Cap. 7. Metode de aproximare numerică a funcţiilor

7. 1. Punerea problemei

Apare în multe situaţii din ştiinţă şi tehnică în general şi din domeniile automatică, informatică şi calculatoare în particular. În aceste domenii apar aplicaţii în care *nu se cunoaşte expresia analitică a funcţiei care trebuie aproximată, ci doar valorile ei într-un anumit număr de puncte* (obţinute pe cale analitică sau experimentală).

Punerea problemei (cont'd 1)

Interesează obţinerea aproximativă a valorilor corespunzătoare altor puncte + Prezintă interes şi *determinarea acelor puncte corespunzătoare unor valori date* (de exemplu, zero) ale funcţiei.

În cazul general al problemei aproximării numerice a funcţiilor, se consideră o funcţie

$$f: [a, b] \to R . \qquad (1.1)$$

Se cere determinarea unei alte funcţii

$$g: [a, b] \to R , \qquad (1.2)$$

Punerea problemei (cont'd 2)

având o expresie relativ simplă, care să aproximeze cât mai bine funcţia f în intervalul [a, b], adică g(x) să fie cât mai apropiat de y = f(x), $\forall x \in [a, b]$.

Problema apare în următoarele două **situaţii posibile**:

a) dacă expresia analitică a funcţiei f, y=f(x), este cunoscută, dar de formă relativ complicată, utilizarea sa în calcule ulterioare fiind incomodă;

Punerea problemei (cont'd 3)

b) dacă expresia analitică a funcţiei f, $y=f(x)$, nu este cunoscută, ea fiind definită printr-un set de puncte determinate analitic sau experimental.

Pentru situaţia b), frecvent întâlnită în domeniile menţionate, se consideră că *sunt cunoscute (n+1) puncte distincte* definite de perechile de valori:

$$(x_i,\ y_i = f(x_i))\ ,\ i = 0 \ldots n\ . \qquad (1.3)$$

Punerea problemei (cont'd 4)

În cazul cel mai general, cele (n+1) puncte distincte pot fi oarecari în intervalul [a, b]. Însă, în majoritatea aplicaţiilor ele sunt *echidistante*, cu pasul de discretizare h > 0, primul şi ultimul punct corespunzând limitelor intervalului, adică

$$x_0 = a, x_n = b, x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{n}, i = \overline{0, n-1} \quad . \tag{1.4}$$

Punerea problemei (cont'd 5)

În situaţiile practice nu este neapărat necesară obţinerea explicită a funcţiei de aproximare g, fiind suficientă găsirea valorilor $g(x), \forall x \in [a,b]$. Dacă valorile lui x pentru care se aproximează funcţia f aparţin intervalului [a, b], atunci se utilizează termenul de **interpolare** pentru problema enunţată. Dacă problema se extinde şi în afara intervalului [a, b], atunci se utilizează termenul de **extrapolare**. În sens larg: ***interpolare*** pentru ambele situaţii ale problemei.

Punerea problemei (cont'd 6)

Pentru *obţinerea funcţiilor de aproximare* g se utilizează, de regulă, **combinaţii liniare** ale unor funcţii de formă simplă aparţinând unei clase de funcţii $\{g_i \mid i=\overline{0,n}\}$, de forma

$$g(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \ldots + a_n g_n(x), \quad \forall x \in [a,b] \quad (1.5)$$

unde $a_i, i=\overline{0,n}$, sunt coeficienţi reali.

Punerea problemei (cont'd 7)

Cele mai utilizate ***clase de funcţii de aproximare***:

a) *monoame* $\{x^i, i=\overline{0,n}\}$, care duc la polinoame de aproximare:

$$g(x)=P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n; \qquad (1.6)$$

b) funcţii *exponenţiale* $\{e^{b_ix}, i=\overline{0,n}\}$, care duc la funcţii de aproximare:

$$g(x)=a_0e^{b_0x}+a_1e^{b_1x}+a_2e^{b_2x}+\ldots+a_ne^{b_nx}; \qquad (1.7)$$

c) funcţii *trigonometrice* $\{\sin x^i, \cos x^i \mid i = 0 \ldots n\}$, care duc la:

$$g(x)=a_0+a_1\sin x+a_2\sin x^2+\ldots+a_n\sin x^n+$$
$$+b_0+b_1\cos x+b_2\cos x^2+\ldots+b_n\cos x^n \qquad (1.8)$$

Punerea problemei (cont'd 8)

În relaţiile (1.6) … (1.8) coeficienţii a_i, $i=0…n$, şi b_j, $j=0…m$, sunt reali.

