UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA

ALGEBRĂ LINIARĂ ŞI GEOMETRIE DIFERENŢIALĂ

Note de curs

Anania Gîrban

2018

Cuprins

CAPITOLUL 1

RECAPITULARE

1.1 Polinoame

Notăm cu $\mathbb{C}[X]$ mulţimea şirurilor (infinite) de numere complexe

$$f = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots),\ a_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{1, n}$$

care au numai un număr finit de termeni nenuli ($\exists m \in \mathbb{N}$ a.î. $a_i = 0\ (\forall) i > m$).

Exemplul 1.1.

$f_1 = (0, 1, -5, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \mathbb{C}[X]$ pentru că are 2 termeni nenuli.

$f_2 = (1, 0, 3, 0, 5, 0, \ldots, 0, 2n{+}1, 0, \ldots) \notin \mathbb{C}[X]$ pentru că are o infinitate de termeni nenuli.

Pe mulţimea $\mathbb{C}[X]$ definim două operaţii interne:
$(\forall)\ f, g \in \mathbb{C}[X]$, unde

$$f = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots)$$

$$g = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots)$$

- **Adunarea**

$$f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots)$$

- **Înmulţirea**

$$f \cdot g = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$$

unde

$c_0 = a_0b_0$

$c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$

$c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$

$\dots$

$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0 = \sum\limits_{i=0}^{n} a_ib_{n-i}$

- **Înmulţirea cu scalar**

$$\alpha f = (\alpha a_0, \alpha a_1, \dots, \alpha a_n, \dots),\ (\forall)\alpha \in \mathbb{C}$$

Definiţia 1.1.

1) *Orice element din $\mathbb{C}[X]$ pe care sunt definite cele trei operaţii se numeşte* **polinom cu coeficienţi complecşi**.

2) *$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ se numesc* **coeficienţii** *polinomului*

$f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \dots)$.

3) *n se numeşte* **gradul** *polinomului f $(a_n \neq 0,\ (\forall)\ m > n,\ a_m = 0)$.*

Observaţia 1.1. Analog

$\mathbb{Z}[X]$ este mulţimea polinoamelor cu coeficienţi întregi.

$\mathbb{Q}[X]$ este mulţimea polinoamelor cu coeficienţi raţionali.

$\mathbb{R}[X]$ este mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali.

şi au loc incluziunile:

$$\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X].$$

$\mathbb{C}[X]$ în raport cu adunarea şi înmulţirea polinoamelor este un inel unitar cu
$(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ elementul neutru faţă de adunare şi
$(1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ elementul neutru faţă de înmulţire.
Forma algebrică a polinoamelor

Definiţia 1.2. *Vom numi polinomul*

$$X =^{not} (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \mathbb{C}[X]$$

nedeterminata X.

Aplicând regula de înmulţire a două polinoame obţinem puterile lui X:
$X^2 = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$
$X^3 = (0, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$
$X^n = (\underbrace{0 \ldots 0}_{n-ori}, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$
şi notăm
$X^0 =^{not} (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$.
Convenim de asemenea să notăm polinomul constant
$\alpha X^0 = (\alpha, 0, \ldots, 0, \ldots) =^{not} \alpha$, $(\forall)\alpha \in \mathbb{C}$.

Folosind acum cele trei operaţii definite pe $\mathbb{C}[X]$, putem scrie orice polinom $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots)$ sub forma:

$$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n,$$

adică forma cunoscută pentru polinoame.

Observaţia 1.2. Într-un polinom, nedeterminata X NU este o variabilă ci o notaţie consacrată pentru şirul de numerere complexe
$(0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ la fel cum, de exemplu, cu $\mathbb{R}$ notăm numerele reale.

Problemă:

Dacă X este un şir, de ce spunem că polinomul $X - 1$ are rădăcina 1?

Răspuns:

Oricărui polinom $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ i se asociază o funcţie $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

unde $x \in \mathbb{C}$ este argumentul funcţiei F şi ia valori numerice şi definim:

Definiţia 1.3. *Fie $x_0 \in \mathbb{C}$, atunci:*

1) *$F(x_0)$ se numeşte* **valoarea** *polinomului f în punctul x_0.*

2) *x_0 se numeşte* **rădăcina** *polinomului f dacă $F(x_0) = 0$*

Vom nota în tot ce urmează

$\mathbb{R}_n[X]$ mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali de grad cel mult n şi

$\mathbb{C}_n[X]$ mulţimea polinoamelor cu coeficienţi complecşi de grad cel mult n.

1.2 Matrice. Sisteme de ecuaţii liniare

1.2.1 Rangul unei matrice

Definiţia 1.4.

- *O matrice pătratică* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *cu* $\det A = 0$ *se numeşte* **matrice singulară**, *iar cu* $\det A \neq 0$ *se numeşte* **matrice nesingulară**.
- *Se numeşte* **rangul unei matrice** $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *ordinul celui mai mare determinant* <u>*nenul*</u> *ce se poate constitui din elementele de intersecţie a* k *linii şi* k *coloane ale matricei* A, *unde* $k = 1, 2, \ldots, min\{m, n\}$.

Pentru a determina rangul unei matrice, în general parcurgem următorii paşi:

1) Se începe cu $n = 2$;

2) Se alege un minor de ordinul n nenul;

3) Avem două cazuri:

   a) Dacă nu mai rămân în matrice linii sau coloane libere, atunci acest minor va fi minor principal şi $rangA = n$;

   b) Dacă rămân în matrice linii sau coloane libere, atunci minorul ales se bordează cu câte o linie şi o coloană din cele rămase şi se obţin minori de ordinul $n + 1$; Avem şi de data aceasta două cazuri:

      i) Dacă <u>toţi</u> minorii astfel obţinuţi sunt nuli, atunci minorul de ordinul n ales va deveni minor principal, şi $rangA = n$;

      ii) Dacă există <u>cel puţin un</u> minor astfel obţinut diferit de zero, atunci se reiau pentru acest minor paşii **3)-4)**.

Exemplul 1.2. Să se determine rangul matricei:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Soluţie.

Matricea are 2 linii şi 3 coloane. Ordinul celui mai mare determinant ce se poate constitui din elemente de intersecţie a k linii şi k coloane din A este $k = min(2,3) = 2$, adică rang $A \leq 2$.

Deoarece găsim un determinant de ordinul 1 nenul, de exemplu $\Delta_1 = |1| \neq 0$ rezultă că rang $A \geq 1$.

De asemenea, cum toţi determinanţii de ordinul 2 obţinuţi prin bordarea lui Δ_1 cu liniile şi coloanele lui A sunt:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \underline{1}| & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

şi

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \underline{1}| & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

şi de aici rezultă că rang $A = 1$.

1.2.2 Sisteme de ecuaţii liniare

Definiţia 1.5.

- *Un* **sistem de** m **ecuaţii liniare cu** n **necunoscute** *este un sistem de forma:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

unde

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ *se numesc* **coeficienţii necunoscutelor**,
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *se numesc* **necunoscutele sistemului**,
- $b_1, b_2, \ldots, b_m$ *se numesc* **termenii liberi**.
- *Dacă toţi termenii liberi b_i sunt nuli atunci sistemul de ecuaţii liniare se numeşte* **sistem liniar omogen**,
- *Dacă cel puţin un termen liber b_i e nenul atunci sistemul se numeşte* **sistem liniar neomogen**.

Exemplul 1.3. Sistemul

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + y - 5z = 0 \end{cases}$$

este un sistem omogen, în timp ce sistemul

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

este neomogen.

Observaţia 1.3. Matricial sistemul (1.1) poate fi scris astfel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{B} \quad \Longleftrightarrow \quad A \cdot X = B, \tag{1.2}$$

unde

Definiţia 1.6.

- *A se numeşte* **matricea asociată sistemului**,
- *X se numeşte* **matricea necunoscutelor**,
- *B se numeşte* **matricea termenilor liberi**,
- *Matricea care se obţine adăugând la matricea sistemului A coloana termenilor liberi B.*

$$\overline{A} = [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} & |b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} & |b_2 \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} & |b_m \end{bmatrix}$$

se numeşte **matricea extinsă** *a sistemului*

- *Minorii obţinuţi prin bordarea unui minor al matricei A cu elemente din coloana termenilor liberi B se numeşte* **minor caracteristic**.

Definiţia 1.7. *Se numeşte* **soluţie** *a sistemului* (1.1) *o mulţime ordonată*

$$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

unde numere reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verifică toate ecuaţiile sistemului.

Relativ la existenţa şi unicitatea acestor soluţii avem următoarele definiţii:

Definiţia 1.8. *Sistemul care:*

- *are cel puţin o soluţie se numeşte* **compatibil**;
  - *are o singură soluţie se numeşte* **compatibil determinat**;
  - *are o infinitate de soluţii se numeşte* **compatibil nedeterminat**;
- *nu are nicio soluţie se numeşte* **incompatibil**.

Observaţia 1.4. Un sistem omogen este întotdeauna compatibil.

Metoda efectivă de lucru pentu a găsi soluţia unui sistem va fi dată de următoarele teoreme:

Teorema 1.1. (Teorema lui Kronecker-Capelli) *Sistemul de ecuaţii* (1.1) *este:*

- **compatibil determinat** *dacă şi numai dacă*

$$\text{rang } A = \text{rang } \overline{A} = \text{numărul de necunoscute ale sistemului};$$

- **compatibil nedeterminat** *dacă şi numai dacă*

$$\textit{rang } A = \textit{rang } \overline{A} \neq \textit{numărul de necunoscute ale sistemului};$$

- **incompatibil** *dacă şi numai dacă*

$$\textit{rang } A \neq \textit{rang } \overline{A}.$$

Teorema 1.2. (Teorema lui Rouche) *Sistemul de ecuaţii liniare* (1.1) *este compatibil dacă şi numai dacă toţi minorii caracetristici sunt nuli.*

În general vom parcurge următorii paşi:

1) Se identifică cele trei matrici A, B şi $\overline{A}$

2) Se determină **rangul matricei** A şi **rangul matricei** $\overline{A}$ pentru a stabili compatibilitatea sistemului.

În caz de compatibilitate

3) Se alege un **minor principal** Δp (un minor nenul de rang maxim al lui A).

4) Coloanele corespunzătoare minorului principal corespund **necunoscutelor principale**. Celelalte necunoscute se numesc **necunoscute secundare** şi se trec în dreapta semnului "=".

5) Liniile minorului principal corespund **ecuaţiilor principale**. Celelalte linii corespund **ecuaţiilor secundare** care se elimină din sistemul care trebuie rezolvat.

6) Soluţia sistemului iniţial va fi soluţia sistemului dat de minorul principal, adică format din ecuaţiile prinicipale şi necunoscutele prinicipale.

Exemplul 1.4. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+y-2z+t=1 \\ x-y+4z-3t=-1 \\ x \qquad +z-t=0\ ; \end{cases}$$

Soluţie.

1) Matricea asociată sistemului este

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array},$$

iar matricea extinsă este

$$\overline{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \end{array},$$

Cum $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ şi $\overline{A} \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R})$, rezultă că rangul maxim pe care îl poate avea atât matricea A cât şi matricea $\overline{A}$ este 3.

2) Alegem un minor de ordinul 2 nenul din A, de exemplu

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Îl bordăm pe rând cu linia şi cele două coloane rămase şi calculăm cei doi minori de ordinul 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cum toţi minorii obţinuţi prin bordarea lui Δ sunt nuli, rezultă că Δ este minor principal al lui A şi rang A=2 (1).

Calculăm minorii caracteristici bordând minorul principal cu linia rămasă şi coloana termenilor liberi (în cazul nostru avem un singur minor caracteristic):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Singurul minor caracteristic este nul, rezultă că rang $\overline{A}$=2. (2)

Din relaţiile (1) şi (2) => rang A=rang $\overline{A}$, adică sistemul este **compatibil**. Cum

$$\text{rang } (A) = \text{rang } (\overline{A}) = 2 \neq \text{ numărul de necunoscute ale sistemului}$$

atunci, conform **Teoremei lui Kronecker-Capelli**, sistemul este compatibil nedeterminat, deci are o infinitate de soluţii.

3) Pentru a determina soluţia sistemului revenim la minorul principal Δ ales din matricea A:

$$A = \begin{array}{c} \\ \to \\ \to \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

de unde deducem că:

4) x, y sunt necunoscutele principale pentru că corespund coloanelor minorului principal

z, t sunt necunoscutele secundare care vor trece dincolo de semnul =

5) primele două ecuaţii ale sistemului sunt ecuaţii principale pentru că corespund liniilor minorului principal

ultima ecuaţie a sistemului este ecuaţie secundară şi o eliminăm din sistem

6) Atunci soluţiile sistemului iniţial vor fi soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} x+y=1+2z-t \\ x-y=-1-4z+3t \end{cases} \iff \begin{cases} x=-z+t, \\ y=3z-2t+1. \end{cases}$$

În concluzie, soluţia sistemului este

$$S=\{(-z+t,3z-2t+1,z,t)\,,\ (\forall)\ z,t\in\mathbb{R}\}\,.$$

1.3 Grupuri

Fie G o mulţime nevidă şi $*$ o lege de compoziţie internă definită pe G.

Definiţia 1.9. $(G,*)$ *se numeşte* **grup** *dacă*

G1) $(\forall)x, y, z \in G,\ x*(y*z) = (x*y)*z$

G2) $(\exists)e \in G$ *a.î.* $(\forall)x \in G,\ x*e = e*x = x$

G3) $(\forall)x \in G\ (\exists)x' \in G$ *a.î.* $x*x' = x'*x = e.$

Dacă în plus are loc şi:

G4) $(\forall)x, y \in G,\ x*y = y*x$

atunci $(G,*)$ *se numeşte* **grup comutativ** *sau* **abelian**.

Exemplul 1.5.

$(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$ cu adunarea numerelor reale sau complexe

$(\mathbb{R}[X],+)$ cu adunarea polinoamelor

$(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),+)$ cu adunarea matricelor

1.4 Corpuri

Fie K o mulţime nevidă şi $+$ şi $\cdot$ două legi de compoziţie interne definite pe K.

Definiţia 1.10. *$(K, +, \cdot)$ se numeşte* **corp** *dacă*

C1) *$(K, +)$ este grup abelian*

C2) *$(K, \cdot)$ este grup*

C3) *$\cdot$ este distributivă faţă de $+$, adică $(\forall)x, y, z \in K$ au loc:*

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$

$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$

Dacă în plus are loc şi:

C4) $(\forall)x, y \in K,\ x \cdot y = y \cdot x$

atunci $(K, +, \cdot)$ se numeşte **corp comutativ** *sau* **abelian**.

Exemplul 1.6.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ cu adunarea şi înmulţirea numerelor reale sau complexe

$(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ cu adunarea şi înmulţirea polinoamelor

$(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ cu adunarea şi înmulţirea matricelor

CAPITOLUL 2

SPAŢII VECTORIALE

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ. Notăm cu 0 elementul neutru faţă de adunare şi cu 1 elementul neutru faţă de înmulţire.

Fie V o mulţime nevidă şi $+$ şi $\cdot$ două legi de compoziţie, una internă $(+ : V \times V \to V)$ şi una externă $(\cdot : K \times V \to V)$ definite pe V.

Definiţia 2.1. $(V/K, +, \cdot)$ *se numeşte* **spaţiu vectorial peste corpul de scalari** K *dacă*

SV1) $(V, +)$ *este grup abelian*

SV2) $\alpha \cdot (\beta \cdot \bar{v}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \bar{v}, \ (\forall)\alpha, \beta \in K, \ (\forall)\bar{v} \in V$

SV3) $\alpha \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = \alpha \cdot \bar{u} + \alpha \cdot \bar{v}, \ (\forall)\alpha \in K, \ (\forall)\bar{u}, \bar{v} \in V$

SV4) $(\alpha + \beta) \cdot \bar{v} = \alpha \cdot \bar{v} + \beta \cdot \bar{v}, \ (\forall)\alpha, \beta \in K, \ (\forall)\bar{v} \in V$

SV5) $1 \cdot \bar{v} = \bar{v}, \ (\forall)\bar{v} \in V$.

Elementele lui V *se numesc* **vectori**.

Elementele lui K *se numesc* **scalari**.

Observaţia 2.1. Notăm cu $\cdot$ şi înmulţiea a doi scalari şi înmulţiea unui vector cu un scalar fără pericol de confuzie deoarece vectorii îi vom nota întotdeauna cu bară deasupra şi cu $+$ atât adunarea a doi vectori cât si adunarea a doi scalari din acelaşi motiv.

Propoziţia 2.1. *Dacă* $(V/K, +, \cdot)$ *este un spaţiu vectorial peste corpul de scalari* K *atunci au loc:*

1) $0 \cdot \bar{v} = \bar{0},\ (\forall)\bar{v} \in V$

2) $(-1)\bar{v} = -\bar{v},\ (\forall)\bar{v} \in V$

3) $\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0},\ (\forall)\alpha \in K.$

Exemplul 2.1.

- $(\mathbb{C}^n/\mathbb{C}, +, \cdot)$ unde pe mulţimea

  $\mathbb{C}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1, n}\}$

  introducem o operaţie internă:

  $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) =^{def} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$

  şi o operaţie externă:

  $\alpha \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) =^{def} (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \dots, \alpha \cdot a_n)$

- $(\mathbb{R}[X]/\mathbb{R}, +, \cdot)$ cu adunarea polinoamelor şi înmulţirea unui polinom cu un număr real

- $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})/\mathbb{R}, +, \cdot)$ cu adunarea matricelor şi înmulţirea matricelor cu un număr real

2.1 Dependenţa şi independenţa liniară. Sistem de generatori

Fie $(V/K, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial peste corpul de scalari K şi

$S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$ un sistem (mulţime **ordonată** sau familie) finit(ă) de vectori din V.

Definiţia 2.2.

- *Fie scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$. Atunci vectorul $\bar{v} \in V$:*

$$\bar{v} = \alpha_1 \cdot \bar{v}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{v}_2 \dots + \alpha_n \cdot \bar{v}_n \tag{2.1}$$

  se numeşte o **combinaţie liniară** *a vectorilor lui S.*

- *Scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ se numesc* **coeficienţii** *combinaţiei liniare* (2.1).

Exemplul 2.2.

- Vectorul nul $\bar{0}$ este întotdeauna o combinaţie liniară a vectorilor oricărui sistem de vectori S pentru că $(\exists)0 \in K$ a. î.

$$\bar{0} = 0 \cdot \bar{v}_1 + 0 \cdot \bar{v}_2 + \dots + 0 \cdot \bar{v}_n.$$

- Vectorul

$$\bar{v} = 1\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 \dots + n\bar{v}_n$$

  este o combinaţie liniară a vectorilor lui S.

Definiţia 2.3.

- *Sistemul de vectori S se numeşte* **liniar dependent** *dacă vectorul nul este o combinaţie liniară a vectorilor $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_n$ cu cel puţin un coeficient nenul, adică $(\exists) i \leq n, \alpha_i \neq 0$ a.î.:*

$$\boxed{\bar{0} = \alpha_1 \cdot \bar{v}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \bar{v}_n} \tag{2.2}$$

- *Relaţia* (2.2) *se numeşte* **relaţia de dependenţă** *a vectorilor* $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_n$.
- *Sistemul de vectori S se numeşte* **liniar independent** *dacă nu este liniar dependent, adică:*

$$\bar{0} = \alpha_1 \cdot \bar{v}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \bar{v}_n \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

- *Sistemul de vectori S se numeşte* **liniar independent maximal** *dacă $(\forall v) \in V \Rightarrow S \cup \{\bar{v}\}$ este liniar dependent, adică conţine cel mai mare număr de vectori liniari independenţi din V.*

Observaţia 2.2. Sistemul S este liniar dependent dacă există cel puţin un vector din S care este o combinaţie liniară de ceilalţi vectori din S:

$$\bar{0} = \alpha_1 \cdot \bar{v}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \bar{v}_n \Rightarrow (\exists) \alpha_i \neq 0 \Rightarrow$$

$$\bar{v}_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \cdot \bar{v}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i} \cdot \bar{v}_2 - \ldots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \cdot \bar{v}_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \cdot \bar{v}_{i+1} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \cdot \bar{v}_n.$$

Exemplul 2.3.

- Sistemul format doar din vectorul nul, $S = \{\bar{0}\}$ este liniar dependent pentru că $(\forall)\alpha \neq 0 \in K$ avem că:
$$\bar{0} = \alpha \cdot \bar{0}.$$
- Sistemul format dintr-un singur vector nenul, $S = \{\bar{v}\}$, $\bar{v} \neq \bar{0}$ este liniar independent pentru că:
$$\bar{0} = \alpha \cdot \bar{v} \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

Exemplul 2.4. Să se găsească relaţia de dependenţă a vectorilor sistemului

$$S = \{\bar{v}_1 = (1, -2), \bar{v}_2 = (-1, 3), \bar{v}_3 = (0, 1), \bar{v}_4 = (1, -1)\}.$$

Soluţie. Pentru a găsi relaţia de dependenţă între vectorii $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ şi anume

$$\boxed{\bar{0} = \alpha_1 \cdot \bar{v}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{v}_2 + \alpha_3 \cdot v_3 + \alpha_4 \cdot \bar{v}_4} \tag{2.1}$$

va trebui să determinăm scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ care verifică această relaţie. Înlocuind vectorii $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ în relaţia (2.1) obţinem

$$\begin{aligned}(0,0) &= \alpha_1(1,-2) + \alpha_2(-1,3) + \alpha_3(0,1) + \alpha_4(1,-1)\\ &= (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4, -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4),\end{aligned}$$

relaţie echivalentă cu sistemul omogen

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 \qquad + \alpha_4 = 0 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Matricea sistemului este

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & \underline{1} & \underline{-1} \end{array}\right] \end{array}$$

cu $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ minor principal $\Rightarrow$

α_3, α_4 necunoscute principale

α_1, α_2 necunoscute secundare.

Trecem necunoscutele secundare în partea dreaptă a semnului "=" şi sistemul va fi echivalent cu

$$\begin{cases} \alpha_4 = -\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_3 - \alpha_4 = 2\alpha_1 - 3\alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = \alpha_1 - 2\alpha_2 \\ \alpha_4 = -\alpha_1 + \alpha_2. \end{cases}$$

Înlocuim α_3 şi α_4 în relaţia de dependenţă (2.1):

$$\begin{aligned} (0,0) &= \alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 + (\alpha_1 - 2\alpha_2)\bar{v}_3 + (-\alpha_1 + \alpha_2)\bar{v}_4 \\ &= \alpha_1(\bar{v}_1 + \bar{v}_3 - \bar{v}_4) + \alpha_2(\bar{v}_2 - 2\bar{v}_3 + \bar{v}_4) \end{aligned}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} \bar{v}_1 + \bar{v}_3 - \bar{v}_4 = \bar{0} \\ \bar{v}_2 - 2\bar{v}_3 + \bar{v}_4 = \bar{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{v}_1 = -\bar{v}_3 + \bar{v}_4 \\ \bar{v}_2 = 2\bar{v}_3 - \bar{v}_4. \end{cases}$$

Observaţia 2.3. Relaţia de dependenţă poate însemna un sistem de relaţii liniare între vectorii sistemului liniar dependent.

Observaţia 2.4. În probleme pentru a studia liniar dependenţa unui sistem de vectori vom folosi Criteriul pracic 2.1.

Definiţia 2.4. *Sistemul de vectori S se numeşte* **sistem de generatori** *pentru spaţiul vectorial V dacă orice vector din V se poate scrie ca o combinaţie liniară de vectori din S ($S \subset V$ generează pe V), adică* $(\forall)\bar{v} \in V$, $(\exists)\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ *a.î.:*

$$\bar{v} = \alpha_1 \cdot \bar{v}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \bar{v}_n.$$

Exemplul 2.5. Fie $V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$, $S = \{\bar{e}_1 = (1,0,0), \bar{e}_2 = (0,1,0), \bar{e}_3 = (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Arătăm că orice vector din $\mathbb{R}^3$, $\bar{v} = (x,y,z)$, $x,y,z \in \mathbb{R}$ este generat (se poate scrie ca o combinaţie liniară) de cei trei vectori din S, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$:

$$\bar{v} = (x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z)$$

$$= x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,1,0) + z \cdot (0,0,1) = x \cdot \bar{e}_1 + y \cdot \bar{e}_2 + z \cdot \bar{e}_3,\ x,y,z \in \mathbb{R}.$$

Am arătat ca o infinitate de vectori cât conţine spaţiul $\mathbb{R}^3$ sunt toţi generaţi de cei trei vectori din S, adică S este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^3$.

Observaţia 2.5. La fel ca şi în cazul liniar dependenţei unui sistem de vectori şi pentru a studia dacă un sistem de vectori este sistem de generatori pentru un spaţiu vectorial $(V/K, +, \cdot)$ vom folosi Criteriul pracic 2.1.

2.2 Bază. Dimensiune

Fie $(V/K, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial peste corpul de scalari K,

$B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\} \subset V$ un sistem finit de vectori din V şi

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ scalari din corpul K.

