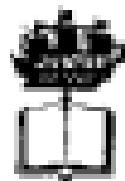


В. А. ПОСТНОВ

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Допущено Министерством науки и  
техники спортивного образования СССР  
и концептуально разработано для судостроения  
квалифицированных авторов

75076/114



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
„СУДОСТРОЕНИЕ“  
ЛЕНИНГРАД,  
1977

Изложены современные численные методы решения задач теории упругости и структурной механики корабля, в том числе метод конечных элементов. Особое внимание акцент делается на универсальные методы при оценке прочности сложных инженерных конструкций. Методы проиллюстрированы числовыми примерами.

Учебник написан в соответствии с программой курса «Численные методы расчета судовых конструкций». Он предназначено для студентов кораблестроительных вузов, может быть использовано также студентами, аспирантами, инженерно-техническими работниками, научниками или заниматься методами решения задач изложения деформируемых тел.

Рецензенты:  
 канд. техн. наук,  
 докт. Ю. Н. Конюхов,  
 докт. техн. наук,  
 проф. А. В. Феоктистов  
 Научный редактор  
 докт. техн. наук,  
 проф. Д. М. Россини

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Содержание	7
Введение	9
<b>Глава I. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ РАСЧЕТА ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ И НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СЛЕДСТВИЯ</b>	<b>12</b>
1. Примеры задач структурной механики корабля, требующие использования численных методов	—
2. Основные этапы исследования комплекса деформируемого тела	13
2.1. Построение физической модели	14
2.2. Построение математической модели	17
2.3. Метод исходирования математической модели и анализ полученного результаты	18
3. Основные схемы в матрицах и матрицах операторов	19
4. Основные подразделы теории упругости	23
4.1. Дискретные обозначения и краяко суперпозиции во времени	23
4.2. Основные закономерности линейной теории упругости	26
4.3. Основные закономерности нелинейной теории упругости	26
<b>Глава II. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОМЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ</b>	<b>29</b>
5. Функционалы и соответствующие им уравнения Эйлера	31
6. Принципы вариационных переменных	35
6.1. Принципы вариационных переменных в задачах равновесия	35
6.2. Консервативные функции силы	36
7. Принципы вариационных изменений конфигуративного состояния	36
8. Метод Риттера	40
9. Метод Бубнова — Галеркина	43
9.1. Обобщенный метод Бубнова — Галеркина	43
9.2. Метод Бубнова — Галеркина	44
9.3. Примеры использования обобщенного метода Бубнова — Галеркина	47
10. Метод Треффоли	52
11. Метод Гайденса	53
12. Приближенное применение потенциальных функций квазистационарного состояния к приближенному решению задач теории упругости	55
13. Обобщенный функционал метода сил	56
13.1. Виды метода сил	56
13.2. Выход формул для определения обобщенного функционала метода сил	61

§ 14. Модифицированный принцип возможных перемещений и методы, основанные на его использовании . . . . .	62	32.3. Характерные черты метода конечных элементов . . . . .	165
14.1. Модифицированный принцип возможных перемещений . . . . .	64	33. Изменение конструкции . . . . .	166
14.2. Модифицированный метод Ритта . . . . .	65	34. Построение изопараметрических полизонов . . . . .	168
14.3. Модифицированный метод Буббена—Галеркина . . . . .	65	34.1. Поверхностная область . . . . .	169
§ 15. Модифицированный принцип возможных конечных напряженных состояний . . . . .	67	34.2. Двумерная область . . . . .	174
15.1. Специальные вариационные принципы . . . . .	69	34.3. Пространственная область . . . . .	178
15.2. Функционалы Шандура, обеспечивающие полносимметрическое выражение компонентов горизонтальных деформаций и напряжения . . . . .	—	§ 35. К вычислению матрицы $[A]^{(11)}$ в векторе $\{P\}^{(1)}$ для б-го конечного элемента . . . . .	181
15.3. Функционалы Рейнхольда—Халлактера, обеспечивающие чистое выражение компонентов горизонтальных перемещений и напряжения . . . . .	72	35.1. Видовые замечания . . . . .	—
§ 17. Нарядуценные принципы полной теории упругости . . . . .	73	35.2. Прямой метод . . . . .	182
17.1. Пояснение об нарядуценных принципах линейной теории упругости к нарядуценным принципам нелинейной теории упругости . . . . .	—	35.3. Вариационный метод . . . . .	185
17.2. Математическая формулировка нарядуценных принципов нелинейной теории упругости . . . . .	—	35.4. Метод Буббена—Галеркина . . . . .	—
§ 18. Использование нарядуценных методов в задачах устойчивости . . . . .	75	§ 36. Метод конечных элементов в задачах теории упругости и строительной механики . . . . .	187
18.1. Постановка задачи в виде расчетных зависимостей . . . . .	—	36.1. Видовые замечания . . . . .	—
18.2. Пример использования нарядуценного метода для исследования устойчивости стержней . . . . .	82	36.2. Матрицы жесткости . . . . .	—
§ 19. Применение нарядуценных методов в задачах динамики . . . . .	86	36.3. МКЭ в варианте метода перемещений . . . . .	191
20. Об обобщении определения собственных чисел в задачах устойчивости и колебаний деформируемых систем . . . . .	88	36.4. МКЭ в варианте метода сил . . . . .	—
<b>Глава III. ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ</b> . . . . .	91	§ 37. Пространственные типы конечных элементов . . . . .	192
§ 21. Матричные формы записи краевых уравнений, описывающих краевые одномерные задачи строительной механики . . . . .	92	§ 38. Преобразование матрицы жесткости конечного элемента при зеркальном отображении . . . . .	195
§ 22. Метод начальных параметров . . . . .	94	§ 39. Метод гармоник . . . . .	197
23. Переход к достоверному численному расчету . . . . .	99	39.1. Видовые замечания . . . . .	—
24. Метод прогонки . . . . .	103	39.2. Выход основных уравнений МКЭ в варианте метода перемещений . . . . .	—
25. Метод Гаудиана . . . . .	106	§ 40. Преобразование объемных и трехмерных задач с такими плоскими деформациями, землемерными условиями, погрешностями . . . . .	201
26. Применение квадратурной формулы Монтичелли—Лебонса . . . . .	109	41. Общая схема применения метода конечных элементов к расчету контурных . . . . .	203
27. Другие методы решения одномерных краевых задач . . . . .	125	42. Учет геометрической и физической нелинейности конструкции . . . . .	206
<b>Глава IV. СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ</b> . . . . .	126	42.1. Видовые замечания . . . . .	—
§ 28. Метод конечных элементов с мелкими Ритта . . . . .	127	42.2. Метод зондовых приближений . . . . .	207
29. Метод квадратурных квадратов . . . . .	130	42.3. Метод узловых решений . . . . .	208
30. Метод сеток . . . . .	132	42.4. Метод Николса—Рафесса . . . . .	209
30.1. Построение изопараметрических полизонов . . . . .	—	42.5. Метод изогнутого Евклидуса . . . . .	211
30.2. Формулы для вычисления производных . . . . .	135	42.6. Самоконтролирующий метод . . . . .	212
30.3. Применение метода сеток для решения одномерных краевых задач . . . . .	140	43. Связь метода конечных элементов с методом Ритта и условия сходимости решений по МКЭ . . . . .	214
30.4. Переизометрическое разбиение одномерной области на отдельные участки . . . . .	145	43.1. Связь метода конечных элементов с методом Ритта . . . . .	—
30.5. Применение метода сеток для решения двумерных краевых задач . . . . .	—	43.2. Условия сходимости решения по МКЭ . . . . .	216
30.6. Аппроксимация границы угловый за краевыми элементами двумерной области . . . . .	150	43.3. Матрица жесткости прямитивного элемента . . . . .	217
§ 31. Метод сеток при трехмерном расположении узловых точек . . . . .	151	44. Матрица жесткости элемента конечного объема . . . . .	219
<b>Глава V. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ</b> . . . . .	156	45. Матрица жесткости для элемента пластины при решении плоской задачи теории упругости . . . . .	220
§ 32. Стабильность метода конечных элементов . . . . .	157	45.1. Треугольный элемент с тремя узловыми точками . . . . .	221
32.1. Некоторые замечания . . . . .	—	45.2. Трапециoidalный элемент с шестью узловыми точками . . . . .	223
32.2. Основные способы в представлении конечных элементов . . . . .	159	46. Прямоугольный элемент с линейным законом изменения коэффициентов перемещения . . . . .	226
		47. Связь структур изопараметрических и краевых жесткостей . . . . .	228
		48. Матрица жесткости для тетраэдра . . . . .	230
		49. Матрица жесткости для кромкоугольного элемента пластины при изгибе . . . . .	233
		49.1. Нестационарная матрица жесткости . . . . .	—
		49.2. Матрица изгиба . . . . .	237
		50. Совместная матрица жесткости прямугольного элемента пластины при изгибе . . . . .	239
		51. Стабильность узловых систем . . . . .	241
		51.1. Устойчивость стержней . . . . .	—
		51.2. Устойчивость пластины . . . . .	243
		52. Нестационарные и динамические задачи . . . . .	245
		52.1. Градиентные динамики . . . . .	—

§2.2. Матрицы масс и сил сопротивления квадратного элемента . . . . .	267
Свободные колебания упругих систем . . . . .	248
§2.4. Нестационарные задачи в методе решения уравнений динамики . . . . .	—
§2.5. Универсальный алгоритм метода конечных элементов. Программа для ЭВМ . . . . .	263
§3.1. Основные этапы алгоритма . . . . .	—
§3.2. Рабочая конструкция из конечных элементов . . . . .	254
§3.3. Матрица жесткости . . . . .	—
§3.4. Описание телоложки конструкции для формирования общей матрицы жесткости . . . . .	—
§3.5. Использование матрицы массовок для автоматической формиро- вания системы уравнений . . . . .	257
§3.6. О порядке нумерации узлов для получения ленты минимальной ширины . . . . .	258
§3.7. Формирование вакансийных узловых узлов от внешних нагрузок . . . . .	259
§3.8. Вычисление узловых узлов . . . . .	—
§3.9. Метод суперэлементов в расчетах прочности судовых конструк- ций . . . . .	266
§4. Вопросы сходимости и точности метода конечных элементов . . . . .	262
§5.1. Схемы дискретизации . . . . .	263
§5.2. Схемы окружения . . . . .	264
§5.3. Устойчивость решения системы линейных алгебраических уравнений . . . . .	—
<b>Глава VI. ПОНИЖЕНИЕ МЕРНОСТИ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ . . . . .</b>	<b>266</b>
§6.1. Метод Канторовича . . . . .	267
§6.2. Метод Власова . . . . .	269
Промежуточный указатель . . . . .	272
Указатель литературы . . . . .	273

Всего 30 лет назад расчет инженерных сооружений можно было выполнить с помощью сравнительно простых расчетных схем и логарифмической линейки.

Появление в начале 50-х годов электронно-вычислительных машин и их использование при выполнении вычислительных операций заставило по-новому взглянуть на содержание прежних расчетных методов. Стало очевидным, что дальнейший технический прогресс, создание новых и более совершенных образцов техники, надводных судов необычной архитектуры и глубоководных аппаратов, космических кораблей и гигантских воздушных лайнеров возможен лишь при значительном усложнении расчетных схем. В этих условиях большая часть ранее применявшихся методов стала неэффективной. И, наоборот, методы, считавшиеся беспersпективными, оказались наиболее приспособленными к вычислительной технике.

За сравнительно короткое время численные методы с примечанием ЭВМ заняли прочное место в инженерных расчетах.

Область использования численных методов чрезвычайно обширна, и границы этой области расширяются с каждым годом вслед за развитием вычислительной техники.

Все сказанное, однако, не исключает необходимости разработки для каждого класса задач новых, более эффективных численных методов. Поэтому изложение содержания отдельных численных методов сопровождается в настоящем учебнике указанием области их рационального применения.

Учебник не может заменить имеющиеся учебники и монографии по вычислительной математике и станет целью отразить специфику использования численных методов при решении задач строительной механики корабля и теории упругости.

Несколько разделов учебника предполагают знакомство читателя с основными положениями теории упругости и строительной механики стержневых систем, теории изгиба пластин и оболочек, с отдельными вопросами теории пластиичности.

Учебник написан в соответствии с программой курса «Численные методы расчета судовых конструкций», читаемого в Ленинградском ордена Ленина кораблестроительном институте. Однако автор полагает, что книга будет полезна также для студентов и аспирантов других технических вузов, для инженеров и научных работников, занимающихся механикой деформируемых тел.

Можно надеяться, что настоящий учебник будет хорошим дополнением к имеющейся учебной литературе по строительной механике, в которой, как правило, численным методам уделяется недостаточное внимание.

Автор выражает благодарность рецензентам докт. техн. наук, проф. А. П. Филиппу, канд. техн. наук, доц. Ю. П. Кочанову за ценные замечания, докт. техн. наук, проф. Д. М. Ростовцеву за большой труд по научному редактированию рукописи. Автор признателен докт. техн. наук, чл.-кор. АН Латв. ССР, проф. Я. Г. Панюко, замечания которого по отдельным главам рукописи способствовали улучшению содержания учебника.

## ВВЕДЕНИЕ

---

Современный этап научно-технической революции в судостроении характеризуется быстрым ростом размеров судов, усложнением и интенсификацией их эксплуатации, появлением новых типов судов (супертанкеров, судов с большим раскрытием палубных люков, судов с горизонтальной грузовой), судов-платформ, газовозов, судов с динамическими приводами поддержания и т. п.), конструктивно заметно отличающихся от традиционных. По этой причине существовавшие ранее методы оценки прочности судовых конструкций, основанные на разделении определение напряжений от общего и местного изгиба отдельных элементов судового корпуса с последующим суммированием полученных величин напряжений, оказываются часто нетривиальными. Становится необходимым развитие уточненных и высокопроизводительных методов расчета и проектирования судовых конструкций с применением ЭВМ.

Предложенные методы оценки прочности судовых конструкций предполагали возможность использования достаточно простых модельных представлений о работе судового корпуса. Так, при определении напряжений от общего изгиба судовой корпус представлялся в виде балки переменного сечения. При определении же напряжений от местного изгиба днищевых перекрытий предполагалось наличие местного широкого замкнутого, образованного бортами и попечерными переборками, что также позволяло обратиться к различным упрощенным модельным представлениям о работе собственно перекрытия.

Такой подход к решению задачи об оценке прочности судовых конструкций основывался на пренебрежении взаимным влиянием общего изгиба судового корпуса и местного изгиба днищевых перекрытий. Допустимость применения вышеупомянутых расчетных схем, основанных на использовании упрощенных физических моделей, к судам обычной конструкции была проверена многочисленными натурными и модельными испытаниями, а также успешной, исключаемой десятилетиями практикой эксплуатации судов. Другое дело — новый конструктивный тип судна. Сразу же

возникает вопрос о возможности использования прежних расчетных методов. Ответ на этот вопрос может быть дан на основе сопоставления результатов расчета по старым методам с результатами, полученными с помощью достаточно строгих методов. Конечно, возможен и другой путь — экспериментальный анализ напряженного состояния яхты построенного судна. Однако такой путь получения ответа на поставленный выше вопрос часто оказывается неприемлемым по экономическим соображениям.

Именно поэтому сейчас, как никогда прежде, особенно актуальны две задачи:

введение уточненных моделей при расчетах прочности судового корпуса и его элементов;

разработка и использование в расчетах прочности судовых конструкций новых вычислительных методов механики деформируемых тел.

С применением ЭВМ стало возможным использовать расчетные модели, более полно учитывающие реальные условия работы судовых конструкций в отношении закона и характера действия внешних нагрузок, граничных условий, геометрических размеров, реологических свойств судостроительных материалов, температурных факторов и т. п.

Наряду с вариационными и другими приближенными методами решения краевых задач механики деформируемых тел, достаточно хорошо освещенных в математической литературе [8, 9, 29, 33, 46, 50, 55, 60, 65, 70, 121], в последние годы исключительно широкое распространение в расчетах проектируемых строительных, авиационных и судовых конструкций получили метод конечных элементов (МКЭ). Несмотря на сравнительно короткий срок «использования» этого метода, достаточно основной рассматривать его в качестве одного из наиболее эффективных численных методов анализа напряженного состояния сложных судовых конструкций.

