Cap. 4. Calculul numeric al valorilor proprii şi al vectorilor proprii

4.0. Definiţii

$\underline{A}$ – matrice pătratică de ordinul *n* cu elemente reale. $\lambda \in C$ – ***valoare proprie*** a matricei $\underline{A}$ dacă $\exists$ $\underline{x} \in R^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$:

$$\underline{A}\,\underline{x} = \lambda \underline{x} \;; \tag{1}$$

$\underline{x}$ – ***vector propriu*** al matricei $\underline{A}$ asociat valorii λ.

Definiţii

(1) $\Leftrightarrow$ $(\underline{A}-\lambda\underline{I})\underline{x}=\underline{0}$, (2)

$\underline{I}$ – matricea unitate de ordinul *n*.

Scriere sub formă dezvoltată a relaţiei (2):

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots. & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Definiţii (cont'd 1)

(3) – sistem liniar şi omogen. Soluţii nebanale $\Leftrightarrow$ $\underline{A}$ să aibă valori proprii şi vectori proprii $\Leftrightarrow$ determinantul sistemului să fie nul:

$$\det(\underline{A}-\lambda\underline{I})=P_n(\lambda)=c_1\lambda^n+c_2\lambda^{n-1}+\ldots+c_n\lambda+c_{n+1}=0 \,. \qquad (4)$$

(4) – ***ecuaţia caracteristică*** a matricei $\underline{A}$;

$P_n(\lambda)$ – ***polinomul caracteristic*** al matricei $\underline{A}$.

Definiţii (cont'd 2)

În (4) este cunoscută valoarea coeficientului dominant, $c_1 = (-1)^n$.

Altă formă practică a ecuaţiei caracteristice şi, corespunzător, a polinomului caracteristic – prin înmulţirea relaţiei (4) cu $(-1)^n$ $\Rightarrow$

$$\det(\lambda \underline{I} - \underline{A}) = P_1'(\lambda) = c_1'\lambda^n + c_2'\lambda^{n-1} + \ldots + c_n'\lambda + c_{n+1}' = 0 \,, \qquad (5)$$

în care $c_1' = 1$.

Definiţii (cont'd 3)

Ansamblul valorilor proprii ale matricei $\underline{A}$ – ***spectrul*** matricei $\underline{A}$:

$$\sigma(\underline{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \quad . \tag{6}$$

Numărul (pozitiv):

$$\rho(\underline{A}) = \max_{\lambda_i \in \sigma(\underline{A})} |\lambda_i| \tag{7}$$

se numeşte ***raza spectrală*** a lui $\underline{A}$.

Definiţii (cont'd 4)

$\underline{A}$ are *n* vectori proprii liniar independenţi – ***simplă*** (***nedefectivă***); în caz contrar – ***defectivă***. O matrice simplă are toate valorile proprii simple.

Două matrice pătratice de ordinul *n* $\underline{A}$ şi $\underline{B}$ – ***asemenea*** (***similare***) dacă există o a treia matrice pătratică de ordinul *n* nesingulară $\underline{S}$ astfel încât:

$$\underline{B} = \underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S}\,. \tag{8}$$

Notaţie: $\underline{A} \approx \underline{B}$; (8) – ***transformare de similaritate***.

Definiţii (cont'd 5)

Teorema 1: Două matrice **asemenea** au **acelaşi polinom caracteristic**.

Demonstraţie: Fie $\underline{A}$ şi $\underline{B}$ astfel încât $\underline{A} \approx \underline{B} \Rightarrow$

$$\det(\underline{B} - \lambda \underline{I}) \overset{(8)}{=} \det\left(\underline{S}^{-1}\underline{A}\underline{S} - \lambda \underline{S}^{-1}\underline{I}\,\underline{S}\right) = \det\left[\underline{S}^{-1}(\underline{A} - \lambda \underline{I})\underline{S}\right] =$$

$$= \det\left(\underline{S}^{-1}\right) \cdot \det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) \cdot \det(\underline{S}) = \det\left(\underline{S}^{-1}\underline{S}\right) \cdot \det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) =$$

$$= \det(\underline{I}) \cdot \det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = \det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) \qquad \blacksquare$$

Definiţii (cont'd 6)

Consecinţă: Două matrice **asemenea** au **aceleaşi valori proprii**.