Definiţia 2.5. *Sistemul de vectori B se numeşte* **bază** *pentru spaţiul vectorial $(V/K, +, \cdot)$ dacă:*

B1) *B este liniar independent*

B2) *B este sistem de generatori pentru V.*

Exemplul 2.6. Bazele canonice. Baza într-un spaţiu vectorial nu este unică şi de aceea se alege o anumită bază de referinţă pe care o vom numi **baza canonică**, o vom nota B_c, iar vectorii săi îi vom nota cu $\bar{e}_i$ sau $\bar{E}_i$:

- În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^2$,

$$B_c =^{def} \{\bar{e}_1 = (1, 0), \bar{e}_2 = (0, 1)\}$$

- În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$,

$$B_c =^{def} \{\bar{e}_1 = (1, 0, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0), \bar{e}_3 = (0, 0, 1)\}$$

- În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$,

$$B_c =^{def} \{\bar{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \bar{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)\}$$

- În spaţiul vectorial $\mathbb{R}_1[X]$,

$$B_c =^{def} \{\bar{e}_1 = X, \bar{e}_2 = 1\}$$

- În spaţiul vectorial $\mathbb{R}_2[X]$,

$$B_c =^{def} \{\bar{e}_1 = X^2, \bar{e}_2 = X, \bar{e}_3 = 1\}$$

- În spaţiul vectorial $\mathbb{R}_n[X]$,

$$B_c =^{def} \{\bar{e}_1 = X^n, \bar{e}_2 = X^{n-1}, \dots, \bar{e}_n = X, e_{n+1} = 1\}$$

- În spaţiul vectorial $\mathcal{M}_2[\mathbb{C}]$,

$$B_c =^{def} \left\{ \bar{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- În spaţiul vectorial $\mathcal{M}_{3,1}[\mathbb{C}]$,

$$B_c =^{def} \left\{ \bar{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- În spaţiul vectorial $\mathcal{M}_{m,n}[\mathbb{C}]$,

$$B_c =^{def} \left\{ \bar{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \bar{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \bar{E}_{m \cdot n} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Observaţia 2.6. Să observăm că baza canonică în

$\mathbb{R}^n$ are n vectori,

$\mathbb{R}_n[X]$ are $n+1$ vectori

$\mathcal{M}_{m \cdot n}$ are $m \cdot n$ vectori.

Cum B este bază pentru V, B este şi sistem de generatori pentru V şi am văzut din Definiţia 2.4 că pentru orice vector $\bar{v} \in V$ există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ a.î.:

$$\bar{v} = \alpha_1 \cdot \bar{v}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \bar{v}_n.$$

Atunci aceşti scalari sunt unici, adică avem propoziţia:

Propoziţia 2.2. *Dacă B este o bază pentru spaţiul vectorial $(V/K, +, \cdot)$, atunci $(\forall)\bar{v} \in V$ $(\exists!)\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ a.î.:*

$$\bar{v} = \alpha_1 \cdot \bar{v}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \bar{v}_n. \tag{2.3}$$

Demonstraţie.

Existenţa. Este dată aşa cum am văzut de proprietatea bazei de a fi şi sistem de generatori.

Unicitatea. Presupunem prin reducere la absurd că $(\exists)(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in K$ a.î. $(\exists)i$ cu $\beta_i \neq \alpha_i$ şi:

$$\bar{v} = \beta_1 \cdot \bar{v}_1 + \beta_2 \cdot \bar{v}_2 + \ldots + \beta_n \cdot \bar{v}_n.$$

Avem atunci că:

$$\bar{v} = \alpha_1 \cdot \bar{v}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \bar{v}_n = \beta_1 \cdot \bar{v}_1 + \beta_2 \cdot \bar{v}_2 + \ldots + \beta_n \cdot \bar{v}_n,$$

sau

$$\bar{0} = (\alpha_1 - \beta_1) \cdot \bar{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot \bar{v}_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot \bar{v}_n.$$

Cum B este şi sistem liniar independent $\Rightarrow \alpha_i = b_i,\ (\forall)i \leq n$, absurd pentru că am presupus că există cel puţin un i pentru care $\beta_i \neq \alpha_i$.

$\square$

Definiţia 2.6. *Scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ din relaţia (2.3) se numesc* **coordonatele vectorului** *$\bar{v}$ în baza B.*

Observaţia 2.7.

- Propoziţia (2.2) ne permite să identificăm orice vector cu coordonatele sale într-o bază $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ şi astfel obţinem forma cunoscută a unui vector:

$$\bar{v} = \alpha_1 \cdot \bar{v}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \bar{v}_n =^{not} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_B$$
$$=^{not} [\bar{v}]_B.$$

- În baze diferite coordonatele aceluiaşi vector vor fi diferite şi e nevoie întotdeauna să precizăm şi baza în care vectorul are aceste coordonate.

- Baza pusă ca indice la coordonatele unui vector ne fereşte şi de posibila confuzie dată de faptul că în $\mathbb{R}^n$ forma vectorului coincide cu scrierea sa pe coordonate în baza canonică, pe când în celelalte spaţii vectoriale nu; de exemplu:

  $\bar{v} = (5,6) \in \mathbb{R}^2,\ (5,6) = (5,0) + (0,6) = 5 \cdot \bar{e}_1 + 6 \cdot \bar{e}_2 = (5,6)_{B_c}$

  $\bar{p} = 5X + 6 \in \mathbb{R}_1[X],\ 5X + 6 = 5 \cdot X + 6 \cdot 1 = 5 \cdot \bar{e}_1 + 6 \cdot \bar{e}_2 = (5,6)_{B_c}.$

Propoziţia 2.3.

1) *Dacă B este o bază în V şi $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_p\} \subset V$ este un sistem liniar independent, atunci $p \leq n$, adică B este un sistem liniar independent maximal în V.*

2) *Într-un spaţiu vectorial care are o bază cu un număr finit de vectori, toate bazele au acelaşi număr de vectori.*

Demonstraţie. **1)** Se demonstrează prin inducţie.

2) Fie B şi $B' = \{\bar{v}'_1, \bar{v}'_2, \ldots, \bar{v}'_p\}$ două baze ale lui V. B şi B' fiind baze, din definiţia (2.5), sunt şi sisteme liniar independente.

B bază şi B' sistem liniar independent $\Rightarrow^{1)}$ $p \leq n$.

B' bază şi B sistem liniar independent $\Rightarrow^{1)}$ $n \leq p$.

Adică $p = n$.

$\square$

Observaţia 2.8. Un spaţiu vectorial nu are o singură bază, dar <u>toate</u> bazele sale au acelaşi număr de vectori.

Acum are sens definiţia:

Definiţia 2.7. *Spunem că spaţiul vectorial V are* **dimensiunea** *n dacă în V există o bază cu n vectori.*

Fie $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_p\} \subset V$ este un sistem oarecare de vectori din V şi B o bază a lui V. Vectorii din S fiind vectori din V îi putem scrie în coordonate în baza B:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 &= \alpha_{11} \cdot \bar{v}_1 + \alpha_{12} \cdot \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot \bar{v}_n = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n})_B \\
\bar{u}_2 &= \alpha_{21} \cdot \bar{v}_1 + \alpha_{22} \cdot \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot \bar{v}_n = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n})_B \\
&\vdots \\
\bar{u}_p &= \alpha_{p1} \cdot \bar{v}_1 + \alpha_{p2} \cdot \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_{pn} \cdot \bar{v}_n = (\alpha_{p1}, \alpha_{p2}, \ldots, \alpha_{pn})_B.
\end{aligned}$$

Considerăm matricea A_S care are pe coloane coordonatele vectorilor din S în baza B:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} [\bar{u}_1]_B & [\bar{u}_2]_B & \cdots & [\bar{u}_p]_B \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\
A_S = & \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{p1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{p2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{pn} \end{bmatrix}
\end{array} \tag{2.4}$$

Definiţia 2.8. *Numim matricea* A_S *din* (2.4) **matricea asociată sistemului** S *în baza* B.

Teorema 2.1 (Criteriul practic pentru sisteme de vectori)**.**

1) *S este un sistem liniar independent d.n.d. rang $A_S = p$ (numărul de vectori din S)*

2) *S este un sistem un sistem de generatori pentru V d.n.d rang A_S =dim V*

3) *S este bază în V d.n.d. rang A_S =dim $V = p$ (numărul de vectori din S)*

d.n.d. S este un sistem liniar independent maximal în V

d.n.d. S este un sistem liniar independent şi p (numărul de vectori din S)=dim V.

Demonstraţie. Considerăm o combinaţie liniară a vectorilor din S:

$$\beta_1 \cdot \bar{u}_1 + \beta_2 \cdot \bar{u}_2 + \ldots + \beta_p \cdot \bar{u}_p. \tag{2.5}$$

Cum

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n})_B \ | \cdot \beta_1 \\
\bar{u}_2 &= (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n})_B \ | \cdot \beta_2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\bar{u}_p &= (\alpha_{p1}, \alpha_{p2}, \ldots, \alpha_{pn})_B \ | \cdot \beta_p \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_1 \cdot \bar{u}_1 + \beta_2 \cdot \bar{u}_2 + \ldots + \beta_p \cdot \bar{u}_p = (&\beta_1 \cdot \alpha_{11} + \beta_2 \cdot \alpha_{21} + \ldots + \beta_p \cdot \alpha_{p1}, \\
&\beta_1 \cdot \alpha_{12} + \beta_2 \cdot \alpha_{22} + \ldots + \beta_p \cdot \alpha_{p2}, \\
&\ldots \\
&\beta_1 \cdot \alpha_{1n} + \beta_2 \cdot \alpha_{2n} + \ldots + \beta_p \cdot \alpha_{pn})_B.
\end{aligned}
$$

1) S liniar independent d .n.d. $\beta_1 \cdot \bar{u}_1 + \beta_2 \cdot \bar{u}_2 + \ldots + \beta_p \cdot \bar{u}_p = \bar{0}$ implică $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_p = 0$ d.n.d.

$$
\begin{cases}
\beta_1 \cdot \alpha_{11} + \beta_2 \cdot \alpha_{21} + \ldots + \beta_p \cdot \alpha_{p1} = 0, \\
\beta_1 \cdot \alpha_{12} + \beta_2 \cdot \alpha_{22} + \ldots + \beta_p \cdot \alpha_{p2} = 0, \\
\ldots \\
\beta_1 \cdot \alpha_{1n} + \beta_2 \cdot \alpha_{2n} + \ldots + \beta_p \cdot \alpha_{pn} = 0
\end{cases}
$$

d.n.d.

$$
A_S \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.6}
$$

Sistemul omogen (2.6) are doar soluţia nulă d.n.d. rang$A$=nr. de necunoscute d.n.d. rang$A_S = p$.

2) S sistem de generatori pentru V d.n.d. $(\forall)\bar{v} \in V$, $(\exists)\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p \in K$ a.î.

$$
\bar{v} = \beta_1 \cdot \bar{u}_1 + \beta_2 \cdot \bar{u}_2 + \ldots + \beta_p \cdot \bar{u}_p. \tag{2.7}
$$

B este bază în $V \Rightarrow (\exists!)x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ a.î. $\bar{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_B$. Atunci relaţia (2.7) este echivalentă cu

$$\beta_1 \cdot \bar{u}_1 + \beta_2 \cdot \bar{u}_2 + \ldots + \beta_p \cdot \bar{u}_p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_B$$

d.n.d.

$$\begin{cases} \beta_1 \cdot \alpha_{11} + \beta_2 \cdot \alpha_{21} + \ldots + \beta_p \cdot \alpha_{p1} = x_1, \\ \beta_1 \cdot \alpha_{12} + \beta_2 \cdot \alpha_{22} + \ldots + \beta_p \cdot \alpha_{p2} = x_2, \\ \ldots \\ \beta_1 \cdot \alpha_{1n} + \beta_2 \cdot \alpha_{2n} + \ldots + \beta_p \cdot \alpha_{pn} = x_3 \end{cases}$$

d.n.d.

$$A_S \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Sistemul (2.8) este compatibil $(\forall)x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ d.n.d. rang A_S =rang $\bar{A}_S$=numărul de ecuaţii=n.

$$\bar{A}_S = \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{p1} & x_1 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{p2} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{pn} & x_3 \end{array}\right].$$

Dacă rang $A_S = n$ atunci minorul principal al lui A_S va fi minor principal şi pentru $\bar{A}_S$, $(\forall)x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$.

3) Rezultă din **1)** şi **2)**.

□

Exemplul 2.7. Fie

$S = \{\bar{p}_1 = 2X^2, \bar{p}_2 = 3X^2 + X, \bar{p}_3 = X^2 + 5X + 2, \bar{p}_4 = X^2 - 4X - 2\} \subset \mathbb{R}_2[X]$ şi

$B = \{\bar{q}_1 = X^2, \bar{q}_2 = X^2 + X, \bar{q}_3 = X^2 + X + 1\} \subset \mathbb{R}_2[X]$.

a) Să se scrie coordonatele vectorului

$$\bar{p} = 7X^2 + 11X + 9$$

în baza canonică.

b) Să se studieze dacă S este un sistem liniar dependent.

c) Să se studieze dacă S este un sistem de generatori.

d) Să se arate că B este o bază în $\mathbb{R}_2[X]$.

Soluţie. a) În baza canonică din $\mathbb{R}_2[X]$, $B_c = \{X^2, X, 1\}$, vectorul $\bar{p}$ se scrie:
$\bar{p} = 7X^2 + 11X + 9 = 7 \cdot X^2 + 11 \cdot X + 9 \cdot 1 = 7 \cdot \bar{e}_1 + 11 \cdot \bar{e}_2 + 9 \cdot \bar{e}_3 = (7, 11, 9)_{B_c}$

b) Scriem vectorii sistemului S în baza canonică din $\mathbb{R}_2[X]$:
$\bar{p}_1 = 2X^2 = 2 \cdot X^2 + 0 \cdot X + 0 \cdot 1 = 2 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3 = (2, 0, 0)_{B_c}$
$\bar{p}_2 = 3X^2 + X = 3 \cdot X^2 + 1 \cdot X + 0 \cdot 1 = 3 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3 = (3, 1, 0)_{B_c}$
$\bar{p}_3 = X^2 + 5X + 2 = 1 \cdot X^2 + 5 \cdot X + 2 \cdot 1 = 1 \cdot \bar{e}_1 + 5 \cdot \bar{e}_2 + 2 \cdot \bar{e}_3 = (1, 5, 2)_{B_c}$
$\bar{p}_4 = X^2 - 4X - 2 = 1 \cdot X^2 + (-4) \cdot X + (-2) \cdot 1 = 1 \cdot \bar{e}_1 + (-4) \cdot \bar{e}_2 + (-2) \cdot \bar{e}_3 = (1, -4, -2)_{B_c}$.
Matricea asociată sistemului S în baza canonică este:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} [\bar{p}_1]_{B_c} & [\bar{p}_2]_{B_c} & [\bar{p}_3]_{B_c} & [\bar{p}_4]_{B_c} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ A_S = & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{2} & -2 \end{array}\right] \end{array}$$

Minorul $M = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ este un minor principal $\Rightarrow$ rang A_S=dim $M = 3$. Aplicând Criteriul practic pentru sisteme de vectori 2.1 avem că:

rang $A_S = 3 \neq 4 =$ numărul de vectori din $S \Rightarrow S$ nu este liniar independent $\Rightarrow S$ este liniar dependent.

c) rang $A_S = 3 =$dim $\mathbb{R}_2[X]$ (numărul de vectori din baza canonică de exemplu) $\Rightarrow S$ este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}_2[X]$.

d) Procedând la fel ca la punctul a), vom scrie vectorii din B în baza canonică din $\mathbb{R}_2[X]$:
$\bar{q}_1 = X^2 = 1 \cdot X^2 + 0 \cdot X + 0 \cdot 1 = 1 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3 = (1, 0, 0)_{B_c}$
$\bar{q}_2 = X^2 + X = 1 \cdot X^2 + 1 \cdot X + 0 \cdot 1 = 1 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3 = (1, 1, 0)_{B_c}$
$\bar{q}_3 = X^2 + X + 1 = 1 \cdot X^2 + 1 \cdot X + 1 \cdot 1 = 1 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2 + 1 \cdot \bar{e}_3 = (1, 1, 1)_{B_c}$.
Matricea asociată sistemului B în baza canonică este:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} [\bar{q}_1]_{B_c} & [\bar{q}_2]_{B_c} & [\bar{q}_3]_{B_c} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ A_B = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

A_B este o matrice pătratică cu det $A_B = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rang A_B=dim $A_B = 3$. Aplicând Criteriul practic pentru sisteme de vectori 2.1 avem că:

rang $A_B = 3 =$ numărul de vectori din B =dim $\mathbb{R}_2[X] \Rightarrow B$ este o bază pentru $\mathbb{R}_2[X]$.

2.3 Schimbări de baze

Fie $(V/K, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial cu $\dim V = n$,

$B_1 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\} \subset V$ şi

$B_2 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\} \subset V$ două baze ale lui V,

$\bar{v} \in V$ un vector arbitrar din V.

> **Problemă:**
> Fiind date în V două baze, ce legătură există între coordonatele aceluiaşi vector în cele două baze?

Răspunsul este dat de formula (2.9) pe care o vom obţine algoritmic parcurgând următorii paşi:

1) Dacă B_1 şi B_2 sunt baze ale lui V, atunci fiecare vector din B_2 se poate scrie în baza B_1:

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = \alpha_{11} \cdot \bar{v}_1 + \alpha_{12} \cdot \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot \bar{v}_n, \\ \vdots \\ \bar{u}_n = \alpha_{n1} \cdot \bar{v}_1 + \alpha_{n2} \cdot \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_{nn} \cdot \bar{v}_n, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n})_{B_1}, \\ \vdots \\ \bar{u}_n = \alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \ldots, \alpha_{nn})_{B_1}, \end{cases}$$

2) Construim matricea $T_{\overleftarrow{B_1 B_2}}$ punând coordonatele vectorilor din $\boxed{B_2}$ scrişi în baza B_1.

> **Atenţie!**
> Baza săgeţii de la indicele lui T arată **de unde** se iau vectorii, iar vârful ei arată **în ce bază** sunt scrişi.

$$T_{\overleftarrow{B_1B_2}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} [\bar{u}_1]_{B_1} & \dots & [\bar{u}_n]_{B_1} \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{p1} \\ \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{p2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \cdots & \alpha_{pn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Definiţia 2.9. $T_{\overleftarrow{B_1B_2}}$ *se numeşte* **matricea de trecere** *de la baza* B_1 *la baza* B_2.

Atenţie!

Se citeste în ordinea în care sunt scrise bazele şi **se construieşte** în ordine invesă: se iau vectorii din B_2 şi se scriu în B_1.

Observaţia 2.9. Dacă în particular, $B_1 = B_c$ este baza canonică din V, atunci $T_{\overleftarrow{B_cB_2}} = A$-matricea asociată bazei B_2.

Propoziţia 2.4. *Matricea de trecere de la o bază la alta este o matrice nesingulară.*

Demonstraţie. B_1 şi B_2 sunt două baze în V rezultă ca au acelaşi număr de vectori n, adică matricea de trecere este o matrice pătratică.

B_2 bază $\Rightarrow$ B_2 sistem liniar independent $\Rightarrow$ rang $T_{\overleftarrow{B_1B_2}}$= nr. de vectori din $B_2 = n \Rightarrow$ $T_{\overleftarrow{B_1B_2}}$ nesingulară.

$\square$

3)

Teorema 2.2 (Teorema de schimbare a coordonatelor unui vector). *Are loc relaţia:*

$$[\bar{v}]_{B_1} = T_{\overleftarrow{B_1 B_2}}[\bar{v}]_{B_2} \tag{2.9}$$

unde $[\bar{v}]_{B_i}$ *reprezintă coordonatele vectorului* $\bar{v}$ *în baza* B_i*.*

Vom considera acum un caz particular al teoremei precedente foarte util în probleme, şi anume când $B_1 = B_c$, adică când vrem să trecem un vector din baza canonică într-o altă bază rezolvăm sistemul:

Propoziţia 2.5 (Teorema de schimbare a coordonatelor unui vector din baza canonică în baza B)**.**

$$\begin{aligned} [\bar{v}]_{B_c} &= T_{\overleftarrow{B_c B}}[\bar{v}]_{B} \\ &= A_B[\bar{v}]_B \end{aligned} \tag{2.10}$$

unde A_B *este matricea asociată bazei* B*.*

În continuare vom da două proprietăţi ale matricei de trecere de la o bază la alta:

Propoziţia 2.6 (Proprietăţile matricei de trecere de la o bază la alta)**.**

1) $T_{\overleftarrow{B_2 B_1}} = T^{-1}_{\overleftarrow{B_1 B_2}}$

2) *Dacă* B_3 *este altă bază a spaţiului vectorial* V*, atunci:*

$$T_{\overleftarrow{B_1 B_3}} = T_{\overleftarrow{B_1 B_2}} \cdot T_{\overleftarrow{B_2 B_3}}.$$

Exemplul 2.8. Fie $B_1 = \{\bar{v}_1 = X, \bar{v}_2 = X + 1\} \subset \mathbb{R}_1[X]$, $B_2 = \{\bar{u}_1 = X + 2, \bar{u}_2 = 2X + 1\} \subset \mathbb{R}_1[X]$ şi $\bar{p} = 4X + 2$.

a) Să se studieze dacă B_1 şi B_2 sunt baze în $\mathbb{R}_1[X]$

b) În caz afirmativ să se scrie $T_{\overleftarrow{B_1 B_2}}$

c) Să se scrie coordonatele vectoului $\bar{p}$ în bazele B_1, respectiv B_2.

Soluţie.

a) Pentru a studia dacă sistemul de vectori B_1 este bază scriem matricea asociată lui B_1 şi aplicăm Criteriul practic (2.1) 3). Coloanele matricei A sunt coordonatele vectorilor din B_1 în baza canonică din $\mathbb{R}_1[X]$, $B_c = \{X, 1\}$:

$\bar{v}_1 = X = 1 \cdot X + 0 \cdot 1 = (1, 0)_{B_c}$

$\bar{v}_2 = X + 1 = 1 \cdot X + 1 \cdot 1 = (1, 1)_{B_c} \Rightarrow$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} [\bar{v}_1]_{B_c} & [\bar{v}_2]_{B_c} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ A_{B_1} = & \begin{bmatrix} 1 & \quad 1 \\ 0 & \quad 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\det A_{B_1} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A_{B_1} = 2 =$ numărul de vectori din $B_1 = \dim \mathbb{R}_1[X] \Rightarrow$ din Criteriul practic (2.1) 3) că B_1 este bază.

Procedăm analog şi cu B_2:

$\bar{u}_1 = X + 2 = 1 \cdot X + 2 \cdot 1 = (1, 2)_{B_c}$

$\bar{u}_2 = 2X + 1 = 2 \cdot X + 1 \cdot 1 = (2, 1)_{B_c} \Rightarrow$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} [\bar{u}_1]_{B_c} & [\bar{u}_2]_{B_c} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ A_{B_2} = & \begin{bmatrix} 1 & \quad 2 \\ 2 & \quad 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\det A_{B_2} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A_{B_2} = 2 =$ numărul de vectori din $B_2 = \dim \mathbb{R}_1[X] \Rightarrow$ din Criteriul practic (2.1) 3) că B_2 este bază.

b) Pentru a scrie matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2, $T_{\overleftarrow{B_1B_2}}$, urmăm paşii descrişi la începutul paragrafului, adică:

1) Aşa cum arată săgeata, scriem vectorii din B_2, adică $\bar{u}_1$ şi u_2, în baza B_1. Cei doi vectori îi avem scrişi în baza canonică la punctul a). Ca să îi trecem din baza canonică în baza B_2 folosim formula (2.10):

$$[\bar{u}_1]_{B_c} = T_{\overleftarrow{B_cB_1}}[\bar{u}_1]_{B_1} = A_{B_1}[\bar{u}_1]_{B_1}. \tag{2.11}$$

Cum $\bar{u}_1 = (1, 2)_{B_c}$ şi notăm $[\bar{u}_1]_{B_1} =^{not} (\alpha_1, \alpha_2)$ coordonatele lui $\bar{u}_1$ în baza B_1. Atunci relaţia (2.11) este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + & \alpha_2 = 1 \\ & \alpha_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow [\bar{u}_1]_{B_1} = (-1, 2)_{B_1}$.

Analog, $\bar{u}_2 = (2, 1)_{B_c}$ şi notăm $[\bar{u}_2]_{B_1} =^{not} (\beta_1, \beta_2)$ coordonatele lui $\bar{u}_2$ în baza B_1. Rezolvăm sistemul:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 + & \beta_2 = 2 \\ & \beta_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow [\bar{u}_2]_{B_1} = (1, 1)_{B_1}$.

2) Punem cei doi vectori obţinuţi pe coloane şi obţinem matricea de trecere:

$$\begin{array}{cc} [\bar{u}_1]_{B_1} & [\bar{u}_2]_{B_1} \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$T_{\overleftarrow{B_1B_2}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Scriem vectorul $\bar{v}$ în baza canonică:

$\bar{v} = 4X + 2 = 4 \cdot X + 2 \cdot 1 = (4, 2)_{B_c}$

şi notăm coordonatele sale în baza B_1 cu $[\bar{v}]_{B_1} =^{not} (\alpha_1, \alpha_2)$.

Ca să trecem vectorul $\bar{v}$ din baza canonică în bazele B_1 vom folosi tot formula (2.10):

$$[\bar{v}]_{B_c} = T_{\overleftarrow{B_cB_1}}[\bar{v}]_{B_1} = A_{B_1}[\bar{v}]_{B_1} \Leftrightarrow \tag{2.12}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \quad \alpha_2 = 4 \\ \qquad\quad \alpha_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow [\bar{v}]_{B_1} = (2,2)_{B_1}$.

Ştim că $\bar{v} = (4,2)_{B_c}$ şi notăm coordonatele sale în baza B_2 cu $[\bar{v}]_{B_2} =^{not} (\beta_1, \beta_2)$. Rezolvăm sistemul:

$$[\bar{v}]_{B_c} = T_{\overleftarrow{B_c B_2}}[\bar{v}]_{B_2} = A_{B_2}[\bar{v}]_{B_2} \Leftrightarrow \tag{2.13}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = 4 \\ \underline{2\beta_1 + \beta_2 = 2}_{+} |(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow [\bar{v}]_{B_2} = (0,2)_{B_2}$.