În aplicaţii practice de interpolare, pentru alegerea funcţiei de aproximare este necesară cunoaşterea formei funcţiei care trebuie aproximată utilizând *informaţiile primare privind problema din care a fost construit modelul* matematic care include funcţia care trebuie aproximată.

Punerea problemei (cont'd 9)

Dacă nu există astfel de informaţii, atunci cel mai des utilizate sunt ***polinoamele de interpolare*** definite de (1.6), cu **avantaje**:

- valorile polinoamelor se pot calcula relativ uşor;
- sumele, diferenţele, produsele de polinoame precum şi derivarea şi integrarea polinoamelor au ca rezultat polinoame;
- schimbările de scară şi translaţiile sunt relativ simple, având ca rezultat polinoamele $P_n(ax)$ şi respectiv $P_n(x+a)$, cu $a \neq 0$;
- teoria aproximării polinoamelor nu ridică probleme deosebite.

Punerea problemei (cont'd 10)

Remember – din teoria aproximării polinoamelor – ***teorema de aproximare a lui Weierstrass***: Dacă funcţia f este continuă pe [a, b], atunci ∀ ε > 0 există un polinom P_n de grad n = n(ε) astfel încât $| f(x) - P_n(x) | < \varepsilon, \forall x \in [a, b]$.

Observaţii:

1. Teorema oferă justificarea teoretică a faptului că, în cazul utilizării polinoamelor de interpolare, eroarea de aproximare poate fi făcută oricât de mică.

Punerea problemei (cont'd 11)

2. Utilitatea practică a teoremei este relativ redusă datorită modalităţilor de generare a polinoamelor de aproximare şi, în plus, necunoaşterii expresiei f(x).

3. Teorema oferă şi suportul teoretic de demonstrare a faptului că sistemele fuzzy şi reţelele neuronale artificiale sunt aproximatori universali.

Punerea problemei (cont'd 12)

Sunt tratate ***funcţiile de aproximare polinomială*** ! = metodele de determinare explicită sau implicită a coeficienţilor polinomului de aproximare P, notat şi cu P_n sau P_m. Metodele pot fi extinse relativ simplu, cu modificările de rigoare, la alte clase de funcţii.

În cazul aproximării **funcţiilor de mai multe variabile**, pot fi utilizate metode asemănătoare însă adaptate corespunzător.

Punerea problemei (cont'd 13)

În aplicaţii din domeniile automaticii, calculatoarelor şi informaticii apare uneori şi necesitatea **aproximării inverse**, adică a găsirii valorilor argumentului x corespunzătoare unei valori date f(x) (în particular, nule).

7.2. Aproximarea prin interpolare polinomială

Se consideră o funcţie reală f: [a, b] → *R*, pentru care sunt cunoscute valorile y_i = $f(x_i)$ în (n+1) puncte distincte x_i, $i=\overline{0,n}$, din intervalul [a, b], adică perechile de valori

$$(x_0, y_0);(x_1, y_1);(x_2, y_2);...;(x_n, y_n)\,. \qquad (2.1)$$

În general, punctele pot fi oarecari, dar, de regulă, ele sunt **echidistante**, cu pasul de discretizare h

$$x_0 = a, x_n = b, x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{n}, i = \overline{0, n-1}\,. \qquad (2.2)$$

Aproximarea prin interpolare polinomială (cont'd 1)

Se cere să se determine polinomul P_n, grad P_n = n:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n,\ \forall x \in [a,b],\ a_i \in R,\ i = \overline{0,n}, \quad (2.3)$$

care să treacă prin punctele date, deci să verifice condiţiile

$$P_n(x_i) = y_i,\ i = \overline{0,n}. \quad (2.4)$$

Scriind detaliat (2.4) → sistemul liniar (2.5) de (n+1) ecuaţii cu (n+1) necunoscute reprezentate de coeficienţii a_0, a_1, a_2, … ,a_n:

Aproximarea prin interpolare polinomială (cont’d 2)

