsilon = x - x^{\sim} . \tag{1.1}$$

$\varepsilon > 0$: $x^{\sim}$ **aproximează** pe x **prin lipsă**;

$\varepsilon < 0$: $x^{\sim}$ **aproximează** pe x **prin adaos**.

Eroare. Aproximaţie. Eroare absolută

(1.1) $\Rightarrow$ **formula de aproximare**:

$x = x^{\sim} + \varepsilon$. (1.2)

Semnul erorii nu prezintă interes $\Rightarrow$ ***eroarea absolută*** ε_a ($\varepsilon_{a\ x}$):

$\varepsilon_a = | \varepsilon | = | x - x^{\sim} |$. (1.3)

ε_a nu este suficientă pentru a caracteriza gradul de precizie al unei aproximări. Exemplu:

Eroare absolută. Eroare relativă

$x = 4$, $\tilde{x} = 5$, $y = 499$, $\tilde{y} = 500$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_{a\,x} = \varepsilon_{a\,y} = 1$.

$\Rightarrow$ nu se poate aprecia că $\tilde{y}$ aproximează mult mai bine pe y decât $\tilde{x}$ pe x.

$\Rightarrow$ necesară introducerea unei alte mărimi, care să exprime corect gradul de precizie a unei aproximări: ***eroarea relativă*** a aproximaţiei $\tilde{x}$ a lui x, ε_r ($\varepsilon_{r\,x}$):

$$\varepsilon_r = \frac{|\,\varepsilon_a\,|}{|\,\tilde{x}\,|} = \frac{|\,x - \tilde{x}\,|}{|\,\tilde{x}\,|} \,. \qquad (1.4)$$

Eroare relativă

În practică: exprimarea procentuală a erorii relative:

$$\varepsilon_r^{\%} = 100 \cdot \varepsilon_r \, . \qquad (1.5)$$

Exemplul anterior:

$\varepsilon_{r\,x} = 1/5 = 0.2 = 20\ \%$, $\varepsilon_{r\,y} = 1/500 = 0.002 = 0.2\ \%$,

$\Rightarrow$ a doua aproximare este mai precisă decât prima.

Din punctul de vedere al provenienţei erorilor: clasificare în ***trei categorii***:

Clasificare erori

1) Erori inerente (iniţiale) – apariţie: modelul matematic asociat problemei practice nu corespunde în totalitate acestei probleme; nu pot fi influenţate de metoda de calcul.

2) Erori de metodă – apariţie: utilizarea unei anumite metode numerice în rezolvarea problemei; pot fi micşorate prin alegerea celei mai adecvate metode de rezolvare.

3) Erori de calcul – legate exclusiv de metodele de calcul numeric, de modul de efectuare a calculelor şi de tehnica de calcul utilizată.

Erori de calcul

Erori de calcul – de trei ***tipuri***:

A) Erori de trunchiere – legate exclusiv de metodele numerice utilizate. Apariţie: procese de calcul numeric cu convergenţă teoretic infinită sunt înlocuite cu aceleaşi procese, dar cu convergenţă practic finită – la toate metodele iterative sau de aproximaţie.

Exemplu: calculul valorilor e^x pentru diverse valori ale argumentului x cu dezvoltarea în serie MacLaurin:

Erori de calcul (cont'd 1)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \ldots + \frac{x^k}{k\,!} + \ldots \,. \qquad (1.6)$$

Numărul de termeni este infinit. În calcule practice este folosit, însă, un număr finit, rezonabil, de termeni (5, 6, 7, 8, …) dependent de valoarea lui x. Termenii omişi determină apariţia erorii de trunchiere.

Nu pot fi calculate exact, dar pot fi estimate.

Erori de calcul (cont'd 2)

B) Erori de rotunjire – toate calculele pot fi efectuate numai considerând un număr finit de cifre pentru valorile numerice, deşi anumite valori numerice au mai multe cifre sau chiar o infinitate de cifre (numere iraţionale).

Exemplu: se efectuează calculele cu valori numerice având 6 cifre semnificative. Valoarea numerică $x = 842.78425$ poate fi aproximată:

Erori de calcul (cont'd 2)

- prin lipsă, prin valoarea: $x^{\sim}= 842.784$, cu $\varepsilon_{r\,x}= 0.000030$ %;
- prin adaos, prin valoarea: $x^{\sim}= 842.785$, cu $\varepsilon_{r\,x}= 0.000089$ %.