2.4 Subspaţii vectoriale

Fie $(V/K, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial,

$S \subset V$, $S \neq \emptyset$ şi

$U = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_p\} \subset V$ un sistem arbitrar de vectori din V.

Definiţia 2.10. *Sistemul de vectori S se numeşte* **subspaţiu vectorial** *al lui V dacă:*

SSV1) $(\forall)\bar{u}, \bar{v} \in S \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in S$

SSV2) $(\forall)\bar{u}, (\forall)\alpha \in K \Rightarrow \alpha \cdot \bar{u} \in S.$

Notăm $S \subset_{SSV} V$.

Propoziţia 2.7 (de caracterizare a subspaţiilor vectoriale)**.**

- $\bar{0} \in S$ *(pentru că $0 \cdot \bar{u} = \bar{0} \in S$)*
- *Orice subspaţiu vectorial este la rândul său un spaţiu vectorial.*
- *S este un subspaţiu vectorial al lui V d.n.d.*

$$(\forall)\bar{u}, \bar{v} \in S,\ (\forall)\alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha \cdot \bar{u} + \beta \cdot \bar{v} \in S.$$

Definiţia 2.11. *Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare ale vectorilor din U,*

$$L(U) = \{\bar{v} | (\exists)\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in K \ \text{a.î.}\ \bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \ldots + \alpha_p \bar{v}_p\}$$

se numeşte **acoperirea liniară** *a lui U (sau* **spaţiul generat** *de U).*

Următoarea propoziţie o vom folosi foarte des în exerciţii pentru a arăta că un sistem de vectori este subspaţiu vectorial:

Propoziţia 2.8 (de caracterizare a acoperirii liniare)**.**
Acoperirea liniară a unui sistem de vectori U are următoarele proprietăţi:

1) *U este sistem de generatori pentru $L(U)$.*

2) *$L(U)$ este un subspaţiu vectorial al lui V.*

3) *U este un subspaţiu vectorial al lui V d.n.d $U = L(U)$*

Propoziţia de mai sus ne spune două lucruri importante:

1) este suficient să arătăm că o submulţime a lui V este un $L(U)$ (acoperirea liniară a unui sistem oarecare de vectori) pentru a demonstra că este un subspaţiu vectorial al lui V.

2) furnizează un sistem de generatori U pentru un subspaţiu vectorial odată ce am arătat că subspaţiul este un $L(U)$.

Exemplul 2.9. Să se arate că sistemele de vectori

a) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x + 2y - 5z = 0\}$

b) $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + 5y - z = 0,\ y - 3z = 0\}$

sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$ şi să se găsească câte o bază a lor.

Soluţie.

a) $3x + 2y - 5z = 0$ este un sistem de o ecuaţie cu 3 necunoscute. Matricea sistemului este

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|cc} \underline{3} & 2 & -5 \end{array}\right] \end{array}$$

Un minor principal este de exemplu $|3|$ care corespunde necunoscutei x, deci vom putea considera

x- necunoscută principală

y, z - necunoscute secundare.

Trecem necunoscutele secundare în partea dreaptă a semnului $=$ şi rezolvăm ecuaţia $3x = -2y + 5z \Rightarrow x = -\frac{2}{3}y + \frac{5}{3}z$.

Înlocuim acum valoarea lui x găsită în definiţia lui S_1:

$$\begin{aligned} S_1 = &\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x + 2y - 5z = 0\} = \\ &\left\{\left(-\frac{2}{3}y + \frac{5}{3}z, y, z\right),\ y, z \in \mathbb{R}\right\} = \\ &\left\{\left(-\frac{2}{3}y, y, 0\right) + \left(\frac{5}{3}z, 0, z\right),\ y, z \in \mathbb{R}\right\} = \\ &\left\{y\left(-\frac{2}{3}, 1, 0\right) + z\left(\frac{5}{3}, 0, 1\right),\ y, z \in \mathbb{R}\right\} = \\ &L(U_1), \end{aligned}$$

unde

$$U_1 = \left\{\bar{v}_1 = \left(-\frac{2}{3}, 1, 0\right), \bar{v}_2 = \left(\frac{5}{3}, 0, 1\right)\right\}.$$

Am demonstrat astfel că S_1 este o acoperire liniară (a lui U_1). Rezultă

- din Propoziţia (2.8)-2) că S_1 este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$
- din Propoziţia (2.8)-1) că $\boxed{U_1 \text{ este un sistem de generatori pentru } S_1}$ (1).

Studiem dacă U_1 este si sistem liniar independent:

* Construim matricea asociată sistemului U_1 punând vectorii pe coloană:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ A_1 = & \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ |\overline{1} & \overline{0}| \\ |\underline{0} & \underline{1}| \end{bmatrix}. \end{array}$$

* Minorul $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ este minor principal $\Rightarrow$ rang $A_1 = 2$=numărul de vectori rezultă din Criteriul practic (2.1) 1) că $\boxed{U_1 \text{ este liniar independent}}$ (2).

Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow$ din definiţia bazei că U_1 este o bază pentru $S_1 \Rightarrow \dim S_1 = 2$.

b) $\begin{cases} 2x + 5y - z = 0, \\ \quad\quad y - 3z = 0 \end{cases}$ este un sistem de două ecuaţii cu 3 necunoscute. Matricea sistemului este

$$\begin{array}{c} \quad x \quad y \quad\; z \\ \begin{bmatrix} 2 & 5| & -1 \\ \underline{0} & \underline{1}| & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Un minor principal este de exemplu $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ care corespunde necunoscutelor x şi y, deci vom putea considera

x, y- necunoscute principale

z - necunoscută secundară.

Trecem necunoscutele secundare în partea dreaptă a semnului = şi rezolvăm sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 2x + 5y &= z, \\ \quad\quad y &= 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -7z, \\ y &= 3z \end{cases}$$

Înlocuim acum valorile lui x şi y găsite în definiţia lui S_2:

$$\begin{aligned} S_2 = &\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + 5y - z = 0,\ y - 3z = 0\} = \\ &\{(-7z, 3z, z)\,,\ z \in \mathbb{R}\} = \\ &\{z(-7, 3, 1),\ z \in \mathbb{R}\} = \\ &L(U_2), \end{aligned}$$

unde

$$U_2 = \{\bar{v} = (-7, 3, 1)\}\,.$$

Am demonstrat astfel că S_2 este o acoperire liniară (a lui U_2). Rezultă

- din Propoziţia (2.8)-2) că S_2 este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$

- din Propoziţia (2.8)-1) că $\boxed{U_2 \text{ este un sistem de generatori pentru } S_2}$ (1).

  $\boxed{U_2 \text{ este şi sistem liniar independent}}$ (2) pentru că aşa cum am arătat în Exemplul (2.3) 2), un sistem format dintr-un singur vector nenul este întotdeauna liniar independent.

  Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow$ din definiţia bazei că U_2 este o bază pentru $S_2 \Rightarrow \dim S_2 = 1$.

2.5 Întrebări de verificare

Dependenţa şi independenţa liniară. Sisteme de generatori. Baze de vectori

1) Când un sistem de vectori este liniar independent/dependent? (criteriul practic)
2) Care este relaţia de dependenţă pentru un sistem de vectori?
3) Cum se găseşte relaţia de dependenţă pentru un sistem de vectori?
4) Când un sistem de vectori este sistem de generatori? (criteriul practic)

Bază. Dimensiune

1) Când un sistem de vectori este bază? (criteriul practic)
2) Cum se calculează dimensiunea unui spaţiu?
3) Care sunt bazele canonice în $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$, $M_{m,n}[\mathbb{R}]$?

Schimbări de baze

1)* Coloanele matricei de trecere de la baza B_1 la baza B_2, $T_{B_1 \overleftarrow{\ } B_2}$ sunt coordonatele vectorilor din baza .... scrişi în baza ...

2) Dacă $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ este o bază atunci cum se scrie un vector în baza B şi reciproc, ce înseamnă că se ştiu coordonatele unui vector în baza B?

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{v}_n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_B$$

3) Cu ce formulă se trece un vector din baza canonică într-o bază B?

Subspaţii vectoriale

1) Cum se arată că o subulţime a unui spaţiu vectorial <u>este</u> subspaţiu vectorial?

2)* Cum se arată că o subulţime a unui spaţiu vectorial <u>nu este</u> subspaţiu vectorial?

3) Cum se determină o bază a unui subspaţiu vectorial?

4) Cum se determină dimensiunea unui subspaţiu vectorial?

CAPITOLUL 3

APLICAŢII LINIARE

Fie V şi W două spaţii vectoriale peste corpul de scalari K.

Definiţia 3.1. *O funcţie $f : V \to W$ se numeşte* **aplicaţie liniară** *dacă:*

AL1) $f(\bar{u}+\bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v}),\ (\forall)\bar{u},\bar{v} \in V$

AL2) $f(\alpha\bar{u}) = \alpha f(\bar{u}),\ (\forall)\bar{u},(\forall)\alpha \in K.$

Propoziţia 3.1. *$f : V \to W$ este o aplicaţie liniară d.n.d.*

AL3) $f(\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}) = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v}),\ (\forall)\bar{u},\bar{v} \in V,(\forall)\alpha,\beta \in K.$

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" f este o aplicaţie liniară $\Rightarrow$ **AL3)**.

Calculăm $\underline{f(\alpha\bar{u}+\beta\bar{v})} \overset{\mathbf{AL1)}}{=} f(\alpha\bar{u}) + f(\beta\bar{v}) \overset{\mathbf{AL2)}}{=} \underline{\alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v})}$.

"$\Leftarrow$" **AL3)** $\Rightarrow$ f este o aplicaţie liniară.

În **AL3)** avem:

- pentru $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow f(\bar{u}+\bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v}) \Rightarrow$ **AL1)**

- pentru $\beta = 0 \Rightarrow f(\alpha\bar{u}) = \alpha f(\bar{u}) \Rightarrow$ **AL2)**

adică f este o aplicaţie liniară.

$\square$

Notăm

$$L(V,W) =^{not} \{f : V \to W | f \text{ aplicaţie liniară}\}.$$

Teorema 3.1. $(L(V,W)/K, +, \cdot)$ *este un spaţiu vectorial peste corpul de scalari* K *în raport cu adunarea funcţiilor şi înmulţirea unei funcţii cu un scalar.*

Propoziţia 3.2. *Orice aplicaţie liniară* $f : V \to W$ *duce elemetul nul din domeniu în elementul nul din codomeniu*

$$f(0_V) = 0_W.$$

Demonstraţie.
$f(0_V) = f(0 \cdot \bar{v}) =^{AL1)} 0 \cdot f(\bar{v}) = 0_W.$

□

O observaţie importantă care ne permite să decunoaştem când este vorba de liniaritate este:

Observaţia 3.1. Deşi pe unele spaţii vectoriale se mai pot introduce şi alte operaţii între vectori şi scalari, <u>liniaritatea</u> implică <u>doar</u>

-adunarea vectorilor

-înmulţirea cu scalar.

De exemplu, în spaţiile vectoriale $(\mathbb{C}/\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})/\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}_n[X]/\mathbb{R}, +, \cdot)$, ştim că în plus mai sunt definite şi înmulţirea a doi vectori, şi ridicarea la putere, etc. care nu pot fi folosite când este vorba de liniaritate.

Exemplul 3.1 (exemplu de aplicaţie liniară)**.**

Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[X]$, $f(a, b, c) = (a + b)X + c$. Arătaţi că f este o aplicaţie liniară.

Soluţie. În spaţiul vectorial $(\mathbb{R}_n[X]/\mathbb{R}, +, \cdot)$, X şi 1 sunt vectori, iar $a, b, c \in \mathbb{R}$ sunt scalari $\Rightarrow f$ este o aplicaţie liniară, deoarece $(a+b)X + c$ implică doar adunare de vectori şi înmulţire cu scalari. Demonstrăm aceasta folosind Propoziţia (3.1):

Fie $\bar{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\bar{v}_2 = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calculăm

$$\begin{aligned}
\underline{f(\alpha\bar{v}_1 + \beta\bar{v}_2)} &= f\left[\alpha(a_1, b_1, c_1) + \beta(a_2, b_2, c_2)\right] \\
&= f(\underbrace{\alpha a_1 + \beta a_2}_{a}, \underbrace{\alpha b_1 + \beta b_2}_{b}, \underbrace{\alpha c_1 + \beta c_2}_{c}) \\
&= [\underbrace{(\alpha a_1 + \beta a_2)}_{a} + \underbrace{(\alpha b_1 + \beta b_2)}_{b}]X + \underbrace{(\alpha c_1 + \beta c_2)}_{c} \\
&= \alpha\left[(a_1 + b_1)X + c_1\right] + \beta\left[(a_2 + b_2)X + c_2\right] \\
&= \alpha f(a_1, b_1, c_1) + \beta f(a_2, b_2, c_2) \\
&= \underline{\alpha f(\bar{v}_1) + \beta f(\bar{v}_2)}.
\end{aligned}$$

De unde rezultă că f este aplicaţie liniară.

Exemplul 3.2 (exemplu de funcţie care nu este aplicaţie liniară)**.**

Fie $g : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, $g(a, b, c, d) = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & c \\ d & 1 \end{bmatrix}$. Arătaţi că g nu este o aplicaţie liniară.

Soluţie. În spaţiul vectorial $(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})/\mathbb{R}, +, \cdot)$, $\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ şi $\begin{bmatrix} 1 & c \\ d & 1 \end{bmatrix}$ sunt vectori, iar în expresia analitică a lui g apare înmulţirea a doi vectori $\Rightarrow g$ nu este o aplicaţie liniară. Demonstrăm aceasta folosind definiţia aplicaţiei liniare, adică trebuie să găsim cel puţin un caz în care nu este verificată AL1) sau AL2):

Fie $\bar{v} = (1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$ şi $-1 \in \mathbb{R}$. Calculăm

$$\begin{aligned}
\underline{g(-\bar{v})} =& g(-1,-1,-1,-1) \\
=& \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\underline{-g(\bar{v})} =& -g(1,1,1,1) \\
=& \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow g(-\bar{v}) \neq -g(\bar{v})$ de unde rezultă că g nu este o aplicaţie liniară.

3.1 Nucleul şi imaginea unei aplicaţii liniare

Fie $f \in L(V, W)$.

Definiţia 3.2.

- *Se numeşte* **nucleul** *aplicaţiei liniare f mulţimea*

$$Ker(f) =^{def} \{\bar{v} \in V | f(\bar{v}) = \bar{0}_W\}.$$

- *Se numeşte* **imaginea** *aplicaţiei liniare f mulţimea*

$$Im(f) =^{def} \{\bar{w} \in W | (\exists)\bar{v} \in V \ a.\hat{i}. \ f(\bar{v}) = \bar{w}\}.$$

Propoziţia 3.3. *Fie $S_V = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p\} \in V$ şi*
$f(S_V) = \{f(\bar{u}_1), \ldots, f(\bar{u}_p)\} \in W$.
Dacă $f(S_V)$ este liniar independent $\Rightarrow$ S_V este linar independent.

Teorema 3.2 (de caracterizare a nucleului şi a imaginii unei aplicaţii liniare)**.**
Fie $B_V = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\} \in V$ o bază în V. Atunci au loc:

1) $Ker(f) \subset_{SSV} V$

2) $Im(f) \subset_{SSV} W$

3) $Im(f) = L\left(f(B_V)\right) = L\left(\{f(\bar{v}_1), \ldots, f(\bar{v}_n)\}\right)$

4) *f este injectivă d.n.d* $Ker(f) = \{\bar{0}_V\}$

d.n.d. $\dim Ker(f) = 0$

5) *f este surjectivă d.n.d* $Im(f) = W$

d.n.d. $dim\ Im(f) = dim\ W$

6) $dim\ Ker(f) + dim\ Im(f) = dim\ V$

Demonstraţie. **3)** B_V-bază în $V \Rightarrow (\exists)\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ a.î. $(\forall)\bar{v} \in V$ avem:

$$\bar{v} = \alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{v}_n.$$

Dar f este o aplicaţie liniară $\Rightarrow^{\text{Propoziţia (3.1)}}$

$$f(\bar{v}) = \alpha_1 f(\bar{v}_1) + \alpha_2 f(\bar{v}_2) + \ldots + \alpha_n f(\bar{v}_n). \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow Im(f) &= \{\bar{w} \in W | (\exists)\bar{v} \in V \text{ a.î. } f(\bar{v}) = \bar{w}\} \\ &=^{(3.1)} \{\alpha_1 f(\bar{v}_1) + \alpha_2 f(\bar{v}_2) + \ldots + \alpha_n f(\bar{v}_n),\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K\}.\end{aligned}$$

□

Observaţia 3.2. Din relaţia $Im(f) = L(\{f(\bar{v}_1), \ldots, f(\bar{v}_n)\}) \Rightarrow^{\text{Propoziţia 2.8-1)}}$ sistemul de vectori $f(B_V) = \{f(\bar{v}_1), \ldots, f(\bar{v}_n)\}$ este sistem de generatori pentru $Im(f)$. O bază pentru $Im(f)$ se poate obţine din vectorii corespunzători coloanelor unui minor principal ai matricei asociate sistemului $f(B_V)$.

Definiţia 3.3.

- *$dim\ Ker(f)$ se numeşte* **defectul** *lui f şi se notază def(f).*
- *$dim\ Im(f)$ se numeşte* **rangul** *lui f şi se notază rang(f).*

Definiţia 3.4. *O aplicaţie liniară $f \in L(V, W)$ bijectivă se numeşte* **izomorfism**.

Propoziţia 3.4. *Dacă $f \in L(V, W)$ este izomorfism, atunci*

$$dim\ V = dim\ W.$$

Exemplul 3.3. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[X]$,

$$f(a, b, c) = (2a + b)X + c.$$

a) Să se găsească nucleul lui f şi o bază a sa.

b) Să se găsească imaginea lui f şi o bază a sa.

c) Este f injectivă, surjectivă sau izomorfism? Justificaţi răspunsul.

Soluţie. a)

$$Ker(f) = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^3 | f(\bar{v}) = 0\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | (2a + b)X + c = 0\}.$$

Un polinom este egal cu polinomul nul când coeficienţii puterilor lui X sunt toţi nuli:

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{rang} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & |1 & 0 \\ 0 & |\underline{0} & \underline{1} \end{bmatrix} \end{array} = 2 \Rightarrow$$

b, c necunoscute principale,

a necunoscută secundară.

Rezlvând sistemul în necunoscutele principale obţinem:

$$\begin{cases} b = -2a \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Ker(f) = \{(a, -2a, 0), a \in \mathbb{R}\} = \{a(1, -2, 0), a \in \mathbb{R}\} = L(B_1),$$

unde $B_1 = \{(1, -2, 0)\} \Rightarrow \dim Ker(f) = 1 \neq 0 \Rightarrow f$ <u>nu</u> este injectivă.

b) Pentru a afla imaginea lui f folosim Teorema 3.2, 3):

$$\begin{aligned} Im(f) =& L\left(\{f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), f(\bar{e}_3)\}\right) \ (\bar{e}_i \text{ fiind vectorii bazei canonice din } \mathbb{R}^3) \\ =& L\left(\{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\}\right) \\ =& L\left(\{2X, X, 1\}\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow B = \{2X, X, 1\}$ este sistem de generatori pentru $Im(f)$. Pentru a găsi o bază a lui $Im(f)$ este suficient să găsim un sistem liniar independent maximal în B. Matricea asociată lui B este:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 2X & X & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 2 & |1 & 0 \\ 0 & |\underline{0} & \underline{1} \end{bmatrix}. \end{array}$$

Rang $A = 2 \Rightarrow B_2 = \{X, 1\}$ sistem liniar independent maximal $\Rightarrow B_2$ este o bază a lui $Im(f) \Rightarrow \dim Im(f) = 2 = \dim \mathbb{R}_1[X] \Rightarrow^{\text{Teorema 3.2}-5)} f$ este surjectivă.

c) f nu este izomorfism pentru că nu este bijecţie (sau $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \neq 2 = \dim \mathbb{R}_1[X]$).

def$(f) = 1$; rang$(f) = 2$.

$\square$

3.2 Matricea unei aplicaţii liniare

Fie $f \in L(V,W)$,

$B_V = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\} \in V$ o bază în V,

$B_W = \{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_m\} \in W$ o bază în W.

Vectorii $f(\bar{v}_i) \in W,\ i = \overline{1,n}$ au scierea în baza B_W:

$$f(\bar{v}_i) = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im})_{B_W},\ i = \overline{1,n}.$$

Definiţia 3.5. *Matricea obţinută punând coordonatele vectorilor $[f(\bar{v}_i)]_{B_W}$ pe coloană:*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} [f(\bar{v}_1)]_{B_W} & [f(\bar{v}_2)]_{B_W} & \ldots & [f(\bar{v}_n)]_{B_W} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ [f]_{B_V B_W} =^{def} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}. \end{array}$$

se numeşte **matricea lui** f *în perechea de baze $B_V B_W$.*

Observaţia 3.3. Aplicaţia liniară f este unic determinată de matricea sa într-o pereche de baze.

În probleme vom parcurge următorii paşi pentru a determina matricea unei aplicaţii liniare într-o pereche de baze $B_V B_W$:

1) Calculăm f de vectorii bazei B_V

2) Îi trecem în baza B_W

3) Punem vectorii obţinuţi la **2)** pe coloană în matricea $[f]_{B_V B_W}$.

Dacă $V = W$ şi $B_V = B_W = B$, atunci notăm $[f]_{BB} =^{not} [f]_B$.

Dacă B_{c_V} este baza canonică din V şi B_{c_W} este baza canonică din W, atunci notăm $[f]_{B_{c_V} B_{c_W}} =^{not} [f]$.

Teorema 3.3. *Are loc relaţia:*

$$[f(\bar{v})]_{B_W} = [f]_{B_V B_W} [\bar{v}]_{B_V}. \tag{3.2}$$

Această relaţie ne permite să mai definim pe langă **forma analitică** a unei aplicaţii liniare cu care suntem obişnuiţi şi o altă formă şi anume:

Definiţia 3.6. *Relaţia* (3.2) *se numeşte* **forma matriceală** *a lui f în bazele B_V, B_W.*

Exemplul 3.4. Fie aplicaţia liniară $f : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}^3,\ f(aX + b) = (a, b, a + b)$ (forma analitică alui f), $B = \{\bar{p}_1 = X + 1,\ \bar{p}_2 = X - 2\}$ o bază în $\mathbb{R}_1[X]$ şi
$B_1 = \{\bar{v}_1 = (1, 1, 0),\ \bar{v}_2 = (0, 0, 1),\ \bar{v}_2 = (2, -1, 0)\}$ o bază în $\mathbb{R}^3$.

a) Să se scrie matricea lui f în perechea de baze canonice.

b) Să se scrie matricea lui f în perechea de baze BB_1.

c) Să se găsească $Ker(f)$.

d) Să se găsească $Im(f)$.

e) Stabiliţi dacă f este izomorfism.

Soluţie. **a)** Calculăm $f(\bar{e}_i)$, unde $\bar{e}_i$ sunt vectorii bazei canonice din $\mathbb{R}_1[X]$:
$f(X) = f(1 \cdot X + 0 \cdot 1) =^{a=1, b=0} (1, 0, 1) = (1, 0, 1)_{B_c}$

$f(1) = f(0 \cdot X + 1 \cdot 1) =^{a=0,b=1} (0,1,1) = (0,1,1)_{B_c}$

$$\begin{array}{cc} [f(X)]_{B_c} & [f(1)]_{B_c} \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$[f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b)

1) Calculăm $f(\bar{p}_i)$, unde $\bar{p}_i$ sunt vectorii bazei $B \subset \mathbb{R}_1[X]$:

$f(X+1) = f(1 \cdot X + 1 \cdot 1) =^{a=1,b=1} (1,1,2)$

$f(X-2) = f(1 \cdot X - 2 \cdot 1) =^{a=1,b=-2} (1,-2,-1)$

2) Trecem acum cei doi vectori obţinuţi din baza canonică în baza B_1:

$f(X+1) = (1,1,2) = (1,1,2)_{Bc} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{B_1}$

Pentru a trece vectorul $f(X+1)$ din baza canonică din $\mathbb{R}^3$ în baza $B_1 \subset \mathbb{R}^3$ folosim formula de schimbare de bază:

$$[f(X+1)]_{B_c} = A_1 [f(X+1)]_{B_1}. \tag{3.3}$$

unde $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ este matricea asociată bazei B_1.

Atunci relaţia (3.3) este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \quad +2\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 \quad -\alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 \quad = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow [f(X+1)]_{B_1} = (1,2,0)_{B_1}$.

Trecem acum al doilea vector, $f(X-2)$, din baza canonică în baza B_1:

$f(X-2) = (1,-2,-1) = (1,-2,-1)_{Bc} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{B_1}$

3) Pentru a trece vectorul $f(X-2)$ din baza canonică din $\mathbb{R}^3$ în baza $B_1 \subset \mathbb{R}^3$ folosim ca şi mai sus formula de schimbare de bază:

$$[f(X-2)]_{B_c} = A_1[f(X-2)]_{B_1}. \tag{3.4}$$

Atunci relaţia (3.4) este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 \qquad +2\beta_3 = 1 \\ \beta_1 \qquad -\beta_3 = -2 \\ \qquad \beta_2 \qquad = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = -1 \\ \beta_2 = -1 \\ \beta_3 = 1. \end{cases}$$

$\Rightarrow [f(X-2)]_{B_1} = (-1, -1, 1)_{B_1}$.