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 {x_0}^2 + \ldots + a_n {x_0}^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_1}^2 + \ldots + a_n {x_1}^n = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 {x_2}^2 + \ldots + a_n {x_2}^n = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 {x_n}^2 + \ldots + a_n {x_n}^n = y_n \end{cases} . \qquad (2.5)$$

Determinantul Δ al matricei sistemului (2.5) – de tip Vandermonde:

Aproximarea prin interpolare polinomială (cont'd 3)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\ 2} & \ldots\ldots x_0^{\ n} \\ 1 & x_1 & x_1^{\ 2} & \ldots\ldots x_1^{\ n} \\ .. & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 1 & x_n & x_n^{\ 2} & \ldots\ldots x_n^{\ n} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i,j=\overline{0,n} \\ i>j}} (x_i - x_j) \quad . \qquad (2.6)$$

Punctele $x_i,\ i=\overline{0,n}$ sunt distincte $\rightarrow$ $\Delta \neq 0$ $\rightarrow$ sistemul (2.5) este compatibil determinat $\rightarrow$ **polinomul de aproximare prin interpolare P_n este univoc definit**.

Aproximarea prin interpolare polinomială (cont'd 4)

Metodele de interpolare se deosebesc între ele prin modul de determinare a acestui polinom unic sau a unor forme echivalente ale sale.

În cazul majorităţii polinoamelor de interpolare se operează cu ***calculul cu diferenţe*** aplicate mulţimii de puncte (2.1). **Tipuri de diferenţe**:

- diferenţele *finite directe* ("la dreapta" sau "înainte");
- diferenţele *inverse* ("la stânga" sau "înapoi");
- diferenţele *simetrice* ("centrale").

Aproximarea prin interpolare polinomială (cont'd 4)

Primul tip ! **Diferenţele finite directe de ordinul 1**, calculate atât pentru x cât şi pentru y, definite:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{2.7}$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{2.8}$$

Observaţie: $\Delta x_i = h$, $i = 0 \ldots n-1$ pentru puncte echidistante.

Diferenţele finite directe de ordinul 2:

$$\Delta y_i^2 = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \quad i = \overline{0, n-2}. \tag{2.9}$$

Aproximarea prin interpolare polinomială (cont'd 5)

Din (2.8) şi (2.9) → **relaţia generală de definire a diferenţei directe de ordinul k**, k = 1 … n:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \quad i = \overline{0, n-k}. \tag{2.10}$$

În calculele practice sunt utilizate **tabele de diferenţe**, exemplificate pentru cazul n = 3:

Aproximarea prin interpolare polinomială (cont'd 6)

x	$y=\Delta^0 y$	$\Delta y=\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2		
x_3	y_3			

Aproximarea prin interpolare polinomială (cont'd 7)

Diversele polinoame de interpolare se pot scrie mai simplu dacă se defineşte **puterea generalizată de ordinul k**, k = 0, 1, 2, 3, ..., a unei valori numerice x, notată cu $x^{[k]}$, sub forma produsului de k factori

$$x^{[k]} = x(x-h)(x-2h)(x-3h)...[x-(k-1)h] \quad , \qquad (2.11)$$

cu h – constantă cunoscută.

Observaţii: 1. Pentru $k = 0 \Rightarrow x^{[0]} = 1$.

2. Pentru $k = 1 \Rightarrow x^{[1]} = x$, adică puterea generalizată se reduce la cea clasică.

Aproximarea prin interpolare polinomială (cont'd 8)

Cel mai frecvent utilizate *polinoame de interpolare*:

- de tip Newton, de speţa 1 şi 2;
- de tip Gauss, de speţa 1 şi 2;
- de tip Stirling;
- de tip Bessel;
- de tip Lagrange.

Polinoamele de interpolare de tip Newton de speţa 1

Enunţul problemei de aproximare prin interpolare – prezentat anterior – relaţiile (2.1) ... (2.3). Polinomul de interpolare de tip Newton de speţa 1:

$$P_n = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + ... + a_n(x - x_0)^{[n]}, \qquad (2.12)$$

este necesară determinarea coeficienţilor $a_k,\ k = \overline{0,n}$. Rescrierea condiţiilor (2.4) sub forma echivalentă

$$\Delta^k P_n(x_0) = \Delta^k y_0,\ k = \overline{0,n}. \qquad (2.13)$$

Newton de speţa 1 (cont'd 1)

Utilizând (2.2) care exprimă echidistanţa, cu pasul de discretizare h, a punctelor $x_i,\ i=\overline{0,n}$ $\Rightarrow$ puterile generalizate pot fi transformate sub forma

$$(x-x_0)^{[k]}=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{k-1}),\ k=\overline{1,n}. \quad (2.14)$$

Aplicând condiţiile (2.13) pentru k = 0 →

$$\Delta^0 P_n(x_0)=\Delta^0 y_0 \Leftrightarrow P_n(x_0)=y_0 \Leftrightarrow a_0=y_0, \quad (2.15)$$

→ a fost obţinut primul coeficient.

