SETUL 1

1) Să se exprime câte un majorant al erorii absolute în funcţie de erorile absolute ale termenilor în calculul expresiilor:

a) $u = (x + y) + z$,
b) $u = (x + y) - z$,
c) $u = x(y \cdot z)$,
d) $u = \left(\frac{x}{z}\right)y$,
e) $u = x(y + z)$,
f) $u = \frac{x - y}{z}$.

2. Pentru expresiile de la problema 1) să se exprime câte un majorant al erorii relative în funcţie de erorile relative ale termenilor.

3. Presupunând că se lucrează cu două zecimale exacte şi aproximare prin lipsă, să se calculeze I_4 în cazul integralei $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx > 0,\ n \in \mathrm{N}$, utilizând formula de recurenţă:

$I_n + 5I_{n-1} = \frac{1}{n},\ n \in \mathrm{N}^*$, cu $I_0 = 0.18$. Cum poate fi interpretat rezultatul ?

SETUL 2

1) Să se calculeze inversele şi determinanţii următoarelor matrice prin două metode, apoi să se compare şi comenteze rezultatele obţinute:

a) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\underline{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\underline{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Să se rezolve următoarele ecuaţii matriceale:

a) $\underline{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \underline{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

SETUL 3

Să se rezolve prin două metode următoarele sisteme, apoi să se compare şi să se discute rezultatele obţinute:

a) $\begin{cases} 2x_1 - 12x_2 + x_3 = -25, \\ 11x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 9x_3 = 4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 5; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = -7; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 10, \\ 13x_1 - 3x_2 - x_3 = 6, \\ -x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 1; \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 - x_3 = 14, \\ 11x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 31, \\ 4x_1 + 5x_2 + 14x_3 = -1; \end{cases}$

f) $\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 = -8, \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 = -1; \end{cases}$

SETUL 4

1. Să se calculeze valorile proprii, vectorii proprii şi raza spectrală pentru următoarele matrice:

a) $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ -6 & -22 & -6 \end{bmatrix}$; b) $\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 15 & 10 \\ -4 & -29 & -19 \end{bmatrix}$; c) $\underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$;

d) $\underline{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.5 & 5 & 0.5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Să se determine domenii ale planului complex (inclusiv reprezentări grafice aferente) în care se află spectrele următoarelor matrice:

a) $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$; c) $\underline{C} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$; d) $\underline{D} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 8 \end{bmatrix}$.

SETUL 5

Să se determine condiţiile pe care trebuie să le satisfacă parametrul real k pentru ca următoarele matrice să aibă toate valorile proprii cu părţi reale strict negative:

a) $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & k+2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$; b) $\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5k & -k & -1 \end{bmatrix}$; c) $\underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & k-1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$;

d) $\underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

SETUL 6

Pentru următoarele ecuaţii să se efectueze câte trei iteraţii în cazul a două metode de rezolvare numerică. Erorile admise sunt $\varepsilon_x = 10^{-3}$ şi $\varepsilon_f = 10^{-2}$. Să se compare şi să se discute rezultatele obţinute:

a) $x = 4 + \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $x \in [4, 5]$;

b) $\dfrac{x}{2+\sqrt[4]{x}} = 1$, $x \in [3, 4]$;

c) $x^3 - x - 2 = 0$, $x \in [1, 2]$;

d) $x^2 = \sin x$, $x \in [0.7, 1]$;

e) $\arcsin \dfrac{x+1}{4} = x$, $x \in [0, 1.5]$;

f) $x^5 + 5x + 1 = 0$, $x \in [-1, 0]$;

g) $x^3 + x = 1000$, $x \in [9, 10]$;

h) $arctgx + acrtg10x = 0.75$, $x \in [0, 1]$.