Putem scrie acum matricea lui f în perechea de baze BB_1, $[f]_{BB_1}$:

$$\begin{array}{cc} [f(X+1)]_{B_1} & [f(X-2)]_{B_1} \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$[f]_{BB_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c)

$$\begin{aligned} Ker(f) =& \{aX + b \in \mathbb{R}_1[X] | f(aX+b) = (0,0,0)\} \\ =& \{aX + b \in \mathbb{R}_1[X] | (a, b, a+b) = (0,0,0)\} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a \qquad = 0 \\ \qquad b = 0 \\ a + \quad b = 0 \end{cases}, \quad \text{rang} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = 2 \quad \Rightarrow a, b \text{ necunoscute principale} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$Ker(f) = \{\bar{0}\} \Rightarrow \text{def}(f) = 0 \Rightarrow f$ este injectivă.

d) $Im(f) = L(\{f(X), f(1)\}) = L(\{(1,0,1), (0,1,1)\})$.

$$\text{rang} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(X) & f(1) \end{array} \\ \begin{bmatrix} |1 & 0 \\ |\underline{0} & \underline{1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = 2 \quad \Rightarrow \text{rang } (f) = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow f \text{ nu este surjectivă.}$$

e) f nu este surjectivă $\Rightarrow f$ nu este bijectivă $\Rightarrow f$ nu este izomorfism.

3.3 Vectori şi valori proprii ai unui operator liniar

Fie $(V/K, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial cu $\dim V = n$,

$S \subset_{SSV} V$ un subspaţiu vectorial al lui V,

notăm $L(V, V) =^{not} L(V)$ şi

fie $f \in L(V)$.

Definiţia 3.7. *O aplicaţie liniară $f \in L(V)$ se numeşte* **operator liniar**.

Propoziţia 3.5. *Fie $g \in L(V, W)$ o aplicaţie liniară. Dacă $S \subset_{SSV} V \Rightarrow g(S) \subset_{SSV} W$.*

Demonstraţie. Fie $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in g(S) \Leftrightarrow (\exists)\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in S$ a.î. $g(\bar{v}_1) = \bar{w}_1$, $g(\bar{v}_1) = \bar{w}_2 \Rightarrow (\forall)\alpha, \beta \in K$,

$$\alpha\bar{w}_1 + \beta\bar{w}_2 = \alpha g(\bar{v}_1) + \beta g(\bar{v}_2) =^{\text{Propoziţia 3.1}} g(\underbrace{\alpha\bar{v}_1 + \beta\bar{v}_2}_{\in S}) \in g(S).$$

$\Rightarrow^{\text{Propoziţia 2.7–3)}} g(S) \subset_{SSV} W$.

Definiţia 3.8. *În general, $f(S)$ este o submulţime a lui V. Dacă $f(S) \subset_{SSV} V$, atunci S se numeşte* **subspaţiu invariant** *al lui f.*

Exemplul 3.5. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operator liniar definit de matricea sa în baza canonică:

$$[f]_{B_c} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Să se arate că subspaţiul generat de vectorul $\bar{v} = (-1, 0, 2)$, $L(\{\bar{v}\})$ este un subspaţiu invariant al lui $\mathbb{R}^3$.

Soluţie. Fie $S = L(\{\bar{v}\}) = \{\alpha \cdot \bar{v} | \alpha \in \mathbb{R}\}$.

$$[f(\bar{v})]_{B_c} =^{(3.2)} [f]_{B_c}[\bar{v}]_{B_c} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow f(\bar{v}) = (-3, 0, 6) = 3(-1, 0, 2) = 3\bar{v}$.

Calculăm

$$\begin{aligned} f(S) &= \{f(\alpha \cdot \bar{v}) | \alpha \in \mathbb{R}\} =^{AL2)} \{\alpha f(\bar{v}) | \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\underbrace{3\alpha}_{\lambda} \bar{v} | \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\lambda \cdot \bar{v} | \lambda \in \mathbb{R}\} = L(\{\bar{v}\}) \\ &= S, \end{aligned}$$

Din Definiţia 3.8 $\Rightarrow S$ este un subspaţiu invariant al lui $\mathbb{R}^3$. □

Din exemplul anterior rezultă că pentru operatorul liniar f dat există un vector $\bar{v}$ şi un scalar λ pentru care $f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$. De vectorii şi scalarii de acestă formă ne vom ocupa în cele ce urmează:

Definiţia 3.9.

a) *Vectorul $\bar{v}$ se numeşte* **vector propriu** *al lui f dacă $(\exists)\lambda \in K$ a.î.*

$$f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \tag{3.5}$$

b) *Scalarul λ din relaţia (3.5) se numeşte* **valoare proprie** *a lui f.*

3.3.1 Determinarea vectorilor şi valorilor proprii ai unui operator liniar

Cum un operator liniar este unic determinat de matricea sa într-o bază a lui V, aşa cum am arătat în Observaţia 3.3, este acelaşi lucru când ne referim la vectorii şi valorile proprii ai unui operator liniar sau ai unei matrice.

Pentru determinarea vectorilor şi valorilor proprii ai unui operator liniar vom urma următoarele etape (evidenţiate cu roşu):

Din relaţiile

$$f(\bar{v}) =^{(3.5)} \lambda\bar{v} \text{ şi } [f(\bar{v})]_{B_V} =^{(3.2)} [f]_{B_V}[\bar{v}]_{B_V}, \tag{3.6}$$

unde B_V este o bază în V, rezultă ecuaţia $\lambda[\bar{v}]_{B_V} = [f]_{B_V}[\bar{v}]_{B_V} \Leftrightarrow$

$$([f]_{B_V} - \lambda I_n)[\bar{v}]_{B_V} = 0. \tag{3.7}$$

(3.7) este un sistem omogen cu matricea sistemului

$$\boxed{[f]_{B_V} - \lambda I_n.}$$

Pentru a avea şi soluţii nenule sistemul (3.7) trebuie să fie compatibil nedeterminat $\Leftrightarrow$ $\det([f]_{B_V} - \lambda I_n) = 0$.

Definiţia 3.10.

- *Funcţia polinomială de gradul n în necunoscuta λ*

$$\boxed{p_n(\lambda) = \det([f]_{B_V} - \lambda I_n)}$$

se numeşte **polinomul caracteristic** *al operatorului f, respectiv al matricei $[f]_{B_V}$.*

- $$p_n(\lambda) = 0$$

  se numeşte **ecuaţia caracteristică** *a operatorului f, respectiv a matricei $[f]_{B_V}$.*

Cum rădăcinile polinomului caracteristic $p_n(\lambda)$ verifică relaţia (3.6) rezulă din Definiţia 3.9 ca ele sunt valori proprii ale operatorului f, respectiv ale matricei $[f]_{B_V}$.

Definiţia 3.11. *Mulţimea valorilor proprii ale lui f*

$$\boxed{Sp(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}}$$

se numeşte **spectrul** *operatorului f.*

Dacă fixăm o valoare proprie a lui f, $\lambda_i \in Sp(f)$, atunci sistemul

$$([f]_{B_V} - \lambda_i I_n)[\bar{v}]_{B_V} = 0_n \tag{3.8}$$

este compatibil nedeterminat pentru că λ_i este o soluţie a ecuaţiei

$$[f]_{B_V} - \lambda I_n = 0_n$$

$\Rightarrow$ soluţia sa nu se reduce la soluţia nulă.

Soluţiile sistemului omogen (3.8) verifică (3.6) $\Rightarrow$ soluţiile sistemului (3.8) vor fi vectori proprii ai operatorului f, respectiv ale matricei $[f]_{B_V}$.

Propoziţia 3.6. *Valorile proprii ale lui f nu depind de baza B_V aleasă.*

Demonstraţie. Fie B'_V altă bază în V $\Rightarrow$

$$[f]_{B'_V} = T^{-1}_{B_V B'_V}[f]_{B_V} T_{B_V B'_V}.$$

Atunci

$$\begin{aligned}\underline{\det\left([f]_{B'_V} - \lambda I_n\right)} &= \det\left(T^{-1}_{B_V B'_V}[f]_{B_V} T_{B_V B'_V} - \lambda T^{-1}_{B_V B'_V} I_n T_{B_V B'_V}\right)\\ &= \det\left(T^{-1}_{B_V B'_V}([f]_{B_V} - \lambda I_n) T_{B_V B'_V}\right)\\ &= \det T^{-1}_{B_V B'_V} \cdot p_n(\lambda) \cdot \det T_{B_V B'_V}\\ &= \det I_n \cdot p_n(\lambda)\\ &= \underline{p_n(\lambda)}.\end{aligned}$$

□

Propoziţia 3.7. *Mulţimea vectorilor proprii corespunzători aceleiaşi valori proprii* λ_i

$$\begin{aligned}\boxed{S_{\lambda=\lambda_i}} &= \{\bar{v} \in V | f(\bar{v}) = \lambda_i \bar{v}\}\\ &\boxed{= \{\bar{v} \in V | ([f]_{B_V} - \lambda_i I_n)[\bar{v}]_{B_V} = 0_n\}}\end{aligned} \tag{3.9}$$

este un subspaţiu vectorial al lui V.

Demonstraţie. $(\forall)\alpha, \beta \in K$ şi $(\forall)\bar{u}, \bar{v} \in S_{\lambda=\lambda_i} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}f(\alpha\bar{u} + \beta\bar{v}) &=^{\mathbf{AL3)}} \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v})\\ &=^{(3.9)} \alpha\lambda_i\bar{u} + \beta\lambda_i\bar{v}\\ &= \lambda_i(\alpha\bar{u} + \beta\bar{v})\end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha\bar{u} + \beta\bar{v} \in S_{\lambda=\lambda_i} \Rightarrow^{\text{Propoziţia 2.7-3)}} S_{\lambda=\lambda_i} \subset_{SSV} V.$ □

Definiţia 3.12. *Subspaţiul* $S_{\lambda=\lambda_i}$ *se numesşte* **subspaţiul propriu** *corespunzător valorii proprii* λ_i.

Definiţia 3.13. *Două matrici A şi A' se numesc* **similare** *dacă există o matrice T nesingulară a.î.*

$$A = T \cdot A' \cdot T^{-1}.$$

Vom folosi proprietăţile vectorilor proprii pentru a stabili când o matrice este similară cu o matrice diagonală

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$$

cu a_i nu toţi nuli.

Atenţie:

În general polinomul caracteristic nu are toate rădăcinile distincte. Notăm cu m_i ordinul de multiplicitate al rădăcinii λ_i (numărul de rădăcini egale cu λ_i). Dacă $p_n(\lambda)$ are k rădăcini distincte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, atunci se poate scrie:

$$p_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k}.$$

Teorema 3.4 (de diagonalizare)**.** *În V există o bază formată din vectorii proprii ai lui f (respectiv $[f]_{B_V}$) d.n.d.*

1) *$p_n(\lambda)$ are toate rădăcinile în corpul de scalari K, adică*

$$Sp(f) \subset K.$$

2) *Dacă m_i este ordinul de multiplicitate al rădăcinii λ_i în $p_n(\lambda)$, atunci*

$$\dim S_{\lambda=\lambda_i} = m_i \ , i = \overline{1,k}.$$

Definiţia 3.14. *Un operator (respectiv o matrice pătratică) cate verifică condiţiile* **1)** *şi* **2)** *din Teorema de diagonalizare 3.4 se numeşte* **operator diagonalizabil** *(respectiv* **matrice diagonalizabilă***).*

Observaţia 3.4. Baza a cărei existenţă este dată de Teorema de diagonalizare 3.4 este

$$\boxed{B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k,}$$

unde B_i sunt baze ale subspaţiilor proprii $S_{\lambda=\lambda_i}$.

Propoziţia 3.8. *Dacă f este diagonalizabil, atunci matricea sa în baza $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$ are forma diadonală, şi anume, valorile proprii apar în ordine λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ pe diagonala principală, fiecare de atâtea ori de câte ori arată ordinul său de multiplicitate m_i:*

$$[f]_B = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \ \ddots \ \lambda_1}_{m_1 - \text{ori}} & & & \\ & \underbrace{\lambda_2 \ \ddots \ \lambda_2}_{m_2 - \text{ori}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underbrace{\lambda_k \ \ddots \ \lambda_k}_{m_k - \text{ori}} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{[f]_B = \operatorname{diag}\,(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1 - \text{ori}}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{m_2 - \text{ori}}, \ldots, \underbrace{\lambda_k, \ldots, \lambda_k}_{m_k - \text{ori}}).}$$

Propoziţia 3.9.

1) *Dacă D este o matrice diagonală,* $D = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$, *atunci*

$$D^n = \begin{bmatrix} a_1^n & & & \\ & a_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^n \end{bmatrix}.$$

2) *Dacă două matrici A şi A' sunt similare, atunci*

$$A^n = T A'^n T^{-1}.$$

Demonstraţie. 1) Rezultă din calcul direct.

2) A este similară cu $A' \Rightarrow^{\text{Definiţia3.13}} (\exists)T$ nesingulară a.î. $A = T \cdot A' \cdot T^{-1} \Rightarrow$

$$A^n = \underbrace{(TA'\overbrace{T^{-1})(T}^{I_n}A'T^{-1})\dots(TA'T^{-1})}_{n-\text{ori}} = TA'^nT^{-1}).$$

□

Exemplul 3.6. Să se arate că operatorii liniari

a) $f_1\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. $f_1(x,y) = (x-y, 2x-y)$

b) $f_2 : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_1[X]$, $f_2(aX+b) = aX + 3a + b$

nu sunt diagonalizabili.

Soluţie. Urmăm paşii descrişi mai sus:

a) $[f_1]_{B_c} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$p_2(\lambda) = \det\left([f_1] - \lambda I_2\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

care nu are rădăcini reale $\Rightarrow^{\text{Teorema 3.4-1)}} f_1$ nu este diagonalizabil.

b) $[f_2]_{B_c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Calculăm polinomul caracteristic:

$$p_2(\lambda) = \det\left([f_2] - \lambda I_2\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

$\Rightarrow \lambda = 1$ este valoare proprie cu ordinul de multiplicitate om $(\lambda = 1) = 2$.

Calculăm subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 1$,

$$S_{\lambda=1} = \left\{ aX + b \in \mathbb{R}_1[X] \middle| \left([f_2] - 1I_3\right)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ aX + b \in \mathbb{R}_1[X] \middle| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Rezolvăm sistemul $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ |\underline{\bar{3}}| & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

a necunoscută principală,

b necunoscută secundară

$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} S_{\lambda=1} &= \{0 \cdot X + b, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{b, b \in \mathbb{R}\} \\ &= L(B), \end{aligned}$$

unde $B = \{1\}$.

$\Rightarrow^{\text{Propoziţia } (2.8)-1)}$ B este sistem de generatori pentru $S_{\lambda=1}$. (3)

B este format dintr-un singur vector nenul $\Rightarrow^{\text{Exemplul } (2.3)}$ B este sistem liniar independent. (4)

Din relaţiile (3) şi (4) $\Rightarrow$ $B = \{1\}$ este o bază pentru $S_{\lambda=1}$

$\Rightarrow$ $\dim S_{\lambda=1} = 1 \neq 2 = \mathrm{om}(\lambda = 1) \Rightarrow^{\text{Teorema 3.4-2)}}$ f_2 nu este diagonalizabil.

□

Următoarea teorema ne dă o altă metodă pentru a afla inversa unei matrice:

Teorema 3.5 (lui Hamilton-Cayley)**.** *Dacă $p_n(\lambda)$ este polinomul caracteristic al matricei pătratice A (respectiv al operatorului f), atunci*

$$p_n(A) = 0_n.$$

Exemplul 3.7. Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Să se studieze dacă A este diagonalizabilă şi în caz afirmativ să se aducă A la forma diagonală.

b) Folosind Teorema lui Hamilton-Cayley 3.5 să se calculeze A^{-1}.

Soluţie. Urmăm la fel ca în exerciţiul anterior paşii descrişi mai sus:

a) Calculăm polinomul caracteristic:

$$p_3(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)^1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A)=\{-1,2\}\subset \mathbb{R},} \tag{3.10}$$

$\mathrm{om}(\lambda = -1) = 2$,

$\mathrm{om}(\lambda = 2) = 1$.

Calculăm subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = -1$,

$$S_{\lambda=-1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, (A - (-1)I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Rezolvăm sistemul

$$\begin{bmatrix} \underline{1}| & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

x necunoscută principală,

y, z necunoscute secundare

$\Rightarrow x = -y - z \Rightarrow$

$$\begin{aligned} S_{\lambda=-1} =& \{(-y-z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} \\ =& \{(-y, y, 0) + (-z, 0, z), y, z \in \mathbb{R}\} \\ =& \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1), y, z \in \mathbb{R}\} \\ =& L(B_1), \end{aligned}$$

unde $B_1 = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

$\Rightarrow^{\text{Propoziţia (2.8)}-1)}$ B_1 este <u>sistem de generatori</u> pentru $S_{\lambda=-1}$. (1)

Rang $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 =$ nr de vectori din $B_1 \Rightarrow^{\text{Crireriul practic (2.1)}}$ B_1 este <u>sistem liniar independent</u> (2)

Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow$ $\boxed{B_1 = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}}$ este o bază a lui $S_{\lambda=-1} \Rightarrow$

$$\boxed{\dim S_{\lambda=-1} = 2 = \text{om}(\lambda = -1).} \tag{3.11}$$

Calculăm subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 2$,

$$\begin{aligned} S_{\lambda=2} &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, (A - 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Rezolvăm sistemul

$$\begin{bmatrix} -2 & 1| & 1 \\ \underline{1} & \underline{-2}| & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

x, y necunoscute principale,

z necunoscută secundară

$$\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} S_{\lambda=2} =& \{(z,z,z), z \in \mathbb{R}\} \\ =& \{z(1,1,1), y, z \in \mathbb{R}\} \\ =& L(B_2), \end{aligned}$$

unde $B_2 = \{(1,1,1)\}$.

$\Rightarrow^{\text{Propoziţia (2.8)}-1)}$ B_2 este sistem de generatori pentru $S_{\lambda=2}$. (3)

B_2 este format dintr-un singur vector nenul $\Rightarrow^{\text{Exemplul (2.3)}}$ B_2 este sistem liniar independent. (4)

Din relaţiile (3) şi (4) $\Rightarrow$ $\boxed{B_2 = \{(1,1,1)\}}$ este o bază a lui $S_{\lambda=2} \Rightarrow$

$$\boxed{\dim S_{\lambda=2} = 1 = \text{om}(\lambda = 2).} \tag{3.12}$$

Din relaţiile (3.10),(3.11) şi (3.12) $\Rightarrow^{\text{Teorema 3.4}}$ A este diagonalizabilă. Forma diagonală a lui A este:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

în baza

$$\boxed{B = B_1 \cup B_2 = \{\underbrace{(-1,1,0),(-1,0,1)}_{B_1}, \underbrace{(1,1,1)}_{B_2}\}.}$$

b) Aşa cum am văzut la punctul **a)**, polinomul caracteristic al lui A este

$$p_3(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 \Rightarrow^{\text{Teorema 3.5}} p_3(A) = 0_3 \Leftrightarrow$$

$$-A^3 + 3A + 2I_3 = 0_3 \Leftrightarrow$$

$$I_3 = \frac{1}{2}(A^3 - 3A)|A^{-1} \Leftrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
A^{-1} =& \frac{1}{2}(A^2 - 3I_3) \\
=& \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 3I_3\right) \\
=& \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) \\
=& \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

3.4 Întrebări de verificare

Aplicaţii liniare

1) Ce formă are o funcţie $f : V \to W$ care este o aplicaţie liniară?

2)* Coloanele matricei lui f în perechea de baze $B_1 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ $B_2 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$, $[f]_{B_1 B_2}$ sunt coordonatele vectorilor $f(....)$ scrişi în baza ...

3) Cum se determină $\mathrm{Ker}(f)$ şi o bază a sa?

4) Cum se determină $\mathrm{Im}(f) = L(\ \ldots\ )$ şi o bază a sa?

7) Când este f injectivă? Când este f surjectivă? Când este f izomorfism?

Valori şi vectori proprii

1) Când un operator liniar (o matrice pătratică) este diagonalizabil (diagonalizabilă)? (teorema de diagonalizare)

2) Cum se calculează polinomul caracteristic?

3) Cine sunt rădăcinile polinomului caracteristic?

4) Pentru o valoare proprie fixată $\lambda = \lambda_0$ cum se calculează vectorii subspaţiului propriu $S_{\lambda=\lambda_0}$?

5) Ce fel de vectori conţine subspaţiul propriu $S_{\lambda=\lambda_0}$ şi implicit o bază a sa?

6) Dacă operatorul liniar (matricea pătratică) este diagonalizabil (diagonalizabilă), care este forma diagonală?

7) În ce bază se scrie forma diagonală (în caz că ea există)?

8) Cum se calculează A^{-1}, $A \in \mathcal{M}_n$ cu teorema lui Hamilton-Cayley?

CAPITOLUL 4

FORME BILINIARE. FORME PĂTRATICE

4.1 Forme biliniare

Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial cu $\dim V = n$,

$B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ bază în V,

o funcţie $\varphi : V \times V \to K$ şi

matricea pătratică $[a_{ij} = \varphi(\bar{v}_i, \bar{v}_j)]_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$

Definiţia 4.1. *φ se numeşte* **formă biliniară** *pe V dacă*

FB1) ***a)*** $\varphi(\bar{u}_1 + \bar{u}_2, \bar{v}) = \varphi(\bar{u}_1, \bar{v}) + \varphi(\bar{u}_2, \bar{v}),\ (\forall)\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v} \in V$

b) $\varphi(\bar{u}, \bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \varphi(\bar{u}, \bar{v}_1) + \varphi(\bar{u}, \bar{v}_2),\ (\forall)\bar{u}, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$

FB2) ***a)*** $\varphi(\alpha\bar{u}, \bar{v}) = \alpha\varphi(\bar{u}, \bar{v}),\ (\forall)\bar{u}, \bar{v} \in V, (\forall)\alpha \in K$

b) $\varphi(\bar{u}, \alpha\bar{v}) = \alpha\varphi(\bar{u}, \bar{v}),\ (\forall)\bar{u}, \bar{v} \in V, (\forall)\alpha \in K$

Propoziţia 4.1. *φ este o formă biliniară d.n.d.*

FB3) ***a)*** $\varphi(\alpha\bar{u}_1 + \beta\bar{u}_2, \bar{v}) = \alpha\varphi(\bar{u}_1, \bar{v}) + \beta\varphi(\bar{u}_2, \bar{v}),$

$(\forall)\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v} \in V, (\forall)\alpha, \beta \in K$

b) $\varphi(\bar{u}, \alpha\bar{v}_1 + \beta\bar{v}_2) = \alpha\varphi(\bar{u}, \bar{v}_1) + \beta\varphi(\bar{u}, \bar{v}_2)$,

$(\forall)\bar{u}, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V, (\forall)\alpha, \beta \in K$

Demonstraţie. Analog ca la aplicaţii liniare.

□

Definiţia 4.2.

- *Matricea notată*

$$[\varphi]_B =^{def} [\varphi(\bar{v}_i, \bar{v}_j)]_{i,j=\overline{1,n}}$$

se numeşte **matricea** *lui φ în baza B.*

- *$\varphi(\bar{v}_i, \bar{v}_j)$ se numesc* **coeficienţii** *lui φ în baza B.*

Teorema 4.1 (Legătura dintre forma analitică şi forma matriceală a unei forme biliniare)**.** *Orice formă biliniară φ este unic determinată de matricea sa într-o bază B şi are loc:*

$$\varphi(\bar{u}, \bar{v}) = [\bar{u}]_B^T [\varphi]_B [\bar{v}]_B \tag{4.1}$$

Observaţia 4.1.