Teorema 2: Dacă $\underline{A}$ este **simplă** $\Rightarrow$ este **asemenea cu matricea diagonală** $\underline{\Lambda} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$:

$$\underline{\Lambda} = \underline{S}^{-1} \underline{A} \, \underline{S}, \qquad (9)$$

în care $\underline{S}$ are pe coloane cei *n* vectori proprii:

$$\underline{S} = [\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \quad \ldots \quad \underline{x}_n]. \qquad (10)$$

Demonstraţie: $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ..., $\underline{x}_n$ sunt valori proprii $\Rightarrow$

Definiţii (cont'd 7)

$$[\underline{A}\underline{x}_1 \quad \underline{A}\underline{x}_2 \quad \dots \quad \underline{A}\underline{x}_n] = [\lambda_1 \underline{x}_1 \quad \lambda_2 \underline{x}_2 \quad \dots \quad \lambda_n \underline{x}_n] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{A}[\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \quad \dots \quad \underline{x}_n] = [\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \quad \dots \quad \underline{x}_n] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \dots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{A}\,\underline{S} = \underline{S}\,\underline{\Lambda}\,.$$

Înmulţire la stânga cu $\underline{S}^{-1}$ $\Rightarrow$ (9).

(9) este utilizată în *calculul valorilor proprii când sunt cunoscuţi vectorii proprii*.

Definiţii (cont'd 8)

Observaţie: Pentru o matrice (superior sau inferior) triunghiulară sau diagonală valorile proprii sunt chiar elementele diagonalei principale.

Teorema 3: Dacă $P_n(\lambda)$ – polinomul caracteristic (4) al matricei $\underline{A}$ $\Rightarrow$ ***identitatea lui Cayley-Hamilton***:

$$P_n(\lambda) = c_1 \underline{A}^n + c_2 \underline{A}^{n-1} + \ldots + c_n \underline{A} + c_{n+1} \underline{I} = \underline{0} \,, \tag{11}$$

adică polinomul caracteristic al unei matrice este polinomul anulant al acesteia.

Metode de determinare a valorilor proprii

Categorisire a metodelor de determinare a valorilor proprii:

(a) după numărul valorilor proprii determinate:

- metode *globale* – determină toate cele *n* valori proprii şi toţi cei *n* vectori proprii,
- metode *parţiale* – determină numai anumite valori proprii şi vectorii proprii aferenţi;

Metode de determinare a valorilor proprii (cont'd 1)

(b) după natura algoritmului de calcul:

- metode *directe* – determină explicit polinomul caracteristic şi calculează valorile proprii prin rezolvarea ecuaţiei caracteristice (4),
- metode *indirecte* sau *iterative* – evită rezolvarea ecuaţiei caracteristice (4) determinând valorile proprii prin procedee de aproximaţii succesive bazate pe transformări de similaritate.

4.1. Metode globale directe

Determină toate valorile proprii ale matricei $\underline{A}$ prin **obţinerea explicită a ecuaţiei caracteristice (4)** – rezolvare cu algoritmi din capitolul următor. După determinarea valorii proprii λ_i – ***etapele pentru determinarea vectorului propriu*** $\underline{x}_i$:

(a) Se înlocuieşte λ_i în sistemul (3) – liniar şi omogen, de ordinul *n*, cu matricea coeficienţilor singulară.

(b) Se fixează arbitrar valoarea unei variabile (de regulă $x_1 = 1$).

Metoda Leverrier

(c) Se înlocuieşte valoarea fixată în sistemul de la (a) şi se renunţă la ecuaţia corespunzătoare valorii proprii respective, λ_i .

(d) Se rezolvă sistemul liniar de ordinul (n–1) de la punctul (c) aplicând una din metodele din capitolul anterior.

Metodă globală – ***metoda Leverrier***, bazată pe **urma unei matrice** $\underline{B} = [b_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$:

$$tr(\underline{B}) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \quad , \tag{1.1}$$

Metoda Leverrier (cont'd 1)

Algoritmul metodei Leverrier – etape:

(I) Determinarea coeficienţilor c_i, $i = \overline{1, n+1}$, ai polinomului caracteristic (4). Se parcurg etapele 1)…3):

1) Se fixează pentru primul coeficient valoarea $c_1 = 1$.