Широкое применение МКЭ в значительной мере объясняется наличием машинных программ, обладающих высокой степенью автоматизации трудоемких операций составления и решения систем алгебраических уравнений, имеющих высокий порядок, минимумом требований к исходной информации и оптимальной формой выдачи результатов.

Матричная техника вычислений, которая характерна сегодня для большинства приближенных методов, потребовала представления расчетного алгоритма в форме, наиболее приспособленной к использованию машин. И такой формой для ЭВМ оказался язык матричного исчисления. Применение матриц сокращает и упрощает математические выкладки в расчетном алгоритме.

Оперирование матричным языком удобно еще и тем, что современные вычислительные машины располагают стандартными программами для производства различных операций над матрицами. Поэтому в дальнейшем мы также часто будем обращаться к теории матриц.

Для эффективного использования современных численных методов в судостроении требуется знание их слабых и сильных сторон, четкое представление об области использования этих методов, об устойчивости численного алгоритма метода, умение производить оценку быстроты сходимости получаемого при этом приближенного решения с результатами точного решения.

Для каждого класса задач строительной механики и теории упругости существует как бы свой оптимальный метод решения. Выбрать его можно лишь при наличии нового физического представления о характере поведения конструкции, подлежащей расчету, при заданных внешних нагрузках. Только при этом условии можно достаточно правильно выбрать и рассчитанную модель, призванную сохранять все наиболее важные черты поведения конструкции.

Подавляющее большинство задач строительной механики корабля можно отнести к категории краевых задач механики сплошных сред. Из методов, наиболее широко использующихся сегодня при решении краевых задач, можно указать следующие: вариационные (метод Рита, метод Треффса, метод смягчения граничных условий Лейбензона), методы, основанные на использовании смешанных функционалов Папковича, Рейкосера, Келлингера, Ваинчука и т. п.); метод Бубнова—Галеркина; методы, основанные на использовании теории функций комплексных переменных; конечноразностный метод и метод конечных элементов; факторизацияционные методы (метод прогонки, метод квадратур Лашонса, метод Годурова, метод интегральных тождеств Марчука и т. д.).

Существующее деление основных методов решения краевых задач строительной механики и теории упругости на аналитические и численные несет весьма условный характер. В самом деле, с юридичностью математической трактовки, вариационные методы и метод прогонки можно отнести к категории аналитических методов, но при наличии машинных программ их числовую реализацию каждый из этих методов с равным основанием можно отнести к группу численных.

В силу ограниченности объема книги мы не можем детально останавливаться на изложении сущности каждого численного метода, используемого при решении задач механики деформируемых тел. Основное внимание в учебнике будет уделено тем методам, которые получили наибольшее распространение при решении задач строительной механики корабля.

## ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ РАСЧЕТА ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ И НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В главе изложено содержание основных этапов расчета деформируемых тел, а также приведены краткие сведения о материалах и матричных операциях и основные зависимости объемной задачи теории упругости.

### § 1. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ КОРАБЛЯ, ТРЕБУЮЩИЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ

Приведем примеры сравнительно простых задач строительной механики корабля, решение которых требует обращения к приближенным методам.

В курсе строительной механики корабли мы сталкиваемся с необходимостью изучения напряженного состояния балочных упругих систем. Нас прежде всего будут интересовать вопросы изгиба однопролетных многопролетных балок, простых и сложных рам, судовых перекрытий, изгиба судового корпуса при использовании технической теории изгиба балок, расчет общей прочности при спуске судна и при его постановке в док.

Большинство из указанных объектов представляет собой сложную систему балок, скрепленных определенным образом в некоторых точках. Ясно, что исследование любой сколь угодно сложной балочной системы требует предварительного изучения поведения составляющих ее балочных элементов. При этом отдельные балки могут иметь переменные значения жесткости за изгиб  $EI(x)$  и на сдвиг  $Gw(x)$ , они будут лежать на упротом основании переменной жесткости  $k(x)$  и подвергаться действию поперечной нагрузки интенсивности  $q(x)$  и осевых сил  $T$ .

Изгиб таких балок описывается, как известно, дифференциальным уравнением вида

$$(EI(x) w''(x))' - Tw''(x) + k(x) w(x) = q(x), \quad (1.1)$$

где  $w(x)$  — поперечный просад балки.

В общем случае точно пронтегрировать это уравнение невозможно. Однако существует ряд численных методов, позволяющих получить приближенное решение с любой степенью заданной точностью. Некоторые из этих методов, нашедших широкое использование в строительной механике корабля, приведены в § 22, 24, 25, 26.

Наряду с балочными одномерными задачами в строительной механике подробно рассматриваются двух- и трехмерные задачи: изгиб и устойчивость пластин и оболочек, определение напряженного состояния в объемных телах произвольной формы при действиях заданных интенсивностей нагрузок и т. п. Поведение таких упругих систем описывается уже дифференциальными уравнениями в частных производных. Естественно, что трудности получения решения этих уравнений оказываются на порядок выше, нежели при решении уравнений балочных одномерных задач.

К примеру изгиб прямоугольной пластинки постоянной толщины при действии поперечной нагрузки интенсивности  $q(x, y)$  (одна из самых простых задач этого класса) описывается сравнительно простым по форме дифференциальным уравнением в частных производных следующего вида:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (1.2)$$

Точное решение уравнения (1.2), и то только в форме бесконечного тригонометрического ряда, удается получить при достаточно простых граничных условиях пластинки. При более трудных граничных условиях, более сложных очертаниях пластинки в плане, при наличии в ней вырезов или перемены ее толщины можно получить лишь приближенное решение с помощью численных методов.

Реальные судовые конструкции намного сложнее простых балок и пластин. При их расчете часто необходимо принимать во внимание характер взаимодействия между стержневыми и пластинчатыми элементами конструкции, а также проявления геометрической и физической нелинейности и многие другие факторы, влияющие на поведение конструкции. Как правило, учет этих факторов при анализе напряженного состояния судовых конструкций оказывается возможным лишь с помощью приближенных численных методов.

### § 2. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

В расчете напряженно-деформированного состояния любой конструкции можно условно выделить следующие основные этапы:

— идеализация свойств заданной конструкции и внешних воздействий (построение физической модели);

математическая формулировка поведения физической модели (построение математической модели);

выбор метода исследования математической модели и проведение этого исследования;

анализ полученного математического результата.

Кратко остановимся на содержании каждого из этих этапов.

## 2.1. Построение физической модели

В общем случае всякая реальная конструкция (или просто какой-то объект, поведение которого под действием заданных внешних воздействий исследуется) имеет бесконечно много особенностей геометрии, свойств материала, характера внешнего нагружения и т. д. В практических расчетах учесть все особенности исходного объекта, влияющие на его поведение, при ограниченной возможности вычислительных средств невозможно, а самое главное, и не нужно. Объект заменяется некоторой физической моделью, обладающей конечным числом особенностей из числа тех, которые присущи исходному объекту. Некоторые свойства объекта при переносе на модель могут подвергаться какими-то изменениям, которые, безусловно, влияют на интересующие нас стороны поведения данного объекта, могли бы существенно упростить его модельное представление, а значит, упростить и исследование.

Рассмотрим примеры упрощающих допущений при выборе расчетной модели.

Принимая модель сплошного тела, мы определяем дискретное взаимодействие между отдельными молекулами тела. Более того, в этом модельном представлении материала мы отходим даже от его кристаллической структуры, характерной для большинства конструкционных материалов, в частности, сугубо строительной стали. Принятая для материала физической модели сплошного тела приводит, как известно, к резкому упрощению математического описания исследуемых явлений в напряженной конструкции.

Многие из внешних сил, действующих на конструкцию, изменяются во времени. Если это изменение происходит достаточно медленно, что не вызывает в конструкции значительных инерциальных сил, то вполне обосновано предположение о статическом приложении внешних нагрузок.

Но высказыванное ясно, что модель расpolагает лишь частью свойств исходного объекта, а поэтому и проще его.

Используемые в механике деформируемых сред модели можно отнести к классу умозрительных физических моделей, подчиняющихся тем или иным физическим законам. Физическая модель служит как бы переходным звеном к математической модели объекта, под которой понимается совокупность математических

зависимостей и уравнений, описывающая поведение физической модели объекта.

Часто один и тот же математический модель соответствует нескольким различным физическим моделям. Например, краевая задача для квазигармонического дифференциального уравнения может описывать физическую модель течения навязанной жидкости, кручения призматического стержня, явления теплопроводности, гравитации, фильтрации в сплошных средах и т. д.

Наличие одной и той же математической модели для двух различных физических моделей позволяет использовать имеющиеся результатом для одной из них при исследовании поведения другой физической модели.

Следует заметить, что один и тот же объект может быть представлен несколькими различными физическими моделями. Каждая из этих моделей станет своей целью изучение лишь определенных сторон поведения объекта. Например, при изучении поведения такого объекта, как корабль, экономист заменит его транспортной моделью, технолог — технологической, а специалист в области прочности — совокупностью взаимно связанных между собой конструктивных элементов (балок, пластин и оболочек).

При изучении единичных и тех же свойств объекта возможен выбор различных типов физических моделей. При этом часто выбранная модель определяет метод исследования ее поведения. Приведем ряд конкретных примеров, наглядно раскрывающих вышеизложенное.

Пример 1. Задана балка переменной жесткости  $EI(x)$ , загруженная поперечной нагрузкой интенсивности  $q(x)$  (рис. 1, а). Требуется подобрать расчетную модель такой балки.

При расчете балки можно использовать несколько упрощенных моделей (рис. 1, б; 1, в). На рис. 1, б исходная балка переменного сечения заменяется балкой ступенчато-постоянного сечения. Аналогичную схематизацию претерпевает в анизии нагрузка. В результате балка переменной жесткости моделируется балкой, состоящей из нескольких жестко связанных между собой призматических блочных элементов, каждый из которых загружён постоянной нагрузкой. Для расчета этой модели очень удобно использовать обобщенный метод начальных параметров или метод конечных элементов (оба эти метода подробно рассмотрены в § 22, 24).

На рис. 1, в идея дискретизации жесткостных параметров внешней нагрузки претерпевает еще более грубую. Здесь исходная балка моделируется упруго-жесткой системой, состоящей из нескольких абсолютно жестких на изгиб звеньев, скрепленных между собой упругими элементами, сопротивляющимися возникновению изломов в этих сечениях. Заметим, что в расчетном отношении изломы в этих сечениях. Заметим, что в расчетном отношении изломы в этих сечениях. Заметим, что в расчетном отношении изломы в этих сечениях. Заметим, что в расчетном отношении изломы в этих сечениях.

Можно показать, что с увеличением числа участков, на которые разбивается балка, точность приближенного решения, полу-

ческого при использовании описанных выше моделей, возрастает. Иначе говоря, путем выбора соответствующего числа участков мы можем получить решение для исходной балки (рис. 1, а) с требуемой точностью при использовании любой из двух рассмотренных выше моделей.

**Пример 2.** В основе многих численных методов, используемых для приближенного расчета упругих систем с распределен-

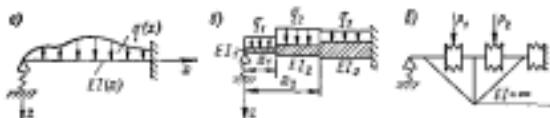


Рис. 1. К выбору расчетных моделей на основе единиц дискретизации: а — балка переменной жесткости; б — расчетная модель балки, основанная на кусочно-постоянном законе аппроксимации жесткости и внешней нагрузки балки; в — вторая вариант расчетной модели, в котором балка заменена совокупностью упругосвязанных между собой абсолютно жестких на изгиб отдельных баз.

Базами разделяемых нагрузок считаются единичные координатные сегменты.

ными параметрами, заложены идеи замены исходной системы с бесконечным числом степеней свободы системой с конечным числом. Например, при использовании метода Ритца для расчета прогиба балок упругую линию находят в виде

$$w(x) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x), \quad (2.1)$$

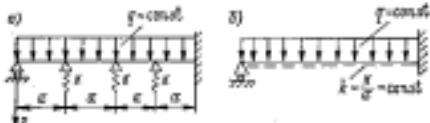


Рис. 2. К выбору расчетной модели для балки, лежащей на упругих опорах: а — балка, лежащая на независимых упругих опорах одинаковой жесткости  $K$  и загруженная равномерно распределенной поперечной нагрузкой  $q$ ; б — расчетная модель исходной балки, основанная на замене упругих опор скользящими упругими основаниями.

где  $\varphi_n(x)$  — базисные функции, удовлетворяющие kinematicalnym граничным условиям на концах балки;  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) — неизвестные параметры, подлежащие определению.

Сохранение в равенстве (2.1)  $N$  параметров  $a_n$  приводит к замене, в хевонской форме, континуальной упругой системы дискретной системой с  $N$  степенями свободы.

Выше приведены примеры использования идеи дискретизации при выборе физических моделей. Однако же всегда при выборе физических моделей мы имеем во виду дискретизацию рассматриваемой конструкции, параметров внешней нагрузки и т. п. Иногда оказывается более выгодно использовать идею континуализации. Приводим пример это на простом примере.

**Пример 3.** Требуется произвести расчет призматической балки, лежащей на равноотдаленных упругих опорах одинаковой жесткости  $K$  и загруженной поперечной нагрузкой постоянной интенсивности  $q$  (рис. 2, б).

Если число пролетов балки достаточно велико, то при определенном соотношении жесткости балки на изгиб  $EI$  и жесткости упругих опор  $K$  дискретные упругие опоры можно заменить непрерывным упругим основанием постоянной жесткости  $k = \frac{K}{e}$  (рис. 2, б).

Для получающейся при этом модели имеется готовое решение и формулы определения основных расчетных величин [54].

## 2.2. Построение математической модели

До сих пор речь шла о выборе для конструкции, подлежащей расчету, ее физической модели. Следующим этапом расчета является математическое описание поведения этой физической модели, или, как иногда говорят, выбор ее математической модели. Математическая модель включает матричариированные входные и выходные данные и математически сформулированный оператор перехода от первых ко вторым.

Казалось бы, каждая физическая модель должна соответствовать своей единственной математической модели. Но это не так. Дело в том, что при математическом описании поведения выбранной физической модели часто вносятся дополнительные упрощающие предположения о характере ее отдельных свойств. Это служит причиной появления для одной и той же физической модели ряда различных математических моделей. Например, при математическом описании поведения изотропных пластин используется ряд гипотез: гипотеза о прямых нормателях, гипотеза прямой линии, гипотеза о равномерном распределении касательных напряжений по толщине пластины и т. п. Наконец, при описании поведения пластины под действием внешней поверхности нагрузки можно было бы вообще обойтись без этих гипотез, используя в самом общем виде зависимость объемной задачи теории упругости.

Ясно, чтоведение каждой из упомянутых выше гипотез приводит к построению своей математической модели. Самой строгой будет математическая модель, включающая без каких-либо дополнительных ограничений зависимость объемной задачи теории упругости. Введение же дополнительных гипотез сужает область применения данной математической модели. Например,

использование гипотезы прямых нормалей допустимо лишь для сравнительно тонких пластин.

Для так называемых пластин средней толщины применение математической модели, основанной на гипотезе прямых нормалей, может уже привести к заметным погрешностям в оценке их поведения. Здесь следует обратиться к математической модели, построенной на основе гипотезы прямой линии или равномерного распределения касательных напряжений по толщине.

При дальнейшем увеличении толщины пластин может оказаться допустимым употребление линии такой математической модели, которая основана на использовании общих зависимостей теории упругости.

При практическом рассмотрении нетрудно заметить, что приведенная выше граница между физической и математической моделями весьма условна. В самом деле, указанные кинематические и силовые гипотезы можно было бы представить в качестве дополнительных ограничений на свойства физической модели.