- Din teorema (4.1) deducem în particular pentru $B = B_c$ că

$$\varphi(\bar{u}, \bar{v}) = [\bar{u}]_{B_c}^T [\varphi]_{B_c} [\bar{v}]_{B_c}. \tag{4.2}$$

Dacă scriem în baza canonică vectorii $\bar{u}$ şi $\bar{v}$:

$$\bar{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{B_c}$$

$$\bar{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)_{B_c},$$

iar matricea lui φ în baza canonică, fiind o matrice pătratică de ordinul n, o putem nota

$$[\varphi]_{B_c} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

atunci relaţia (4.2) devine

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{u}, \bar{v}) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \dots + a_{ij}x_iy_j + \dots + a_{nn}x_ny_n. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dacă ţinem cont de regulile de înmulţire a matricelor, observăm că avem o relaţie directă între $[\varphi]_{B_c}$ şi expresia analitică a lui φ şi anume dacă folosim notaţia ajutătoare:

$$[\varphi]_{B_c} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}.$$

- Din definiţia matricei unei forme biliniare într-o bază B (4.2) şi teorema (4.1) deducem că elementele matricei $[\varphi]_B$ sunt date de formula:

$$\boxed{a_{ij} = \varphi(\overline{v}_i, \overline{v}_j) = [\bar{v}_i]^T [\varphi]_{B_c} [\bar{v}_j]}. \tag{4.4}$$

Exemplul 4.1. Fie $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi\left[(x_1, x_2), (y_1, y_2)\right] = x_1 y_1 + 2x_2 y_1 - x_2 y_2.$$

a) Să se arate că φ este formă biliniară.

b) Să se găsească $[\varphi]_{B_c}$, unde B_c este baza canonică din $\mathbb{R}^2$.

c) Să se găsească $[\varphi]_B$, unde $B = \{\bar{v}_1 = (1, 2), \bar{v}_2 = (3, 4)\}$.

d) Să se scrie expresia analitică a formei biliniare $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cu matricea lui φ_1 în baza canonică $[\varphi_1]_{B_c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Soluţie. a) Fie $\bar{u} = (u_1, u_2)$, $\bar{t} = (t_1, t_2)$, $\bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calculăm

•

$$\begin{aligned}
\underline{\varphi(\alpha\bar{u} + \beta\bar{t}, \bar{w})} &= \varphi[(\underbrace{\alpha u_1 + \beta t_1}_{x_1}, \underbrace{\alpha u_2 + \beta t_2}_{x_2}), (\underbrace{w_1}_{y_1}, \underbrace{w_2}_{y_2})] \\
&= (\underbrace{\alpha u_1 + \beta t_1}_{x_1}) \underbrace{w_1}_{y_1} + 2(\underbrace{\alpha u_2 + \beta t_2}_{x_2}) \underbrace{w_1}_{y_1} - (\underbrace{\alpha u_2 + \beta t_2}_{x_2}) \underbrace{w_2}_{y_2} \\
&= \alpha(u_1 w_1 + 2u_2 w_1 - u_2 w_2) + \beta(t_1 w_1 + 2t_2 w_1 - t_2 w_2) \\
&= \underline{\alpha\varphi(\bar{u}, \bar{w}) + \beta\varphi(\bar{t}, \bar{w})}.
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
\underline{\varphi(\bar{u}, \alpha\bar{t} + \beta\bar{w})} &= \varphi[(\underbrace{u_1}_{x_1}, \underbrace{u_2}_{x_2}), (\underbrace{\alpha t_1 + \beta w_1}_{y_1}, \underbrace{\alpha t_2 + \beta w_2}_{y_2})] \\
&= \underbrace{u_1}_{x_1} (\underbrace{\alpha t_1 + \beta w_1}_{y_1}) + 2 \underbrace{u_2}_{x_2} (\underbrace{\alpha t_1 + \beta w_1}_{y_1}) - \underbrace{u_2}_{x_2} (\underbrace{\alpha t_2 + \beta w_2}_{y_2}) \\
&= \alpha(u_1 t_1 + 2u_2 t_1 - u_2 t_2) + \beta(u_1 w_1 + 2u_2 w_1 - u_2 w_2) \\
&= \underline{\alpha\varphi(\bar{u}, \bar{t}) + \beta\varphi(\bar{u}, \bar{w})}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow^{\mathbf{FB3)}}$ φ este o formă biliniară.

b)

$$[\varphi]_{B_c} = \begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 2 & -1 \end{array}$$

c) Elementele a_{ij} ale matricei $[\varphi]_B$ sunt date de formula (4.4):

$$\boxed{a_{ij} = \varphi(\bar{v}_i, \bar{v}_j) = [\bar{v}_i]^T [\varphi]_{B_c} [\bar{v}_j]}.$$

Calculăm $\varphi(\bar{v}_i, \bar{v}_j)$:

$$a_{11} = \varphi(\bar{v}_1, \bar{v}_1) = \varphi[(\underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{2}_{x_2}), (\underbrace{1}_{y_1}, \underbrace{2}_{y_2})] = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1$$

$$\text{sau} = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1$$

$$a_{12} = \varphi(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \varphi[(\underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{2}_{x_2}), (\underbrace{3}_{y_1}, \underbrace{4}_{y_2})] = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 7$$

$$\text{sau} = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 7$$

$$a_{21} = \varphi(\bar{v}_2, \bar{v}_1) = \varphi[(\underbrace{3}_{x_1}, \underbrace{4}_{x_2}), (\underbrace{1}_{y_1}, \underbrace{2}_{y_2})] = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 3$$

$$\text{sau} = [3 \quad 4] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3$$

$$a_{22} = \varphi(\bar{v}_2, \bar{v}_2) = \varphi[(\underbrace{3}_{x_1}, \underbrace{4}_{x_2}), (\underbrace{3}_{y_1}, \underbrace{4}_{y_2})] = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot 4 = 17$$

$$\text{sau} = [3 \quad 4] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 17.$$

$$\Rightarrow [\varphi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 17 \end{bmatrix}.$$

d) Având dată matricea aplicaţiei biliniare φ_1 în baza canonică,

$$[\varphi_1]_{B_c} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \left[\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{array}\right] \end{array},$$

putem scrie direct forma analitică tinând cont de Observaţia 4.1:

$$\varphi_1[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = 1 \cdot x_1y_1 + 0 \cdot x_1y_2 + (-1) \cdot x_2y_1 + 1 \cdot x_2y_2.$$

Propoziţia 4.2 (Formula de schimbare a matricei unei forme biliniare la o schimbare de bază.). *Dacă B ş B' sunt baze în V, atunci*

$$[\varphi]_{B'} = T^t_{\overleftarrow{BB'}}[\varphi]_B T_{\overleftarrow{BB'}}.$$

Definiţia 4.3. *φ se numeşte* **simetrică** *dacă*

$$\varphi(\bar{u}, \bar{v}) = \varphi(\bar{v}, \bar{u}), \ (\forall)\bar{u}, \bar{v} \in V$$

Propoziţia 4.3. *Forma biliniară φ este simetrică dacă şi numai dacă matricea sa într-o bază B este o matrice simetrică, adică verifică oricare din condiţiile echivalente:*

- $[\varphi]_B = [\varphi]^t_B$
- $a_{ij} = a_{ji}, \ (\forall) \ i, j.$
- *Matricea este simetrică faţă de prima diagonală.*

Exemplul 4.2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ a.î. forma biliniară $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi\left[(x_1, x_2), (y_1, y_1)\right] = (a-1)x_1y_2 + (a^2-a)x_2y_1 + x_2y_2$ să fie simetică.

Soluţie.

$$[\varphi]_{B_c} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & a-1 \\ a^2-a & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Pentru ca φ să fie simetrică, trebuie ca $[\varphi]_{B_c}$ să fie o matrice simetrică $\Leftrightarrow [\varphi]_{B_c} = [\varphi]_{B_c}^t$,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 & a-1 \\ a^2-a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^2-a \\ a-1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow a^2 - a = a - 1 \\ &\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 1. \end{aligned}$$

4.2 Forme pătratice

Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial cu $\dim V = n$,

$B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ bază în V,

$\varphi : V \times V \to K$ o formă biliniară simetrică şi

$f : V \to K$.

Definiţia 4.4.

- *Aplicaţia f dată de relaţia*
$$f(\bar{v}) = \varphi(\bar{v}, \bar{v})$$
se numeşte **forma pătratică** *asociată formei biliniare φ.*

- *Reciproc, dată o formă pătratică f, forma biliniară simetrică φ pentru care*
$$\varphi(\bar{v}, \bar{v}) = f(\bar{v}), \ \ (\forall)\bar{v} \in V$$
se numeşte **polara** *formei pătratice f.*

Din definiţie ştim doar valorile polarei unei forme pătratice pentru perechile $(\bar{v}, \bar{v}) \in V \times V$. Valorile polarei pentru o pereche oarecare $(\bar{u}, \bar{v}) \in V \times V$ sunt date de propoziţia:

Propoziţia 4.4. *Polara φ a unei forme pătratice f este forma biliniară simetrică dată de formula:*

$$\varphi(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2}\left[f(\bar{u} + \bar{v}) - f(\bar{u}) - f(\bar{v})\right], \ (\forall)\bar{u}, \bar{v} \in V.$$

Demonstraţie. Calculăm

$$\begin{aligned} f(\bar{u} + \bar{v}) &= \varphi(\bar{u} + \bar{v}, \bar{u} + \bar{v}) \\ &\stackrel{\varphi \text{ biliniară}}{=} \varphi(\bar{u}, \bar{u}) + \varphi(\bar{u}, \bar{v}) + \varphi(\bar{v}, \bar{u}) + \varphi(\bar{v}, \bar{v}) \\ &\stackrel{\varphi \text{ simetrică}}{=} f(\bar{u}) + 2\varphi(\bar{u}, \bar{v}) + f(\bar{v}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi(\bar{u},\bar{v}) = \frac{1}{2}\left[f(\bar{u}+\bar{v}) - f(\bar{u}) - f(\bar{v})\right].$$

□

Observaţia 4.2. În exerciţii pentru a determina ploara unei forme pătratice vom folosi matricea formei pătratice pe care o definim astfel:

Definiţia 4.5. *Se numeşte* **matricea** *formei pătratice f în baza B, matricea polarei sale φ în baza B,*

$$[f]_B =^{def} [\varphi]_B.$$

La fel ca la forme biliniare, legătura dintre forma analitică şi forma matriceală a unei forme pătratice este dată de

Teorema 4.2 (Legătura dintre forma analitică şi forma matriceală a unei forme pătratice)**.** *Orice formă pătratică f este unic determinată de matricea sa într-o bază B şi are loc:*

$$f(\bar{v}) = [\bar{v}]_B^T [f]_B [\bar{v}]_B. \tag{4.5}$$

Observaţia 4.3.

- Matricea unei forme pătratice este o matrice <u>simetrică</u>.

  Vom folosi definiţia (4.5) pentru $B = B_c$ baza canonică din V pentru a face legătura între o formă biliniară şi polara ei astfel:

- $\varphi \to f$ Dacă se cunoaşte forma biliniară simetrică φ şi vrem sa găsim f - forma pătratică asociată aplicăm definiţia (4.5) pentru $B = B_c$:

φ este simetrică $\Rightarrow a_{ij} = a_{ji} \Rightarrow$

$$\varphi(\bar{v}, \bar{u}) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + \ldots + a_{ij}(x_iy_j + x_jy_i) + \ldots + a_{nn}x_ny_n \Rightarrow$$

$$[\varphi]_{B_c} = \begin{array}{c|cccc|} & y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ x_2 & a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{array} =^{\text{def}(4.5)} [f]_{B_c} \Rightarrow$$

$$f(\bar{v}) = a_{11}(x_1)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{ij}x_ix_j + \ldots + a_{nn}(x_n)^2,$$

unde $\bar{v}$ şi $\bar{u}$ au coordonatele în baza canonică
$\bar{v} = (x_1, \ldots, x_n)_{B_c}$, $\bar{u} = (y_1, \ldots, y_n)_{B_c}$.

- $f \rightarrow \varphi$ Dacă se cunoaşte expresia analitică lui f şi vrem să aflăm polara sa, adică forma biliniară din care provine, folosim faptul ca ele au aceiasi matrice în particular în baza canonică. Deoarece matricea lui f în baza canonică se este o matrice simetrică, ea scrie punând
  - coeficienţii pătratelor x_i^2 pe diagonala principală
  - (coeficientul lui $x_ix_j)/2$ şi pe poziţia ij şi pe poziţia ji în matrice dacă $i \neq j$:

$$f(\bar{v}) = \boxed{a_{11}}(x_1)^2 + \overbrace{a_{12}x_1x_2}^{\frac{a_{12}}{2}x_1x_2+\frac{a_{12}}{2}x_2x_1} + \ldots + \overbrace{a_{ij}x_ix_j}^{\frac{a_{ij}}{2}x_ix_j+\frac{a_{ji}}{2}x_jx_i} + \ldots + \boxed{a_{nn}}(x_n)^2 \Rightarrow$$

$$[f]_{B_c} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & \frac{a_{12}}{2} & \dots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & \boxed{a_{22}} & \dots & \frac{a_{2n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{2} & \frac{a_{2n}}{2} & \dots & \boxed{a_{nn}} \end{bmatrix} \end{array} \stackrel{\text{def(4.5)}}{=} [\varphi]_{B_c} \Rightarrow$$

$$\varphi(\bar{v}, \bar{u}) = \boxed{a_{11}} x_1 y_1 + \frac{a_{12}}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + \ldots + \frac{a_{ij}}{2}(x_i y_j + x_j y_i) + \ldots + \boxed{a_{nn}} x_n y_n,$$

unde $\bar{v}$ şi $\bar{u}$ au coordonatele în baza canonică
$\bar{v} = (x_1, \ldots, x_n)_{B_c}$, $\bar{u} = (y_1, \ldots, y_n)_{B_c}$.

Exemplul 4.3.

a) Se dă forma pătratică $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1 x_2 + 5x_2^2.$$

Să se scrie expresia analitică a polarei sale φ.

b) Se dă forma biliniară $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi\left[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right] = & 2x_1 y_1 + x_2 y_2 + 3x_1 y_2 + 3x_2 y_1 \\ & -4x_1 y_3 - 4x_3 y_1 - \sqrt{3} x_2 y_3 - \sqrt{3} x_3 y_2. \end{aligned}$$

Să se scrie forma pătratică asociată în caz că ea există.

Soluţie. a)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{array} \\ [f]_{B_c} = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \left[\begin{array}{rr} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{array}\right] = [\varphi]_{B_c} \Rightarrow \end{array}$$

$$\varphi\left[(x_1, x_2), (y_1, y_2)\right] = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

b)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ [\varphi]_{B_c} = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \left[\begin{array}{rrr} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -\sqrt{3} \\ -4 & -\sqrt{3} & 0 \end{array}\right] = [\varphi]_{B_c}^t \Rightarrow \end{array}$$

$[\varphi]_{B_c}$ este o matrice simetrică $\Rightarrow$ $(\exists)$ forma pătratică asociată şi $[f]_{B_c} = [\varphi]_{B_c} \Rightarrow$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 - 2\sqrt{3}x_2x_3.$$

4.2.1 Forma canonică a unei forme pătratice

Fie V un spaţiu vectorial cu $\dim V = n$,

$B = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ o bază a lui V şi

$f : V \to K$ o formă pătratică.

Definiţia 4.6. *Dacă f are forma*

$$f(\bar{v}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \tag{4.6}$$

în baza B, unde $\bar{v} = (x_1, \ldots, x_n)_B$, atunci (4.6) se numeşte **forma canonică** *a lui f în baza B.*

Observaţia 4.4. Dacă f are forma canonică în baza B, atunci matricea lui f în baza B este matricea diagonală

$$[f]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Propoziţia 4.5. *Orice matrice simetrică este diagonalizabilă.*

Propoziţia 4.6 (Legea inerţiei a lui Sylvester)**.** *Pentru o formă pătratică, numărul coeficienţilor nuli, pozitivi şi negativi ai formei canonice sunt constanţi, adică nu depind de baza în care este scrisă forma canonică.*

Definiţia 4.7. *Forma pătratică f se numeşte*

- **pozitiv definită** *dacă* $f(\bar{u}) > 0$, $(\forall)\bar{u} \in V \setminus \{\bar{0}\}$
- **semipozitiv definită** *dacă* $(\exists)\bar{u}_0 \in V \setminus \{\bar{0}\}$ *a.î.* $f(\bar{u}_0) = 0$ *şi* $f(\bar{u}) \geq 0$, $(\forall)\bar{u} \in V$
- **negativ definită** *dacă* $f(\bar{u}) < 0$, $(\forall)\bar{u} \in V \setminus \{\bar{0}\}$
- **seminegativ definită** *dacă* $(\exists)\bar{u}_0 \in V \setminus \{\bar{0}\}$ *a.î.* $f(\bar{u}_0) = 0$ *şi* $f(\bar{u}) \leq 0$, $(\forall)\bar{u} \in V$
- **nedefinită** *dacă* $(\exists)\bar{u}, \bar{v} \in V$ *a.î.* $f(\bar{u}) > 0$ *şi* $f(\bar{v}) < 0$.

Pentru a aduce o formă pătratică la forma canonică vom folosi metoda valorilor proprii.

Metoda valorilor proprii

Matricea lui f în baza B, $[f]_B$ este o matrice simetrică $\Rightarrow$ $[f]_B$ este diagonalizabilă şi din Teorema de diagonalizare 3.4 că există o bază

$$B' = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_p$$

astfel încât

$$[f]_B = \operatorname{diag}\,(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{\text{om}(\lambda_1)-\text{ori}}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{\text{om}(\lambda_2)-\text{ori}}, \ldots, \underbrace{\lambda_k, \ldots, \lambda_k}_{\text{om}(\lambda_k)-\text{ori}}).$$

unde

- λ_i sunt valorile proprii
- B_i sunt bazele subspaţiilor proprii $S_{\lambda=\lambda_1}$

Expresia analitică a lui f în baza B' este

$$\begin{aligned} f(\bar{v}) &= [\bar{v}]^t_{B'}[f]_{B'}[\bar{v}]_{B'} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_p y_n^2, \end{aligned}$$

unde $\bar{v} = (y_1, \ldots, y_n)_{B'}$.

Exemplul 4.4. Fie $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi\left[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right] = x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 - x_2y_3.$$

a) Să se scrie forma pătratică f asociată lui φ dacă ea esistă.

b) Să se scrie forma canonică a formei pătratice f.

Soluţie. a)

$$[\varphi]_{B_c} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = [\varphi]^t_{B_c} \Rightarrow (\exists) \text{ forma pătratică asociată } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

$[f]_{B_c} = [\varphi]_{B_c} \Rightarrow$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

b) Aducem $[f]_{B_c} =^{\text{not}} A$ la forma diagonală:

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Polinomul caracteristic este:

$$p_3(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)^1.$$

Valorile proprii sunt rădăcinile polinomului caracteristic $\Rightarrow$

- $\lambda_1 = 1$, om $(\lambda_1) = 2$
- $\lambda_2 = -2$, om $(\lambda_1) = 1$

Atunci **forma canonică** a lui f în baza B este

$$\boxed{f(\bar{v}) = 1 \cdot y_1^2 + 1 \cdot y_2^2 + (-2) \cdot y_3^2}, \tag{4.7}$$

unde $\bar{v} = (x_1, \ldots, x_n)_{B_c} = (y_1, \ldots, y_n)_B$.

Pentru a afla baza B în care f are forma canonică (4.7), calculăm subspaţiile corespunzătoare valorilor proprii.

Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este

$$\begin{aligned} S_{\lambda_1=1} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, (A - 1 I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Rezolvăm sistemul

$$\begin{bmatrix} \underline{-1}| & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

x necunoscută principală,

y, z necunoscute secundare

$\Rightarrow x = y + z \Rightarrow$

$$\begin{aligned} S_{\lambda_1=1} =& \{(y+z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} \\ =& \{(y,y,0) + (z,0,z), y, z \in \mathbb{R}\} \\ =& \{y(1,1,0) + z(1,0,1), y, z \in \mathbb{R}\} \\ =& L(B_1), \end{aligned}$$

unde $B_1 = \{(1,1,0), (1,0,1)\}$.

$\Rightarrow^{\text{Propoziţia (2.8)}-1)}$ B_1 este <u>sistem de generatori</u> pentru $S_{\lambda_1=1}$. (1)

Rang $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 =$ nr de vectori din $B_1 \Rightarrow^{\text{Crireriul practic (2.1)}}$ B_1 este <u>sistem liniar independent</u>.

(2)

Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow$ $\boxed{B_1 = \{(1,1,0),(1,0,1)\}}$ este o bază a lui $S_{\lambda_1=1}$ (3)

Calculăm subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = -2$,

$$S_{\lambda_2=-2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, (A - (-2I_3)) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Rezolvăm sistemul

$$\begin{bmatrix} 2 & |1 & 1 \\ 1 & |\underline{2} & \underline{-1} \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

y, z necunoscute principale,

x necunoscută secundară

$$\begin{cases} y + z = -2x \\ 2y - z = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} S_{\lambda_2=-2} =& \{(x,-x,-x), x \in \mathbb{R}\} \\ =& \{x(1,-1,-1), x \in \mathbb{R}\} \\ =& L(B_2), \end{aligned}$$

unde $B_2 = \{(1,-1,-1)\}$.

$\Rightarrow^{\text{Propoziţia (2.8)}-1)}$ B_2 este <u>sistem de generatori</u> pentru $S_{\lambda_2=-2}$. (4)

B_2 este format dintr-un singur vector nenul $\Rightarrow^{\text{Exemplul (2.3)}}$ B_2 este <u>sistem liniar independent</u>. (5)

Din relaţiile (4) şi (5) $\Rightarrow$ $\boxed{B_2 = \{(1,-1,-1)\}}$ este o bază a lui $S_{\lambda_2=-2}$ (6)

Din relaţiile (3) şi (6) $\Rightarrow$ baza în care f are forma canonică este

$$\boxed{B = B_1 \cup B_2 = \{\underbrace{(1,1,0),(1,0,1)}_{B_1}, \underbrace{(1,-1,-1)}_{B_2}\}.}$$

4.3 Întrebări de verificare

Forme biliniare

1) Cine este W pentru ca o funcţie $\varphi : V \times V \to W$ să poată fi o formă biliniară?

2) Dacă $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ este o bază a lui V şi matricea lui φ în baza B este $[\varphi]_B = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$, atunci $a_{ij} =$ ...

4) Dată matricea $[\varphi]_{B_c}$ care este forma analitică a lui φ?

5) Dată forma analitică a lui φ, care este matricea $[\varphi]_{B_c}$?

Forme pătratice

1) Căror forme biliniare φ li se poate asocia o formă pătratică?

2) Cum este matricea unei astfel de forme biliniare într-o bază B?

3) Dată o formă biliniară φ, unde este definită şi cum se scrie forma pătratică asociată f?

4) Dacă $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ este o bază a lui V şi matricea lui f în baza B este $[f]_B = [a_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$, atunci $a_{ij} =$ ...

5) Care este legătura între $[\varphi]_B$ şi $[f]_B$?

6) Dată matricea $[f]_{B_c}$ care este forma analitică a lui f?

7) Dată forma analitică a lui f, care este matricea $[f]_{B_c}$?

8) Cum se scrie o formă canonică a formei pătratice f?

Dacă s-a folosit metoda valorilor proprii pentru reducerea la forma canonică a formei pătratice f

9) Cine sunt coeficienţii formei canonice?

10) În ce bază are această formă?

Tipuri de matrice studiate

1) Matricea asociată unui sistem de vectori.
2) Matricea de trecere de la o bază la alta.
3) Matricea unei aplicaţii linare într-o pereche de baze.
4) Matricea unei forme biliniare în baza canonică şi într-o bază oarecare.
5) Matricea unei forme pătratice în baza canonică.

CAPITOLUL 5

SPAŢII VECTORIALE EUCLIDIENE

Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial cu $\dim V = n$,

$B = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ o bază a lui V,

$\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică $\Rightarrow (\exists)$

$f : V \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată formei biliniare φ.

Definiţia 5.1.

- *Dacă f este pozitiv definită, atunci φ se numeşte* **produs scalar** *şi se notează*

$$\varphi(\bar{u}, \bar{v}) =^{not} < \bar{u}, \bar{v} > .$$

- *Perechea $(V, \varphi) =^{not} E$ se numeşte* **spaţiu vectorial euclidian**.

- *Produsul scalar $\varphi_c : V \times V \to \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}\varphi_c(\bar{u}, \bar{v}) &=^{def} x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\end{aligned} \tag{5.1}$$

unde $\bar{u} = (x_1, \ldots, x_n)_B$, $\bar{v} = (y_1, \ldots, y_n)_B$, *se numeşte* **produsul scalar canonic**.

- **Lungimea** *sau* **norma** *vectorului* $\bar{v}$ *este numărul pozitiv*

$$\|\bar{v}\| =^{def} \sqrt{< \bar{v}, \bar{v} >} \geq 0 \ (\forall)\bar{v} \in V$$

şi este bine definită deoarece forma pătratică $f(\bar{v}) =< \bar{v}, \bar{v} >$ *este pozitiv definită.*

Propoziţia 5.1 (Cauchy-Schwartz). *În spaţiul euclidian* $E = (V, < \cdot, \cdot >)$ *are loc*

$$| < \bar{u}, \bar{v} > | \leq \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|, \ (\forall)\bar{u}, \bar{v} \in V.$$

Relaţia de mai sus este echivalentă cu

$$\frac{< \bar{u}, \bar{v} >}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|} \in [-1, 1], \ (\forall)\bar{u}, \bar{v} \in V$$

şi aunci are sens definiţia

Definiţia 5.2.

- *Numărul* $\theta \in [0, \pi]$ *definit de egaliatea*

$$\cos\theta = \frac{< \bar{u}, \bar{v} >}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|}$$

se numeşte **unghiul** *vectorilor* $\bar{u}$, $\bar{v}$.

- $\bar{u}$ *şi* $\bar{v}$ *se numesc* **ortogonali** $\bar{u} \perp \bar{v}$ *dacă* $\sphericalangle(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\pi}{2}$.
- $\bar{u}$ *şi* $\bar{v}$ *se numesc* **paraleli** $\bar{u} \parallel \bar{v}$ *dacă dreptele lor suport sunt paralele sau coincid.*
- $\bar{u}$ *şi* $\bar{v}$ *se numesc* **coliniari** *dacă*
  - *sunt paraleli sau*

– *unul din ei este vectorul nul.*

- *Se numeşte* **distanţa** *dintre doi vectori, numarul real pozitiv*

$$\|\bar{u} - \bar{v}\| \in \mathbb{R}_+.$$

- $\bar{v} \in V$ *se numeşte* **versor** *dacă*

$$\|\bar{v}\| = 1.$$

- B *se numeşte* **bază ortogonală** *dacă*

$$\bar{v}_i \perp \bar{v}_j, \ (\forall) i \neq j.$$

- B *se numeşte* **bază ortonormată** *dacă*

$$\begin{aligned} &\bar{v}_i \perp \bar{v}_j, \ (\forall) i \neq j, \\ &\|\bar{v}_i\| = 1, \ (\forall) i. \end{aligned}$$

- *Dacă* $\dim V = 3$ *şi* $B_c = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ *este baza canonică din* V*, atunci vectorul*

$$\begin{aligned} \bar{u} \times \bar{v} &=^{def} \begin{cases} \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \sin\theta \cdot \bar{e}, & \text{pentru } \bar{u}, \bar{v} \text{ liniar independenţi,} \\ 0, & \text{pentru } \bar{u}, \bar{v} \text{ liniar dependenţi} \end{cases} \\ &= \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{\bar{e}_1}_{\in V} \underbrace{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\bar{e}_2}_{\in V} \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\bar{e}_3}_{\in V} \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}_{\in \mathbb{R}} \in V. \end{aligned}$$

unde

* $\bar{e}$ *este un versor perpendicular pe* $\bar{u}$ *şi pe* $\bar{v}$
* $\bar{u} = (x_1, x_2, x_3)_{B_c}$, $\bar{v} = (y_1, y_2, y_3)_{B_c}$

* θ *este unghiul dintre* $\bar{u}$ *şi* $\bar{v}$

se numeşte **produsul vectorial** *al vectorilor* $\bar{u}$ *şi* $\bar{v}$.