2) Se iniţializează matricea ajutătoare $\underline{B}$:

$$\underline{B}^1 = [b_{ij}^1]_{i,j=\overline{1,n}} = \underline{A} \tag{1.2}$$

Metoda Leverrier (cont'd 2)

(indicele superior – pasul curent de calcul) şi se determină valoarea coeficientului c_2:

$$c_2 = -\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^1 \quad . \tag{1.3}$$

3) La un pas oarecare $k = \overline{2, n}$ se determină valoarea curentă a matricei $\underline{B}$:

$$\underline{B}^k = \underline{A}(\underline{B}^{k-1} + c_k \underline{I}) \tag{1.4}$$

şi apoi se calculează valoarea coeficientului c_{k+1}:

Metoda Leverrier (cont'd 3)

$$c_{k+1} = -\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{k} \quad . \tag{1.5}$$

(II) Calculul valorilor proprii prin rezolvarea ecuaţiei caracteristice (4).

(III) Determinarea vectorilor proprii corespunzători valorilor proprii de la etapa (II) prin parcurgerea etapelor (a) … (d) specificate anterior.

Metoda Leverrier (cont'd 4)

Exemplu: Să se calculeze cu metoda Leverrier valorile proprii şi vectorii proprii pentru matricea $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Soluţie: Se parcurg etapele (I) … (III) ale algoritmului:

(I) 1) $c_1 = 1$.

2) $\underline{B}^1 = \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Metoda Leverrier (cont'd 5)

$$c_2 = -(1+5+1) = -7 \quad .$$

3) Pasul **k=2**. Se aplică (1.4) şi (1.5) $\Rightarrow$

$$\underline{B}^2 = \underline{A}(\underline{B}^1 + c_2\underline{I}) = \underline{A}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -14 \\ 2 & -8 & 2 \\ -14 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$c_3 = -\frac{1}{2}(4-8+4) = 0 \, .$$

Metoda Leverrier (cont'd 6)

Pasul **k=3**. Se aplică din nou (1.4) şi (1.5) $\Rightarrow$

$$\underline{B}^3 = \underline{A}(\underline{B}^2 + c_3\underline{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & -14 \\ 2 & -8 & 2 \\ -14 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & -36 \end{bmatrix},$$

$$c_4 = -\frac{1}{3}\left(-36 - 36 - 36\right) = 36\,.$$

(II) S-a obţinut ecuaţia caracteristică:

$P_3(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$, cu soluţiile $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$.

Metoda Leverrier (cont'd 8)

(III) Sistemul (3) are expresia $\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + (5-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$.

Se calculează vectorul propriu $\underline{x}_1$ corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = -2$. Se fixează $x_1 = 1$, se renunţă la prima ecuaţie şi se fac înlocuirile în celelalte $\Rightarrow$ $\begin{cases} 7x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$.

Metoda Leverrier (cont'd 9)

Se rezolvă sistemul $\Rightarrow$ $x_2 = 0,\ x_3 = -1$ $\Rightarrow$ primul vector propriu:

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Urmează $\underline{x}_2$. Se fixează $\lambda_2 = 3$, $x_1 = 1$, se renunţă la a doua ecuaţie din sistem, înlocuirile în celelalte $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$.

Metoda Leverrier (cont'd 10)

Se rezolvă sistemul $\Rightarrow$ $x_2 = -1, \quad x_3 = 1$ $\Rightarrow$ $\underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

În final se calculează vectorul propriu $\underline{x}_3$ corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = 6$. Se fixează $x_1 = 1$, se renunţă la a treia ecuaţie şi se fac înlocuirile în primele două $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_2 + 3x_3 = 5 \\ -x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

Metoda Leverrier (cont'd 11)

Se rezolvă sistemul $\Rightarrow$ $x_2 = 2, \quad x_3 = 1$ $\Rightarrow$ al treilea vector propriu,

$$\underline{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4.2. Metode de localizare a valorilor proprii. Aplicaţii la analiza stabilităţii sistemelor dinamice liniare

Se consideră o matrice pătratică reală $\underline{A}$ de ordinul *n*. Se pune problema *localizării tuturor celor "n" valori proprii ale acestei matrice fără a le calcula în mod distinct*.