### 2.3. Метод исследования математической модели и анализ полученного результата

Для каждой математической модели может существовать, как правило, несколько методов ее исследования. Так, дифференциальное уравнение (1.1) в сопокупности с некоторыми краевыми условиями образует математическую модель изгиба неприматической балки, лежащей на упругом основании переменной жесткости. Исследовать данную математическую модель, т. е. получить решение дифференциального уравнения (1.1) при заданных граничных условиях можно с помощью обобщенного метода начальных параметров, метода Ритца, метода сеток, метода коллокаций, метода конечных элементов и т. д.

Следует заметить, что выбор метода исследования математической модели может существенно сказаться на устойчивости алгоритма — чувствительности результата решения к неизбежным погрешностям числовых операций (из-за ограниченности числа цифр в машине числа, которыми опиruют современные вычислительные машины). Например, при расчете достаточно длинной балки, лежащей на упругом основании, использование метода начальных параметров может привести к числовым неустойчивостям и недопустимо большим погрешностям в результатах. Использование же метода прогонки для решения той же задачи приводит к устойчивому числовому алгоритму.

Поскольку содержание математической модели в известной мере предопределено содержанием физической модели, то, по-видимому, справедливо утверждение, что для каждой физической модели можно подобрать такой метод исследования ее математической модели, который будет обладать наилучшей числовой устойчивостью.

Исследование математической модели позволяет оценить влияние отдельных ее членов на поведение физической модели. В результате может потребоваться уточнение содержания физической модели. Такой анализ особенно полезен, если при выборе физической модели не ясно влияние отдельных свойств исходного объекта на интересующие нас стороны его поведения.

Учет в физической модели дополнительных свойств объекта повышает ее способность к более точному описанию его поведения. Однако следует помнить, что при этом возрастает и общая трудоемкость исследования. Вот почему вопросы построения физической модели, включающей в себе лишь необходимые свойства исследуемого объекта, являются исключительно важными. Здесь многое зависит от опыта исследователя, его научной интуиции, анализа результатов использования базовых физических моделей и т. п.

Серьезным этапом в анализе прочности судовых конструкций является выбор основных допущений и исходных предпосылок, заложенных в расчетную схему. Следует всегда помнить о том, что реальное уточнение оценки прочности достигается лишь тогда, когда уточняются в равной степени все составляющие, входящие в окончательный результат. Применимельно к расчету внутренних усилий в конструкциях особое внимание должно быть обращено на выбор физической и математической моделей, соответствующих такому опасному состоянию, которое будет использовано дальнейшим при формулировке критерия прочности [80]. С самого начала необходимо решить вопрос о том, какие из составных конструкций являются опасными. Например, следует ли при определении допустимых внешних нагрузок исходить из результатов расчета конструкции в упругой области по допускаемым напряжениям, расчета той же конструкции в упругопластической области по допускаемым деформациям, или следует исходить из значений предельных нагрузок.

Естественно, общих рекомендаций по выбору опасных состояний дать нельзя: многое зависит от вида и характера действия внешних нагрузок, от рабочих функций конструкции.

В заключение настоятельно рекомендуем читателю обратиться к книге И. И. Блехмана, А. Д. Мицкиса и Я. Г. Панково [111] и прочесть ее вторую главу; в ней приведен ряд очень удачных и тонких соображений, которые полезно учесть при моделировании исследуемого объекта.

### § 3. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МАТРИЦАХ И МАТРИЧНЫХ ОПЕРАЦИЯХ

Подавляющее число задач строительной механики связано с необходимостью решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных с переменными, в общем случае, коэффициентами.

Точно прокатографировать их невозможно, и остается путь получения приближенных решений с помощью численных методов.

Многие из этих численных методов основаны на матричной схематизации процесса вычислений. Вот почему мы считаем целесообразным до рассмотрения существа численных методов кратко изложить основные следения о матрицах в матричных операциях [31, 51].

Основой целью настоящего параграфа является не столько повторение известных сведений о матрицах и матричных операциях, сколько введение в курс обозначений, используемых в книге.

1. Матрица называется совокупностью элементов  $a_{ij}$ , расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей  $n$  строк и  $m$  столбцов. Такая матрица записывается в виде

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Матрица  $[A]$  имеет размеры  $n \times m$ .

2. Если все элементы  $a_{ij}$  — действительные числа, матрица  $[A] = [a_{ij}]$  называется действительной.

3. Матрица

$$[A] = [a_1 a_2 \cdots a_m] \equiv [a_i], \quad (3.2)$$

состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой.

4. Матрица

$$[A] = [a_1 a_2 \cdots a_n] \equiv [a_j], \quad (3.3)$$

состоящая из одного столбца, называется матрицей-столбцом.

5. Матрица размером  $n \times n$  называется квадратной матрицей порядка  $n$ .

6. Квадратная матрица  $[A] = [a_{ij}]$  называется:

- а) квадратной, если  $a_{ii} = 0$  при  $i > k$ ;
- б) диагональной, если  $a_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ ;
- в) единичной, если  $a_{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k; \\ 1 & \text{при } i = k; \end{cases}$ ;
- г) симметричной, если  $a_{ik} = a_{ki}$ .

7. Для диагональной и единичной матриц часто используют соответственно следующие обозначения:

$$\Gamma A \Gamma = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

8. Под производной от матрицы  $[A] = [a_{ij}(x)]$  по аргументу  $x$  условно понимают матрицу  $[A']$ , получающуюся из

матрицы  $[A]$  путем замены всех ее элементов их производными по  $x$ ,

$$[A'] = \frac{d}{dx}[A] \equiv \left[ \frac{da_{ij}}{dx} \right]. \quad (3.5)$$

Частные производные и интегралы от матриц определяются аналогично.

9. Введем понятия следующих основных операций над матрицами:

а) две матрицы  $[A] = [a_{ij}]$  и  $[B] = [b_{ij}]$  размером  $n \times m$  разные друг от друга

$$[A] \neq [B],$$

если  $a_{ik} \neq b_{ik}$  для всех  $i$  и  $k$ ;

б) сумма двух матриц  $[A]$  и  $[B]$  размером  $n \times m$  есть матрица  $[C]$  размером  $n \times m$

$$[C] = [A] + [B] = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]; \quad (3.6)$$

в) произведение матрицы  $[A]$  и  $[B] = [a_{ij}]$  размером  $n \times m$  на скаляр  $\alpha$  есть матрица размером  $n \times m$

$$[\bar{C}] = \alpha [A] \equiv \alpha [a_{ij}] \equiv [\bar{a}_{ij}]; \quad (3.7)$$

г) произведение матриц  $[A] = [a_{ij}]$  и  $[B] = [b_{ij}]$  определяется лишь при условии, что число столбцов матрицы  $[A]$  равно числу строк матрицы  $[B]$ .

Если матрица  $[A]$  имеет размер  $n \times m$ , а матрица  $[B]$  — размер  $m \times r$ , то их произведение образует матрицу  $[C]$  размером  $n \times r$

$$[C] = [A][B] = [a_{ij}][b_{jk}] = [c_{ik}], \quad (3.8)$$

где

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk}. \quad (3.9)$$

Заметим, что из существования произведения  $[A][B]$  еще не следует существование произведения  $[B][A]$ .

10. Матрицу  $[B] = [A]^{-1}$  называют обратной к квадратной матрице  $[A]$ , если

$$[A][B] = [B][A] = [I]. \quad (3.10)$$

Можно показать, что достаточным условием существования обратной матрицы  $[A]^{-1}$  является неособенность матрицы  $[A]$ . Определитель неособенной, или невырожденной, матрицы не равен нулю

$$\det [A] \neq |A| \neq 0.$$

Если же  $|A| = 0$ , то матрица  $[A]$  называется особенной, или вырожденной.

Произведение двух невырожденных матриц и матрица, обратная невырожденной матрице, есть также невырожденные матрицы.

11. Если в матрице  $[A] = [a_{ij}]$  поменять местами строки и столбцы, то получим матрицу  $[A]^T = [a_{ji}]$ , которая называется транспонированной матрицей по относению к  $[A]$ , где символ  $T$  обозначает операцию транспонирования.

12. Операции над произведением нескольких матриц:

а) транспонированием матрица произведения нескольких матриц

$$([A][B]\cdots[C])^T = [C]^T\cdots[B]^T[A]^T; \quad (3.11)$$

б) обратная матрица произведения нескольких квадратных невырожденных матриц одного порядка

$$([A][B]\cdots[C])^{-1} = [C]^{-1}\cdots[B]^{-1}[A]^{-1}; \quad (3.12)$$

в) определитель произведения нескольких квадратных матриц одного порядка

$$\det([A][B]\cdots[C]) = \det[A]\det[B]\cdots\det[C]. \quad (3.13)$$

13. Собственными, или характеристическими, числами квадратной матрицы  $[A]$  будут те значения скалярного параметра  $\lambda$ , для которого матрица  $([A] - \lambda[I])$  становится вырожденной, т. е.

$$\det([A] - \lambda[I]) = 0. \quad (3.14)$$

14. Квадратичная форма от  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  есть многочлен

$$[X][A][X] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j = [X][A_1][X], \quad (3.15)$$

где  $[A_1] = \frac{1}{2}([A] + [A]^T)$  — симметричная часть матрицы  $[A]$ ;  $[A_1] = [a_{ij}]$ .

Квадратичная форма (3.15) будет симметричной и действительной, если  $[A]$  — симметрична и действительна. Наконец, действительная и симметричная квадратичная форма (3.15) и соответствующая ей действительная симметричная матрица  $[A]$  называются положительно определенными, отрицательно определенными, неопределенными, неположительными или неопределенными, если соответственно

$$V = [X][A][X] > 0; \quad V < 0; \quad V \geq 0; \quad V \leq 0$$

$$\text{или } V \leq 0.$$

Действительная симметричная квадратичная форма будет положительно определенной, отрицательно определенной, неопределенной, неположительной, или неопределенной, если собственные числа  $\lambda_i$  матрицы  $[A] = [a_{ij}]$  соответственно все положи-

тельные, все отрицательны, все неотрицательны, все неположительны или имеют разные знаки.

На этом мы закончим краткий перечень основных матричных определений и операций. Некоторые дополнительные сведения из теории матриц будут излагаться по мере необходимости в соответствующих разделах книги.

## § 4. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 4.1. Дополнительные обозначения и правило суммирования по индексу

4.1.1. Если дана совокупность трех взаимосвязанных переменных  $x, y, z$ , то их более удобно обозначить одной буквой, но с различными индексами:  $x_1, x_2, x_3$ , или в более компактном виде

$$x_i (i = 1, 2, 3). \quad (4.1)$$

Вышеизложенное позволяет в дальнейшем для величин, встречающихся в теории упругости, использовать следующие обозначения:

$$\left. \begin{array}{l} x, y, z \rightarrow x_i \quad (i = 1, 2, 3); \\ a_{ij}, \sigma_{ij}, \dots, v_{ij} \rightarrow a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3); \\ X_i, Y_i, Z_i \rightarrow F_{ij} \quad (i = 1, 2, 3); \\ X, Y, Z \rightarrow X_i \quad (i = 1, 2, 3); \\ u, v, w \rightarrow u_i \quad (i = 1, 2, 3); \\ e_x, e_y, e_z, \frac{1}{2} \gamma_{xy}, \frac{1}{2} \gamma_{xz}, \frac{1}{2} \gamma_{yz} \rightarrow e_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

В дальнейшем мы часто будем прибегать к использованию символа Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (4.3)$$

Ряд зависимостей теории упругости представляет собой либо однородную линейную функцию переменных

$$\sum_{i=1}^3 a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3. \quad (4.4)$$

либо однородную квадратичную функцию трех переменных

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2 + a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3^2. \quad (4.5)$$

Нетрудно заметить, что в выражениях (4.4) и (4.5) индексы, по которым ведется суммирование, попадаются дважды. Это выражение можно сделать компактнее, если принять, что знак суммы  $\Sigma$  подразумевается вспомогательный раз, когда в однократном выражении индекс повторяется [51, с. 438]. Тогда формулу (4.4) можно записать так:

$$a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \quad (4.6)$$

а формулу (4.5) переписать в виде

$$a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{33} x_3^2. \quad (4.7)$$

Неудобство такой формы записи проявляется лишь тогда, когда мы хотим отдельно выписать какой-то член суммы.

**4.1.2.** Пусть переменные  $x_i$  преобразуются в новые  $x'_i$  с помощью линейного преобразования

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= l_{11} x_1 + l_{12} x_2 + l_{13} x_3, \\ x'_2 &= l_{21} x_1 + l_{22} x_2 + l_{23} x_3, \\ x'_3 &= l_{31} x_1 + l_{32} x_2 + l_{33} x_3, \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

или

$$x'_i = l_{ii} x_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.9)$$

Здесь  $l_{ii}$  — некоторые константы.

Предполагается, что определитель  $|l_{ii}| \neq 0$ .

Известно, что компоненты напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $e_{ij}$  образуют тензоры второго ранга и их составляющие в новой системе координат определяются с помощью зависимостей

$$\sigma_{i'j'} = l_{i'k} l_{j'l} \sigma_{kl}, \quad (4.10)$$

$$e_{i'j'} = l_{i'k} l_{j'l} e_{kl}. \quad (4.11)$$

## 4.2. Основные зависимости линейной теории упругости

Используя выведенное выше « соглашение» о суммировании, можно записать основные зависимости теории упругости в достаточно компактном виде:

*A. Уравнения равновесия по объему тела*

$$\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_i} + X_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.12)$$

*B. Зависимости Коши*

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{jj}}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4.13)$$

*В. Зависимости, связывающие компоненты напряжения и деформации в линейно-упругом теле, имеют вид*

$$a_{ij} = a_{ijkl} e_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (4.14)$$

Разрешая систему уравнений (4.14) относительно  $e_{kl}$ , получаем

$$e_{kl} = a_{ijkl} \sigma_{ij} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (4.15)$$

Коэффициенты  $a_{ijkl}$  и  $a_{ijlk}$  обладают свойствами симметрии

$$a_{ijkl} = a_{ijlk}; \quad a_{ijkl} = a_{ijlk}. \quad (4.16)$$

*Г. Гравитационные рядовые.* В общем случае поверхность тела  $S$  можно представить из двух частей  $S_1$  и  $S_2$ . На части поверхности  $S_1$  заданы внешние нагрузки, а на части поверхности  $S_2$  — перемещения.

Следовательно граничные условия записываем так:

$$X_n = \bar{X}_n; \quad Y_n = \bar{Y}_n; \quad Z_n = \bar{Z}_n \text{ на } S_1, \quad (4.17)$$

где  $\bar{X}_n, \bar{Y}_n, \bar{Z}_n$  — проекции на оси координат вектора внешней нагрузки, действующей на единицу площади поверхности.

Используя обозначения (4.2), условия (4.17) можно переписать в виде

$$F_{ni} = F_{ni} \quad (i = 1, 2, 3) \text{ на } S_1, \quad (4.18)$$

где

$$F_{ni} = \sigma_{ij} f_{nj}. \quad (4.19)$$

Кинематические граничные условия записываем так:

$$u = \bar{u}; \quad v = \bar{v}; \quad w = \bar{w} \text{ на } S_2, \quad (4.20)$$

здесь в обозначениях (4.3)

$$u_i = \bar{u}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.21)$$

### 4.3. Основные зависимости нелинейной теории упругости

Настоящий раздел параграфа имеет вспомогательное значение. В нем приведены лишь основные уравнения и некоторые из зависимостей нелинейной теории упругости в объеме, необходимые для изложения в следующем параграфе вариационных принципов решения нелинейных задач теории упругости в строительной механике.

Подробное изложение нелинейной теории упругости, как и вывод всех приводимых ниже уравнений и зависимостей, содержится, например, в книгах В. В. Новожилова [74, 75].

**4.3.1. Компоненты деформаций.** В нелинейной теории упругости они определяются следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} e_{ii} &= \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 \right]; \\ 2e_{ij} &= \frac{\partial u}{\partial y_j} + \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial y_i} + \frac{\partial w}{\partial y_j} + \frac{\partial u}{\partial z_i} + \frac{\partial u}{\partial z_j}; \end{aligned} \quad (4.22)$$

(x, y, z).