Propoziţia 5.2. *Dacă* $\bar{u} = (x_1, x_2, x_3)_{B_c}$ *şi* $\bar{v} = (y_1, y_2, y_3)_{B_c}$, *atunci*

- $\bar{u} \perp \bar{v} \Leftrightarrow < \bar{u}, \bar{v} > = 0.$
- $\bar{u} \parallel \bar{v} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \dfrac{x_3}{y_3}.$
- $\bar{u}$ *şi* $\bar{v}$ *sunt* **coliniari** $\Leftrightarrow (\exists)\lambda \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\bar{u} = \lambda \bar{v}$.

5.1 Procedeul de ortonormare Gram-Schmidt

Propoziţia 5.3. *Fie $E = (V, < \cdot, \cdot >)$ un spaţiu vectorial euclidian. Atunci există o bază ortonormată în E.*

Demonstraţie. Fie $B = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ o bază oarecare a lui V. Construim vectorii

$$\boxed{\begin{aligned} &\bar{u}_1 = \bar{v}_1, \\ &\bar{u}_2 = \bar{v}_2 - \lambda_{21}\bar{u}_1, \\ &\bar{u}_3 = \bar{v}_3 - \lambda_{31}\bar{u}_1 - \lambda_{32}\bar{u}_2, \\ &\ldots\ldots \\ &\bar{u}_n = \bar{v}_n - \lambda_{n1}\bar{u}_1 - \lambda_{n2}\bar{u}_2 - \ldots - \lambda_{nn-1}\bar{u}_{n-1}, \end{aligned}} \tag{5.2}$$

unde

$$\boxed{\lambda_{ki} = \frac{< \bar{v}_k, \bar{u}_i >}{< \bar{u}_i, \bar{u}_i >}.}$$

Atunci sistemul de vectori astfel construit, $B_1 = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ este o bază <u>ortogonală</u> a lui V.

Fie acum

$$\boxed{\bar{v}'_i = \frac{1}{\|\bar{u}_i\|} \cdot \bar{u}_i.} \tag{5.3}$$

Vectorii $\bar{v}'_i$ formează o bază <u>ortonormată</u> $B' = \{\bar{v}'_1, \ldots, \bar{v}'_n\}$ a lui V. □

Exemplul 5.1. Fie spaţiul vectorial euclidian $E = (\mathbb{R}^3, < \cdot, \cdot >_{\text{can}})$ cu produsul scalar canonic şi baza

$$B = \{\bar{v}_1 = (1, 1, 1), \bar{v}_2 = (-1, 1, 0), \bar{v}_3 = (-1, 0, 1)\}.$$

Să se determine o bază ortonormată în E folosind procedeul de ortonormare Gram-Schmidt.

Soluţie.

$\boxed{\bar{u}_1} = \bar{v}_1 = \boxed{(1,1,1)}$,

$\bar{u}_2 = \bar{v}_2 - \lambda_{21}\bar{u}_1$, unde

$$\begin{aligned}\lambda_{21} &= \frac{<\bar{v}_2, \bar{u}_1>}{<\bar{u}_1, \bar{u}_1>} \\ &= \frac{<\bar{(}-1,1,0),(1,1,1)>}{<(1,1,1),(1,1,1)>} \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{\bar{u}_2} = \bar{v}_2 = \boxed{(-1,1,0)}$.

$\bar{u}_3 = \bar{v}_3 - \lambda_{31}\bar{u}_1 - \lambda_{32}\bar{u}_2$, unde

$$\begin{aligned}\lambda_{31} &= \frac{<\bar{v}_3, \bar{u}_1>}{<\bar{u}_1, \bar{u}_1>} \\ &= \frac{<(-1,0,1),(1,1,1)>}{<(1,1,1),(1,1,1)>} \\ &= 0\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\lambda_{32} &= \frac{<\bar{v}_3, \bar{u}_2>}{<\bar{u}_2, \bar{u}_2>} \\ &= \frac{<(-1,0,1),(-1,1,0)>}{<(-1,1,0),(-1,1,0)>} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{\bar{u}_3} = (-1,0,1) - \frac{1}{2}(-1,1,0) = \boxed{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)}$.

$\Rightarrow B_1 = \left\{\bar{u}_1 = (1,1,1), \bar{u}_2 = (-1,1,0), \bar{u}_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$ este o bază ortogonală a lui $\mathbb{R}^3$.

O bază ortonormată o obţinem cu relaţia (5.3):

$$\begin{aligned}\bar{v}_1' &= \frac{1}{\|\bar{u}_1\|} \cdot \bar{u}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ \bar{v}_2' &= \frac{1}{\|\bar{u}_2\|} \cdot \bar{u}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \\ \bar{v}_3' &= \frac{1}{\|\bar{u}_3\|} \cdot \bar{u}_3 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\end{aligned}$$

$\Rightarrow B' = \left\{ \bar{v}_1' = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \bar{v}_2' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \bar{v}_3' = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \right\}$ este o bază <u>ortonormată</u> a lui $\mathbb{R}^3$.

5.2 Vectori liberi

Fie $\mathbb{E}_3$ spaţiul punctual tridimensional al geometriei elementare.

$[AB]$ un segment orientat: A este originea, iar B extremitatea.

Definiţia 5.3.

- **direcţia** *lui* $[AB]$ *este dreapta suport a segmentului* $[AB]$ *sau orice dreaptă paralelă cu ea.*
- **lungimea** *lui* $[AB]$ *este lungimea segmentului* $[AB]$
- **sensul** *lui* $[AB]$ *este sensul parcurs pe dreapta suport de la* A *la* B.

Notăm mulţimea

$$\overrightarrow{AB} :=^{def} \{[CD] | [CD] \text{ are aceiaşi direcţie, lungime şi sens cu } [AB]\}.$$

Definiţia 5.4.

- *Mulţimea* $\overrightarrow{AB} \subset \mathbb{E}_3$ *se numeşte* **vector liber**.
- *Segmentul* $[AB]$ *se numeşte* **reprezentant** *al mulţimii* $\overrightarrow{AB}$.

Notăm

$$V_3 =^{not} \{\overrightarrow{AB},\ (\forall) A, B \in \mathbb{E}_3\}$$

mulţimea tuturor vectorilor liberi.

Propoziţia 5.4. $(V_3/\mathbb{R}, +.\cdot)$ *este un spaţiu vectorial, unde*

- $'' + ``$ *este adunarea vectorilor cu regula triunghiului*

- $'' \cdot ``$ *este înmulţirea unui vector cu un scalar.*

În spaţiul vectorial V_3 considerăm
$M_0 \in \mathbb{E}_3$,
$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ o bază a sa şi notăm
$B_c = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ **baza canonică** din V_3,
oricărui vector $\overrightarrow{AB}$ i se pot asocia coordonatele sale în baza B:

$$\overrightarrow{AB} = (x_{AB}, y_{AB}, z_{AB})_B,$$

$< \cdot, \cdot >$ este produsul scalar canonic (5.1) definit pe spaţiul vectorial V_3,
$(V_3/\mathbb{R}, < \cdot, \cdot >)$ este spaţiu vectorial euclidian.

Definiţia 5.5.

- $\mathcal{R} = \{M_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ *se numeşte* **reper** *în* $\mathbb{E}_3$.

  M_0 *numeşte* **originea reperului** $\mathcal{R}$.

  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ *numesc* **vectorii reperului** $\mathcal{R}$.

- *Reperul format cu vectorii bazei canonice*

$$\mathcal{R} = \left(O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right)$$

  se numeşte **reperul ortonormat canonic**.

- *Pentru orice punct* $P \in \mathbb{E}_3$, *vectorul* $\overrightarrow{OP}$ *se numeşte* **vectorul de poziţie** *al lui* P.

  $\overrightarrow{OP} \in V_3$, B *bază în* $V_3 \Rightarrow \overrightarrow{OP} = (x_P, y_P, z_P)_B$

- (x_P, y_P, z_P) *se numesc* **coordonatele punctului** P *în reperul* R *şi notăm* $P(x_P, y_P, z_P)_B$.

Propoziţia 5.5. *Dacă două puncte din* $\mathbb{E}_3$ *au coordonatele în baza* B, $M(x_M, y_M, z_M)_B$ *şi* $N(x_N, y_N, z_N)_B$, *atunci vectorul* $\overrightarrow{MN}$ *are coordonatele în baza* B

$$\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M, y_N - y_M, z_N - z_M)_B.$$

Demonstraţie. Din regula triunghiului avem că $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}\\ &= (x_N, y_N, z_N)_B - (x_M, y_M, z_A)_B\\ &= (x_N - x_N, y_N - y_M, z_B - z_M)_B.\end{aligned}$$

□

Observaţia 5.1.

- În baza canonică notăm simplu, fară a mai preciza baza,

$$P(x_P, y_P, z_P).$$

- Dacă putem identifica un vector prin coordonatele sale într-o bază B, atunci **produsul scalar canonic** între doi vectori din V_3 este:

$$< \vec{u}, \vec{v} >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

  unde $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)_B$ şi $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)_B$.

- Distanţa dintre două puncte $M(x_M, y_M, z_M)$ şi $N(x_N, y_N, z_N)$ este

$$d(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 + (z_M - z_N)^2}.$$

- Dacă $P(x_P, y_P, z_P)$ este mijlocul segmentului $[MN]$, atunci coordonatele lui P

sunt:

$$x_P = \frac{x_M + x_N}{2},\ y_P = \frac{y_M + y_N}{2},\ z_P = \frac{z_M + z_N}{2}.$$

Propoziţia 5.6. $(V_3, < \cdot, \cdot >)$ *este spaţiu vectorial euclidian.*

Propoziţia 5.7.

1) *Mulţimea tuturor vectorilor coliniari cu un vector dat* $\vec{u} \neq \vec{0}$

$$V_1 = \{\vec{v} \in V_3 | \vec{v} = \lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} \neq \vec{0}\}$$

este un spaţiu vectorial de dimensiune 1.

2) *Mulţimea tuturor vectorilor coplanari cu doi vectori daţi* $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$

$$V_2 = \{\vec{w} \in V_3 | \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \vec{u}, \vec{v} \text{ necoliniari}\}$$

este un spaţiu vectorial de dimensiune 2.

3) *dim* $V_3 = 3$.

4) *sensul produsului vectorial al doi vectori este dat de regula burghiului drept.*

5.3 Planul

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{E}_3$

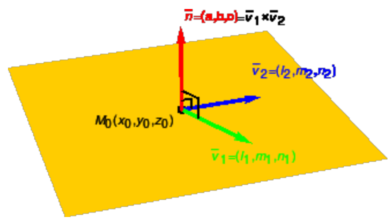
$\vec{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\vec{v}_2 = (l_2, m_2, n_2) \in V_3$ doi vectori necoliniari.

Definiţia 5.6. *Mulţimea*

$$\pi = \{M \in \mathbb{E}_3 | \overrightarrow{MM_0} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

se numeşte **planul** *care trece prin punctul M_0 şi are vectorii directori $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$.*

Ecuaţiile unui plan care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, are direcţiile $\vec{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ şi $\vec{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ şi direcţia normalei $\vec{n} = (a, b, c)$ sunt:



Definiţia 5.7 (Ecuaţiile planului)**.**

- * **Ecuaţia carteziană** *a unui plan π ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are direcţiile $\vec{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ şi $\vec{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$:*

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

- * **Ecuaţia unui plan π ce trece prin trei puncte** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$:*

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

* **Ecuaţiile parametrice** *ale unui plan* π *ce trece prin punctul* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *şi are direcţiile* $\vec{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ *şi* $\vec{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$*:*

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2, \\ y = y_0 + \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2, \\ z = z_0 + \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2, . \end{cases}$$

* **Ecuaţia planului ce trece prin punctul** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **şi are direcţia normalei** $\vec{n} = (a, b, c)$ *este:*

$$\pi : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

* **Ecuaţia carteziană generală** *a unui plan* π *este:*

$$\pi : ax + by + cz + d = 0.$$

Atenţie:

Din ecuaţia carteziană generală a unui plan

$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$

putem deduce componentele vectorul normalei care sunt coeficienţii lui x, y, z:

$$\vec{n} = (a, b, c).$$

Propoziţia 5.8. *Două plane cu normalele* $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, *respectiv* $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ *sunt paralele d.n.d.*

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

5.4 Dreapta

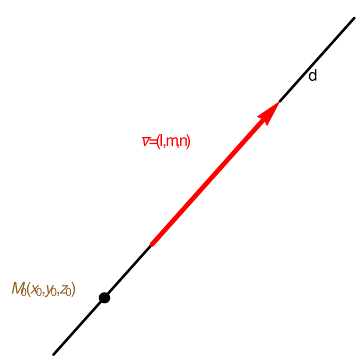
Fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{E}_3$
$\vec{v} = (l, m, n) \in V_3$.

Definiţia 5.8. *Mulţimea*

$$\pi = \{M \in \mathbb{E}_3 | \overrightarrow{MM_0} = t\vec{v}, t \in \mathbb{R}\}$$

se numeşte **dreapta** *care trece prin punctul M_0 şi are direcţia $\vec{v}$.*

Ecuaţiile unei drepte care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, are direcţia $\vec{v} = (l, m, n)$ sunt:



Definiţia 5.9 (Ecuaţiile dreptei)**.**

* **Ecuaţiile canonice** *ale unei drepte d ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are direcţia $\vec{v} = (l, m, n)$ sunt:*

$$d : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Dacă egalăm şirul de rapoarte de mai sus cu t, adică:

$$d : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t,$$

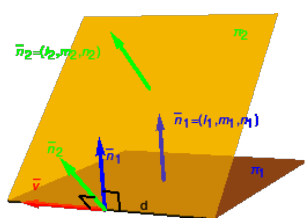
obţinem

* **Ecuaţiile parametrice** *ale dreptei d ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are direcţia $\vec{v} = (l, m, n)$:*

$$d : \begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, \\ z = z_0 + tn \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

* **Ecuaţiile dreptei dată ca intersecţie între două plane** *sunt:*

$$d : \begin{cases} l_1 x + m_1 y + n_1 z + a_1 = 0, \\ l_2 x + m_2 y + n_2 z + a_2 = 0. \end{cases}$$



Cele două plane

$$\pi_1 : l_1 x + m_1 y + n_1 z + a_1 = 0$$

şi

$$\pi_2 : l_2 x + m_2 y + n_2 z + a_2 = 0$$

au normalele

$$\vec{n}_1 = (l_1, m_1, n_1)$$

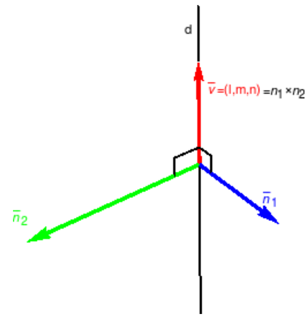
respectiv

$$\vec{n}_2 = (l_2, m_2, n_2)$$

cu $\vec{n}_1 \perp \vec{v}$ şi $\vec{n}_2 \perp \vec{v}$.

Atunci direcţia dreptei d este dată de perpendiculara comună a vectorilor $\vec{n}_1$ şi $\vec{n}_2$,

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = (l, m, n).$$



Coordonatele unui punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de pe dreapta d sunt o soluţie particulară a sistemului

$$d : \begin{cases} l_1 x + m_1 y + n_1 z + a_1 = 0, \\ l_2 x + m_2 y + n_2 z + a_2 = 0. \end{cases}$$

Atenţie:

Date ecuaţiile canonice ale unei drepte

$$d : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

putem găsi direct coordonatele unui punct al dreptei $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de la numărătorii şirului de rapoarte şi coordonatele direcţiei dreptei $\vec{v} = (l, m, n)$ de la numitorii şirului de rapoarte.

Dacă în şirul de rapoarte un numitor este 0, atunci şi numărătorul este 0.

De exemplu, dreapta d de ecuaţii

$$d : \frac{x - 2}{-3} = y + 5 = \frac{z - 7}{0}$$

se poate scrie

$$d : \frac{x-2}{-3} = \frac{y-(-5)}{1} = \frac{z-7}{0}$$

$\Rightarrow$ trece prin punctul de coordonate $M_0(2,-5,7)$ şi are direcţia $\vec{v} = (-3,1,0)$, iar ecuaţiile dreptei sunt echivalente cu

$$d : \begin{cases} x-2 = -3(y+5) \\ z-7 = 0. \end{cases}$$

Propoziţia 5.9. *Două drepte cu vectorii directori* $\vec{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, *respectiv* $\vec{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ *sunt paralele d.n.d.*

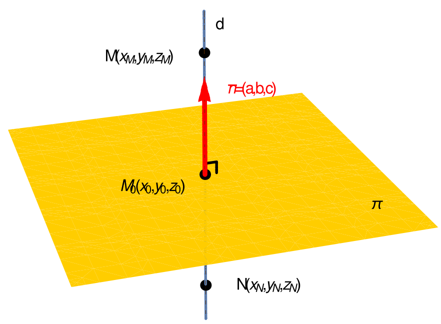
- $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ *d.n.d.*
- $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$.

5.5 Simetricul unui punct faţă de un plan

Simetricul punctului $M(x_M, y_M, z_M)$ faţă de planul

$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$

se găseşte astfel:



- scriem ecuaţia dreptei d care trece prin M şi este perpendiculară pe planul π, adică are ca direcţie direcţia normalei planului, $\vec{v} = \vec{n} = (a, b, c)$:

$$d : \frac{x - x_M}{a} = \frac{y - y_M}{b} = \frac{z - z_M}{c}$$

- găsim punctul de intersecţie a lui π cu d rezolvând sistemul:

$$M_0 : \begin{cases} \dfrac{x - x_M}{a} = \dfrac{y - y_M}{b} = \dfrac{z - z_M}{c} = t \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$M_0 : \begin{cases} x = x_M + ta \\ y = y_M + tb \\ z = z_M + tc \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

- Punem condiţia ca M_0 să fie mijlocul segmentului $[MN]$:

$$x_{M_0} = \frac{x_M + x_N}{2},\ y_{M_0} = \frac{y_M + y_N}{2},\ z_{M_0} = \frac{z_M + z_N}{2}$$

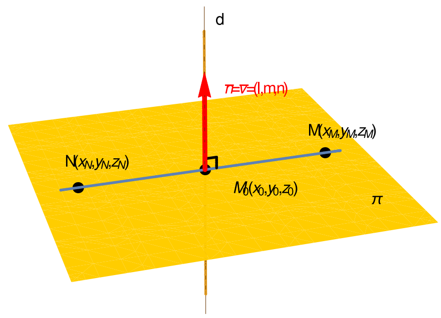
de unde aflăm coordonatele punctului N.

5.6 Simetricul unui punct faţă de o dreaptă

Simetricul punctului $M(x_M, y_M, z_M)$ faţă de dreapta

$$d : \frac{x - x_M}{l} = \frac{y - y_M}{m} = \frac{z - z_M}{n}$$

se găseşte astfel:



- scriem ecuaţia planului π care trece prin M şi este perpendicular pe dreapta d, adică are direcţia normalei direcţia dreptei d, $\vec{n} = \vec{v} = (l, m, n)$:

$$\pi : lx + my + nz + d = 0$$

- găsim punctul de intersecţie a lui π cu d rezolvând sistemul:

$$M_0 : \begin{cases} \dfrac{x - x_M}{l} = \dfrac{y - y_M}{m} = \dfrac{z - z_M}{n} = t \\ lx + my + nz + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$M_0 : \begin{cases} x = x_M + tl \\ y = y_M + tm \\ z = z_M + tn \\ lx + my + nz + d = 0 \end{cases}$$

- Punem condiţia ca M_0 să fie mijlocul segmentului $[MN]$:

$$x_{M_0} = \frac{x_M + x_N}{2},\ y_{M_0} = \frac{y_M + y_N}{2},\ z_{M_0} = \frac{z_M + z_N}{2}$$

de unde aflăm coordonatele punctului N.

Exemplul 5.2. Fie punctele $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,2)$ şi $M(1,2,3)$.

a) Să se găsească simetricul lui M faţă de planul (ABC).

b) Să se găsească simetricul lui M faţă de dreapta AB.

5.7 Probleme de distanţă

1) Distanţa de la un punct A la o dreaptă d

Fie o dreaptă d de direcţie $\vec{v}$ şi un punct $M_0 \in d$.

Dacă $A \notin d$, atunci distanţa de la punctul A la dreapta d este

$$d(A, d) = \frac{\|\vec{v} \times \overline{M_0 A}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

2) Distanţa de la un punct $P_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul $\pi : ax + by + cz + d = 0$ este

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exemplul 5.3. Fie dreptele

$$d_1 : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$d_2 : \frac{x - 11}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$$

şi punctul $A(3, 0, 0)$.

a) Să se stabilească dacă d_1 şi d_2 determină un plan şi în caz afirmativ să se scrie ecuaţia planului π.

b) Să se calculeze $d(A, d_1)$ şi $d(A, \pi)$.

CAPITOLUL 6

GEOMETRIA DIFERENŢIALĂ A CURBELOR ŞI SUPRAFEŢELOR DIN $\mathbb{E}_3$

6.1 Elemente de geometrie diferenţială a curbelor

Fie I un interval deschis din $\mathbb{R}$

$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ o funcţie diferenţiabilă pe I.

Definiţia 6.1.

- *Se numeşte* **curbă** *din* $\mathbb{E}_3$ *imaginea funcţiei diferenţiabile* α,

$$\Gamma = Im(\alpha) \subset \mathbb{R}^3.$$

- α *se numeşte* **parametrizare**.
- $t \in I$ *se numeşte* **parametru**.
- *Punctul* $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ *al curbei* Γ, *unde* $\begin{cases} x_0 = x(t_0), \\ y_0 = y(t_0), \\ z_0 = z(t_0) \end{cases}$

(sau $M_0(t_0) \in \Gamma$) se numeşte **punct regulat** *dacă vectorul*

$$\alpha'(t_0) \neq (0,0,0).$$

6.1.1 Triedrul lui Frenet într-un punct regulat al unei curbe în $\mathbb{E}_3$

Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ o parametrizare a curbei Γ.

$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ (sau $M_0(t_0) \in \Gamma$) un punct regulat de pe curbă.

Definiţia 6.2.

- $\boxed{\bar{T}(t_0) = \alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))}$

  se numeşte **vectorul tangentei** *în punctul M_0 la curba Γ.*

  Versorul tangentei $T(t_0)$ se notează

  $$\bar{\tau}(t_0) :=^{not} \frac{1}{\|\bar{T}(t_0)\|}\bar{T}(t_0).$$

- $\boxed{\bar{B}(t_0) = \alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0) :=^{not} (A, B, C)}$

  se numeşte **vectorul binormalei** *în punctul M_0 la curba Γ.*

  Versorul binormalei $B(t_0)$ se notează

  $$\bar{b}(t_0) :=^{not} \frac{1}{\|\bar{B}(t_0)\|}\bar{B}(t_0).$$

- $\boxed{\bar{N}(t_0) = \bar{B}(t_0) \times \bar{T}(t_0) :=^{not} (l, m, n)}$

  se numeşte **vectorul normalei principale** *în punctul M_0 la curba Γ.*

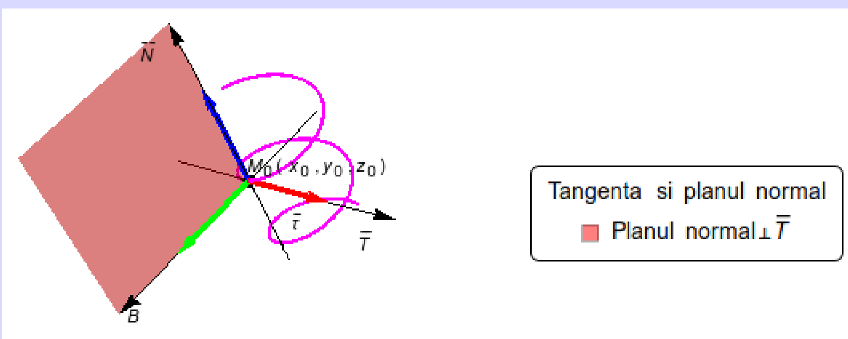
  Versorul binormalei $N(t_0)$ se notează

  $$\bar{n}(t_0) :=^{not} \frac{1}{\|\bar{N}(t_0)\|}\bar{N}(t_0).$$

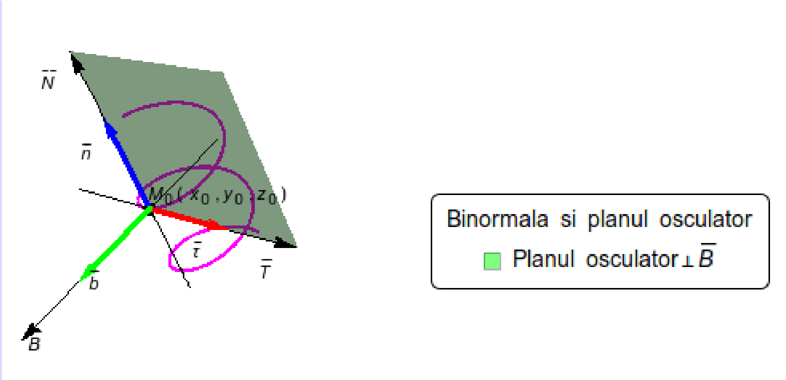
Propoziţia 6.1. *$B = \{\bar{\tau}(t_0), \bar{b}(t_0), \bar{n}(t_0)\}$ formează o bază ortonormată în spaţiului vectorial V_3 al vectorilor liberi.*

Definiţia 6.3.