Erorile de rotunjire pot fi cauzate şi de conversiile dintr-un sistem de numeraţie cu o bază în altul cu o altă bază.

C) Erori de propagare – apar datorită erorilor din paşii anteriori ai unui proces iterativ de calcul.

1.2. Reprezentarea în virgulă mobilă. Rotunjire

În sistemele de calcul un număr real cu valoarea exactă x este reprezentat de regulă în ***virgulă mobilă***:

$$x = f \cdot b^e \quad , \qquad (2.1)$$

b – baza sistemului de numeraţie (b = 2),

f – mantisa,

e – exponentul (caracteristica).

Reprezentarea normalizată

Exemplu: Se consideră reprezentarea numărului

$$x = 10.01_2 = 1.001_2 \cdot 2^1 = 0.1001_2 \cdot 2^2 = 0.01001_2 \cdot 2^3 =$$

$$= 100.1_2 \cdot 2^{-1} = 1001_2 \cdot 2^{-2} = 10010_2 \cdot 2^{-3} .$$

$\Rightarrow$ pentru o anumită valoare numerică există un număr nelimitat de exprimări în virgulă mobilă. Prezintă interes ***reprezentarea normalizată***, unică, la care mantisa satisface:

$$\frac{1}{b} \le \left| f \right| < 1 . \qquad (2.2)$$

Reprezentarea normalizată (cont'd 1)

Particularizare în cazul b = 2 a relaţiilor (2.1) şi (2.2):

$$x = f \cdot 2^e, \tag{2.3}$$

$$0.1_2 \leq | f | < 1_2 . \tag{2.4}$$

Reprezentarea normalizată (exemplu): $x = 0.1001_2 \cdot 2^2$.

Se presupune că *mantisa normalizată conţine t cifre semnificative*. O valoare numerică reală exactă x cu număr de cifre mai mare decât t poate fi exprimată sub forma:

Reprezentarea normalizată (cont'd 2)

$$x = f \cdot 2^{e} + g \cdot 2^{e-t}, \qquad (2.5)$$

în care mantisa normalizată f conţine primele t cifre semnificative ale lui x.

Exemplu: Se lucrează cu t = 6 cifre semnificative pentru valoarea reală exactă $x = 1011.1101_2$. (2.5) $\Rightarrow$

$x = 0.110111101_2 \cdot 2^5 = 0.110111_2 \cdot 2^5 + 0.101_2 \cdot 2^{5-6} =$

$= 0.110111_2 \cdot 2^5 + 0.101 \cdot 2^{-1}$.

Metode de rotunjire

Aproximaţia $x^{\sim}$ a valorii exacte x are mantisa normalizată cu t cifre semnificative. ***Rotunjirea:*** luarea în considerare a lui g din (2.5) la stabilirea valorii mantisei aproximaţiei $x^{\sim}$.

Metode de rotunjire

A) Rotunjirea prin tăiere – neglijarea lui g la stabilirea lui $x^{\sim}$:

$$x^{\sim} = f \cdot 2^{e} . \qquad (2.6)$$

Metode de rotunjire (cont'd 1)

Eroarea relativă datorată rotunjirii prin tăiere:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{|\,x^{\sim}\,|} = \frac{|\,g\,| \cdot 2^{e-t}}{|\,f\,| \cdot 2^{e}} \le \frac{1 \cdot 2^{e-t}}{0.1 \cdot 2^{e}} = 2^{-t+1}\,. \qquad (2.7)$$

Exemplu: aplicarea rotunjirii prin tăiere

$x = 0.110111101_2 \cdot 2^5 \Rightarrow$

$x^{\sim} = 0.110111_2 \cdot 2^5$, $\varepsilon_r \le 2^{-6+1} = 2^{-5}$.