Если воспользоваться правилом «суммирования» по индексу, то выражение (4.22) можно переписать в виде

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial y_j} + \frac{\partial u}{\partial z_j} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4.23)$$

Шесть компонентов  $e_{ij}$ , связанных с перемещениями  $u$ , полностью характеризуют деформацию тела, поскольку, зная их, можно вычислить относительные удлинения в любой точке  $x$  в любом направлении, а также определить обусловленные деформацией изменения углов между любыми двумя направлениями, проходящими через данную точку тела.

Следует заметить, что если  $e_{ij} \ll 1$ , то каждый из компонентов деформации  $e_{ij}$  с достаточной точностью [формулы (4.23)] определяет соответственно величину либо линейной, либо сдвиговой деформации в данной точке тела. При достаточно малых перемещениях тела, когда деформации и углы поворота отдельных волокон тела пренебрежимо малы по сравнению с единицей, в зависимостях для компонентов деформации велическими членами можно пренебречь. В результате получим известные зависимости Коши линейной теории упругости

$$e_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial y_j} \right). \quad (4.24)$$

**4.3.2. Условия совместности деформаций.** Функции  $e_{ij}$  определяют деформацию тела, не нарушающую его сплошности, лишь в том случае, если они подчиняются определенным шести дифференциальным соотношениям.

В общем случае эти соотношения весьма громоздки [75, с. 53].

Они существенно упрощаются, если предположить, что удлинения и сдвиги пренебрежимо малы по сравнению с единицей. Ниже, для этого частного случая, приводятся два из шести условий совместности деформаций

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial e_{yy}}{\partial z^2} - \frac{\partial e_{zz}}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial u_{xx}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_{yy}}{\partial z} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial u_{zz}}{\partial z} \right)^2 - \left( \frac{\partial u_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial u_{zz}}{\partial x} \right) \times \\ &\times \left( \frac{\partial u_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial u_{zz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial u_{yy}}{\partial y} \left( \frac{\partial u_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial u_{zz}}{\partial x} \right) - \\ &- \frac{\partial u_{zz}}{\partial z} \left( \frac{\partial u_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial u_{yz}}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial e_{xy}}{\partial yz} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial u_{zz}}{\partial z} \right) &= \\ = \frac{\partial u_{xy}}{\partial y} \frac{\partial u_{xz}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_{yz}}{\partial x} \left( \frac{\partial u_{yy}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zz}}{\partial y} - \frac{\partial u_{xy}}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial u_{yz}}{\partial z} \left( \frac{\partial u_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial u_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial u_{xz}}{\partial z} \right) - \\ &- \frac{\partial u_{yz}}{\partial z} \left( \frac{\partial u_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial u_{xz}}{\partial y} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\partial u_{xz}}{\partial z} \left( \frac{\partial u_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial u_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial u_{xy}}{\partial z} \right) \quad (x, y, z). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Остальные четыре условия могут быть получены путем циклической перестановки.

Если дополнительно предположить, что малы по сравнению с единицей не только деформации, но и их производные, то зависимости (4.25) полностью линеаризуются и переходят в условия сплошности линейной теории упругости

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial z^2} - \frac{\partial e_{xz}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u_{xy}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial e_{xy}}{\partial yz} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial u_{zz}}{\partial z} \right) &= (x, y, z). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Степень точности уравнений (4.26) соответствует использованию линейных соотношений (4.24) между компонентами деформации и компонентами перемещения.

**4.3.3. Уравнения равновесия элементарного параллелепипеда.** В книге В. В. Новожилова [75] приведены уравнения равновесия объемного элемента тела в самом общем случае, когда удлинения, сдвиги и углы поворота отдельных волокон тела не являются малыми величинами по сравнению с единицей.

Однако для многих областей механики деформируемых тел (например, теории изгиба пластин и оболочек при больших перемещениях) часто можно считать удлинения и сдвиги малыми величинами по сравнению с единицей. Система уравнений равновесия, учитывающая лишь конечность углов поворота объемного элемента вокруг координатных осей, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{xx} + \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z} \tau_{xz} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{yy} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z} \tau_{yz} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tau_{xz} + \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{zz} \right] + \bar{X}_x = 0 \\ & (x \ y \ z). \quad (4.27) \end{aligned}$$

Остальные два уравнения могут быть написаны по аналогии. В тензорной символике уравнения равновесия (4.27) можно переписать так:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \sigma_{ij} \right] + \bar{X}_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ в } V. \quad (4.28)$$

Входящие в эти уравнения компоненты напряжения  $\sigma_{ij}$  и компоненты объемной силы  $\bar{X}_i$  отнесены соответственно к единице площади и единице объема тела в его недеформированном состоянии. Кроме того, компоненты напряжения удовлетворяют условию симметрии

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (4.29)$$

которое является следствием выполнения уравнений равновесия объемного деформированного элемента для моментов.

Если перемещения точек тела настолько малы, что разряд с удлинениями и сдвигами углы поворота отдельных волокон также будут малы по сравнению с единицей, то в уравнениях (4.28) членами, содержащими компоненты перемещения, можно пренебречь. В результате получим известные уравнения равновесия линейной теории упругости

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \bar{X}_j = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ в } V. \quad (4.30)$$

**4.3.4. Уравнения равновесия элементарного тетраэдра.** Напишем первое из этих уравнений. (Два последующих можно при необходимости написать по аналогии.)

$$\begin{aligned} F_{ii} = & (\alpha_i I + \tau_{ix} m + \tau_{iz} n) \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + (\tau_{iy} I + \sigma_{yy} m + \tau_{yz} n) \frac{\partial u}{\partial y} + \\ & + (\tau_{iz} I + \tau_{yz} m + \sigma_{zz} n) \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (4.31) \end{aligned}$$

В тензорной символике эти уравнения можно переписать в следующем виде:

$$F_{ii} = \sigma_{ii} I_{ii} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.32)$$

При малых, но сравнимых с единицей, удлинениях, сдвигах и углах поворота в формуле (4.32) можно опустить члены с компонентами перемещения. При этом получим

$$F_{ii} = \sigma_{ii} I_{ii} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.33)$$

Уравнения (4.33) являются уравнениями равновесия элементарного тетраэдра, используемыми в линейной теории упругости.

**4.3.5. Связь между компонентами напряжения и компонентами деформации.** Будем учитывать физическую величинность, которая связана с наличием, хотя и однозначной, но величиной зависимости между компонентами напряжения и компонентами деформации

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij} (e_{11}, e_{12}, e_{13}, \dots, e_m) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4.34)$$

При этом, нулевому деформированному состоянию соответствует нулевое напряженное состояние, т. е.  $\sigma_{ij} (0, 0, 0, \dots, 0) = 0$ .

Будем также предполагать существование однозначной обратной функции, которая определяет деформации через компоненты напряжения

$$e_{ij} = e_{ij} (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \dots, \sigma_{mm}) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4.35)$$

## Глава II

### ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Состояние равновесия или движение деформируемых систем, как известно, заряд с дифференциальными уравнениями может описываться с помощью вариационных принципов. Так, положение равновесия консервативной системы есть положение, в котором складная функция работы всех сил системы имеет минимальное значение.

Указанные обстоятельства позволяют заменить проблему решения систем дифференциальных уравнений равновесия рассматриваемой механической системы проблемой определения функций, обеспечивающих минимум некоторого функционала, в данном случае, складной функции работы всех сил, действующих на систему. Для определения этого минимума используются так на-

зываемые прямые вариационные методы, основы которых были заложены в работах Рэлли<sup>1</sup> и Ритца<sup>2</sup>.

В общем случае поведение деформируемых систем описывается условием стационарности некоторого функционала. И это условие стационарности эквивалентно основным уравнениям, которые описывают поведение деформируемой системы. В чем же преимущество использования вариационных принципов? Они состоят в следующем:

1. Функционал инвариантен к координатным преобразованиям. Последнее открывает простой путь получения основных уравнений для некоторой механической системы в произвольных координатах. Достаточно переписать функционал рассматриваемой системы в интересующих нас координатах и затем воспользоваться условием его стационарности.

2. Большинство задач теории упругости не может быть решено точко. Использование вариационных принципов позволяет получить приближенное решение и при этом во сущности с любой наивероятностью заданной точностью.

В настоящей главе для сплошных тел, находящихся в равновесии, формулируются два основных вариационных принципа: принцип возможных перемещений и принцип возможных напряжений. Приведены и некоторые обобщения этих принципов.

Следует заметить, что в общем случае оба основных вариационных принципа носят статико-геометрический характер, т. е. справедливы для любых способов материала тела. Каждый вариационный принцип утверждает, что для некоторого класса задач, если заданы условия задачи, из всех мыслимых состояний и процессов, собственных с этими условиями, в действительности реализуется такое состояние или процесс, которые придают некоторому характеристику для этого принципа и класса задач функционалу стационарного значения.

Иногда, когда уже упомянутось выше, можно говорить не о стационарном, а об экстремальном значении функционала, что имеет близкий, но не всегда равносильный смысл.

Вариационное исчисление, в котором излагаются вариационные принципы и методы решения вариационных задач, в настоящее время является одним из важнейших разделов теоретической и прикладной математики [6, 43, 46, 56, 70]. Вариационные принципы позволяют с единой линейной позицией рассматривать поведение совершенно различных физических процессов, а вариа-

ционные методы исследования этих процессов принадлежат к числу наиболее эффективных.

Вариационные принципы и методы нашли широкое использование и при решении задач механики деформируемых сред [11, 26, 30, 61, 71, 77, 81, 82, 96, 113, 121].

Ниже представлена краткое изложение их основных идей, проиллюстрированное примерами. Соодинность вариационных методов и оценка их погрешности по существу не затрагиваются; ответ на эти вопросы можно найти, например, в книге С. Г. Михдина [70].

### § 5. ФУНКЦИОНАЛ И СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ ЕМУ УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

На одном простом примере дадим достаточно ясное представление о сущности вариационной проблемы.

Поставим перед собой следующую задачу: найти краевую  $w(x)$ , удовлетворяющую нулевым граничным условиям

$$w = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l, \quad (5.1)$$

и дающую минимальное значение функционалу

$$\mathcal{E} = \int_0^l \left[ \frac{S}{2} \left( \frac{dw(x)}{dx} \right)^2 - qw(x) \right] dx. \quad (5.2)$$

Здесь  $S$  и  $q$  — некоторые постоянные величины, физический смысл которых указан ниже.

Интеграл (5.2) получает для всякой функции  $w(x)$ , заданной в интервале  $0 \leq x \leq l$ , определенное значение. Таким образом, величина  $\mathcal{E}$  зависит от выбранной функции  $w(x)$ .

Предположим, что  $w(x)$  есть искомая функция, дающая минимум интегралу  $\mathcal{E}(w)$ .

Пусть теперь  $\eta(x)$  — произвольная функция, обращающаяся в нуль при  $x = 0$  и  $x = l$ . Тогда функция  $w(x) + \eta(x)$  при малых изменениях  $\eta$  может быть сколь угодно близкой к  $w(x)$ .

При  $\eta \neq 0$  можем записать

$$\mathcal{E}(w + \eta) > \mathcal{E}(w).$$

Интеграл  $\mathcal{E}$  при  $\eta = 0$  имеет минимум, а поэтому

$$\frac{d\mathcal{E}(w + \eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = 0. \quad (5.3)$$

Развернем выражение (5.3) с учетом формулы (5.2). Получим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}(w + \eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=0} &= \frac{d}{d\eta} \int_0^l \left[ \frac{S}{2} \left( \frac{d(w + \eta)}{dx} \right)^2 - q(w + \eta) \right] dx \Big|_{\eta=0} = \\ &= \left[ S w' \eta \right]_0^l - \int_0^l (Sw' + q) \eta dx = - \int_0^l (Sw' + q) \eta dx. \end{aligned} \quad (5.4)$$

<sup>1</sup> Лорд Рэлли Джон Уильям Стратт (Rayleigh John William Strutt, 1842—1919) — английский учёный физик, механик. Основной его труд — книга «The theory of sound», London, 1877, переведена на русский язык («Гармония звука»), М., Гостехиздат, 1932г.

<sup>2</sup> Вальтер Ритц (Walter Ritz, 1878—1909) — крупнейший немецкий физик и математик. Вальтер Ритц известен как автор ряда основополагающих работ по разработке прямого метода решения вариационных задач, носившего его имя.

Искомая функция  $\varphi(x)$  обращает последний интеграл выражение (5.4) в нуль при любом выражении для  $\psi(x)$ . Это возможно лишь в том случае, когда функция  $\psi(x)$  удовлетворяет уравнению

$$w''(x) + \frac{\varphi'(x)}{S} = 0. \quad (5.5)$$

Дифференциальное уравнение (5.5) принято называть уравнением Эйлера функционала  $\mathcal{E}(x)$ .

Уравнение (5.5) можно, например, трактовать как дифференциальное уравнение равновесия нити, натянутой силами  $S$  и нагруженной касательной нагрузкой кинетикостью  $\varphi(x)$ . Функция  $\psi(x)$  при этом выражает прогиб нити. Функционал же (5.2) в этой задаче есть суммарная силовая функция работ всех сил: внешних и внутренних.

В заключение заметим, что часто оказывается более удобным вместо равенства (5.3) пользоваться условием равенства нулю первообразной функционала

$$\delta\mathcal{S} = 0. \quad (5.6)$$

В дальнейшем будет показано, что, используя прямые методы решения вариационной задачи, можно получить ее приближенное решение, не прибегая к составлению и интегрированию уравнений Эйлера.

## § 6. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ<sup>1</sup>

### 6.1. Принцип возможных перемещений и уравнения равновесия

Рассмотрим некоторое тело, загруженное объемными силами  $\bar{X}_i$  и поверхностными  $\bar{F}_{ui}$  на части поверхности  $S_1$ . Оставшаяся часть поверхности тела  $S_2$  имеет заданные перемещения (кинематические граничные условия)

$$u_i = \bar{u}_i \text{ на } S_2. \quad (6.1)$$

Предположим, что состояния равновесия тела характеризуется компонентами перемещения  $u_i$ , шестью компонентами напряжения  $\sigma_{ij}$  и шестью компонентами деформации  $\epsilon_{ij}$ . Далее, пусть перемещения тела в его равновесном состоянии получили мыльные выражения, совместные с геометрическими и кинематическими

<sup>1</sup> Впервые принцип возможных перемещений для твердых тел был сформулирован в 1788 г. Ж. Л. Лагранжем. К деформируемым телам принцип впервые был применен С. И. Пуассоном в 1833 г.

связями, наклоненными на теле. Такие дополнительные перемещения принято называть вспомогательными<sup>1</sup>.

Тогда, согласно принципу возможных перемещений для тела, находящегося в положении равновесия, сумма работ всех действующих на него внешних и внутренних сил на любой системе возможных перемещений равна нулю

$$\delta V = \iiint_V \bar{X}_i \delta u_i dV - \iint_{S_1} \bar{F}_{ui} \delta u_i dS = 0, \quad (6.2)$$

где  $\delta V$  — приращение потенциальной энергии деформации тела, вызванное появлениеем в теле дополнительных деформаций  $\delta u_i$ ; вторая член в левой части равенства (6.2) определяет работу внешних объемных сил на земляных перемещениях, третий член — работу на тех же перемещениях внешних сил, приложенных на части поверхности  $S_1$ . Приращение потенциальной энергии определяется формулой

$$\delta V = \iiint_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dx dy dz. \quad (6.3)$$

Следует заметить, что при определении  $\delta V$  пренебрегаются теми дополнительными изменениями компонентов напряжений, которые вызываются в теле возможными перемещениями. Эти дополнительные напряжения, как и название их перемещения, бесконечно малы. В соответствии с этим их работа на перемещениях  $\delta u_i$  будет величиной второго порядка малости по сравнению с работой на тех же перемещениях напряжений, отвечающих исходному равновесному состоянию тела.

На уравнения (6.2), заливающие математическую формулировку принципа возможных перемещений, можно получить все уравнения равновесия для сплошного деформируемого тела: основные уравнения равновесия по объему и уравнения равновесия по части поверхности  $S_1$ , где к телу приложены заданные внешние поверхостные нагрузки.