Newton de speţa 1 (cont'd 2)

Aplicând din nou (2.13) pentru k = 1 →

$$\Delta P_n(x_0) = y_0 \Leftrightarrow P_n(x_1) - P_n(x_0) = \Delta y_0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_0 + a_1(x_1 - x_0) - a_0 = \Delta y_0 \Leftrightarrow a_1 h = \Delta y_0 \ , \qquad (2.16)$$

$$(2.16) \Rightarrow \quad a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!h} \ . \qquad (2.17)$$

Procedând similar pentru ceilalţi coeficienţi din (2.12) ⇒ expresia generală

Newton de speţa 1 (cont'd 3)

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k},\ k = \overline{0,n}\ . \quad (2.18)$$

k = 0 în (2.18) $\Rightarrow$ $a_0 = y_0$.

$\Rightarrow$ polinomul de interpolare Newton de speţa 1 devine

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k} (x - x_0)^{[k]}\ . \quad (2.19)$$

Newton de speţa 1 (cont'd 4)

În cazul punctelor echidistante – este util de definit numărul q (nu neapărat întreg !) = **numărul de paşi** necesari pentru a ajunge de la x_0 la x:

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \qquad (2.20)$$

$\Rightarrow$ polinomul de interpolare Newton de speţa 1

$$P_n(q) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 . \qquad (2.21)$$

Newton de speţa 1 (cont'd 5)

Observaţii:

1. Pentru n = 1, (2.21) $\Rightarrow$ **formula de interpolare liniară**

$$P_1(q) = y_0 + q\Delta y_0 \,. \tag{2.22}$$

2. Pentru n = 2, (2.21) $\Rightarrow$ **formula de interpolare parabolică**

$$P_2(q) = y_0 + q y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 \,. \tag{2.23}$$

Newton de speţa 1 (cont'd 6)

3. Dacă numărul de puncte cunoscute ale funcţiei f poate fi oricât de mare → şi gradul polinomului de interpolare poate fi oarecare. Acest *număr de puncte este ales practic astfel încât diferenţele* $\Delta^n y_i$ *să fie aproximativ egale în limitele unei erori admise* ε, iar x_0 poate fi oricare dintre punctele date.

4. Dacă numărul de puncte ale funcţiei este finit → gradul polinomului de aproximare poate fi cel mult egal cu numărul de puncte diminuat cu 1, în aceleaşi condiţii ca la observaţia 3.

Newton de speţa 1 (cont'd 6)

5. Pentru situaţiile de la observaţiile 3 şi 4, eroarea (restul) poate fi aproximat cu expresia

$$R_n(q) \approx \frac{q(q-1)(q-2)...(q-n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1}y_0. \qquad (2.24)$$

Exemplu: Se consideră o funcţie reală de variabilă reală f: [0, 3] $\rightarrow$ *R*, y=f(x), pentru care sunt cunoscute valorile în 4 puncte echidistante ale intervalului [0, 3], cu pasul de discretizare h = 1, conform tabelului

Newton de speţa 1 (cont'd 7)

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
$y_i = f(x_i)$	0.200	3.145	4.927	6.098

Se cere să se aproximeze funcţia f cu polinomul de interpolare Newton de speţa 1 pentru următoarele valori ale argumentului x: 0.1; 0.8; 2.3; 2.8.

Newton de speţa 1 (cont'd 8)

Soluţie: Particularizare pentru n = 3 în cazul cunoaşterii a n+1=4 puncte echidistante, cu pasul h = 1, în intervalul [a,b] = [0, 3].