Metode de rotunjire (cont'd 2)

B) Rotunjirea simetrică

$$\tilde{x} = \begin{cases} f \cdot 2^{e}, & \text{dacă } |g| < 0.1_2, \\ f \cdot 2^{e} + 2^{e-t}, & \text{dacă } |g| \geq 0.1_2 \text{ şi } f > 0, \\ f \cdot 2^{e} - 2^{e-t}, & \text{dacă } |g| \geq 0.1_2 \text{ şi } f < 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Eroarea relativă datorată rotunjirii simetrice:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{|\tilde{x}|} \leq \frac{0.1 \cdot 2^{e-t}}{0.1 \cdot 2^{e}} = 2^{-t}. \quad (2.9)$$

Metode de rotunjire (cont'd 3)

Exemplu: aplicarea rotunjirii simetrice pentru

$x = 0.110111101_2 \cdot 2^5 \Rightarrow$

$x^{\sim} = 0.110111_2 \cdot 2^5 + 2^{5-6} = 0.110111_2 \cdot 2^5 + 2^{-1} =$

$= 0.110111_2 \cdot 2^5 + 0.000001_2 \cdot 2^5 = 0.111000_2 \cdot 2^5,\ \varepsilon_r \le 2^{-6}.$

1.3. Propagarea erorilor

Operaţii aritmetice cu valori aproximative $\Rightarrow$ necesitatea cunoaşterii efectului erorilor operanzilor asupra erorii rezultatului şi asupra operaţiilor următoare.

Fie cei doi operanzi cu valorile exacte x şi y şi valorile aproximative $x^{\sim}$, respectiv $y^{\sim}$. Formulele de aproximare:

$$x = x^{\sim} + \varepsilon_x \,, \quad y = y^{\sim} + \varepsilon_y \,. \tag{3.1}$$

Operaţiile aritmetice elementare

A) Adunarea

$x + y = x^{\sim} + y^{\sim} + \varepsilon_x + \varepsilon_y$ – din (3.1),

Propagarea erorilor la operaţiile aritmetice elementare /1

dar (1.2) $\Rightarrow x + y = x^{\sim} + y^{\sim} + \varepsilon_{x+y}$.

$\Rightarrow \varepsilon_{x+y} = \varepsilon_x + \varepsilon_y$. (3.2)

Se aplică proprietăţile modulului $\Rightarrow$

$\varepsilon_{a\ x+y} \leq \varepsilon_{a\ x} + \varepsilon_{a\ y}$. (3.3)

Exprimarea erorii relative:

$$\varepsilon_{r\ x+y} = \frac{\varepsilon_{a\ x+y}}{|\ x^{\sim} + y^{\sim}\ |} \leq \frac{\varepsilon_{a\ x}}{|\ x^{\sim} + y^{\sim}\ |} + \frac{\varepsilon_{a\ y}}{|\ x^{\sim} + y^{\sim}\ |} =$$

Propagarea erorilor la operaţiile aritmetice elementare /2

$$= \frac{\varepsilon_{a\,x}}{|\,\tilde{x}\,|} \cdot \frac{|\,\tilde{x}\,|}{|\,\tilde{x} + \tilde{y}\,|} + \frac{\varepsilon_{a\,y}}{|\,\tilde{y}\,|} \cdot \frac{|\,\tilde{y}\,|}{|\,\tilde{x} + \tilde{y}\,|} =$$

$$= \varepsilon_{r\,x} \cdot \frac{|\,\tilde{x}\,|}{|\,\tilde{x} + \tilde{y}\,|} + \varepsilon_{r\,y} \cdot \frac{|\,\tilde{y}\,|}{|\,\tilde{x} + \tilde{y}\,|} \,. \qquad (3.4)$$

Observaţii:

1. Eroarea absolută a sumei nu depăşeşte suma erorilor absolute ale termenilor.

Propagarea erorilor la operaţiile aritmetice elementare /3

2. Dacă operanzii sunt de acelaşi semn, eroarea relativă a sumei nu depăşeşte suma erorilor relative ale termenilor.

B) Scăderea. Calcule similare adunării:

$x - y = x^{\sim} - y^{\sim} + \varepsilon_x - \varepsilon_y$ – din (3.1),

dar (1.2) $\Rightarrow x - y = x^{\sim} - y^{\sim} + \varepsilon_{x-y}$.

$$\Rightarrow \varepsilon_{x-y} = \varepsilon_x - \varepsilon_y \, . \qquad (3.5)$$

Se aplică din nou proprietăţile modulului $\Rightarrow$

$$\varepsilon_{a\,x-y} \le \varepsilon_{a\,x} + \varepsilon_{a\,y} \, . \qquad (3.6)$$