Уже отмечалось, что основные вариационные принципы носят статистико-геометрический характер, в потому справедлив при любых свойствах материала тела, т. е. при произвольном законе связи между компонентами напряжений и компонентами деформаций. Более того, принцип возможных перемещений в формулировке (6.2) справедлив при произвольном законе кинематической связи между компонентами перемещений  $u_i$  и компонентами деформаций  $\epsilon_{ij}$ . Мы можем пользоваться и в случае неконсервативных внешних сил, т. е. сил, работа которых зависит от всей

<sup>1</sup> Положение системы изменений перемещений, не нарушающее внутренних связей силы, т. е. удовлетворяющие условиям обобщенности деформаций. Иные связки, возможные перемещениях являются кинематически допустимыми перемещениями.

истории нагружения тела. Для таких сил нельзя звать понятие потенциала.

Получение уравнений равновесия из зависимости (6.2) при нелинейной связи между  $\sigma_{ij}$  и  $u_i$  оказывается достаточно трудоемкой операцией [75], поэтому ниже мы ограничимся выводом уравнений равновесия линейной теории упругости, предполагающей справедливость линейных соотношений (4.13) между компонентами перемещений и компонентами деформаций.

Вариации от компонентов деформации равны

$$\delta e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \delta u_j \right), \quad (6.4)$$

Внося зависимость (6.4) в формулу (6.3) и интегрируя каждый член подынтегрального выражения по частям с использованием известной формулы Гаусса—Остроградского

$$\iiint_V \left( \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (L u_1 + M u_2 + N u_3) dS \quad (6.5)$$

для преобразования объемного интеграла в поверхностный, получаем

$$\delta V = \iint_{S_1} \sigma_{ij} l_{ij} \delta u_i dS + \iint_{S_1} \sigma_{ij} l_{ij} \delta u_i dS - \iint_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i dV. \quad (6.6)$$

Возможные перемещения должны быть согласованы с кинематическими и геометрическими условиями закрепления тела. В нашем случае  $\delta u_i$  нужно выбрать так, чтобы не нарушилось условие (6.1) на поверхности  $S_2$ . Условие это не будет нарушено, если

$$\delta u_i = 0 \text{ на } S_2. \quad (6.7)$$

Тогда второй интеграл в формуле (6.6) обращается в нуль и, следовательно,

$$\delta V = \iint_{S_1} \sigma_{ij} l_{ij} \delta u_i dS - \iint_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i dV. \quad (6.8)$$

Подставляя значение  $\delta V$  из (6.8) в выражение (6.2) и собирая все члены при вариациях  $\delta u_i$ , получаем

$$-\iint_V \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) \delta u_i dV + \iint_{S_1} (\sigma_{ij} l_{ij} - \bar{F}_{ij}) \delta u_i dS = 0. \quad (6.9)$$

В силу произвольности вариаций  $\delta u_i$  ( $\delta u_1$ ,  $\delta u_2$ ,  $\delta u_3$ ) равенство (6.9) возможно лишь в случае, если каждый из коэффициентов при этих вариациях будет равен нулю

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ в } V; \quad (6.10)$$

$$\sigma_{ij} l_{ij} = \bar{F}_{ij} \quad (i = 1, 2, 3) \text{ на } S_1. \quad (6.11)$$

Уравнения (6.10) представляют собой основные дифференциальные уравнения равновесия для объемного напряженного состояния линейной теории упругости; система же уравнений (6.11) суть силовые граничные условия на части поверхности тела  $S_1$ , где приложены поверхностные силы  $\bar{F}_{ij}$ .

Полученный результат дает нам основание считать, что принцип возможных перемещений (6.2) является наиболее общим начертанием статики, примененным к задачам определения равновесного состояния тела, независимо от того, подчиняется материал тела закону Гука или нет.

Если при использовании принципа возможных перемещений функции, которыми запроектируются компоненты перемещения  $u_i$ , непрерывны и дифференцируются во всей области  $V$ , а также удовлетворяют всем кинематическим и геометрическим связям, наложенным на тело, то уравнения совместности деформаций Сен-Венана оказываются тождественно выполнеными. Уравнения же равновесия (6.10) и (6.11) автоматически выполняются как следствие использования принципа возможных перемещений. Но если при использовании принципа возможных перемещений задаются выражениями для компонентов напряжений, то от них следует потребовать предварительного удовлетворения уравнения сплошности Сен-Венана.

Условием (6.2) выражается условие стационарности функционала. Из всех возможных перемещений  $u_i$  ( $x, y, z$ ), удовлетворяющих кинематическим граничным условиям (6.1) на  $S_2$ , лишь действительные перемещения тела удовлетворяют условию (6.2) и, следовательно, приводят упомянутый выше функционал к стационарному значению.

## 6.2 Консервативные внешние силы

Консервативными считаются силы, обладающие потенциалом. Признаком существования потенциала внешних сил является независимость работы, совершаемой силами, от пути, которым система приводится в окончательное состояние.

При использовании принципа возможных перемещений для решения консервативных задач удобно звать в рассмотрение потенциал внешних сил

$$U = \iint_V \bar{X}_i u_i dV + \iint_{S_1} \bar{F}_{ij} u_i dS. \quad (6.12)$$

С учетом выражения (6.12) зависимость (6.2) перепишем в виде<sup>1</sup>

$$\delta \mathcal{E} = \delta (V - U) = 0. \quad (6.13)$$

<sup>1</sup> Вариационный принцип, выраженный этой формулой, часто именуют функцией Лагранжа,

где

$$\mathcal{E} = V - U = V - \iint_{S_1} \bar{X}_i u_i dV - \iint_{S_1} \bar{F}_{vi} u_i dS \quad (6.14)$$

— полная энергия деформируемого тела.

Равенство (6.13) показывает, что из всех возможных с точки зрения сложности тела в условии его закрепления (6.1) перемещение равновесия тела при заданных внешних нагрузках будут отвечать те из них, при которых подана энергия  $\mathcal{E}$  принимает стационарное значение. При этом равновесие возможно как в случае максимума, так и в случае минимума полной энергии. Если в положении равновесия полная энергия будет иметь минимальное значение, тогда такое положение равновесия будет устойчивым, поскольку каждое отклонение от него сопровождается превышением приращения потенциальной энергии  $\delta V$  над приращением работы внешних сил и тело стремится вернуться в исходное равновесное положение. Наоборот, если в положении равновесия полная энергия достигнет своего максимума, то такое положение равновесия будет неустойчивым.

Возможен и промежуточный случай: энергия  $\mathcal{E}$  стационарна, но не имеет ни максимума, ни минимума в рассматриваемом равновесном положении тела. Другими словами, при одной системе возможных отклонений от положения равновесия может наблюдаться уменьшение полной энергии, а при другой системе перемещений — ее увеличение. По очевидным соображениям такое равновесное положение следует отнести к разряду неустойчивых.

Таким образом, для консервативных систем имеют место следующие положения равновесия:

устойчивое при

$$\dot{\mathcal{E}} = \min, \quad \delta\dot{\mathcal{E}} \sim 0, \quad \delta^2\dot{\mathcal{E}} > 0;$$

неустойчивое при

$$\dot{\mathcal{E}} = \max, \quad \delta\dot{\mathcal{E}} \sim 0, \quad \delta^2\dot{\mathcal{E}} < 0;$$

безразличное при

$$\dot{\mathcal{E}} = \text{const}, \quad \delta\dot{\mathcal{E}} = 0, \quad \delta^2\dot{\mathcal{E}} = 0.$$

Приведенные условия составляют сущность принципа Диракса, представляющего собой достаточный критерий для оценки состояния равновесия консервативных систем.

## § 7. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Для решения краевых задач может быть использован принцип возможных изменений напряженного состояния, который в какой-то степени является антиподом принципа возможных перемещений. Принцип этот может быть сформулирован как для

линейных, так и нелинейных задач теории упругости и строительной механики. Однако его использование для решения геометрически нелинейных задач затрудняется на определенные вычислительные трудности. Ниже мы ограничимся использованием принципа возможных изменений напряженного состояния лишь для решения геометрически линейных задач.

По аналогии с понятием возможных перемещений введем понятие статически возможных изменений напряжений, т. е. таких изменений, которые не приводят к нарушению равновесия тела.

Пусть имеем тело, находящееся в состоянии равновесия при действии заданных объемных сил  $\bar{X}_i$  и поверхностных сил  $\bar{F}_{vi}$  на поверхности  $S_1$ . На оставшейся части поверхности  $S_2$  заданы перемещения

$$u_i = \bar{u}_i \text{ на } S_2. \quad (7.1)$$

Напряжения, деформации и перемещения, фактически возможные в теле под действием заданных внешних нагрузок и условий закрепления, обозначим соответственно через  $\sigma_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$  и  $u_i$ .

Если теперь внести в действительное напряженное состояние статически возможные его изменения, выраженные малыми приращениями компонентов напряжений  $\delta\sigma_{ij}$ , то компоненты получаемого при этом нового напряжения  $\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}$  в соответствии с самим определением для статически возможных изменений напряжений должны внутри тела удовлетворять уравнениям равновесия

$$\frac{\partial(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij})}{\partial x_j} + \bar{X}_i + \delta X_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7.2)$$

и на участке поверхности тела  $S_1$  — условиям

$$(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}) L_{ij} = \bar{F}_{vi} + \delta F_{vi}. \quad (7.3)$$

Но так как  $\sigma_{ij}$  есть действительные компоненты напряжений  $\pi$ , следовательно, удовлетворяют уравнениям равновесия (6.10) и (6.11), непосредственно из зависимостей (7.2) и (7.3) получаем систему уравнений, которым должны удовлетворять статически возможные изменения напряжений внутри тела

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \delta\sigma_{ij} + \delta X_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7.4)$$

и на его поверхности

$$\delta\sigma_{ij} L_{ij} = \delta F_{vi} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (7.5)$$

Здесь через  $\delta X_i$  и  $\delta F_{vi}$  обозначены соответствующие изменения объемных и поверхностных сил. О том, как определяются их значения, будет сказано несколько ниже.

Возможные изменения компонентов напряжения приводят к тому, что так называемая дополнительная внутренняя энергия тела  $V_{\text{доп}}$  получит выражение

$$\delta V_{\text{доп}} = \int_V \int \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV. \quad (7.6)$$

Входящие сюда величины  $\epsilon_{ij}$  есть компоненты деформации действительного напряженно-деформированного состояния тела, которые кинематически связаны с компонентами перемещений  $u_i$ , зависимостями Коши (4.13)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (7.7)$$

Внося выражение (7.7) в формулу (7.6) и интегрируя каждый член подынтегрального выражения по частям с использованием формулы Гаусса—Остроградского (6.5), получаем

$$\begin{aligned} \int_V \int \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV &= \int_S \int u_i \delta \sigma_{ij} \lambda_{ij} dS - \int_V \int u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \delta \sigma_{ij} dV = \\ &= \int_S \int u_i \delta \sigma_{ij} \lambda_{ij} dS + \int_S \int u_i \delta \sigma_{ij} dS - \int_V \int u_i \frac{\partial \delta \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV \end{aligned} \quad (7.8)$$

иначе, если воспользоваться зависимостями (7.4) и (7.5) и учесть условие (7.1),

$$\int_V \int \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \int_S u_i \delta F_{vi} dS - \int_S \bar{u}_i \delta F_{vi} dS - \int_V \int u_i \delta X dV = 0. \quad (7.9)$$

Полученная зависимость (7.9) является математической формулой так называемого модифицированного принципа возможных изменений напряженного состояния (см. § 15). Он формулируется так: если деформация системы согласуется со всеми внутренними и внешними связями, то сумма работ, производимых возможными изменениями всех статических и амплитудных сил по действительным перемещениям тела, равна нулю.

Можно показать, что этот принцип заменяет собой зависимость Коши (7.7), а следовательно, и условия связности Сен-Венана. Отсюда следует, что напряженное состояние, вариация которого удовлетворяет формуле (7.9), отличается от всех других статически возможных напряженных состояний тем, что удовлетворяет не только уравнениям равновесия внутри и на поверхности тела, но и всем условиям сплошности по объему тела и кинематическим условиям на части поверхности  $S_1$ . А если это так, то такое состояние и будет действительным напряженным

состоянием, возникающим в теле под действием заданной совокупности внешних сил.

Если вариации напряженного состояния произвести так, чтобы входящие объемные и поверхностные силы оставались бы без изменения

$$\delta X_i = 0 \text{ в } V; \quad (7.10)$$

$$\delta F_{vi} = 0 \text{ на } S_1, \quad (7.11)$$

то зависимость (7.9) упрощается и принимает вид

$$\int_V \int \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \int_S \bar{u}_i \delta F_{vi} dS = 0. \quad (7.12)$$

Равенство (7.12) является математической формулойкой принципа возможных изменений напряженного состояния тела.

Заметим, что принцип возможных изменений напряженного состояния, выраженный зависимостями (7.9) и (7.12), справедлив при произвольном законе связи между компонентами напряжения и компонентами деформации.

Если же погрешность материала подчиняется закону Гука, то первый член в зависимостях (7.9) и (7.12) будет выражать вариацию потенциальной энергии упругого тела  $\delta V$ , и упомянутые зависимости перешедут соответственно в виде

$$\delta V - \int_V \int u_i \delta X_i dV - \int_S u_i \delta F_{vi} dS - \int_S \bar{u}_i \delta F_{vi} dS = 0; \quad (7.13)$$

$$\delta V - \int_S \bar{u}_i \delta F_{vi} dS = 0. \quad (7.14)$$

Перейдем теперь к наложению приближенных методов, основанных на использование принципа возможных перемещений и принципа возможных изменений напряженного состояния тела. Эти методы позволяют получить решение вариационной задачи в ее исходной постановке, без перехода к уравнениям Эйлера. В силу этих причин они получили название прямых методов вариационного числения.

Выше уже отмечалось, что действительным напряженным состоянием является то, которое удовлетворяет уравнениям равновесия внутри и на поверхности тела, а также условиям его сплошности. Поэтому при использовании принципа возможных перемещений следует помнить о предварительном удовлетворении условиям сплошности, при использовании же принципа возможных изменений напряженного состояния необходимо позаботиться о предварительном выполнении уравнений равновесия внутри и на поверхности тела.

## § 8. МЕТОД РИТЦА<sup>1</sup>

Метод Ритца основан на использовании принципа возможных перемещений, математическая формулировка которого [см. равенство (6.2)] в развернутом виде звучит так [46, 61, 81, 82, 96, 121]:

$$\delta \sigma - 5V - \iiint (\bar{X}\delta u + \bar{Y}\delta v + \bar{Z}\delta w) dx dy dz - \iint_S (\bar{X}_s \delta u + \bar{Y}_s \delta v + \bar{Z}_s \delta w) dS = 0. \quad (8.1)$$

Пусть имеется тело, на которое действуют внешние объемные силы  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$  и внешние поверхностные силы  $\bar{X}_s$ ,  $\bar{Y}_s$ ,  $\bar{Z}_s$  на  $S_2$ . Кроме того, на тело наложены определенные геометрические связи

$$u = \bar{u}(x, y, z); \quad v = \bar{v}(x, y, z); \quad w = \bar{w}(x, y, z) \text{ на } S_2. \quad (8.2)$$

Решение задачи сводится к определению таких значений перемещений  $u$ ,  $v$  и  $w$ , при которых уравнение (8.1) было бы выполнено. Представим каждое из перемещений в виде:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y, z) + \sum_{k=1}^K b_k f_k(x, y, z); \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y, z) + \sum_{k=1}^K b_k \varphi_k(x, y, z); \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y, z) + \sum_{k=1}^K c_k \psi_k(x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

где  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  выбираются так, чтобы выполнялись условия

$$u_0 = \bar{u}, \quad v_0 = \bar{v}, \quad w_0 = \bar{w} \text{ на } S_2;$$

$f_k$ ,  $\varphi_k$ ,  $\psi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) — так называемые координатные функции, удовлетворяющие условиям линейной независимости и полноты, а также условию

$$f_k = 0, \quad \varphi_k = 0, \quad \psi_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \text{ на } S_2.$$

$a_0$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  — параметры, подлежащие определению.