Pentru început sunt determinate toate diferenţele directe definite în (2.10), cu rezultatele organizate conform tabelului

Newton de speţa 1 (cont'd 9)

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	0	0.200	2.945	–1.163	0.552
1	1	3.145	1.782	–0.611	–
2	2	4.927	1.171	–	–
3	3	6.098	–	–	–

Pe baza diferenţelor directe din (2.21) şi *prima linie a tabelului* → polinomul de interpolare Newton de speţa 1 de gradul 3, exprimat în q:

Newton de speţa 1 (cont'd 10)

$$P_3(q) = 0.2 + \frac{2.945}{1!} q - \frac{1.163}{2!} q^{[2]} + \frac{0.552}{3!} q^{[3]} =$$
$$= 0.2 + 2.945q - 0.581q^{[2]} + 0.092q^{[3]}.$$

Pentru x = 0.1, (2.20) $\Rightarrow$ $q = \frac{0.1-0}{1} = 0.1$ $\Rightarrow$ valorile puterilor generalizate:

$$q^{[2]} = q(q-1) = -0.09$$
$$q^{[3]} = q^{[2]}(q-2) = 0.171.$$

Înlocuire în $P_3(q)$ $\Rightarrow$ prima aproximaţie:

$f(0.1) \approx 0.2 + 2.945 \cdot 0.1 - 0.581(-0.09) + 0.092 \cdot 0.171 = 0.562$. Exerciţiu: calculul celorlalte trei aproximaţii ...

7.3. Aproximarea cu metoda celor mai mici pătrate

Punerea problemei: se consideră funcţia reală f: [a, b] → *R*, pentru care sunt cunoscute valorile $y_i=f(x_i)$ în (n+1) puncte distincte x_i, $i=\overline{0,n}$, din intervalul [a, b], adică perechile de valori:

$$(x_0,y_0);(x_1,y_1);(x_2,y_2);...;(x_n,y_n)\,. \tag{3.1}$$

În cazul general, punctele pot fi oarecari, dar, de regulă, ele sunt **echidistante**, cu pasul de discretizare h:

$$x_0=a, x_n=b, x_{i+1}-x_i=h=\frac{b-a}{n}, i=\overline{0,n-1}\,. \tag{3.2}$$

CMMP (cont'd 1)

Se cere să se determine **polinomul** P_m, $grad\ P_m = m << n$:

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m,\ \forall x \in [a,b] \quad , \qquad (3.3)$$

care să aproximeze funcţia f astfel încât să fie minimizată suma pătratelor diferenţelor dintre valorile aproximate şi cele exacte în cele (n+1) puncte. Astfel spus, trebuie rezolvată **problema de optimizare**

$$\hat{a}_0 ....\hat{a}_m = \arg \min_{a_0 ....a_m} J,\ J = \sum_{i=0}^{n} [P_m(x_i) - y_i]^2 \} \quad . \qquad (3.4)$$

CMMP (cont'd 2)

Metoda de calcul rezultată se numeşte ***metoda celor mai mici pătrate*** (**CMMP**) şi este utilizabilă atunci când fie perechile (3.1) nu sunt cunoscute cu exactitate fie n este foarte mare.

Remarcă: Aproximarea funcţiei f – cunoscută sub forma setului de valori (3.1) – printr-un polinom de forma (3.3) prin metoda CMMP este numită în general şi ***regresie polinomială***, cu particularizările larg utilizate **regresie liniară** (m=1) şi **regresie parabolică** (m=2). Aproximarea prin metoda CMMP poate fi aplicată însă şi altor funcţii de aproximare g, diferite de cele polinomiale.

Aproximarea polinomială parabolică (m=2) prin metoda CMMP

Funcţia polinomială de aproximare parabolică, numită şi **regresie parabolică**:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 . \tag{3.5}$$

Functia obiectiv J care trebuie minimizată, privită ca *funcţie de variabilele* a_0*,* a_1 *şi* a_2:

$$J = \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i{}^2 - y_i)^2 . \tag{3.6}$$

Aproximarea polinomială parabolică prin CMMP (cont'd 1)

Pentru minimizarea functiei convexe J este suficient să fie anulate derivatele sale parţiale →

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\ 2} - y_i) = 0 \quad , \qquad (3.7)$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\ 2} - y_i)x_i = 0 \quad , \qquad (3.8)$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_2} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\ 2} - y_i)x_i^{\ 2} = 0 \quad . \qquad (3.9)$$