SETUL 7

Să se efectueze câte trei iteraţii ale metodei Newton în cazul rezolvării următoarelor sisteme. Erorile admise sunt $\varepsilon_x = 0.01$, $\varepsilon_f = 0.1$.

a) $\begin{cases} x_1^7 - 5x_1^2 x_2^4 + 1510 = 0, \\ x_2^5 - 3x_1^4 = 105, \end{cases}$ $\quad (x_1, x_2) \in [1.5\ 2.5] \times [2.5\ 3.5]$;

b) $\begin{cases} x_1 + x_1^2 - 2x_2 x_3 = 0.1, \\ x_2 - x_2^2 + 3x_1 x_3 = -0.2, \\ x_3 + x_3^2 + 2x_1 x_2 = 0.3, \end{cases}$ $\quad \underline{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Să se aplice apoi altă metodă de rezolvare, să se compare şi să se comenteze rezultatele obţinute.

SETUL 8

Să se rezolve, aplicând două metode de soluţionare numerică, următoarele ecuaţii diferenţiale ordinare, apoi să se compare şi să se discute rezultatele obţinute:

a) $xy' - y + x = 0$, $\quad x \in [1; 2]$, $\quad y(1) = 1$;

b) $y' + 2xy = x^3$, $\quad x \in [0; 1]$, $\quad y(0) = \dfrac{e-1}{2}$;

c) $y' - \dfrac{4}{x} y = x\sqrt{y}$, $\quad x \in [1; 2]$, $\quad y(1) = 2$;

d) $y' + y^3 = x^2 + 1$, $\quad x \in [0; 1]$, $\quad y(0) = 0$;

e) $y' - \dfrac{y}{x} = x, \quad x \in [1; 2], \quad y(1) = 2$;

f) $y' = y^2 + x^2 + 1, \quad x \in [0; 1], \quad y(0) = 0$.

Să se rezolve ecuaţiile a) … f) în situaţia în care *y'* este înlocuit cu *y"*.

SETUL 9

1) Să se determine polinomul de interpolare Newton de speţa 1 care aproximează funcţia *f*, cu valorile din tabelul alăturat:

a)

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3	4
$y_i = f(x_i)$	0	1	8	27	64

b)

i	0	1	2	3	4
x_i	–1	1	3	5	7
$y_i = f(x_i)$	0	1	4	9	16

c)

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	1	2	3	4	5
$y_i = f(x_i)$	5.2	8	10.4	12.4	14	15.2

d)

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	1.2	2.4	3.6	4.8	6
$y_i = f(x_i)$	3	6.84	14.25	27	39.21	51

Să se aproximeze:
a) f(0.1) şi f(2.8); b) f(1.5) şi f(2.9); c) f(2.5) şi f(4.8); d) f(0.6) şi f(0.9).

2) Să se exprime aproximarea numerică parabolică prin metoda celor mai mici pătrate şi funcţiile spline de interpolare parabolică în cazul aproximării funcţiei f cu valorile din tabelul alăturat (tabelele a) … d) de la problema anterioară). Să se aproximeze:
a) f(0.1) şi f(2.8); b) f(1.5) şi f(2.9); c) f(2.5) şi f(4.8); d) f(0.6) şi f(0.9).
Să se compare şi comenteze rezultatele obţinute.

SETUL 10

1) Să se rezolve următoarele probleme probleme de optimizare fără restricţii:

a) $\text{PFR}: \hat{\mathbf{v}} = \arg \max_{\mathbf{v}} \ J = f(\mathbf{v}) = \dfrac{1}{(v_1 - 1)^2 + (v_2 - 1)^2 + (v_3 - 1)^2 + a^2}$,

$\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T \in R^3$, $a \in R \setminus \{0\}$;

b) $\text{PFR}: \hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v}} \ J = f(\mathbf{v}) = 100(v_1 - v_2)^2 + (v_1 - 1)^2$, $\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2]^T \in R^2$;

c) PFR : $\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = \dfrac{v_1^4 - 16v_1^2 + 5v_1}{2} + \dfrac{v_2^4 - 16v_2^2 + 5v_2}{2} +$
$+ (v_3 - 1)^2 + (v_4 - 1)^2 + (v_5 - 1)^2$, $\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5]^T \in R^5$.