- *Reperul $\mathcal{R} = \left(M_0; \bar{\tau}(t_0), \bar{b}(t_0), \bar{n}(t_0)\right)$ numeşte* **reperul mobil al lui Frenet** *asociat curbei Γ în punctul M_0.*
- *Dreapta ce trece prin M_0 şi are direcţia $\bar{T}(t_0)$ se numeşte* **tangenta** *în punctul M_0 la curba Γ.*
- *Planul ce trece prin M_0 şi are direcţia normalei $\bar{T}(t_0)$ se numeşte* **planul normal**.

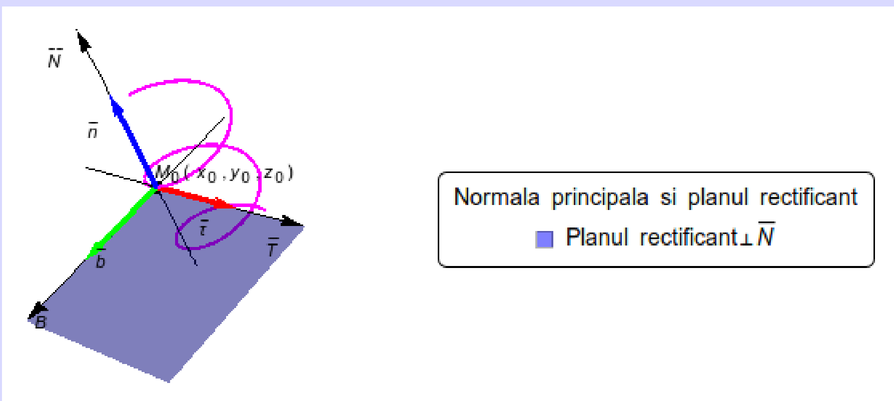


- *Dreapta ce trece prin M_0 şi are direcţia $\bar{B}(t_0)$ se numeşte* **binormala** *în punctul M_0 la curba Γ.*
- *Planul ce trece prin M_0 şi are direcţia normalei $\bar{B}(t_0)$ se numeşte* **planul osculator**.



- *Dreapta ce trece prin M_0 şi are direcţia $\bar{N}(t_0)$ se numeşte* **normala principală** *în punctul M_0 la curba Γ.*

- *Planul ce trece prin M_0 şi are direcţia normalei $\bar{N}(t_0)$ se numeşte* **planul rectificant**.



- *Se numeşte* **unghiul a două curbe** *care se intersectează în M_0, unghiul format de vectorii tangentelor la cele două curbe în M_0.*

- *Dacă $A(t = a)$ şi $B(t = b)$ sunt două puncte pe cuba Γ, atunci se numeşte* **lungimea arcului de curbă** *AB numărul pozitiv*

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt = \int_a^b \|\bar{T}(t)\|dt.$$

- *Se numeşte* **curbura** *curbei* Γ *în punctul* M_0*, numărul pozitiv*

$$\rho(t_0) = \frac{\|\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)\|}{\|\alpha'(t_0)\|^3} = \frac{\|\bar{B}(t_0)\|}{\|\bar{T}(t_0)\|^3}.$$

- *Se numeşte* **produsul mixt** *a trei vectori* $\bar{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$*,*

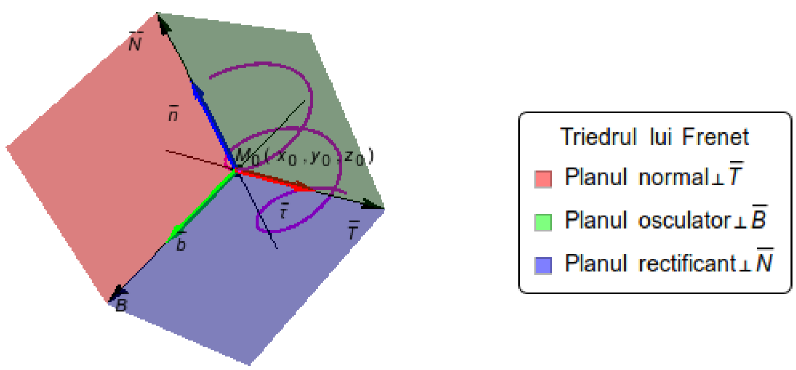
  $\bar{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *şi* $\bar{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ *valoarea determinantului*

$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

- *Se numeşte* **torsiunea** *curbei* Γ *în punctul* M_0*, numărul real*

$$\theta(t_0) = \frac{(\alpha'(t_0), \alpha''(t_0), \alpha'''(t_0))}{\|\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)\|^2} = \frac{(\alpha'(t_0), \alpha''(t_0), \alpha'''(t_0))}{\|\bar{B}(t_0)\|^2}.$$

Axele, planele şi dreptele triedrului lui Frenet într-un punct M_0 la o curbă sunt ilustrate în următoarea figură:



Propoziţia 6.2.

- *Ecuaţia* **tangentei** *în punctul* M_0 *la curba* Γ *este:*

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

- *Ecuaţia* **planului normal** *în punctul* M_0 *este:*

$$x'(t_0)[x - x(t_0)] + y'(t_0)[y - y(t_0)] + z'(t_0)[z - z(t_0)] = 0.$$

- *Ecuaţia* **binormalei** *în punctul* M_0 *la curba* Γ *este:*

$$\frac{x - x(t_0)}{A} = \frac{y - y(t_0)}{B} = \frac{z - z(t_0)}{C}.$$

- *Ecuaţia* **planului osculator** *în punctul* M_0 *este:*

$$A[x - x(t_0)] + B[y - y(t_0)] + C[z - z(t_0)] = 0.$$

- *Ecuaţia* **normalei principale** *în punctul* M_0 *la curba* Γ *este:*

$$\frac{x - x(t_0)}{l} = \frac{y - y(t_0)}{m} = \frac{z - z(t_0)}{n}.$$

- *Ecuaţia* **planului rectificant** *în punctul* M_0 *este:*

$$l[x - x(t_0)] + m[y - y(t_0)] + n[z - z(t_0)] = 0.$$

- Γ *este o parte a unei drepte dacă şi numai dacă* $\rho(t) = 0,\ (\forall)t \in I$.

- Γ *este o curbă plană dacă şi numai dacă* $\theta(t) = 0,\ (\forall)t \in I$*, iar planul în care este inclusă curba este planul osculator.*

6.1.2 Unghiul a două curbe

Date curbele

$$C_1 : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in I_1 \text{ şi } C_2 : \\ z = z(t) \end{cases} \begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \quad s \in I_2 \\ z = z(s) \end{cases}$$

- calculăm coordonatele punctului de intersecţie al celor două curbe:

– sau rezolvând sistemul

$$M_0:\begin{cases} x(t)=x(s),\\ y(t)=x(s),\\ z(t)=x(s)\end{cases} \Rightarrow t=t_0,\ \ s=s_0.$$

– sau dacă cele două curbe sunt curbe de coordonate $C_1: t=t_0$ şi $C_2: s=s_0$ pe o suprafaţă, atunci $M_0(t=t_0,\ s=s_0)$.

Coordonatele lui M_0 le obţinem înlocuind t_0 în C_1 sau s_0 în C_2: $M_0(x_0,y_0,z_0)$, unde

$$M_0:\begin{cases} x_0=x_{C_1}(t_0)=x_{C_2}(s_0),\\ y_0=y_{C_1}(t_0)=y_{C_2}(s_0),\\ z_0=z_{C_1}(t_0)=z_{C_2}(s_0)\end{cases}.$$

- calculăm vectorul tangentei în M_0 la fiecare din cele două curbe:

$$\vec{T}_{C_1}(t_0)=\left[x'_{C_1}(t_0),y'_{C_1}(t_0),z'_{C_1}(t_0)\right]$$

respectiv

$$\vec{T}_{C_2}(s_0)=\left[x'_{C_2}(s_0),y'_{C_2}(s_0),z'_{C_2}(s_0)\right].$$

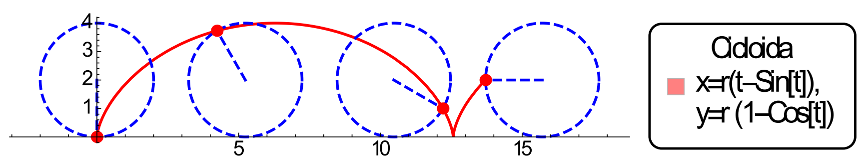
- calculăm cosinusul unghiului vectorilor $\vec{T}_{C_1}(t_0)$ şi $\vec{T}_{C_2}(s_0)$

$$\cos(\vec{T}_{C_1}(t_0),\vec{T}_{C_2}(s_0))=\frac{<\left[x'_{C_1}(t_0),y'_{C_1}(t_0),z'_{C_1}(t_0)\right],\left[x'_{C_2}(s_0),y'_{C_2}(s_0),z'_{C_2}(s_0)\right]>}{\|\left[x'_{C_1}(t_0),y'_{C_1}(t_0),z'_{C_1}(t_0)\right]\|\cdot\|\left[x'_{C_2}(s_0),y'_{C_2}(s_0),z'_{C_2}(s_0)\right]\|}.$$

EXEMPLE DE CURBE CLASICE

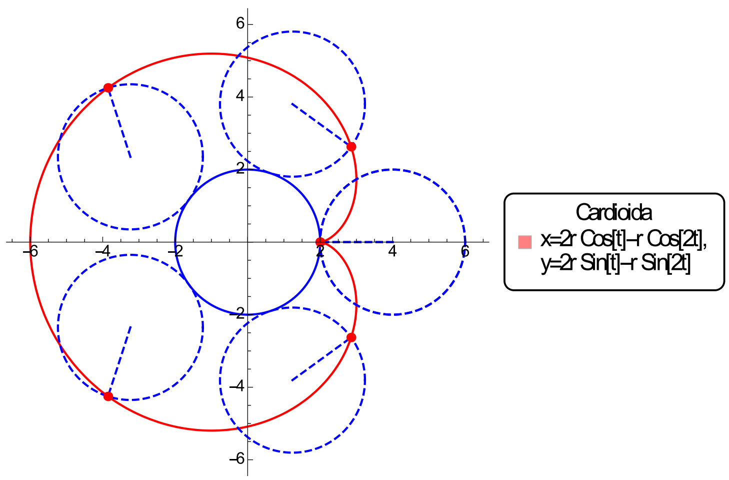
- **Cicloida** este o curbă trasată de un punct fix de pe un cerc care se rostogolește pe o dreaptă. Este un exemplu de ruletă, o curbă generată de o curbă care se rostogolește pe o altă curbă.

  Cicloida a fost studiată de Nicolaus Cusanus și mai târziu de Mersenne. A fost denumită astfel de către Galileo în 1599. În 1634, Gilles Personne de Roberval a arătat că aria de sub cicloidă este de trei ori mai mare decât aria cercului generator. În 1658, Christopher Wren a demonstrat că lungimea unei cicloide este de patru ori mai mare decât diametrul cercului generator. Cicloida a fost numită „Elena geometrilor” deoarece a cauzat certuri frecvente între matematicienii secolului al XVII-lea.

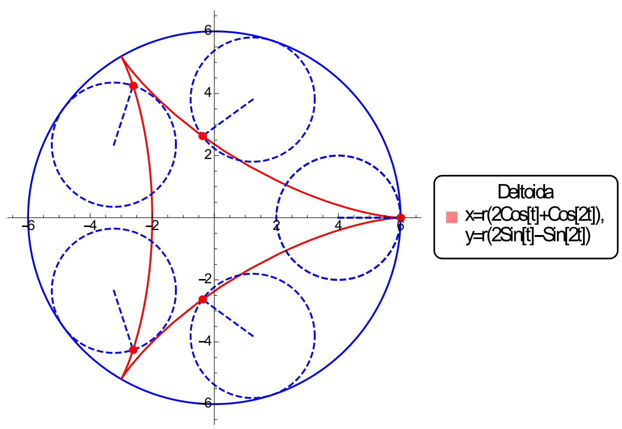


- **Cardioida** este o curbă plană descrisă de un punct de pe un cerc în timp ce acesta se rostogolește, fără alunecare, pe un alt cerc fix, exterior și de aceeași rază.

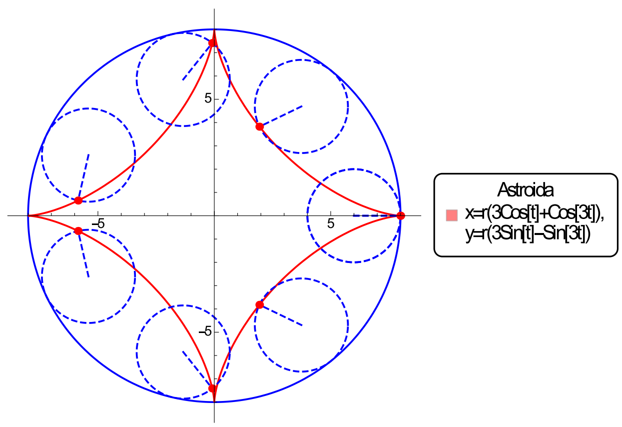
  Cardioida a fost studiată de Römer în 1674, utilizată de Vaumesle în 1678 și J. Koërsma în 1689, dar denumirea a fost propusă de G. Castilion în 1741. Numele ei provine de la forma asemănătoare unei inimi (gr. kardioeides: kardia, ”inimă” și eidos, ”formă”). Comparată cu simbolul care reprezintă inima , se observă că inima are două vârfuri ascuțite, pe când cardioida numai unul.



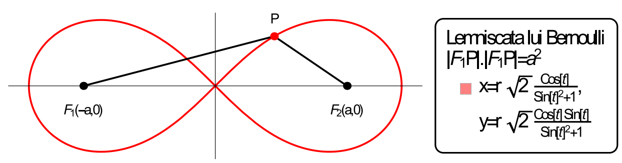
- **Deltoida** este cunoscută si sub numele de curba lui Steiner. Este curba trasată de un punct fixat de pe circumferinţa unui cerc care se rostogoleşte în interiorul unui alt cerc cu raza de trei ori mai mare sau a unui cerc cu raza de 1,5 ori mai mare. Numele ei vine de la forma sa care seamănă cu litera grecească delta, Δ.



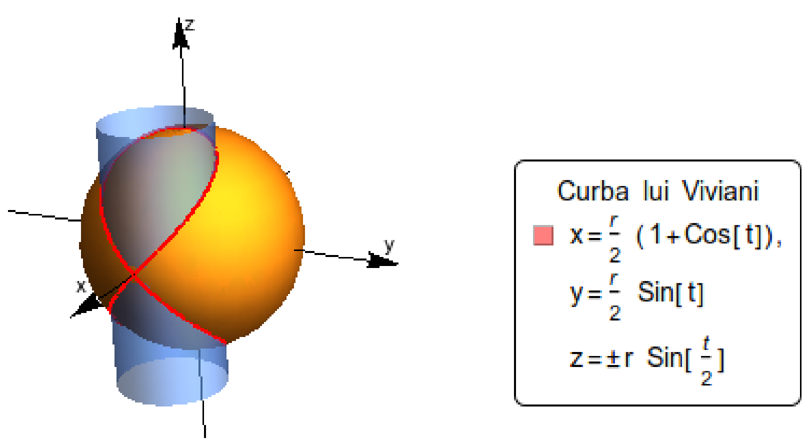
- **Astroida**. Este curba trasată de un punct fixat pe un cerc ce se rostogoleşte în interiorul unui cerc cu raza de 4 ori mai mare. Numele său provine de la cuvântul grecesc care înseamnă "stea".



- **Lemniscata lui Bernoulli**. Lemniscata a fost descrisă prima dată în 1694 de Jakob Bernoulli ca o modificare a unei elipse, care este locul geometric al punctelor pentru care suma distanţelor la două puncte fixe, numite focare, este constantă. Un oval Cassini, prin contrast, este locul geometric al punctelor pentru care produsul acestor distanţe este constant. În cazul în care curba trece prin punctul de la jumătatea distanţei dintre focare, ovalul este o lemniscată a lui Bernoulli.

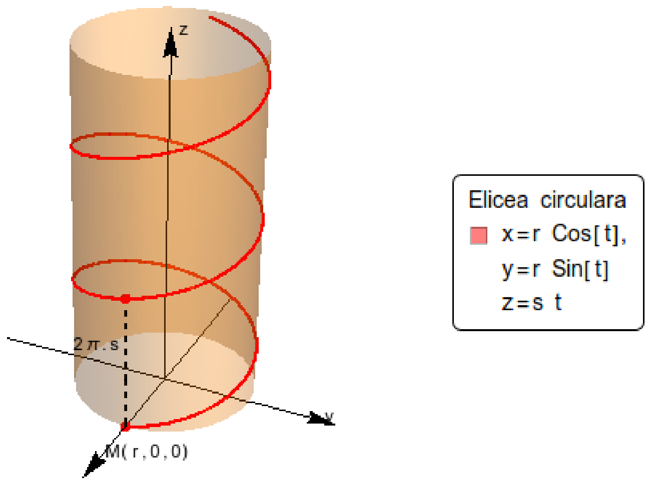


- **Curba lui Viviani** este curba obţinută din intersecţia unei sfere cu un cilindru circular drept care trece prin centrul sferei şi are raza jumătate din raza sferei.



- **Elicea circulară** este o curbă spaţială descrisă de un punct care se translatează uniform de-a lungul generatoarei unui cilindru circular drept care, în acelaşi timp, se roteşte uniform în jurul axei proprii.

  Elicea circulară este singura curbă care are curbura şi torsiunea constante.



Exemplul 6.1. Fie curba $\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = \ln(2t+1), \\ y(t) = t^2 + t, \qquad t \in [0, \infty). \\ z(t) = 2t, \end{cases}$

a) Să se calculeze lungimea arcului de curbă $\widehat{OA}$, unde O este originea şi $A(\ln 5, 6, 4)$.

b) Să se scrie ecuaţia planului rectificant în punctul în care planul normal este perpendicular pe planul $\pi : x - z + 5 = 0$ şi versorul normalei principale în punctul $B(t = 0)$.

c) Să se calculeze unghiul curbelor $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}_1 : \beta(s) = (s-1, s^2-1, 0)$. Sunt cele două curbe ortogonale?

Soluţie.

Ecuaţia vectorială a curbei este

$$\bar{\alpha}(t) = (\ln(2t+1), t^2 + t, 2t).$$

Calculăm

$$\bar{\alpha}'(t) = \left(\frac{2}{2t+1}, 2t+1, 2\right) = \bar{T}(t)$$

$$\bar{\alpha}''(t) = 2\left(-\frac{2}{(2t+1)^2}, 1, 0\right).$$

a) Pentru a determina lungimea arcului $\widehat{OA}$, calculăm

$$\begin{aligned} l_{\widehat{OA}} &= \int_{t_O}^{t_A} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \\ &= \int_{t_O}^{t_A} \sqrt{\left(\frac{2}{2t+1}\right)^2 + (2t+1)^2 + 4} dt \\ &= \int_{t_O}^{t_A} \sqrt{\frac{4 + 4(2t+1)^2 + (2t+1)^4}{(2t+1)^2}} dt \end{aligned}$$

$$= \int_{t_O}^{t_A} \frac{2+(2t+1)^2}{2t+1} dt$$
$$= t^2 + t + \frac{1}{4} + \ln(2t+1)\Big|_{t_O}^{t_A}.$$

Trebuie să mai determinăm coordonatele pe curbă a punctelor O şi A:

$$t_O : \begin{cases} \ln(2t+1) = 0, \\ t^2 + t = 0, \\ 2t = 0, \end{cases} \Rightarrow \boxed{t_O = 0},\ t_A : \begin{cases} \ln(2t+1) = \ln 5, \\ t^2 + t = 6, \\ 2t = 4, \end{cases} \Rightarrow \boxed{t_A = 2}$$

Lungimea arcului $\widehat{OA}$ este

$$l_{\widehat{OA}} = t^2 + t + \frac{1}{4} + \ln(2t+1)\Big|_0^2 = 6 + \ln 5.$$

b) $\mathcal{N} \perp \pi \Rightarrow \bar{T}(t) \perp (1, 0, -1) \Rightarrow t = 0 \Rightarrow M_0(t_0 = 0)$.

$\bar{\alpha}(0) = (0, 0, 0) = \boxed{\bar{M}_0(0)}$

$\bar{\alpha}'(0) = (2, 1, 2) = \boxed{\bar{T}(0)}$

$\bar{\alpha}''(0) = 2\,(-2, 1, 0)$

$$\boxed{\bar{B}(0)} = \bar{\alpha}'(0) \times \bar{\alpha}''(0) = 2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4(-1, -2, 2)$$

$$\boxed{\bar{N}(0)} = \bar{B}(0) \times \bar{T}(0) = 4 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12(-2, 2, 1)$$

$\mathcal{R} : -2x + 2y + z = 0.$

Normala principală în punctul B este $\bar{N}(0) = 12(-2, 2, 1)$, iar versorul ei este

$$\bar{n}(0) = \frac{1}{\|\bar{N}(0)\|}\bar{N}(0) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

c) Urmăm algoritmul din curs:

- calculăm coordonatele punctului de intersecţie al celor două curbe:
$$\begin{cases} \ln(2t+1) = s-1, \\ t^2+t = s^2-1, \qquad \Rightarrow \boxed{t=0}, \ \boxed{s=1} \Rightarrow M_0(0,0,0) \\ 2t = 0, \end{cases}$$
- calculăm vectorul tangentei în M_0 la fiecare din cele două curbe:

$$\vec{T}_C(t=0) = (x'_C(0), y'_C(0), z'_C(t_0)) = (2,1,2)$$

respectiv
$$\vec{T}_{C_1}(s=1) = \big(x'_{C_1}(1), y'_{C_1}(1), z'_{C_1}(1)\big) = (1,2,0).$$

- calculăm cosinusul unghiului vectorilor $\vec{T}_C(t=0)$ şi $\vec{T}_{C_1}(s=1)$

$$\cos(\vec{T}_C(0), \vec{T}_{C_1}(1)) = \frac{<(2,1,2),(1,2,0)>}{\|(2,1,2)\| \cdot \|(1,2,0)\|} = \frac{4\sqrt{5}}{15}.$$

$\sphericalangle(\mathcal{C}, \mathcal{C}_1) = \arccos\dfrac{4\sqrt{5}}{15} \Rightarrow$ curbele $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}_1$ nu sunt ortogonale.

6.2 Elemente de geometrie diferenţială a suprafeţelor

Fie D o mulţime deschisă şi conexă din $\mathbb{R}^2$

$r(u,v) : D \to \mathbb{R}^3$, $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ o funcţie diferenţiabilă pe I.

Definiţia 6.4.

- *Se numeşte* **suprafaţă** *din* $\mathbb{E}_3$ *imaginea funcţiei diferenţiabile* r,

$$S = Im(r) \subset \mathbb{R}^3.$$

- r *se numeşte* **parametrizare**.
- u, v *se numesc* **parametri**.
- *Punctul* $M_0(u_0, v_0)$ *al suprafeţei* S *se numeşte* **punct regulat** *dacă vectorii* $\bar{r}'_u(u_0, v_0)$ *şi* $\bar{r}'_v(u_0, v_0)$ *sunt liniar independenţi.*
- *O curbă* $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ *definită de parametrizarea* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *este* **o curbă pe suprafaţa** S *dacă toate punctele de pe* Γ *sunt şi pe suprafaţa* S, *adică* $\Gamma \subset S$.
- *Curbele*

$$\Gamma_1 : \begin{cases} u = u_0 \\ v = v \end{cases} \qquad \Gamma_2 : \begin{cases} u = u \\ v = v_0 \end{cases}$$

se numesc **o curbele de coordonate ce trec prin** M_0.

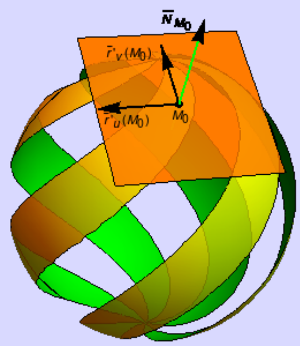
6.2.1 Planul tangent şi normala într-un punct regulat al unei suprafeţe în $\mathbb{E}_3$

Fie $r : D \to \mathbb{R}^3$, $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ o parametrizare a suprafeţei S.

$M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, unde $\begin{cases} x_0 = x(u_0, v_0), \\ y_0 = y(u_0, v_0), \\ z_0 = z(u_0, v_0) \end{cases}$ (sau se mai poate scrie $M_0(u_0, v_0) \in S$) un punct regulat de pe suprafaţă.

Definiţia 6.5.

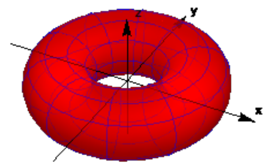
- *Planul ce trece prin M_0 şi are direcţiile $\bar{r}'_u(u_0, v_0)$ şi $\bar{r}'_v(u_0, v_0)$ se numeşte* **planul tangent** *la suprafaţa S în punctul M_0.*
- *Perpendiculara în M_0 pe planul tangent în M_0 la S se numeşte* **normala** *în punctul M_0 la suprafaţa S.*



- *Suprafaţa S se numeşte* **orientabilă** *dacă pe una din feţe versorii normalelor au acelaşi sens, iar pe cealaltă faţă au sens opus.*

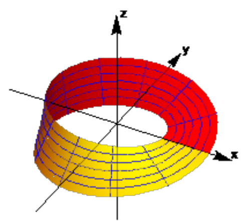
EXEMPLE DE SUPRAFEŢE CLASICE

- **Torul** o suprafaţă orientabilă. El este o suprafață generată de rotația unui cerc în spațiul tridimensional în jurul unei axe din planul său, axă care nu taie cercul.



- **Banda lui Möbius** este o suprafaţă neorientabilă. A fost studiată inițial de August Ferdinand Möbius și Johann Benedict Listing, care au descoperit-o independent în 1858.