Aplicaţie: analiza stabilitaţii sistemelor dinamice liniare la care $\underline{A}$ este matricea sistemului $\Rightarrow$ suficientă determinarea unor domenii ale planului complex unde se găsesc cu siguranţă toate valorile proprii ale matricei $\underline{A}$.

Metoda bazată pe discurile lui Gerschgorin

Două tipuri de discuri:

$$L_i = \{\lambda \in C \,\|\, \lambda - a_{ii} \,|\, \le l_i\}\,,\, i = \overline{1,n}\,, \tag{2.1}$$

$$l_i = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} | a_{ij} | \tag{2.2}$$

(interiorul cercului cu centrul în elementul diagonal a_{ii} şi de rază l_i);

Metoda bazată pe discurile lui Gerschgorin (cont'd 1)

$$C_j = \{\lambda \in C \,\|\, \lambda - a_{jj} \,| \le r_j\} \,,\; j = \overline{1, n} \,, \tag{2.3}$$

$$r_j = \sum_{i=1, i \neq j}^{n} | a_{ij} | \,. \tag{2.4}$$

Fiecare valoare proprie a matricii $\underline{A}$ se află în cel puţin unul din discurile L_i şi în cel puţin unul din discurile C_j .

Notaţii: $$L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i \,,\quad C = \bigcup_{j=1}^{n} C_j \,, \tag{2.5}$$

Metoda bazată pe discurile lui Gerschgorin (cont'd 2)

$\Rightarrow$ rezultatul esenţial: $\sigma(\underline{A}) \subseteq L \cap C$; (2.6)

egalitatea are loc numai pentru matrice diagonale (razele discurilor = 0).

Exemplu: Utilizând metoda discurilor lui Gerschgorin, să se determine un domeniu al planului complex în care se află valorile proprii ale matricei din exemplul anterior, $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Metoda bazată pe discurile lui Gerschgorin (cont'd 3)

Soluţie: Expresiile discurilor (din (2.1) … (2.4)):

$$L_1 = \{\lambda \in C \,\big|\, |\lambda - 1| \le 1 + 3 = 4\},$$

$$L_2 = \{\lambda \in C \,\big|\, |\lambda - 5| \le 1 + 1 = 2\},$$

$$L_3 = \{\lambda \in C \,\big|\, |\lambda - 1| \le 3 + 1 = 4\} = L_1,$$

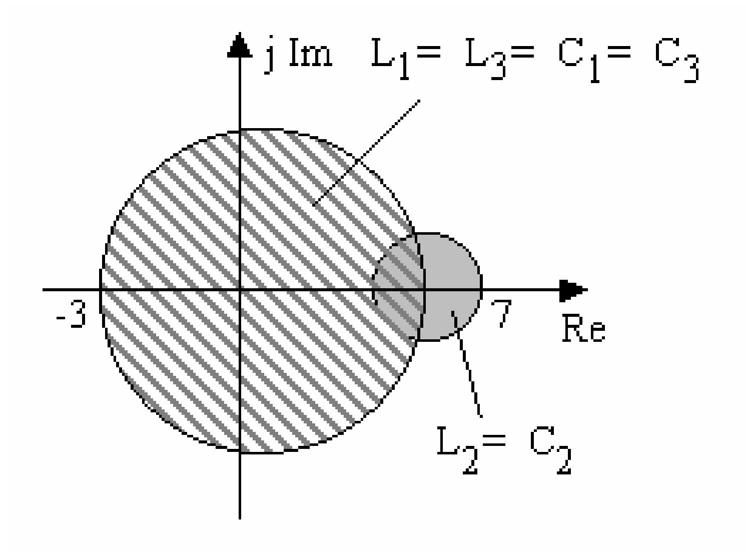
$$C_1 = \{\lambda \in C \,\big|\, |\lambda - 1| \le 1 + 3 = 4\} = L_1,$$