В отдельных случаях при применении вариационных методов и, в частности, метода Ритца можно получить вполне удовлетворительную точность при использовании в выражениях (8.3) систем функций, не удовлетворяющих условиям полноты. Говоря точнее, условие полноты систем функций  $f_k$ ,  $\varphi_k$ ,  $\psi_k$  — лишь желательные условия, но не обязательные [72]. Полнота используемой системы функций важна для построения улучшающейся

последовательности решений путем увеличения числа членов в выражении (8.3).

Число членов, сохраняемых в рядах выражений (8.3), может быть различным, в зависимости от необходимой точности получаемых решений для того или иного компонента перемещения.

На основании выражений (8.3)

$$\delta u = \sum_k \delta a_k f_k(x, y, z); \quad \delta v = \sum_k \delta b_k \varphi_k(x, y, z); \quad \delta w = \sum_k \delta c_k \psi_k(x, y, z), \quad (8.4)$$

где  $\delta a_k$ ,  $\delta b_k$  и  $\delta c_k$  — производные приращения.

Для отыскания постоянных  $a_0$ ,  $b_k$  и  $c_k$  следует предварительно получить выражение для потенциальной энергии в функции от компонентов перемещения. В частности, для изотропного тела при малых перемещениях потенциальная энергия  $V$  [см. формулу (88) на с. 617 в [81]] равна

$$\begin{aligned} V = G \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{v}{1-2\nu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \right] dx dy dz. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Если теперь подставить выражение (8.3) для компонентов перемещения в формулу (8.1) и учсть при этом получившее выражение для потенциальной энергии в перемещениях, то после заполнения необходимых операций дифференцирования и интегрирования, полная энергия тела  $\mathcal{E}$  превратится в сложную функцию коэффициентов  $a_0$ ,  $b_k$  и  $c_k$ .

Вариация функционала  $\mathcal{E}$

$$\delta \mathcal{E} = \sum_k \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_k} \delta a_k + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b_k} \delta b_k + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial c_k} \delta c_k \right). \quad (8.6)$$

Отсюда, если учесть производность  $\delta a_k$ ,  $\delta b_k$  и  $\delta c_k$ , получим известную систему уравнений метода Ритца

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_k} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b_k} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial c_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, N) \quad (8.7)$$

для определения неизвестных параметров  $a_0$ ,  $b_k$  и  $c_k$ . Входя решения  $a_0$ ,  $b_k$  и  $c_k$  системы (8.7) в выражении (8.3), определяем компоненты перемещения.

<sup>1</sup> Был предложен В. Ритцем в 1908 г. в работе [156].

Систему уравнений (8.7) в развернутом виде запишем так,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s_k} - \iiint_V X_k dV - \iint_{S_1} \bar{X}_k f_k dS = 0; \\ \frac{\partial V}{\partial s_k} - \iiint_V P_{q_k} dV - \iint_{S_1} \bar{P}_{q_k} q_k dS = 0; \\ \frac{\partial V}{\partial s_k} - \iiint_V \bar{Z}_{q_k} dV - \iint_{S_1} \bar{Z}_{q_k} q_k dS = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

Выполнение условий полноты и линейной независимости при выборе координатных функций обеспечивает существование пределов коэффициентов  $a_k$ ,  $b_k$  и  $c_k$  с увеличением числа членов  $N$  в разложениях (8.3), если для их определения используются метод Ритца или его различные модификации<sup>1</sup>, т. е.

$$a_k = \lim_{N \rightarrow \infty} a_k^{(N)}, \quad b_k = \lim_{N \rightarrow \infty} b_k^{(N)}, \quad c_k = \lim_{N \rightarrow \infty} c_k^{(N)} \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

Система координатных функций, удовлетворяющая условиям полноты и линейной независимости, принадлежит к так называемым минимальным системам<sup>2</sup>.

Если координатная система функций сильно минимальна<sup>3</sup>, то при увеличении числа  $N$  метод Ритца обеспечивает разностороннюю сходимость приближенного решения (8.3) к точному. Следует сразу сказать, что степень успешности применения этого метода для решения практических задач во многом зависит от степени удачности выбора координатных функций.

Разумно выбранная система координатных функций позволяет ограничиться в решении малым числом членов ряда и существенно сократить объем вычислений. Подбор координатных функций при решении конкретных задач требует определенного навыка. Очень важно научиться выбирать эти функции для одномерных задач, поскольку при решении двух- и трехмерных задач координатные функции, как правило, задают в виде произведения одномерных функций.

<sup>1</sup> См. С. Г. Михалев. Числовые реализации вариационных процессов. М.: Наука, 1966, § 7, с. 38.

<sup>2</sup> Под минимальной в гильбертовом пространстве системой понимается такое множество элементов этого пространства, при котором заменение любого элемента суммарно в немо пространстве.

<sup>3</sup> Любая функциональная система ортогональных и не равных нулю функций минимальна. Так, система функций  $\sin Ax_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) минимальна в интервале  $[0, \pi]$ .

В этом же порядке система  $x$ ,  $\sin x$ ,  $\sin 2x$ , ...,  $\sin kx$ , ... минимальна, поскольку подстановка элемента  $x$  в суммы подразумевает, затруднение на оставшихся элементах, т. е. по двумординации получит в априоре (8.7) оставшейся системой функций:  $\sin x$ ,  $\sin 2x$ , ...,  $\sin kx$ , ...

<sup>4</sup> Мы не приводим здесь определения сильно минимальных систем: интересующие способы см. в книге С. Г. Михалева. Заметим лишь, что некая ортогонализация системы сильно минимальна.

Многочисленные примеры использования метода Ритца для исследования упругих систем читатель может найти в имеющейся учебной литературе по строительной механике корабля [34, 112, 113].

## § 9. МЕТОД БУБНОВА — ГАЛЕРНИНА

### 9.1. Обобщенный метод Бубнова — Галернина

Если в вариационном уравнении (6.10)

$$\iiint_V \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \bar{X}_i \right) \delta u_i dV - \iint_{S_1} (\sigma_{ij} l_{ij} - \bar{P}_{ui}) \delta u_i dS = 0 \quad (9.1)$$

после вариаций перемещений подставить их выражения из формулы (8.4) и учесть, что вариации коэффициентов произвольны, найдем систему уравнений

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left( \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial u_k}{\partial z} + \bar{X} \right) f_k(x, y, z) dV - \\ & - \iint_{S_1} (\sigma_{ij} l + \tau_{xy} m + \tau_{yz} n - \bar{X}_k) f_k(x, y, z) dS = 0; \\ & \iiint_V \left( \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial u_k}{\partial z} + \bar{Y} \right) q_k(x, y, z) dV - \\ & - \iint_{S_1} (\tau_{xy} l + \sigma_{yz} m + \tau_{xz} n - \bar{Y}_k) q_k(x, y, z) dS = 0; \\ & \iiint_V \left( \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial u_k}{\partial z} + \bar{Z} \right) \psi_k(x, y, z) dV - \\ & - \iint_{S_1} (\tau_{xz} l + \tau_{xy} m + \sigma_{yz} n - \bar{Z}_k) \psi_k(x, y, z) dS = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots, N). \end{aligned} \quad (9.2)$$

Полученные уравнения и есть уравнения обобщенного метода Бубнова — Галернина.

В основе этого метода, как и метода Ритца, лежит принцип возможных перемещений. Выражения для перемещений (8.3) при использовании обобщенного метода Бубнова — Галернина могут, как и в методе Ритца, не удовлетворять силовым граничным условиям: достаточно лишь выполнения кинематических граничных условий на части поверхности  $S_2$ .

Таким образом, обобщенный метод Бубнова — Галернина и метод Ритца являются двумя различными формами записи принципа возможных перемещений. Их использование приводят к одной и

той же системе разрешающих уравнений для определения неизвестных параметров  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$  в выражениях (8.3). И все же в начальном стоянии обобщенный метод Бубнова—Галеркина проще, поскольку по существу позволяет сразу записать систему разрешающих уравнений.

Процедура применения обобщенного метода Бубнова—Галеркина для решения задач теории упругости на базе использования уравнений (9.2) состоит в следующем. Сначала задаемся компонентами перемещений в форме рядов (8.3). Используя далее кинематические соотношения между перемещениями и деформациями, определяем компоненты деформации  $\epsilon_{ij}$ . Подставляя найденные значения деформаций в принятый физический замок связи между компонентами деформации и компонентами напряжения, получаем выражения для компонентов напряжения в каждой точке тела как некоторые сложные функции неизвестных параметров  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$ .

Подставляя теперь найденные выражения для компонентов напряжения  $\sigma_{ij}$  непосредственно в уравнения метода (9.2) и выполнив все необходимые операции (дифференцирование и интегрирование по объему и части поверхности тела), находим необходимое число алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$ .

Для линейной задачи, т. е. когда материал тела подчиняется закону Гука и используются уравнения в соотношении линейной теории упругости, эта система уравнений линейна.

## 9.2. Метод Бубнова — Галеркина.

Если выбранные выражения для перемещений наряду с кинематическими граничными условиями удовлетворяют также и силовым условиям (6.12), то в уравнениях (9.2) поверхностные интегралы исчезают и они принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) f_k(x, y, z) dx dy dz = 0; \\ \iiint_V \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) q_k(x, y, z) dx dy dz = 0; \\ \iiint_V \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \psi_k(x, y, z) dx dy dz = 0 \\ (k = 1, 2, 3, \dots, N). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений, основанный на использовании зависимостей вида (9.3), предложили в 1913 г. И. Г. Бубнов<sup>1</sup> в своем отзыве на одну из

<sup>1</sup> Иван Григорьевич Бубнов (1873–1919) — видавшийся русский учёный, основательца науки о прочности деревьев.

работ С. П. Тимошенко и Неванско от И. Г. Бубнова в 1915 г. Б. Г. Галеркин<sup>1</sup>.

Уравнения (9.3) принято называть дифференциальными методом Бубнова—Галеркина [28, 46, 96, 113, 121].

Выше уравнение метода Бубнова—Галеркина получено из принципа возможных перемещений, в силу чего может показаться, что этот метод применим лишь для краевых задач, связанных с некоторой вариационной проблемой.

Принимая иную трактовку метода, которая позволяет его пригодность для приближенного решения дифференциальных уравнений, не обязательно связанных с какой-либо вариационной проблемой [70].

Пусть рассматриваемая краевая задача описывается дифференциальным уравнением 2-го порядка

$$L^{(m)}[w(x, y, z)] = q(x, y, z) \quad \text{в } V \quad (9.4)$$

при граничных условиях

$$Q_i[w(x, y, z)] = f_i(x, y, z) \quad (i = 1, \dots, m) \quad \text{на } S, \quad (9.5)$$

где  $L^{(m)}$  и  $Q_i$  — заданные дифференциальные операторы;  $w(x, y, z)$  и  $f_i(x, y, z)$  — заданные функции.

При приближенном решении дифференциального уравнения (9.4) запишем выражение для  $w(x, y, z)$  в форме суммы

$$w(x, y, z) = \sum_{i=1}^N a_i q_i(x, y, z). \quad (9.6)$$

Система линейно независимых функций  $q_i(x, y, z)$  выбрана так, что все граничные условия (9.5) тождественно выполняются. Параметры  $a_i$  подлежат определению.

Если  $w(x, y, z)$  является точным решением нашей краевой задачи, то функция  $L^{(m)}[w] = q$  будет ортогональна к любой комбинации функций  $q_i$ , в частности, в системе функций  $q_i(x, y, z)$ :

$$\iiint_V [L^{(m)}[w]] q_i(x, y, z) \psi_i(x, y, z) dV = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N). \quad (9.7)$$

Уравнения (9.7) по своей структуре тождественны уравнениям метода Бубнова—Галеркина. Так как исходная система зависимостей (9.4) и (9.5) не обязательно связана с вариационной проблемой, можно заключить, что метод Бубнова—Галеркина применим для приближенного интегрирования произвольных дифференциальных уравнений.

Такой вывод часто служит основанием формальности использования этого метода при приближенном интегрировании диффе-

<sup>1</sup> Борис Григорьевич Галеркин (1871–1945) — крупнейший советский учёный в области теории упругости, академик.

рекуррентных уравнений и, как следствие, причиной слабой сходимости приближенного решения. Дело в том, что при выборе системы функций  $\psi_i(x, y, z)$ , как правило, обращают внимание лишь на условие линейной независимости и удовлетворение всем граничным условиям. Но есть еще одно условие, с которым при выборе функций  $\psi_i$  следует считаться. Промоделируем его на примере изгиба консольной прямолинейной балки, нагруженной поперечной нагрузкой интенсивности  $q = \text{const}$  (рис. 3). Изгиб такой балки определяется следующим дифференциальным уравнением:

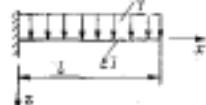


Рис. 3. Консольная прямолинейная балка, нагруженная равномерно распределенной, поперечной нагрузкой  $q$ .

Выражение (9.10) удовлетворяет граничным условиям (9.9).

Воспользуемся уравнением (9.4), запишем

$$\int_0^l \left[ a_1 E I \left( \frac{x}{2l} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2l} - \frac{q}{2} (l-x)^2 \right] \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) dx = 0, \quad (9.11)$$

откуда

$$w(l) = a_1 = 0,0675 \frac{q l^4}{E I}. \quad (9.12)$$

Точное значение максимального прогиба

$$w_{\text{тв}}(l) = 0,125 \frac{q l^4}{E I}. \quad (9.13)$$

Таким образом, приближенное решение (9.12) приводит к ошибке более чем в два раза.

Метод же Ритца, если исходить из выражения для прогиба (9.10), дает

$$w(l) = 0,120 \frac{q l^4}{E I}, \quad (9.14)$$

что лишь на 4% меньше точного значения для прогиба (9.13).

Конечно, результат (9.12) можно улучшить, если оставить в ряду для  $w(x)$  не один, а несколько членов. Но нас в данном случае интересует не сходимость сама по себе, а быстрота сходимости.

В чем же здесь дело? Оказывается, все заключается в формальном использовании метода Бубнова—Галеркина. Действительно,

в задачах строительной механики и теории упругости метод Бубнова—Галеркина может рассматриваться как следствие применения начала возможных перемещений и любое равенство системы уравнений (9.3) можно трактовать как интегральное условие равенства нулю суммы работ внутренних и внешних сил на соответствующих возможных перемещениях. И с этой точки зрения равенство (9.11) может служить примером нарушения начала возможных перемещений. Условие же равенства нулю суммы работ внутренних и внешних моментов на возможных «перемещениях» можно записать в виде

$$\int_0^l [E I w''(x) - \frac{q}{2} (l-x)^2] \delta w'' = 0, \quad (9.15)$$

Внося сюда выражение для  $w(x)$  из формулы (9.10), получаем

$$\int_0^l a_1 E I \left( \frac{x}{2l} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2l} - \frac{q}{2} (l-x)^2 \cos \frac{\pi x}{2l} dx = 0, \quad (9.16)$$

откуда

$$w(l) = a_1 = 0,120 \frac{q l^4}{E I}, \quad (9.17)$$

что точно совпадает с результатом решения по методу Ритца.

Итак, при использовании метода Бубнова—Галеркина для решения задач строительной механики координатные функции с целью уменьшения быстроты сходимости решения следует выбирать так, чтобы операция ортогонализации соответствовала применению к рассматриваемой задаче принципа возможных перемещений.

### 9.3. Примеры использования обобщенного метода Бубнова—Галеркина

Практическое использование метода Бубнова—Галеркина для расчета струнных систем, как правило, особых затруднений не вызывает [54, 61, 96, 112, 113]. Иное обстояло дело с применением обобщенного метода Бубнова—Галеркина. Здесь есть определенные трудности. Что это за трудности и как их преодолеть, ясно из приведенных ниже двух примеров.

Пример 1. Для консольной прямолинейной балки (рис. 4), нагруженной на конце сосредоточенной силой  $P$ , требуется с помощью обобщенного метода Бубнова—Галеркина определить значение коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$  в приближенном выражении упругой линии

$$w(x) = a_1 \psi_1(x) + a_2 \psi_2(x), \quad (9.18)$$



Рис. 4. Консольная прямолинейная балка, нагруженная на свободном конце силой  $P$ .