Propagarea erorilor la operaţiile aritmetice elementare /4

Exprimarea erorii relative:

$$\varepsilon_{r\ x-y} = \frac{\varepsilon_{a\ x-y}}{|\ \tilde{x} - \tilde{y}\ |} \leq \frac{\varepsilon_{a\ x}}{|\ \tilde{x} - \tilde{y}\ |} + \frac{\varepsilon_{a\ y}}{|\ \tilde{x} - \tilde{y}\ |} =$$

$$= \frac{\varepsilon_{a\ x}}{|\ \tilde{x}\ |} \cdot \frac{|\ \tilde{x}\ |}{|\ \tilde{x} - \tilde{y}\ |} + \frac{\varepsilon_{a\ y}}{|\ \tilde{y}\ |} \cdot \frac{|\ \tilde{y}\ |}{|\ \tilde{x} - \tilde{y}\ |} =$$

$$= \varepsilon_{r\ x} \cdot \frac{|\ \tilde{x}\ |}{|\ \tilde{x} - \tilde{y}\ |} + \varepsilon_{r\ y} \cdot \frac{|\ \tilde{y}\ |}{|\ \tilde{x} - \tilde{y}\ |}\,. \qquad (3.7)$$

Propagarea erorilor la operaţiile aritmetice elementare /5

Observaţii: 1. Eroarea absolută a diferenţei nu depăşeşte suma erorilor absolute ale termenilor.

2. Precizia este puternic afectată când cei doi operanzi **au acelaşi semn şi sunt de valori apropiate** $\Rightarrow$ astfel de scăderi trebuie evitate.

C) Înmulţirea

$xy = (x^{\sim} + \varepsilon_x)(y^{\sim} + \varepsilon_y) = x^{\sim}y^{\sim} + x^{\sim}\varepsilon_y + y^{\sim}\varepsilon_x + \varepsilon_x\varepsilon_y$ – din (3.1).

Termenul $\varepsilon_x\varepsilon_y$ este neglijabil $\Rightarrow$ $xy \approx x^{\sim}y^{\sim} + x^{\sim}\varepsilon_y + y^{\sim}\varepsilon_x$,

Propagarea erorilor la operaţiile aritmetice elementare /6

$$\Rightarrow \varepsilon_{xy} = x^{\sim}\varepsilon_y + y^{\sim}\varepsilon_x \,. \qquad (3.8)$$

Majorant al erorii absolute – din (3.8):

$$\varepsilon_{a\,xy} \le |\,x^{\sim}\,|\,\varepsilon_{a\,y} + |\,y^{\sim}\,|\,\varepsilon_{a\,x} \,. \qquad (3.9)$$

Majorant al erorii relative – din (3.9):

$$\varepsilon_{r\,xy} = \frac{\varepsilon_{a\,xy}}{|\,x^{\sim}y^{\sim}\,|} \le \frac{|\,x^{\sim}\,|\,\varepsilon_{a\,y} + |\,y^{\sim}\,|\,\varepsilon_{a\,x}}{|\,x^{\sim}y^{\sim}\,|} = \frac{\varepsilon_{a\,y}}{|\,y^{\sim}\,|} + \frac{\varepsilon_{a\,x}}{|\,x^{\sim}\,|} = \varepsilon_{r\,x} + \varepsilon_{r\,y} \,. \qquad (3.10)$$

Operanzi nenuli ! $\Rightarrow$ concluzie similară adunării.

Propagarea erorilor la operaţiile aritmetice elementare /7

D) Împărţirea. Calcule similare înmulţirii:

$$\frac{x}{y} = \frac{x^{\sim} + \varepsilon_x}{y^{\sim} + \varepsilon_y} = \frac{(x^{\sim} + \varepsilon_x)(y^{\sim} - \varepsilon_y)}{y^{\sim 2} - \varepsilon_y^{\,2}} = \frac{x^{\sim}y^{\sim} + y^{\sim}\varepsilon_x - x^{\sim}\varepsilon_y - \varepsilon_x\varepsilon_y}{y^{\sim 2} - \varepsilon_y^{\,2}}.$$

Termenii $\varepsilon_x\varepsilon_y$ şi $\varepsilon_y^{\,2}$ sunt neglijabili $\Rightarrow$

$$\frac{x}{y} \approx \frac{x^{\sim}}{y^{\sim}} + \frac{\varepsilon_x}{y^{\sim}} - \frac{x^{\sim}\varepsilon_y}{y^{\sim 2}} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{x/y} = \frac{\varepsilon_x}{y^{\sim}} - \frac{x^{\sim}\varepsilon_y}{y^{\sim 2}}\,. \qquad (3.11)$$