$$C_2 = \{\lambda \in C \,\big|\, |\lambda - 5| \le 1 + 1 = 2\} = L_2,$$

$$C_3 = \{\lambda \in C \,\big|\, |\lambda - 1| \le 3 + 1 = 4\} = L_3.$$

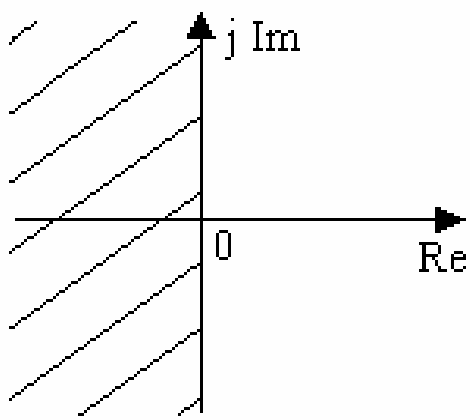
Domeniul cerut se află în interiorul zonelor haşurate:

Metoda bazată pe discurile lui Gerschgorin (cont'd 4)



Aplicaţie a metodelor de localizare: ***metodele de analiză a stabilităţii sistemelor dinamice liniare cu timp continuu*** la care matricea sistemului este $\underline{A}$.

Oferă condiţii necesare şi suficiente pentru ca **toate valorile proprii** ale lui $\underline{A}$ **să fie situate strict în semiplanul complex stâng** (să aibă partea reală strici negativă) – zona haşurată:



Criteriul de stabilitate Routh

Se începe cu calculul polinomului caracteristic al matricei $\underline{A}$:

$$\mu(\lambda) = \det)(\lambda \underline{I} - \underline{A}) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 \qquad (2.7)$$

(necesar ca $a_n > 0$ – *esenţial* !).

Construirea schemei Routh, cu, "n+1" linii şi $\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil$ coloane.

Criteriul de stabilitate Routh (cont'd 1)

Primele două linii se completează cu coeficienţii lui $\mu(\lambda)$, iar restul schemei pe baza formulelor

$$b_i = \frac{r_{i-1,1}}{r_{i,1}},\ i = \overline{2, n+1}\ , \tag{2.8}$$

$$r_{i+1,j} = r_{i-1,j+1} - b_i r_{i,j+1},\ i = \overline{2,n},\ \ j = 1,2,\ldots\ . \tag{2.9}$$

Coeficienţii de pe coloana 1 – esenţiali – **coeficienţi Routh**.

Schema Routh:

	(0)	(1)	(2)	...	(j)	(j+1)	...	$\left[\dfrac{n+2}{2}\right]$
(1)	–	$r_{11} = a_n$	$r_{12} = a_{n-2}$	...	$r_{1,j}$	$r_{1,j+1}$	...	a_0 sau 0
(2)	b_2	$r_{21} = a_{n-1}$	$r_{22} = a_{n-3}$	...	$r_{2,j}$	$r_{2,j+1}$	...	0 sau a_0
(3)	b_3	r_{31}	r_{32}	...	$r_{3,j}$	$r_{3,j+1}$	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	
(i–1)	b_{i-1}	$r_{i-1,1}$	$r_{i-1,2}$	...	$r_{i-1,j}$	$r_{i-1,j+1}$	...	
(i)	b_i	$r_{i,1}$	$r_{i,2}$	...	$r_{i,j}$	$r_{i,j+1}$	...	
(i+1)	b_{i+1}	$r_{i+1,1}$	$r_{i+1,2}$	...	$r_{i+1,j}$	$r_{i+1,j+1}$	...	

		...	
(n)	b_n	$r_{n,1}$	$r_{n,2}(=0)$
(n+1)	b_{n+1}	$r_{n+1,1}$	

Enunţul criteriului Routh: sistemul dinamic liniar cu timp continuu cu matricea sistemului $\underline{A}$ este **stabil** (toate valorile proprii au partea reală strict negativă) dacă şi numai dacă **toţi coeficienţii Routh sunt strict pozitivi**.

Criteriul de stabilitate Routh (cont'd 2)

Avantaje: 1. Pentru valori mari ale lui *n*.

2. Dacă elementele matricei $\underline{A}$ depind de anumiţi parametri, se pot determina condiţii pe care trebuie să le satisfacă aceşti parametri pentru ca sistemul să fie stabil.