  Un exemplu de bandă Möbius poate fi realizat folosind o bucată dreptunghiulară de hârtie, astfel ca unul dintre capete să fie rotit și lipit cu celălalt capăt, pentru a se forma o buclă.



- **Sticla lui Klein** este o suprafaţă neorientabilă.

  https://www.youtube.com/watch?v=sRTKSzAOBr4

Propoziţia 6.3.

- *Vectorul* **normalei** *în punctul* M_0 *la suprafaţa* S *este:*

$$\bar{N}(u_0, v_0) = \vec{r}_u'(u_0, v_0) \times \vec{r}_v'(u_0, v_0) :=^{not} (R_1, R_2, R_3).$$

- *Ecuaţia* **planului tangent** *în punctul* M_0 *la suprafaţa* S *este:*

$$R_1(x - x_0) + R_2(y - y_0) + R_3(z - z_0) = 0.$$

- *Ecuaţia* **normalei** *în punctul M_0 la suprafaţa S este:*

$$\frac{x-x_0}{R_1}=\frac{y-y_0}{R_2}=\frac{z-z_0}{R_3}.$$

Exemplul 6.2. Fie suprafaţa

$$S:\begin{cases} x(u,v)=u \\ y(u,v)=v \\ z(u,v)=u^3+v^3. \end{cases}$$

a) Să se determine punctele de pe suprafaţă în care normala la S este perpendiculară pe planul

$$\pi: 3x+3y-z+11=0.$$

b) Să se calculeze unghiul curbelor $C_1: u=1$ şi $C_2: v=2$.

Soluţie. **a)** Normala la S este perpendiculară pe planul $\pi \Rightarrow \vec{N}_S || \vec{n}_\pi$, unde $\vec{n}_\pi$ este vectorul normalei la planul π. Din ecuaţia planului π putem deduce componentele lui $\vec{n}_\pi$ care sunt coeficienţii lui x, y, z: $\vec{n}_\pi=(3,3,-1)$.

$$\begin{aligned} r(u,v) &= [x(u,v), y(u,v), z(u,v)] = (u, v, u^3+v^3) \\ r'_u(u,v) &= [x'_u(u,v), y'_u(u,v), z'_u(u,v)] = (1,0,3u^2) \\ r'_v(u,v) &= [x'_v(u,v), y'_v(u,v), z'_v(u,v)] = (0,1,3v^2). \end{aligned}$$

Normala la suprafaţa S are direcţia

$$\vec{N}_S=\vec{r}'_u(u,v)\times\vec{r}'_v(u,v)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3u^2 \\ 0 & 1 & 3v^2 \end{vmatrix}=(-3u^2,-3v^2,1).$$

$\vec{N}_S || \vec{n}_\pi \Leftrightarrow \dfrac{-3u^2}{3} = \dfrac{-3v^2}{3} = \dfrac{1}{-1} \Leftrightarrow u^2 = v^2 = 1 \Leftrightarrow u = \pm 1,\ v = \pm 1 \Rightarrow$ punctele sunt

$$\begin{aligned}
&M_1(u=1, v=1) \Leftrightarrow M_1(1,1,2),\\
&M_2(u=1, v=-1) \Leftrightarrow M_2(1,-1,0),\\
&M_3(u=-1, v=1) \Leftrightarrow M_3(-1,1,0),\\
&M_4(u=-1, v=-1) \Leftrightarrow M_4(-1,-1,-2).
\end{aligned}$$

b) Ecuaţiile curbelor $C_1 : u = 1$ şi $C_2 : v = 2$ se obţin înlocuind în ecuaţiile lui S pe $u = 1$, respectiv, $v = 2$:

$$C_1 : \begin{cases} x(1,v) =^{\text{not}} x(v) = 1 \\ y(1,v) =^{\text{not}} y(v) = v \\ z(1,v) =^{\text{not}} z(v) = 1 + v^3, \end{cases} ,\ C_2 : \begin{cases} x(u,2) =^{\text{not}} x(u) = u \\ y(u,2) =^{\text{not}} y(u) = 2 \\ z(u,2) =^{\text{not}} z(u) = u^3 + 8. \end{cases}$$

Punctul de intersecţie al celor două curbe este $\{M_0(u = 1, v = 2)\} = C_1 \cap C_2$.

Calculăm vectorii tangentelor în M_0 la fiecare curbă:

$\vec{T}_{C_1}(M_0) = [x'_{C_1}(v = 2), y'_{C_1}(v = 2), z'_{C_1}(v = 2)] = (0, 1, 3v^2)|_{v=2} = (0, 1, 12)$,

$\vec{T}_{C_2}(M_0) = [x'_{C_2}(u = 1), y'_{C_2}(u = 1), z'_{C_2}(u = 1)] = (1, 0, 3u^2)|_{u=1} = (1, 0, 3)$.

Unghiul format de cele două curbe este unghiul vectorilor $\vec{T}_{C_1}(M_0)$ şi $\vec{T}_{C_2}(M_0)$. Cosinusul unghiului celor doi vectori este

$\cos[\vec{T}_{C_1}(M_0), \vec{T}_{C_2}(M_0)] = \dfrac{<(0,1,12),(1,0,3)>}{\|(0,1,12)\| \cdot \|(1,0,3)\|} = \dfrac{36}{\sqrt{145}\sqrt{10}} = \dfrac{36}{5\sqrt{29}} \Rightarrow$

$\measuredangle(C_1, C_2) = \arccos \dfrac{36\sqrt{29}}{145}$.

6.2.2 Prima formă fundamentală a unei suprafeţe în $\mathbb{E}_3$

Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafaţă definită de

parametrizarea $r(u,v) : D \to \mathbb{R}^3$, $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ care are toate punctele regulate, adică

vectorii $\bar{r}'_u(u,v)$ şi $\bar{r}'_v(u,v)$ sunt liniari independenţi pentru orice $(u,v) \in D$.

Propoziţia 6.4. *Mulţimea*

$$T_M S = \{x\bar{r}'_u(u,v) + y\bar{r}'_v(u,v), x, y \in \mathbb{R}\} = L\left(\{\bar{r}'_u(u,v), \bar{r}'_v(u,v)\}\right) \subset_{SSV} V_3$$

este un subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial al vectorilor liberi V_3*, iar* $B = \{\bar{r}'_u(u,v), \bar{r}'_v(u,v)\}$ *este o bază a sa.*

Definiţia 6.6. *Subspaţiul vectorial*

$$T_M S = \{x\bar{r}'_u(u,v) + y\bar{r}'_v(u,v), x, y \in \mathbb{R}\} \subset V_3$$

se numeşte **spaţiul tangent** *în punctul* M *la suprafaţa* S.

Considerăm produsul scalar canonic din V_3 restricţionat la $T_M S$ definit de forma biliniară simetrică notată:

$$\Phi_M : T_M S \times T_M S \to \mathbb{R},\ \Phi_M(\bar{w}_1, \bar{w}_2) =< \bar{w}_1, \bar{w}_2 > (=^{not} \bar{w}_1.\bar{w}_1).$$

Dacă

$$\bar{w}_1 = x_1\bar{r}'_u(u,v) + x_2\bar{r}'_v(u,v) = (x_1, x_2)_B$$

şi

$$\bar{w}_2 = y_1\bar{r}'_u(u,v) + y_2\bar{r}'_v(u,v) = (y_1, y_2)_B,$$

atunci

$$\begin{aligned}\Phi_M[(x_1,x_2)_B,(y_1,y_2)_B] &= \Phi_M(\bar{w}_1,\bar{w}_2) =< \bar{w}_1,\bar{w}_2 >\\ &=< x_1\bar{r}'_u(u,v)+x_2\bar{r}'_v(u,v), y_1\bar{r}'_u(u,v)+y_2\bar{r}'_v(u,v) >\\ &= x_1y_1\|\bar{r}'_u(u,v)\|^2+(x_1y_2+x_2y_1)\bar{r}'_u(u,v).\bar{r}'_v(u,v)+x_2y_2\|\bar{r}'_v(u,v)\|^2.\end{aligned}$$

Dacă notăm

$$E =^{not} \|\bar{r}'_u(u,v)\|^2,\ F =^{not} \bar{r}'_u(u,v).\bar{r}'_v(u,v),\ G =^{not} \|\bar{r}'_v(u,v)\|^2,$$

atunci

$$\boxed{[\Phi_M[(x_1,x_2)_B,(y_1,y_2)_B] = x_1y_1E+(x_1y_2+x_2y_1)F+x_2y_2G}$$

iar matricea lui Φ_M în baza B este

$$[\Phi_M]_B = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}.$$

Definiţia 6.7.

- *Produsul scalar canonic Φ_M din spatiul tangent în punctul M la suprafaţa S se numeşte* **prima formă fundamentală a supafeţei S în punctul M**.
- *Numerele reale $E(u_0,v_0), F(u_0,v_0), G(u_0,v_0)$ se numesc* **coeficienţii primei forme fundamentale a supafeţei S în punctul $M(u=u_0, v=v_0)$**.
- *Funcţia Φ care asociază fiecărui punct M de pe suprafaţa S produsul scalar Φ_M, $\Phi(M(u,v)) = \Phi_M$ se numeşte* **prima formă fundamentală a supafeţei S**.
- *Se numeşte* **elementul de arc al curbei $\Gamma : \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$ de pe supafaţa S**

$$ds = \sqrt{E[u(t),v(t)]u'(t)^2+2F[u(t),v(t)]u'(t)v'(t)+G[u(t),v(t)]v'(t)^2}dt.$$

- *Se numeşte* **elementul de arie al supafeţei** S

$$d\sigma = \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2}dudv.$$

- *Se numeşte* **metrică pe supafaţa** S

$$ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2.$$

Exemplul 6.3. Fie suprafaţa

$$S : \begin{cases} x(u,v) = \dfrac{1}{2v} + \dfrac{1}{2u} \\ y(u,v) = \dfrac{1}{2v} - \dfrac{1}{2u} \\ z(u,v) = \dfrac{1}{2uv}. \end{cases}$$

a) Să se determine lungimea arcului $\widehat{AB}$ de pe curba $C : v = 2$ pe suprafaţa S, unde $A(u = 1, v = 2)$, $B(u = 2, v = 2)$.

b) Să se determine elementul de arc al curbei C de pe S.

c) Să se determine elementul de arie, metrica şi matricea primei forme fundamentale în punctul A.

Soluţie.

$$\begin{aligned}
r(u,v) &= [x(u,v), y(u,v), z(u,v)] \\
&= \left(\frac{1}{2v}+\frac{1}{2u}, \frac{1}{2v}-\frac{1}{2u}, \frac{1}{2uv}\right) \\
r'_u(u,v) &= [x'_u(u,v), y'_u(u,v), z'_u(u,v)] \\
&= \left(-\frac{1}{2u^2}, \frac{1}{2u^2}, -\frac{1}{2u^2v}\right) \\
r'_v(u,v) &= [x'_v(u,v), y'_v(u,v), z'_v(u,v)] \\
&= \left(-\frac{1}{2v^2}, -\frac{1}{2v^2}, -\frac{1}{2uv^2}\right)
\end{aligned}$$

a) Ecuaţiile parametrice ale curbei $C : v = 2 \Leftrightarrow C : \{u = t, v = 2\}$ se obţin din ecuaţiile lui S pentru $u = t$ şi $v = 2$:

$$C : \begin{cases} x(t,2) =^{\text{not}} x(t) = \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2t} \\ \\ y(t,2) =^{\text{not}} y(t) = \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2t} \\ \\ z(t,2) =^{\text{not}} z(t) = \dfrac{1}{4t}. \end{cases}$$

Cum $A(u = 1, v = 2)$ se obţine pe curba $C : v = 2 \Rightarrow A(t = u = 1)$, iar $B(u = 2, v = 2)$ are pe curba $C : v = 2$ coordonatele $B(t = u = 2) \Rightarrow$

$$L_{AB} = \int_1^2 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt.$$

Cum

$$x'(t) = -\frac{1}{2t^2},\ y'(t) = \frac{1}{2t^2},\ z'(t) = -\frac{1}{4t^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
L_{\widehat{AB}} &= \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{4t^4} + \frac{1}{4t^4} + \frac{1}{16t^4}}dt \\
&= \int_1^2 \sqrt{\frac{9}{16t^4}}dt = \frac{3}{4}\int_1^2 t^{-2}dt \\
&= \frac{3}{4}\left.\frac{t^{-1}}{-1}\right|_1^2 = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

b) Elementul de arc al curbei C este:

$$ds = \sqrt{E[u(t),v(t)]u'(t)^2 + 2F[u(t),v(t)]u'(t)v'(t) + G[u(t),v(t)]v'(t)^2}dt.$$

$$\begin{aligned}
E(u,v) &= \|r'_u(u,v)\|^2 = \frac{1}{4u^4} + \frac{1}{4u^4} + \frac{1}{4u^4v^2} \\
&= \frac{1}{2u^4} + \frac{1}{4u^4v^2} \\
F(u,v) &= r'_u(u,v).r'_v(u,v) = \frac{1}{4u^2v^2} - \frac{1}{4u^2v^2} + \frac{1}{4u^3v^3} \\
&= \frac{1}{4u^3v^3} \\
G(u,v) &= \|r'_v(u,v)\|^2 = \frac{1}{4v^4} + \frac{1}{4v^4} + \frac{1}{4u^2v^4} \\
&= \frac{1}{2v^4} + \frac{1}{4u^2v^4}.
\end{aligned}$$

Parametrizăm curba $C : \begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v'(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$E(t,2) = \frac{1}{2t^4} + \frac{1}{16t^4} = \frac{9}{16t^4},\ F(t,2) = \frac{1}{32t^3},\ G(t,2) = \frac{1}{32} + \frac{1}{64t^2}$$

Cum $u'(t) = t' = 1$, şi $v'(t) = 0$, atunci elementul de arc este

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{E(t,2)u'(t)^2 + 2F(t,2)u'(t)v'(t) + G(t,2)v'(t)^2}dt \\
&= \sqrt{E(t,2)}dt = \sqrt{\frac{9}{16t^4}}dt = \frac{3}{4t^2}dt.
\end{aligned}$$

c) Elementul de arie este

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2}dudv \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2u^4} + \frac{1}{4u^4v^2}\right)\left(\frac{1}{2v^4} + \frac{1}{4u^2v^4}\right) - \frac{1}{16u^6v^6}}dudv \\ &= \frac{1}{2u^2v^2}\sqrt{1 + \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{2v^2}}dudv. \end{aligned}$$

Metrica pe S este

$$\begin{aligned} ds^2 &= E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2 \\ &= \left(\frac{1}{2u^4} + \frac{1}{4u^4v^2}\right)du^2 + \frac{1}{2u^3v^3}dudv + \left(\frac{1}{2v^4} + \frac{1}{4u^2v^4}\right)dv^2. \end{aligned}$$

Calculăm coeficienţii primei forme fundamentale în punctul $A(u=1, v=2)$:

$$E(1,2) = \frac{9}{16},\ F(1,2) = \frac{1}{32},\ G(1,2) = \frac{3}{64}.$$

Atunci matricea primei forme fundamentale este

$$[\Phi_A] = \begin{bmatrix} E(1,2) & F(1,2) \\ F(1,2) & G(1,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & \frac{1}{32} \\ \\ \frac{1}{32} & \frac{3}{64} \end{bmatrix}.$$

CAPITOLUL 7

CONICE ŞI CUADRICE

7.1 Conice

Conicele se obţin din intersecţia unui con cu un plan.

7.1.1 Cercul

$$\mathcal{C} : (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2. \tag{7.1}$$

Ecuaţiile parametrice polare ale cercului:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x_C + r\cos t \\ y = y_C + r\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi), \tag{7.2}$$

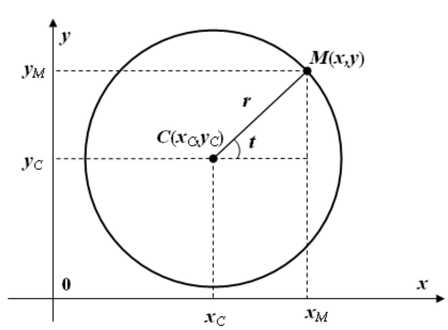


Figure 7.1. Cercul de centru C şi rază r.

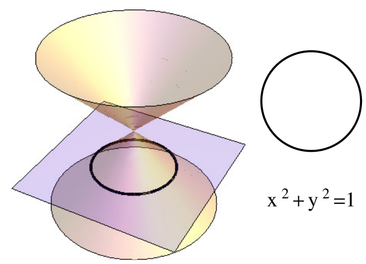


Figure 7.2. Cercul de centru $O(0,0)$ şi rază 1.

7.1.2 Elipsa

$$\mathcal{E}: \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7.3}$$

unde $b^2 = a^2 - c^2$.

Ecuaţiile parametrice polare ale elipsei:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi).$$

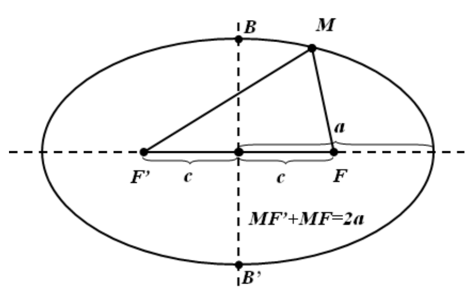


Figure 7.3. Elipsa de focare F şi F'.

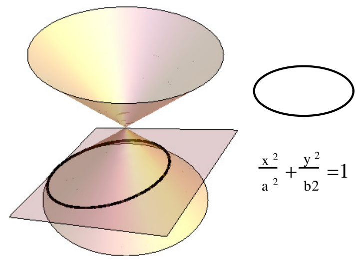


Figure 7.4. Elipsa de semiaxe a şi b.

7.1.3 Hiperbola

$$\mathcal{H}: \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7.4}$$

unde $b^2 = c^2 - a^2$.

Ecuaţiile parametrice ale hiperbolei:

$$\begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Reamintim că prin $\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ şi respectiv $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, am notat funcţiile trigonometrice hiperbolice **sinus hiperbolic**, respectiv **cosinus hiperbolic**.

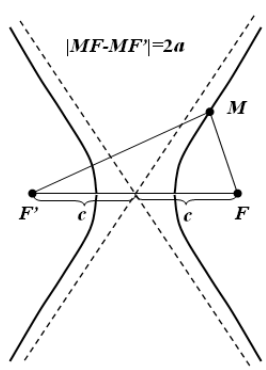


Figure 7.5. Hiperbola de focare F şi F'.

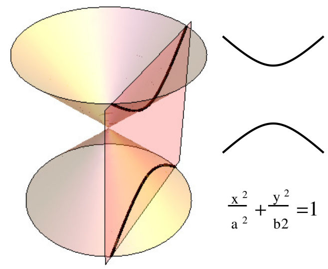


Figure 7.6. Hiperbola de semiaxe a şi b.

7.1.4 Parabola

$$\mathcal{P}: \; y^2 = 2px. \tag{7.5}$$

Această ecuaţie se numeşte **ecuaţia carteziană implicită a parabolei** $\mathcal{P}$.

Ecuaţiile parametrice ale parabolei:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ \\ y = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

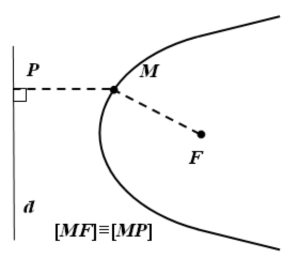


Figure 7.7. Parabola de focar F şi directoare d.

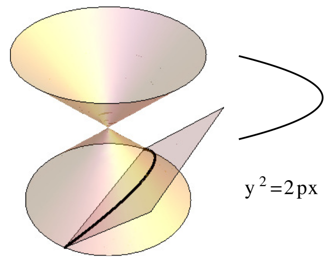


Figure 7.8. Parabola.

7.2 Cuadrice

7.2.1 Elipsoidul

Este cuadrica de ecuaţie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

unde a, b, c se numesc **semiaxele elipsoidului.**

Ecuaţiile parametrice ale elipsoidului sunt:

$$\begin{cases} x = a \sin \theta \cos \varphi \\ y = b \sin \theta \sin \varphi \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]. \\ z = c \cos \theta \end{cases}$$

Sfera este un elipsoid cu semiaxe egale $a = b = c = R$.

Ecuaţiile parametrice ale sferei sunt:

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi] \\ z = R \cos \theta \end{cases}$$

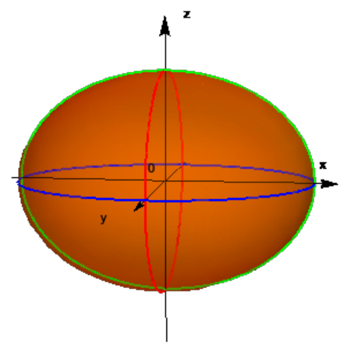


Figura 1 - Elipsoidul

7.2.2 Hiperboloidul

7.2.2.1 Hiperboloidul cu o pânză

Este cuadrica de ecuaţie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ecuaţiile parametrice ale hiperboloidului cu o pânză sunt:

$$\begin{cases} x = a\cos u \; ch\; v \\ y = b\sin u \; ch\; v \qquad\qquad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}. \\ z = c\; sh\; v \end{cases}$$

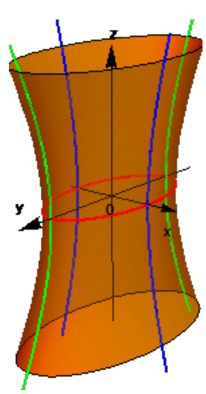


Figura 2 - Hiperboloidul cu o pânză

7.2.2.2 Hiperboloidul cu două pânze

Este cuadrica de ecuaţie:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Ecuaţiile parametrice ale hiperboloidului cu două pânze sunt:

$$\begin{cases} x = a\cos u \; sh\; v \\ y = b\sin u \; sh\; v \\ z = c\; ch\; v \end{cases} \qquad u\in[0,2\pi]\,,v\in\mathbb{R}.$$

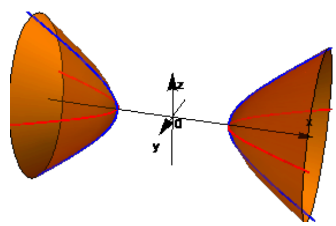


Figura 3 - Hiperboloidul cu două pânze

7.2.3 Paraboloidul

7.2.3.1 Paraboloidul eliptic

Paraboloidul eliptic este cuadrica de ecuaţie:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz, c>0.$$

Ecuaţiile parametrice ale paraboloidului eliptic sunt:

$$\begin{cases} x = au\cos v \\ y = bu\sin v \\ z = \frac{u^2}{2c}. \end{cases} \qquad u\in\mathbb{R}, v\in\mathbb{R}.$$

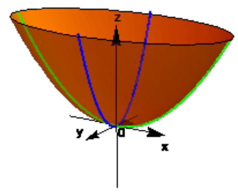


Figura 4 - Paraboloidul eliptic

7.2.3.2 Paraboloidul hiperbolic

Este cuadrica de ecuaţie:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2cz, c < 0.$$

Ecuaţiile parametrice ale paraboloidului hiperbolic sunt:

$$\begin{cases} x = au\ ch\ v \\ y = bu\ sh\ v \qquad\qquad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}. \\ z = \frac{u^2}{2c} \end{cases}$$

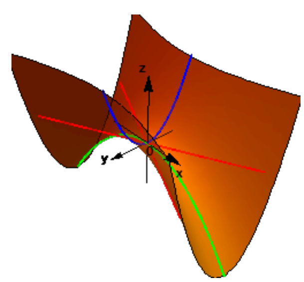


Figura 5 - Paraboloidul hiperbolic

7.2.4 Conul

Se numeşte **con** cuadrica de ecuaţie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Ecuaţiile parametrice ale conului sunt:

$$\begin{cases} x = a\cos v \\ y = b\sin v \qquad\qquad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}. \\ z = c \end{cases}$$

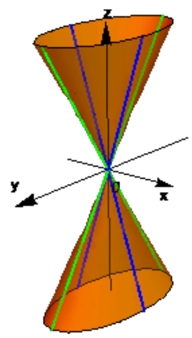


Figura 6 - Conul

7.2.5 Cilindrul

7.2.5.1 Cilindrul eliptic

Se numeşte **cilindru eliptic** cuadrica de ecuaţie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Ecuaţiile parametrice ale cilindrului eliptic sunt:

$$\begin{cases} x = a\cos v \\ y = b\sin v \qquad\qquad z \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}. \\ z = z \end{cases}$$

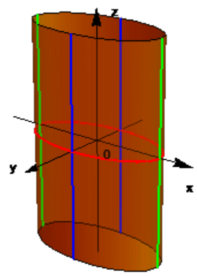


Figura 7 - Cilindrul eliptic

7.2.5.2 Cilindrul hiperbolic

Se numeşte **cilindru hiperbolic** cuadrica de ecuaţie:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Ecuaţiile parametrice ale cilindrului hiperbolic sunt:

$$\begin{cases} x = a\ sh\ v \\ y = b\ ch\ v \qquad\qquad z \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}. \\ z = z \end{cases}$$

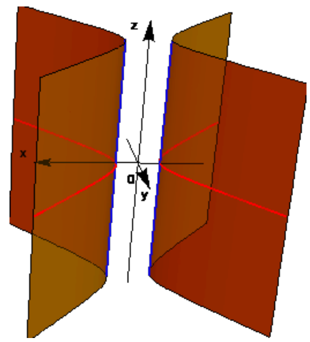


Figura 8 - Cilindrul hiperbolic

7.2.5.3 Cilindrul parabolic

Se numeşte **cilindru parabolic** cuadrica de ecuaţie:

$$y^2 = 2px.$$

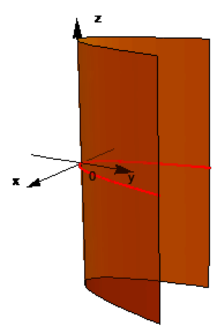


Figura 9 - Cilindrul parabolic