где

$$\varphi_1(x) = x^3, \quad \varphi_2(x) = x^3. \quad (9.19)$$

Решимое. Выпишем уравнение изгиба балки и все ее граничные условия.

Уравнение изгиба (уравнение равновесия по «объему»)

$$EIw^{IV}(x) = q(x, y) = 0. \quad (9.20)$$

Границные условия (с учетом принятого в строительной механике корабля правило знаков для изгибающих моментов и перерезывающих сил)

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = 0 \text{ и } x = l, w' = 0; \\ \text{при } x = l \text{ } M = EIw'' = 0, \text{ } N = EIw''' = -P. \end{array} \right\} \quad (9.21)$$

Выражение (9.18) для упругой балки удовлетворяет двум кинематическим граничным условиям при  $x = 0$ ; оба не склонных граничных условия при  $x = l$  оказываются выполнеными.

Обратимся теперь к уравнению (9.1) обобщенного метода Бубнова—Гalerkin'a.

Казалось бы, все очень просто: уравнение равновесия и склонные граничные условия известны, остается подставить их в формулу (9.1). Все правильно, если исключить некоторую неизвестность с выписыванием знаком перед отдельными членами уравнения. Можно рекомендовать следующий прием, который, позволяет сравнительно просто и правильно решить вопрос выбора знака.

Выпишем для нашей задачи уравнение обобщенного метода Бубнова—Гalerkin'a; перед отдельными членами уравнения пока неясно действительного знака (+ или —) поставим знак вопроса (?)

$$\int_0^l (EIw^{IV} - q) \delta w \, dx \stackrel{?}{=} [EIw'' \delta w']_{x=0} \stackrel{?}{=} [(EIw'' + P) \delta w]_{x=l} = 0. \quad (9.22)$$

Нагрузка  $q(x, y)$  включена для удобства дальнейших рассуждений.

Выше уже упоминалось, что уравнение (9.1) есть интегральное условие равенства нулю работы внутренних и внешних сил на соответствующих возможных перемещениях. Каждый знак ставить перед 1-м членом, в сущности бессмысленно: пусть это будет плюс. Но тогда сразу следует уже определенное правило знаков для работы внешних и внутренних сил: работу внешней нагрузки (в данном случае  $q(x)$ ), которая совпадает по направлению с положительным направлением соответствующего перемещения, нужно включать в равенство (9.22) со знаком минус. Для внутренних же сил, с которым заряду с  $EIw^{IV}(x)$  следует присваивать момент  $M(x) = EIw''(x)$  в перерезывающую силу  $N(x) = EIw'''(x)$ , действует обратное правило: работа внутренних усилий, направ-

ление действия которых совпадает с положительным направлением соответствующего перемещения, включается в равенство (9.22) со знаком плюс. Отсюда, если учсть направление положительных усилий  $M(x)$  и  $N(x)$  на правом конце балки (рис. 5), сразу следует, что перед 2-м членом в равенстве (9.22) нужно поставить знак плюс, а перед 3-м членом — знак минус. Окончательно уравнение обобщенного метода Бубнова—Гalerkin'a для рассматриваемой задачи примет вид

$$\int_0^l EIw^{IV}(x) \delta w(x) \, dx + [EIw'' \delta w']_{x=0} - [(EIw'' + P) \delta w]_{x=l} = 0. \quad (9.23)$$

Из равенства (9.23), если учсть выражение (9.18) и произвольность вариантов  $\delta a_0$  и  $\delta a_1$ , можно получить для определения неизвестных  $a_0$  и  $a_1$  следующие два уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^l EIw^{IV}(x) \varphi_1(x) \, dx + [EIw'' \varphi_1']_{x=0} - [(EIw'' + P) \varphi_1]_{x=l} = 0; \\ \int_0^l EIw^{IV}(x) \varphi_2(x) \, dx + [EIw'' \varphi_2']_{x=0} - [(EIw'' + P) \varphi_2]_{x=l} = 0. \end{array} \right\} \quad (9.24)$$

Подставляя  $w(x)$  из формулы (9.18) в уравнение (9.24) и выполнив все необходимые операции, получаем

$$4a_0 + 6a_1 = \frac{P_l}{EI};$$

$$6a_0 + 12a_1 = \frac{P_l}{EI},$$

откуда

$$a_1 = -\frac{P_l}{2EI}, \quad a_0 = -\frac{P_l}{6EI}. \quad (9.25)$$

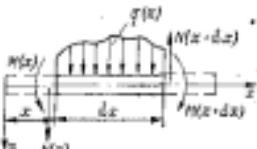


Рис. 5. К правилу знаков для внутренних усилий (избыточный момент  $M(x)$  и перерезывающая сила  $N(x)$ ) балки.

Внося найденные значения для  $a_1$  и  $a_2$  в формулу (9.18), находим искомое выражение для упругой линии балки

$$w(x) = \frac{P^2}{6EI} \left( 3 \frac{x^3}{l^3} - \frac{x^2}{l^2} \right). \quad (9.26)$$

Следует заметить, что формула (9.26) является точным решением рассматриваемой задачи.

Пример 2. С помощью обобщенного метода Бубнова—Галеркина требуется решить задачу об изгибе прямоугольной изотропной пластины малого прогиба, загруженной поперечной нагрузкой интенсивностью  $q(x, y)$ . Кромка пластины  $x = 0$  и  $x = a$  свободно опорты, кромка  $y = 0$  жестко заделана, а кромка  $y = b$  свободна (рис. 6).

Решение. Дифференциальное уравнение изгиба изотропной пластины имеет вид

$$D \nabla^2 \psi w(x, y) - q(x, y) = 0, \quad (9.27)$$

где

$$\nabla^2 (\cdot) = \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial y^2}. \quad (9.28)$$

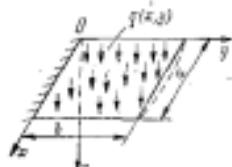


Рис. 6. Прямоугольная пластина, где противоположные кромки которой свободы опоры, а поставившие друг оба жестко заделаны, а другие свободы.



Рис. 7. Показательные направления внутренних усилий для кромки  $y = b$  прямоугольной пластины.

Границные условия пластины (см. [112, с. 128]):

$$\begin{aligned} &\text{при } x = 0, x = a \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \\ &\text{при } y = 0 \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \\ &\text{при } y = b \quad M_2(x) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0; \\ &\quad r_2(x) = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-v) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = 0. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Прогиб пластины будем искать в виде ряда

$$w(x, y) = \sum_{i=1, 2, \dots} a_i \psi_i(x, y), \quad (9.30)$$

где

$$\psi_i(x, y) = y^{i+1} \sin \frac{mx}{a}, \quad (9.31)$$

Выражение для  $w(x, y)$  удовлетворяет граничным условиям пластины при  $x = 0$ ,  $x = a$  и  $y = 0$ . Не удовлетворяются лишь односторонние граничные условия на кромке  $y = b$ .

На рис. 7 приведены положительные направления интенсивности внутренних изгибающих моментов  $M_2(x)$  и перерезывающих сил  $r_2(x)$  на кромке  $y = b$ .

Видим, что усилие  $r_2(x)$  совпадает с направлением положительного перемещения  $bw$  (вдоль оси  $Oz$ ), и его работа будет положительной. Направление момента  $M_2(x)$  не совпадает с положительным направлением поворота  $bw'$  (при принятых направлениях для осей координат — против часовой стрелки), и, следовательно, работа момента  $M_2$  будет отрицательной.

С учетом вышеуказанного уже не представляет особого труда переписать уравнение обобщенного метода Бубнова—Галеркина (9.1) применительно к рассматриваемой задаче

$$\begin{aligned} &\int_0^b \int_0^a [D \nabla^2 \psi_i w(x, y) - q(x, y)] bw(x, y) dx dy - \\ &- \int_0^a M_2 \frac{\partial w}{\partial y} dx \Big|_{y=0} + \int_0^a r_2 \Delta w dx \Big|_{y=0} = 0, \end{aligned} \quad (9.32)$$

Внося сюда выражения для  $M_2$  и  $r_2$  из (9.29), а также принимая во внимание, что

$$\Delta w = \sum_i \delta a_i \psi_i, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \sum_i \delta a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y}, \quad (9.33)$$

получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^b \int_0^a [D \nabla^2 \psi_i w(x, y) - q(x, y)] \psi_i(x, y) dx dy - \\ &- D \int_0^a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \Big|_{y=0} dx - \\ &- D \int_0^a \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-v) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \psi_i \Big|_{y=0} dx = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (9.34)$$

Подставляя в уравнение (9.34) выражение для  $w(x, y)$  из формулы (9.30) и производя необходимые операции интегрирования, находим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных параметров  $a_i$ .

Такой путь получения основной системы алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $a_i$  оказывается во многих случаях менее трудоемким, чем использование для них же целей

метода Ритца, в котором очень громоздкой и трудоемкой является процедура определения потенциальной энергии как некоторой функции коэффициентов  $a_i$ .

### § 10. МЕТОД ТРЕФФЦА<sup>1</sup>

Если функции для компонентов перемещений выбраны так, что они удовлетворяют кинематическим граничным условиям и являются частными решениями уравнений равновесия по объему тела, то в формуле (9.10) объемные интегралы обращаются в нуль и она принимает вид

$$\int_{S_1} \left( M_{xx} + m\tau_{xy} + m\tau_{xz} - \bar{X}_x \right) \delta u + \left( M_{yy} + m\tau_{yz} + m\tau_{zx} - \bar{Y}_y \right) \delta v + \\ + \left( M_{zz} + m\tau_{xy} + m\tau_{yz} - \bar{Z}_z \right) \delta w dS = 0. \quad (10.1)$$

Внося сюда значения вариаций  $\delta u$ ,  $\delta v$  и  $\delta w$  из выражений (8.4) и приняв во внимание производность  $\delta a_i$ ,  $\delta b_i$  и  $\delta c_i$ , получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \int_{S_1} \left( m\tau_{xy} + m\tau_{xz} - \bar{X}_x \right) f_1 dS = 0; \\ \int_{S_1} \left( m\tau_{yz} + m\tau_{zx} - \bar{Y}_y \right) f_2 dS = 0; \\ \int_{S_1} \left( m\tau_{xy} + m\tau_{yz} - \bar{Z}_z \right) f_3 dS = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \end{cases} \quad (10.2)$$

Система уравнений (10.2) является математической формулой так называемого метода Треффца.

Используя зависимости между напряжениями и деформациями, исключив из системы (10.2) напряжения, затем с помощью зависимостей Коши выражают деформации через перемещения. Внося далее вместо перемещений их выражения в форме (8.3) и производя необходимые операции интегрирования, получаем систему алгебраических уравнений для определения параметров  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ . Располагая значениями этих параметров, можно последовательно определить компоненты перемещений, деформаций и напряжений.

<sup>1</sup> Эрих Треффц (Erich Trefftz, 1888–1937) — немецкий математик и механик. В нашей стране первая известность покорила книгу Треффца «Интегральная теория упругости» (Рус. изд., под ред. А. И. Лурье). М., ГГТБ, 1934.

Метод, посредством которого Треффц, был им предложен в статье, посвященной статике и динамике точек метода Ритца (Kontrahierung und Reihenabschätzung bei elliptischen Verfahren, — Math. Ann. 90, 1928, S. 503).

### § 11. МЕТОД ЛЕЙБЕНЗОНА

Автор назвал его методом смягчения граничных условий [61]. Существо метода состоит в требовании минимизации интеграла, взятого по всей поверхности тела от квадратичной ошибки при удовлетворении граничных условий. При этом предполагается, что условия сплошности и уравнения равновесия внутри тела тождественно выполнены.

Может случиться, что тождественно выполняющиеся оказываются граничные условия на поверхности тела и условия сплошности по объему. Согласно рассматриваемому методу в данном случае можно потребовать, чтобы взвешенный по всему объему тела интеграл от квадратичной ошибки при удовлетворении уравнений равновесия внутри тела имел бы наименьшее значение.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь первой задачи, когда требуется приближенное удовлетворять граничным условиям на поверхности тела

$$a_i f_{ij} = \bar{F}_{ij} \quad (i = 1, 2, 3) \text{ на } S_1; \quad (11.1)$$

$$b_i = \bar{b}_i \quad (i = 1, 2, 3) \text{ на } S_2. \quad (11.2)$$

За основные неизвестные примем компоненты перемещения  $u_i$ , которые будем искать в форме следующих рядов:

$$u_i(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu_k(x, y, z) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (11.3)$$

где  $a_k$  — параметры, подлежащие определению;  $\mu_k(x, y, z)$  — частные линейно независимые решения уравнений равновесия по объему тела [в линейной теории упругости  $\mu_k(x, y, z)$  есть частные решения уравнений Ламе].

Используя кинематические соотношения между компонентами деформации  $\epsilon_{ij}$  и компонентами перемещения  $u_i$ , физические зависимости между компонентами напряжения  $\sigma_{ij}$  и компонентами деформации  $\epsilon_{ij}$ , мы сможем выразить через перемещения начальную деформацию  $\epsilon_{ij}$ , а затем и напряжение  $\sigma_{ij}$ .

Полученные при этом выражения для компонентов напряжения будут являться некоторыми сложными функциями координат и коэффициентов  $a_k$ ,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, y, z, a_1, a_2, a_3, \dots). \quad (11.4)$$

В случае линейной задачи выражение (11.4) можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sigma_{ij}^k(x, y, z). \quad (11.5)$$

Естественно, что совокупность функций  $\sigma_{ij}^k$  при фиксированном значении  $k$  будет частным решением уравнений равновесия по объему.

Подставив теперь найденные выражения для напряжений в статические граничные условия (11.1), а перемещения (11.3) — в кинематические граничные условия (11.2), придем к тому, что каждое из граничных условий строго выполняться не будет:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \sigma_{ij}(x, y, z, a_k) L_{ij} - F_{vi} = 0 \quad \text{на } S_1; \\ \delta_i &= u(x, y, z, a_k) - \bar{u}_i = 0 \quad \text{на } S_2. \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

Если принятые выражения (11.3) для компонентов перемещений отвечают точному решению задачи, то лазаны обращаются в нуль. На основании граничных условий (11.6) значение квадратичных ошибок при удовлетворении в данной точке поверхности тела силовым и кинематическим граничным условиям соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2(x, y, z, \bar{F}_{vi}, a_k) &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3; \\ \delta^2(x, y, z, \bar{u}_i, a_k) &= \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

Средняя же квадратичная ошибка при удовлетворении статическим условиям на поверхности  $S_1$  будет пропорциональна интегралу

$$\Delta_1^2(a_1, a_2, \dots) = \iint_{S_1} \Delta^2(x, y, z, a_k) dS, \quad (11.8)$$

а при удовлетворении кинематическим условиям на  $S_2$  — интегралу

$$\delta_2^2(a_1, a_2, \dots) = \iint_{S_2} \delta^2(x, y, z, a_k) dS. \quad (11.9)$$

Полученные значения квадратичных ошибок являются размытыми величинами. Представим их в безразмерном виде. С этой целью введем в рассмотрение две величины:  $\sigma_e$  и  $a_d$  — средние значения единичных в теле компонентов напряжения и компонентов перемещения. Тогда безразмерные величины

$$\frac{\Delta_1}{\sigma_e S_1} \text{ и } \frac{\delta_2}{a_d S_2} \quad (11.10)$$

будут определять величину относительной квадратичной погрешности при удовлетворении соответственно силовыми и кинематическими граничными условиями.

Из условия минимума суммарной ошибки

$$\varepsilon^2 = \frac{\Delta_1^2}{\sigma_e^2 S_1^2} + \frac{\delta_2^2}{a_d^2 S_2^2} \quad (11.11)$$

получим систему алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (11.12)$$

совместное решение которых позволяет определить неизвестные коэффициенты  $a_k$  в выражениях (11.3) для компонентов перемещения.

Следует заметить, что при использовании линейной теории упругости для тел, материал которых подчиняется закону Гука, система уравнений (11.12) линейна.