Exemplu: Să se determine condiţiile pe care trebuie să le satisfacă parametrul *a* pentru ca matricea $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ a-1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ să aibă toate valorile proprii cu părţile reale strict negative.

Criteriul de stabilitate Routh (cont'd 3)

Soluţie: Particularizare în cazul n = 3. Polinomul caracteristic al matricei $\underline{A}$:

$$\mu(\lambda) = \det(\lambda \underline{I} - \underline{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 3 \\ -a+1 & -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ a - 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda^2 + \lambda + 1) + 2(\lambda + 2 + 3a - 3) = \lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda + 6a - 2 \,.$$

$\Rightarrow$ coeficienţii: a_3=1, a_2=1, a_1=3, a_0=6a–2.

Criteriul de stabilitate Routh (cont'd 4)

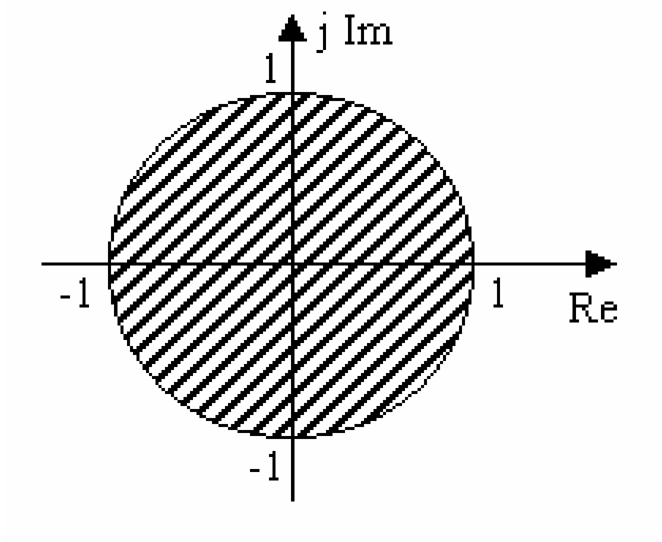
Schema Routh:

	(0)	(1)	(2)
(1)	–	$r_{11}=1$	3
(2)	$b_2=\frac{1}{1}=1$	$r_{21}=1$	$6a-2$
(3)	$b_3=\frac{1}{5-6a}$	$r_{31}=3-1\cdot(6a-2)=5-6a$	0
(4)		$r_{41}=6a-2-\frac{1}{5-6a}\cdot 0=6a-2$	

Criteriul de stabilitate Routh (cont'd 5)

$\Rightarrow$ condiţiile: $\begin{cases} r_{31} > 0 \\ r_{41} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 6a > 0 \\ 6a - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow a \in \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{6}\right).$

Aplicaţie a metodelor de localizare: ***metodele de analiză a stabilităţii sistemelor dinamice liniare cu timp discret*** la care matricea sistemului este $\underline{A}$. Oferă condiţiile şi suficiente pentru ca **toate valorile proprii** ale lui $\underline{A}$ **să fie situate strict în interiorul discului centrat în origine şi de rază unitate** (să aibă modulul subunitar) – zona haşurată:



Variantă: se defineşte matricea transformată $\underline{B}$:

$$\underline{B} = \underline{I} + 2(\underline{A} - \underline{I})^{-1} \quad . \tag{2.10}$$

Criteriul de stabilitate bazat pe şirul puterilor matricei $\underline{B}$

Sistemul dinamic liniar cu timp discret cu matricea sistemului $\underline{A}$ este stabil (are toate valorile proprii de modul subunitar) $\Leftrightarrow$

$$\underline{B}^k \to \underline{0} \text{ pentru } k \to \infty \text{ .} \tag{2.11}$$

Practic: ridicarea matricei $\underline{B}$ la putere astfel încât fiecare matrice să fie pătratul celei precedente:

$$\underline{B}^k = \left[b^{(k)}{}_{ij} \right]_{i,j=\overline{1,n}} = \underline{B}^{2^m} = \underline{B}^{2^{m-1}} \cdot \underline{B}^{2^{m-1}} = \dots \text{ .} \tag{2.12}$$

Şirul puterilor matricei $\underline{B}$ (cont'd 1)

Pentru ca sistemul să fie stabil este **suficient** să existe $k \in N^*$ astfel încât

$$| b^{(k)}{}_{ij} | \leq \frac{1}{n}, \quad i, j = \overline{1, n} \quad . \tag{2.13}$$

$\Rightarrow$ calculele se întrerup atunci când este satisfăcută (2.13).