Propagarea erorilor la operaţiile aritmetice elementare /8

Majorant al erorii absolute – din (3.11):

$$\varepsilon_{a\ x/y} \le \frac{\varepsilon_{a\ x}}{|\ y^{\sim}\ |} + \frac{|\ x^{\sim}\ |\ \varepsilon_{a\ y}}{y^{\sim 2}} \qquad (3.12)$$

Majorant al erorii relative – din (3.12):

$$\varepsilon_{r\ x/y} = \frac{\varepsilon_{a\ x/y}}{|\ x^{\sim}/y^{\sim}\ |} \le \frac{\varepsilon_{a\ x}\ /\ |\ y^{\sim}\ | + \varepsilon_{a\ y}\ /\ |\ y^{\sim}\ |^2}{|\ x^{\sim}\ |\ /\ |\ y^{\sim}\ |} =$$

Propagarea erorilor la operaţiile aritmetice elementare /9

$$= \frac{\varepsilon_{a\,x}}{|\,x^{\sim}\,|} + \frac{\varepsilon_{a\,y}}{|\,y^{\sim}\,|} = \varepsilon_{r\,x} + \varepsilon_{r\,y}. \tag{3.13}$$

Operanzi nenuli ! $\Rightarrow$ concluzie similară adunării.

Exemplu (ilustrarea efectului propagării erorilor): Se lucrează cu două zecimale exacte şi aproximare prin lipsă, să se calculeze integrala I_2 dacă se dă

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx, n \in N \quad ,$$

Propagarea erorilor la operaţiile aritmetice elementare/10

iar pentru calculul integralei se aplică relaţia de recurenţă:

$I_n + 5\, I_{n-1} = 1/n\ ,\ \ \forall\, n \in N^*\ ,\ \ I_0 = 0.18\ .$

Soluţie: Se aplicând relaţia de recurenţă $\Rightarrow$

$I_1 = 1 - 5\, I_0 = 1 - 0.9 = 0.1\ ,$

$I_2 = 1/2 - 5\, I_1 = 0.5 - 0.5 = 0\ .$

Rezultat eronat ! (integrala este de fapt strict pozitivă). Explicaţie: s-au acumulat relativ rapid erori de rotunjire provocate de diferenţe între numere apropiate.

Cap. 2. Elemente de calcul numeric matriceal

O **matrice** $\underline{A}$ **de dimensiune m** $\times$ **n** – tablou dreptunghiular cu elemente reale sau complexe dispuse pe *m* linii şi *n* coloane:

$$\underline{A} = [a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

2.0. Matrice

Transpusa matricei $\underline{A}$ este matricea $\underline{A}^T$, de dimensiune $n \times m$, obţinută prin schimbarea liniilor cu coloanele:

$$\underline{A}^T = \left[a_{ji}\right]_{\substack{j=\overline{1,n} \\ i=\overline{1,m}}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Proprrietăţi pentru transpusa sumei şi transpusa produsului:

$$(\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T\,, \tag{3}$$

Definiţii

$$(\underline{A} \cdot \underline{B})^T = \underline{B}^T \cdot \underline{A}^T \, . \tag{4}$$

Conjugata unei matrice $\underline{A}$ este matricea $\bar{\underline{A}}$, care se obţine prin înlocuirea elementelor lui $\underline{A}$ cu conjugatele lor:

$$\overline{\underline{A}} = [\overline{a}_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \, . \tag{5}$$

Dacă $n = 1$, atunci matricea are dimensiunea $m \times 1$ şi este de tip ***coloană***:

Definiţii (cont'd 1)

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} . \qquad (6)$$

Dacă $m = 1$, atunci matricea are dimensiunea $1\times n$ şi este de tip ***linie*** (transpusa unei coloane):

$$\underline{b}^T = [b_1 \;\; b_2 \;\; \cdots \;\; b_n] . \qquad (7)$$

Dacă $m=n$, atunci matricea $\underline{A}$ este ***pătratică de ordinul n***.

Definiţii (cont'd 2)

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***simetrică*** dacă $\underline{A}^T = \underline{A} \Leftrightarrow$

$a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$.

Exemplu de matrice simetrică: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$.

Definiţii (cont'd 3)

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***antisimetrică*** dacă $\underline{A}^T = -\underline{A}$, adică $a_{ij} = -a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$. Se observă: $a_{ii} = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Exemplu de matrice antisimetrică: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

Definiţii (cont'd 4)

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***superior triunghiulară*** dacă

$a_{ij} = 0$, $\forall i \geq j$.