Aproximarea polinomială parabolică prin CMMP (cont'd 2)

$$s_1 = \sum_{i=0}^{n} x_i,\ s_2 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2,\ s_3 = \sum_{i=0}^{n} x_i^3,\ s_4 = \sum_{i=0}^{n} x_i^4,$$

Notaţii: $$t_0 = \sum_{i=0}^{n} y_i, t_1 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i, t_2 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^2. \quad (3.10)$$

$\Rightarrow$ sistemul (3.7) ... (3.9) este transformat în *sistemul liniar* în necunoscutele a_0, a_1 şi a_2:

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + s_1 a_1 + s_2 a_2 = t_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 + s_3 a_2 = t_1 \\ s_2 a_0 + s_3 a_1 + s_4 a_2 = t_2 \end{cases}. \quad (3.11)$$

Aproximarea polinomială parabolică prin CMMP (cont'd 3)

Exemplu: Se consideră din nou funcţia din exemplul anterior, f: [0, 3]→*R*, y=f(x), pentru care se cunosc valorile în 4 puncte echidistante ale intervalului [0,3], cu pasul de discretizare h = 1, conform tabelului prezentat. Se cere să se găsească un aproximant parabolic al funcţiei f cu metoda CMMP.

Soluţie: Pentru început vor fi calculaţi coeficienţii sistemului (3.11) aplicând formulele (3.10) în cazul n = 3:

Aproximarea polinomială parabolică prin CMMP (cont'd 4)

$$s_1 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 6;\ s_2 = x_0^{\ 2} + x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} = 14;$$

$$s_3 = x_0^{\ 3} + x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3} + x_3^{\ 3} = 36;\ s_4 = x_0^{\ 4} + x_1^{\ 4} + x_2^{\ 4} + x_3^{\ 4} = 108;$$

$$t_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 = 14{,}37;\ t_1 = y_0 x_0 + y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 = 31.293;$$

$$t_2 = y_0 x_0^{\ 2} + y_1 x_1^{\ 2} + y_2 x_2^{\ 2} + y_3 x_3^{\ 2} = 77.735.$$

Efectuând înlocuirile în (3.11) → sistemul

$$\begin{cases} 4a_0 + 6a_1 + 14a_2 = 14.37 \\ 6a_0 + 14a_1 + 36a_2 = 31.293 \\ 14a_0 + 36a_1 + 108a_2 = 77.735 \end{cases}$$

. Rezolvare $\Rightarrow$ soluţiile

Aproximarea polinomială parabolică prin CMMP (cont'd 5)

$a_0 = 0.544;\ a_1 = 2.328;\ a_2 = -0.127$.

$\Rightarrow$ polinomul de aproximare parabolică obţinut prin metoda CMMP: $\hat{P}_2(x) = 0.544 + 2.328x - 0.127x^2$.

Exerciţiu: compararea valorilor aproximate $P_2(x_i)$ cu cele exacte y_i în cele 4 puncte prin diferenţe şi calculul valorii minime a lui J

...

7.4. Aproximarea cu funcţii spline

Enunţul problemei de aproximare: acelaşi ca în cazurile anterioare. Dar, de această dată valorile functiei f sunt aproximate cu ***funcţii spline polinomiale*** de **grad** $m << n$.

Se defineşte diviziunea Δ a intervalului [a, b]:

$$\Delta:\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_n = b. \tag{4.1}$$

Aproximarea cu funcţii spline (cont'd 1)

Funcţia spline polinomială de ordinul *n* relativ la diviziunea Δ a intervalului [a, b] este definită ca o funcţie g: [a, b] → *R*, de clasă $C_{[a,b]}^{m-1}$, ale cărei restricţii g_i pe fiecare subinterval $[x_{i-1}, x_i]$ al diviziunii Δ sunt polinoame de grad $m << n$:

$$g_i(x) = P_m^i(x), \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i], \; i = \overline{1,n}; \; gradP_m^i = m \, . \tag{4.2}$$

Functia spline g are, conform definiţiei, *primele (m–1) derivate continue pe intervalul [a, b]*:

$$g_i^{(j)}(x_i) = g_{i-1}^{(j)}(x_i); \; j = \overline{1,m-1}; \; i = \overline{1,n-1} \, . \tag{4.3}$$

Aproximarea cu funcţii spline (cont'd 2)

Derivata de ordinul m este discontinuă în punctele x_i ale diviziunii Δ, este o funcţie polinomială netedă pe porţiuni, curbura sa fiind determinată de valoarea lui *m*.