Exemplu: Să se verifice dacă matricea $\underline{A} = \begin{bmatrix} -0.8 & 3.2 \\ -0.4 & -2.5 \end{bmatrix}$ are toate valorile proprii de modul subunitar.

Şirul puterilor matricei $\underline{B}$ (cont'd 2)

Soluţie: Particularizare (2.10), (2.12) şi (2.13) pentru n=2 $\Rightarrow$

$$\underline{A}-\underline{I}=\begin{bmatrix}-1.8 & 3.2\\ -0.4 & -3.5\end{bmatrix}\ ;\quad (\underline{A}-\underline{I})^T=\begin{bmatrix}-1.8 & -0.4\\ 3.2 & -3.5\end{bmatrix}\ ;$$

$$\det(\underline{A}-\underline{I})=6.3+1.28=7.58\ ;\quad (\underline{A}-\underline{I})^+=\begin{bmatrix}-3.5 & -3.2\\ 0.4 & -1.8\end{bmatrix}\ ;$$

$$(\underline{A}-\underline{I})^{-1}=\frac{1}{\det(\underline{A}-\underline{I})}\cdot(\underline{A}-\underline{I})^+=\begin{bmatrix}-0.462 & -0.422\\ 0.053 & -0.238\end{bmatrix}\ ;$$

Şirul puterilor matricei $\underline{B}$ (cont'd 3)

$$\underline{B} = \underline{I} + 2(\underline{A} - \underline{I})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.924 & -0.844 \\ 0.106 & -0.476 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.076 & -0.844 \\ 0.106 & -0.524 \end{bmatrix}.$$

Nu este verificată (2.13) $\Rightarrow$ este necesar calculul lui $\underline{B}^2$:

$$\underline{B}^2 = \begin{bmatrix} -0.076 & -0.844 \\ 0.106 & -0.524 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.076 & -0.844 \\ 0.106 & -0.524 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.083 & -0.506 \\ 0.064 & -0.186 \end{bmatrix}.$$

Şirul puterilor matricei $\underline{B}$ (cont'd 4)

Nu este verificată (2.13) $\Rightarrow$ va fi calculată $\underline{B}^4$:

$$\underline{B}^4 = \underline{B}^2 \cdot \underline{B}^2 = \begin{bmatrix} -0.083 & -0.506 \\ 0.064 & -0.186 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.083 & -0.506 \\ 0.064 & -0.186 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.025 & -0.052 \\ 0.007 & -0.003 \end{bmatrix}.$$

(2.13) este verificată $\Rightarrow$ toate valorile proprii au modulul subunitar.

4.3. Metode parţiale iterative

Utilizate în situaţiile în care nu sunt cerute toate valorile proprii ale unei matrice ci numai unele dintre acestea şi nici nu este determinat polinomul caracteristic.

Valoare proprie dominantă (principală) a unei matrice – cea care are modulul maxim. Pentru **calculul valorii proprii dominante, al vectorului propriu asociat acesteia şi al razei spectrale:** variantă a ***metodei puterii directe (a lui Rayleigh)*** sau ***metodei puterii*** sau ***metodei iterative directe***.

Metoda puterii

Fie vectorul $\underline{u}^0$ – *o primă iteraţie* a soluţiei reprezentând vectorul propriu corespunzător valorii proprii dominante. $\underline{u}^0$ este o combinaţie liniară necunoscută (de coeficienţi a_i) a vectorilor proprii $\underline{x}_i$ *presupuşi liniar independenţi* ai matricei $\underline{A}$:

$$\underline{u}^0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{x}_i \,. \tag{3.1}$$

Următoarele iteraţii:

$$\underline{u}^1 = \underline{A}\,\underline{u}^0,\;\; \underline{u}^2 = \underline{A}\,\underline{u}^1,\;\ldots,\;\; \underline{u}^k = \underline{A}\,\underline{u}^{k-1},\;\ldots\,. \tag{3.2}$$