Exemplu de matrice superior triunghiulară: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Definiţii (cont'd 5)

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***inferior triunghiulară*** dacă

$a_{ij} = 0$, $\forall i \leq j$.

Exemplu de matrice inferior triunghiulară: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

Definiţii (cont'd 6)

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***superior trapezoidală*** dacă

$a_{ij} = 0$, $\forall i > j$.

Exemplu de matrice superior trapezoidală: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

Definiţii (cont'd 7)

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***inferior trapezoidală*** dacă

$a_{ij} = 0$, $\forall i < j$.

Exemplu de matrice inferior trapezoidală: $\underline{A} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Definiţii (cont'd 8)

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***diagonală*** dacă

$a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$, adică

$$\underline{A} = diag(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} . \quad (8)$$

Definiţii (cont'd 9)

Dacă la o matrice diagonală elementele de pe diagonala principală = 1, atunci ea este ***matricea unitate***:

$$\underline{I} = diag(1,1,\ldots,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Definiţii (cont'd 10)

Matrice tridiagonală

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Definiţii (cont'd 11)

Matrice Hessenberg

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ 0 & 0 & a_{43} & \cdots & a_{4,n-1} & a_{4,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Definiţii (cont'd 12)

Matrice bloc diagonală

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \underline{A}_p \end{bmatrix}, \tag{12}$$

cu blocurile $\underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_p$ – matrice pătratice, nu neapărat de acelaşi ordin.

Definiţii (cont’d 13)

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***diagonal dominantă*** dacă

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall i = \overline{1,n} .$$

Exemplu de matrice diagonal dominantă: $\underline{A} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ -1 & 6 & -3 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.

Definiţii (cont'd 14)

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***ortogonală*** dacă

$\underline{A}^{-1} = \underline{A}^T$, adică $\underline{A} \cdot \underline{A}^T = \underline{I}$.

O matrice pătratică $\underline{A}$ este ***hermitiană*** dacă

$\underline{A} = (\bar{\underline{A}})^T$. Orice matrice reală simetrică este hermitiană.

O matrice reală pătratică $\underline{A}$ este ***singulară*** dacă $\det \underline{A} = 0$.

În cazul $\det \underline{A} \neq 0$, matricea $\underline{A}$ este ***nesingulară***.

2.1. Definirea şi proprietăţile inversei

Se consideră matricea pătratică reală nesingulară $\underline{A}$ de ordinul n.

Matricea inversă $\underline{A}^{-1}$ a matricei $\underline{A}$ se defineşte ca fiind acea matrice (pătratică reală de ordinul n) care satisface

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{I} \quad , \tag{1.1}$$

în care $\underline{I}$ este matricea unitate de ordinul n.

Exprimare $\underline{A}^{-1}$:

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{A}} \cdot \underline{A}^{+} \quad , \tag{1.2}$$

Inversa

în care: det $\underline{A}$ (număr real nenul) – ***determinantul*** matricei $\underline{A}$ şi

$\underline{A}^{+}$ – **matricea adjunctă**.

$\underline{A}^{+}$ = transpusa matricei obţinute prin înlocuirea elementelor lui $\underline{A}$ cu **complemenţii lor algebrici** (**cofactorii** lor); cofactorul lui a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) este minorul înmulţit cu $(-1)^{i+j}$.

(1.2) $\Rightarrow$ modalitate de calcul al inversei, **greu algoritmizabilă** + necesită un **volum mare de calcule**.

Inversa (cont'd 1)

Exemplu: Fie $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$. Să se calculeze $\underline{A}^{-1}$.

Soluţie: Se analizează dacă $\underline{A}$ este inversabilă:

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \det \underline{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \det \underline{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$\det \underline{A} = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{A}$ este inversabilă.

Inversa (cont'd 2)

Transpusa matricei $\underline{A}$: $\underline{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$. Adjuncta:

$$\underline{A}^+ = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}, \quad \underline{A}^+ = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inversa. Proprietăţi

(1.2) $\Rightarrow$ $$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proprietăţi ale operaţiei de inversare:

$$\det(\underline{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \underline{A}}, \tag{1.3}$$

$$(\underline{A} \cdot \underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1}, \tag{1.4}$$

$$(\underline{A}^{-1})^T = (\underline{A}^T)^{-1}. \tag{1.5}$$