Funcţia spline g este considerată ***funcţie spline de aproximare prin interpolare*** a funcţiei f pe diviziunea Δ dacă în toate punctele diviziunii sunt îndeplinite condiţiile

$$g(x_i) = y_i,\ i = \overline{0,n}. \tag{4.4}$$

Aproximarea cu funcţii spline (cont'd 3)

Coeficienţii funcţiilor polinomiale P_m^i sunt obţinuţi prin rezolvarea sistemului liniar format din ecuaţiile (4.3) şi (4.4) împreună cu cele (m–1) condiţii la limitele interalului [a, b].

Caz particular: $m = 2$.

Funcţiile spline g de interpolare parabolică (m=2)

Restricţiile g_i au expresiile

$$g_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2, \ \forall x \in [x_{i-1}, x_i], \ i = \overline{1,n} \quad , \qquad (4.5)$$

cu coeficienţii care trebuie determinaţi $a_i, b_i, c_i \in R, \ i = \overline{1,n}$, în vederea definirii funcţiei g.

Sunt impuse condiţiile de interpolare (4.4) pentru punctele x_{i-1}:

$$g_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \ i = \overline{1,n} \quad , \qquad (4.6)$$

(4.5) şi (4.6) $\Rightarrow$ coeficienţii a_i:

Funcţiile spline g de interpolare parabolică (cont'd 1)

$$a_i = y_{i-1},\ i = \overline{1,n}\ . \tag{4.7}$$

Au rămas de determinat 2*n* coeficienţi, $b_i, c_i,\ i = \overline{1,n}$. Se rescrie (4.5) sub forma

$$g_i(x) = y_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2,\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{1,n}\ . \tag{4.8}$$

Derivând (4.8) în raport cu x $\Rightarrow$

$$g_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}),\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{1,n}\ . \tag{4.9}$$

Sunt impuse condiţiile (4.4) $\Rightarrow$

Funcţiile spline g de interpolare parabolică (cont'd 2)

$$y_i = y_{i-1} + b_i(x_i - x_{i-1}) + c_i(x_i - x_{i-1})^2,\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{1,n}\ . \qquad (4.10)$$

Sunt impuse condiţiile (4.3) $\Rightarrow$

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i(x_i - x_{i-1}),\ \ i = \overline{1,n-1}\ . \qquad (4.11)$$

$\Rightarrow$ mai este nevoie de o condiţie. De regulă, se consideră că $g_1'(x_0)$ este cunoscută:

$$g_1'(x_0) = b_1 + 2c_i(x_0 - x_0) = b_1\ , \qquad (4.12)$$

adică *se alege* b_1 *pe baza experienţei specialistului* care aproximează pe f.

Funcţiile spline g de interpolare parabolică (cont'd 3)

Sistemul liniar (4.10) ... (4.12) de 2*n* ecuaţii cu 2*n* necunoscute.

În cazul punctelor **echidistante** cu pasul de discretizare h, sistemul este transformat în

$$b_1 = g_1'(x_0)\ ,$$
$$h\, b_i + h^2 c_i = y_i - y_{i-1}\ ,\ \ i = 1 \ldots n\ , \tag{4.13}$$
$$b_i + 2\, h\, c_i - b_{i+1} = 0\ ,\ \ i = 1 \ldots n-1\ .$$

După rezolvarea sistemului, pentru aproximarea unei valori f(x) se identifică subintervalul $x \in [x_{i-1}, x_i]$ şi apoi se aplică (4.8).

Funcţiile spline g de interpolare parabolică (cont'd 4)

Dacă se *particularizează* sistemul (4.13) pentru $n = 3 \rightarrow$ sistem liniar de 6 ecuaţii cu 6 necunoscute:

$$\begin{cases} b_1 = g_1{}'(x_0) \\ hb_1 + h^2 c_1 = y_1 - y_0 \\ b_1 + 2hc_1 - b_2 = 0 \\ hb_2 + h^2 c_2 = y_2 - y_1 \\ b_2 + 2hc_2 - b_3 = 0 \\ hb_3 + h^2 c_3 = y_3 - y_2 \end{cases} . \quad (4.14)$$

Sistemul obţinut este inferior triunghiular $\Rightarrow$ rezolvare simplă.