Metoda puterii (cont'd 1)

Prin substituţii repetate din (3.2) în (3.1) şi ţinând seama de

$$\underline{A}\,\underline{x}_i = \lambda_i \underline{x}_i \,, \tag{3.3}$$

$\Rightarrow$ vectorul propriu corespunzător valorii proprii dominante la iteraţia k:

$$\underline{u}^k = \lambda_1^k \left[a_1 \underline{x}_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i (\lambda_i / \lambda_1)^k \underline{x}_i \right]. \tag{3.4}$$

Presupunere: valorile proprii ale matricei $\underline{A}$ sunt ordonate astfel încât să verifice (eventual, o permutare)

Metoda puterii (cont'd 2)

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|>\ldots>|\lambda_n|, \qquad (3.5)$$

$\Rightarrow$ pentru un număr suficient de iteraţii (*k* suficient de mare) *raportul* $(\lambda_i/\lambda_1)^k$ *va converge către zero* $\Rightarrow$ suma din (3.4) va converge către zero $\Rightarrow$

$$\underline{u}^k \to \lambda_1^k a_1 \underline{x}_1 = p^k \underline{x}_1, \quad \text{cu} \quad p^k = \lambda_1^k a_1. \qquad (3.6)$$

$\Rightarrow$ $\underline{u}^k$ proporţional cu $\underline{x}_1$ şi $p^k / p^{k-1} \to \lambda_1$. (3.7)

$\Rightarrow$ raza spectrală: $\rho(\underline{A}) = |\lambda_1|$. (3.8)

Metoda puterii (cont'd 3)

Implementare: după fiecare iteraţie se execută *normarea* vectorului $\underline{u}^k$ prin împărţire cu elementul de modul maxim $\Rightarrow$

$$\underline{v}^k = \underline{A}\,\underline{u}^k, \quad \underline{u}^{k+1} = [1/\max(\underline{v}^k)]\underline{v}^k, k = 0,1,2,..., \tag{3.9}$$

$\max(\underline{v}^k)$ – elementul de modul maxim al vectorului $\underline{v}^k$.

Algoritmul – repetare (3.9) până la atingerea convergenţei (condiţia de terminare a procesului iterativ de calcul):

$$\max_j\{|u_j^{k+1} - u_j^k|\} \le \varepsilon, \ j = \overline{1,n}, \tag{3.10}$$

Metoda puterii (cont'd 4)

cu eroarea ε > 0 prestabilită.

Odată satisfăcută (3.10), $\max(\underline{v}^k)$ va fi valoarea proprie dominantă / principală iar modulul său va fi raza spectrală.

Algoritmul metodei puterii directe – **etape**:

1) Iniţializare:

$$\underline{x}_1 = \underline{u}^0, \tag{3.11}$$

($\underline{u}^0$ – arbitrar, indicele superior – numărul iteraţiei curente).

Metoda puterii (cont'd 5)

2) La un pas oarecare *k* al procesului iterativ de calcul, *k* = 0, 1, 2, ... , se determină valoarea curentă a vectorului $\underline{v}^k$ şi noua valoare a vectorului $\underline{x}_1$, $\underline{u}^{k+1}$, aplicând (3.9).

3) Calculul este considerat terminat atunci când se stabilizează vectorul propriu $\underline{x}_1$, adică este verificată condiţia (3.10) de terminare a procesului iterativ de calcul.

4) Valoarea proprie principală = ultimul factor de normare:

$$\lambda_1 = \max(\underline{v}^k), \tag{3.12}$$

Metoda puterii (cont'd 6)

vectorul propriu corespunzător este ultimul vector $\underline{u}^{k+1}$:

$$\underline{x}_1 = \underline{u}^{k+1}, \qquad (3.13)$$

iar raza spectrală se obţine aplicând (3.8):

$$\rho(\underline{A}) = |\lambda_1|.$$

Viteza de convergenţă a algoritmului este cu atât mai mare cu cât rapoartele $\lambda_i / \lambda_1,\ i = \overline{2,n}$, sunt mai mici. Algoritmul este *eficient* în cazul matricelor nesimetrice.