2) Să se rezolve următoarele probleme de programare liniară:

a) PREI : $\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = 5v_1 + 7v_2 + 10v_3$, $\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T \in R^3$,

supusă la:
$v_1 + v_2 + v_3 \le 4$,
$v_1 + 2v_2 + 4v_3 \ge 5$,
$v_1, v_2, v_3 \ge 0$;

b) PREI : $\hat{\mathbf{v}} = \arg \max_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = 4v_1 + 5v_2$, $\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2]^T \in R^2$,

supusă la:
$v_1 + v_2 \le 5$,
$v_1 + 2v_2 \le 7$,
$v_1 + 4v_2 \le 10$,
$v_1, v_2 \ge 0$;

c) PREI : $\hat{\mathbf{v}} = \arg \max_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = 2v_1 - 4v_2 + 4v_3$, $\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T \in R^3$,

supusă la:
$v_1 + 2v_2 + v_3 \le 30$,
$v_1 + v_2 = 10$,
$v_1 + 2v_2 + v_3 \ge 8$,
$v_1, v_2, v_3 \ge 0$.

3) Să se rezolve următoarele probleme de optimizare cu restricţii de tip inegalitate (PRI):

a) PRI : $\hat{v} = \arg \max_{v} J = f(v) = e^v + \sin(6v)$, $v \in R$,

supusă la: $0 \le v \le 1$;

b) PRI : $\hat{v} = \arg \max_{v} J = f(v) = 10 + \dfrac{1}{(v - 0.16)^2 + 0.1} \sin(\dfrac{1}{v})$, $v \in R \setminus \{0\}$,

supusă la: $0.01 \le v \le 0.3$;

c) PRI : $\hat{\mathbf{v}} = \arg \max_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = v_1^2 + v_2^2 + v_1 v_2 + 2v_1$, $\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2]^T \in R^2$,

supusă la:
$\dfrac{3}{2} - v_1^2 - v_2^2 \ge 0$,
$v_2 \le 0$;

d) PRI : $\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = v_1^2 + v_2$, $\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2]^T \in R^2$,

supusă la:
$v_2^3 - v_1^2 \ge 0$;

e) PRI : $\hat{\mathbf{v}} = \arg \max_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = v_1^2 + v_2^2$, $\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2]^T \in R^2$,

supusă la:
$v_1 \ge 0$,
$v_2 \ge 0$,

$1-(v_1-4)^2-v_2{}^2 \geq 0$,

$4-(v_1-1)^2-v_2{}^2 \geq 0$;

f) PRI : $\hat{\mathbf{v}} = \arg\min\limits_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = (v_1-1)^2+(v_2-\alpha)^2$, $\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2]^T \in R^2$, $\alpha \in R$,

supusă la:

$-v_2+4 \geq 0$,

$v_1+\frac{1}{2}v_2{}^2 \geq 0$,

$-v_1-v_2+4 \geq 0$;

g) PRI : $\hat{\mathbf{v}} = \arg\min\limits_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = \frac{1}{(v_1{}^2+4v_2{}^2-100)^2}$, $\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2]^T \in R^2$,

supusă la:

$-v_2+4 \geq 0$,

$\mathrm{v}_1+\frac{1}{2}v_2|v_2| \geq 0$,

$-v_1-v_2+4 \geq 0$;

h) PRI : $\hat{\mathbf{v}} = \arg\max\limits_{\mathbf{v}} J = f(\mathbf{v}) = \frac{1}{(v_1-2)^2+(v_2-2)^2+1}$, $\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2]^T \in R^2$,

supusă la:

$|v_i| \leq \frac{1}{2}$, $i = \overline{1,2}$.