## § 12. ПРИЛОЖЕНИЕ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Если принцип возможных перемещений заменяет собой все уравнения равновесия упругого тела, то принцип возможных изменений напряженного состояния заменяет собой условие сплошности. Следовательно, вместо того чтобы удовлетворять дифференциальным уравнениям Сев-Венана, достаточно удовлетворить одному вариационному уравнению (7.9).

И напоследок, необходимо помнить, что при использовании принципа возможных изменений напряженного состояния, следует позаботиться о предварительном выполнении всех уравнений равновесия как для точек внутри тела (5.11), так и на его поверхности (5.12).

Рассмотрим общий случай граничных условий, когда заданы внешние силы

$$F_{vi} = \sigma_{ij} f_{ij} = \bar{F}_{vi} \quad \text{на } S_1 \quad (12.1)$$

\* перемещения

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{на } S_2. \quad (12.2)$$

В рассматриваемом случае мы имеем возможность сузить производную вариацию напряженного состояния предположением о неизменности объемных сил

$$\delta X_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ в } V \quad (12.3)$$

и поверхностных сил

$$\delta F_{vi} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ на } S_1. \quad (12.4)$$

Тогда вариационное уравнение принципа возможных изменений напряженного состояния (7.9) принимает вид уравнения (7.12) —

$$\iiint_V \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \iint_{S_1} a_i \delta F_{vi} dS = 0. \quad (12.5)$$

Компоненты напряжений будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sum_{m=1}^N A_m a_m^m. \quad (12.6)$$

Здесь  $\sigma_{ij}^n$  суть частные решения уравнений равновесия (6.10), удовлетворяющие граничным условиям (6.11).

Согласно, что величины  $\sigma_{ij}^n$  условия склонности не удовлетворяют, так как в этом случае они должны бы быть точечное решение поставленной задачи.

Система линейно независимых функций  $\sigma_{ij}^n(x, y, z)$  выбирается так, чтобы компоненты (12.6) удовлетворяли всем уравнениям равновесия, т. е. уравнениям (6.10) и (6.11). Условие это выполняется, если функции  $\sigma_{ij}^n$  удовлетворяют однородным уравнениям равновесия

$$\frac{d\sigma_{ij}^n}{dx_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3); \quad (12.7)$$

$$\sigma_{ij}^n t_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (12.8)$$

Задачность (7.9), а следовательно, и формула (12.5) справедливы для физически нелинейного материала.

В самом общем случае связь между компонентами напряжения и деформации может быть представлена зависимостью вида

$$e_{ij} = N_{ij}(\sigma_{ik}), \quad (12.9)$$

где  $N_{ij}$  — некоторый линейный алгебраический оператор.

Непосредственно из формулы (12.6)

$$\delta e_{ij} = \sum_{m=1}^N \delta A_m \sigma_{ij}^m. \quad (12.10)$$

Подставляя  $e_{ij}$  по зависимости (12.9) в уравнение (12.5) и учитывая выражение (12.10) для  $\delta e_{ij}$ , из уравнения (12.5) будем иметь

$$\sum_{m=1}^N \left[ \int_V N_{ij}(\sigma_{ik}) \sigma_{ij}^m dV - \int_S \tilde{A}_{ij} \sigma_{ij}^m dS \right] \times \\ \times \delta A_m = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (12.11)$$

В силу произвольности вариаций  $\delta A_m$  равенство (12.11) распадается на систему следующих уравнений:

$$\int_V N_{ij}(\sigma_{ik}) \sigma_{ij}^m dV - \int_S \tilde{A}_{ij} \sigma_{ij}^m dS = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots, N). \quad (12.12)$$

Каждое из уравнений системы (12.12) в общем случае является алгебраическим уравнением относительно независимых коэффициентов  $A_m$ , стоящих в выражениях (12.6) для компонентов напряжения.

Пусть из совместного решения уравнений системы (12.12) коэффициенты  $A_m$  найдены. Тогда по формулам (12.6) можем определить компоненты напряжения.

Несколько сложнее определяются компоненты перемещения. Для их определения требуется пронтегрировать уравнения, связанные деформации с компонентами перемещения.

П р и м е р 1. Несколько ярких примеров возможных изменений напряженного состояния, определять напряженное состояние прямолинейного стержня при действии внешних скручивающих моментов  $M_{xy}$ , приложенных к торцевым сечениям стержня. Материал стержня изотропен и подчиняется закону Гука.

*Решение.* Как известно [81, с. 214], задача о кручении прямолинейных стержней сводится к разысканию функции напряжений  $\varphi(x, y)$ , связанной с компонентами напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  зависимостями

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (12.13)$$

при условии на контуре поперечного сечения односвязного стержня

$$\varphi = 0. \quad (12.14)$$

При этом все уравнения равновесия по объему к условиям отсутствия внешней нагрузки на боковой поверхности тела строго выполняются, если в них положить, как это производится в задачах о кручении прямолинейных стержней,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ X &- Y - Z = 0. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Дифференциальное уравнение, используемое для определения функции  $\varphi(x, y)$ , представляет собой условие совместности деформаций. Следовательно, для определения  $\varphi(x, y)$  можно воспользоваться принципом возможных изменений напряженного состояния, который, как было показано выше, эквивалентен всем условиям совместности деформаций тела.

Несколько слов о характере и составе внешней нагрузки для стержня.

Объемные силы  $\bar{X}_i$  и поверхностные  $\bar{F}_{ij}$  на боковой поверхности стержня принимаются равными нулю. Отсутствие объемных сил учитывается при составлении уравнений равновесия, а условия равенства нулю поверхности сил на боковой поверхности привело к получению контурного условия (12.14) для  $\varphi$ .

Торцевые сечения стержня ( $x = 0, x = l$ ) загружены крутящими моментами  $M_{xy}$ . При этом закон распределения касательных напряжений  $\tau_{xy}$  в  $t_{xy}$  по площади торцевых сечений не известен — он определяется из условий совместности деформаций тела стержня. Поэтому вариация функции  $\varphi$  вызывает определенные изменения компонентов напряжения в торцевых сечениях.

Для компонентов перемещения, которые потребуются при составлении основной зависимости (12.5) принципа возможных из-

меженій напруженнного состояния, приведены в теории кручения призматических стержней выражения

$$\tau = \tau_{xy}, \quad \varphi = -\tau_{xy}, \quad (12.16)$$

где  $\tau$  — угол закручивания на единицу длины стержня; подлежит определению.

Принимая во внимание, что компоненты перемещения точек торцевого сечения  $z = 0$  [см. выражение (12.16)] равны нулю, а также неизменность компонентов напряжения и компонентов деформации по длине стержня, уравнение (12.5) применительно к рассматриваемому случаю перепишем в следующем виде:

$$I \iint_F (\tau_y \delta \tau_{xz} - \tau_x \delta \tau_{yz}) dx dy = I \iint_F (\tau_{xz} \delta \tau_{xz} + \tau_{yz} \delta \tau_{yz}) dx dy = 0, \quad (12.17)$$

или, если воспользоваться законом Гука и выразить компоненты деформации через компоненты напряжения,

$$\iint_F (\tau_y \delta \tau_{xz} - \tau_x \delta \tau_{yz}) dx dy - \frac{1}{G} \delta \iint_F (\tau_{xz} + \tau_{yz}) dx dy = 0. \quad (12.18)$$

Здесь  $I$  и  $F$  — длина и площадь поперечного сечения стержня соответственно.

Далее, внося в выражение (12.18)  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  из формул (12.13), получим уравнение для определения неизвестной функции напряжения  $\varphi(x, y)$

$$6 \iint_F \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - 2Gt \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] dx dy = 0. \quad (12.19)$$

Полученное равенство можно упростить, если два последних члена в левой части проинтегрировать по частям и использовать граничное условие (12.14). Окончательно для определения функции  $\varphi$  будем иметь следующее вариационное уравнение:

$$8 \iint_F \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - 4Gt\varphi \right] dx dy = 0. \quad (12.20)$$

Уравнение (12.20) выражает условие стационарности функционала

$$J = \iint_F \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - 4Gt\varphi \right] dx dy. \quad (12.21)$$

Таким образом, задача свелась к определению функции  $\varphi(x, y)$ , удовлетворяющей на контуре поперечного сечения стержня условию  $\varphi = 0$ , а внутри контура — условию стационарности функционала  $J$  [см. формулу (12.21)].

Сразу же возникает вопрос о выборе подходящего выражения для  $\varphi$ . Можно поступить так. Пусть  $F(x, y) = 0$  есть уравнение

контура поперечного сечения рассматриваемого стержня. Тогда выражение

$$\varphi(x, y) = F(x, y) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} x^m y^n \quad (12.22)$$

удовлетворяет, с одной стороны, контурному условию  $\varphi = 0$ , а с другой, позволяет аппроксимировать любой закон изменения функции  $\varphi$  на плоскости поперечного сечения стержня.

Подставляя выражение (12.22) в функционал (12.21), из условия его стационарности (12.20) и производности варианты  $\delta A_{mn}$  получаем для определения коэффициентов  $A_{mn}$  следующую систему (в нашем случае — линейных, алгебраических) уравнений:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial A_{mn}} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (12.23)$$

Воспользуемся изложенным выше зависимостями для приближенного решения задачи о кручении стержня, поперечное сечение которого имеет форму квадрата со сторонами  $2a$ .

Расположив начало координат в центре квадратного профиля, для контура профиля можем написать такое равенство:

$$F(x, y) = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2) = 0 \quad (12.24)$$

и, следовательно, функцию напряжения принять в виде

$$\varphi(x, y) = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} x^m y^n, \quad (12.25)$$

причем, по условиям симметрии сечения в двойной сумме достаточно удерживать лишь четные значения  $m$  и  $n$ .

Подставляя в первом приближении

$$\varphi = (x^2 - a^2)(y^2 - a^2) A_{00}, \quad (12.26)$$

из условия

$$\frac{\partial \varphi}{\partial A_{00}} = 0 \quad (12.27)$$

получаем

$$A_{00} = -\frac{3}{8} \frac{Gt}{a^2}. \quad (12.28)$$

Найденному значению  $A_{00}$  соответствует следующее значение жесткости профиля на кручение:

$$C = 0,138 \cdot 8 (2a)^4 G, \quad (12.29)$$

что отличается от точного решения, полученного Сен-Бенамом,

$$C_{\text{спр}} = 0,140 \cdot 8 (2a)^4 G \quad (12.30)$$

менее чем на 1,5%.

## § 18. ОБОБЩЕННЫЙ ФУНКЦИОНАЛ ВНЕШНИХ СИЛ

### 13.1. Вводные замечания

Совокупность уравнений, которыми описывается любая задача механики деформируемых сред, в самом общем случае состоит как бы из двух основных групп: группы уравнений равновесия (уравнений равенства по объему к силовым граничным условиям) и группы уравнений сплошности (уравнений совместности деформаций и кинематических граничных условий). Группа физических уравнений при построении решения задач механики деформируемых сред играет вспомогательную роль и служит для исключения из уравнений первой группы компонентов напряжений.

Точное решение задачи отвечает тождественному выполнению возможностей обеих групп. Следовательно, если принцип возможных перемещений заменяет собой линии траекторий уравнений равновесия, при использовании этого принципа об удовлетворении условий сплошности следует позаботиться предварительно. При этом, как правило, решение строят в перемещениях, и для выполнения условий сплошности по объему тела достаточно в качестве аппроксимирующих функций для компонентов перемещений принять непрерывные функции. Дополнительно следует позаботиться об удовлетворении принципами функционала (компонентами перемещений) кинематическим граничным условиям.

Назовем, при использовании принципа возможных изменений напряженного состояния, являющегося эквивалентом условий сплошности, необходимо, чтобы аппроксимирующие функции для компонентов напряжений удовлетворяли группе уравнений равновесия. В этом отношении принцип возможных изменений напряженного состояния является как бы противоположностью принципа возможных перемещений.

В расчетной практике возможны случаи, когда при использовании принципа возможных перемещений затруднительно подобрать выражения для компонентов перемещений, удовлетворяющие всем кинематическим граничным условиям, или выражения для компонентов напряжений, удовлетворяющие всем уравнениям равновесия при использовании принципа возможных изменений напряженного состояния. Очевидно, что применение при этом принципа возможных перемещений и принципа возможных изменений напряженного состояния в чистом виде (в каком они были изложены выше) становится невозможным. Появляется необходимость в формулировке так называемых модифицированных смешанных вариационных принципов, использование которых позволяет приближенно удовлетворить части уравнений из группы уравнений равновесия и части уравнений сплошности. Естественно, что остальные уравнения равновесия и сплошности должны быть тождественно выполнены путем соответствующего

избора аппроксимирующих функций для основных неизвестных величин.

Модифицированные формулировки принципа возможных перемещений и принципа возможных изменений напряженного состояния могут быть получены из обобщенного функционала внешних сил, предложенного П. Ф. Папковичем [8]. Остановимся на целице выражения для этого функционала.

### 13.2. Выход формулы для определения обобщенного функционала внешних сил

Пусть к некоторому телу приложены объемные внешние силы  $\bar{X}_i$  и на части его поверхности  $S_1$  — поверхностные силы  $\bar{F}_{vi}$ . На оставшейся части поверхности  $S_2$  заданы смещения  $u_i$ .

В силу каких-то причин тело деформировалось, и его точки получили перемещение  $u_i$ . Тогда функционал внешних сил может быть определен формулой

$$U = \iiint_V (\bar{X}_i u_i dV - \iint_{S_2} \bar{F}_{vi} u_i dS), \quad (13.1)$$

Преобразуем правую часть равенства (13.1), добавив к ней величину  $I - I$ , тождественно равную нулю. При этом примем, что

$$I = \iint_{S_1 \cup S_2} \sigma_{ij} l_{ij} u_j dS. \quad (13.2)$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса—Остроградского (5.6), величину  $I$  можно представить в виде объемного интеграла

$$I = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j) dV = \iiint_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} u_j dV + \iiint_V \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dV, \quad (13.3)$$

Если далее воспользоваться тем, что  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , то

$$\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Это позволяет переписать выражение (13.3) в виде

$$I = \iiint_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV + \iint_{S_1} \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dS. \quad (13.4)$$

Прибавив к правой части равенства (13.1) величину, выраженную формулой (13.4) и взята из результата тождественно равной величине, определяемую формулой (13.2), получим

$$U = \iiint_V \left( \bar{X}_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} \right) dV + \iint_{S_1} \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dS + \iint_{S_1} (\bar{F}_{vi} - \sigma_{ij} l_{ij}) u_i dS - \iint_{S_1} \sigma_{ij} l_{ij} u_i dS + \iint_{S_2} F_{vi} \bar{u}_i dS, \quad (13.5)$$

В этом выражении по смыслу сделанного вывода внешние силы  $\bar{X}_i$  и  $F_{vi}$ , перемещения  $u_{ij}$  и такие напряжения  $\sigma_{ij}$  могут соответствовать трем разным произвольным напряженным состояниям тела.

Прибавим теперь к левой части выражения (13.5) еще один тождественно равную нулю члену

$$\iiint \sigma_{ij} e_{ij} dV - \iiint \sigma_{ij} s_{ij} dV. \quad (13.6)$$

Важно заметить, что находящиеся сюда компоненты деформации  $e_{ij}$  могут соответствовать четвертому произвольному напряженному состоянию рассматриваемого тела.

Окончательно для функционала  $U$  получим следующую формулу:

$$U = \iiint_V \bar{X}_i \Delta u_i dV + \iint_{S_1} \bar{F}_{vi} \alpha_i dS - \iiint_V \left( \bar{X}_i + \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} \right) u_i dV + \\ + \iiint_V \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} \right) - e_{ij} \right] dV - \iint_{S_1} \left( \bar{F}_{vi} - \sigma_{ij} l_{ij} \right) u_i dS - \\ - \iint_{S_2} \sigma_{ij} l_{ij} u_i dS + \iiint_V \sigma_{ij} s_{ij} dV. \quad (13.7)$$

Функционал (13.7) характеризует работу внешних сил, соответствующих одному произвольно выбранному напряженно-деформированному состоянию, производному за перемещения из первого произвольного напряженно-деформированного состояния. Более того, выражение (13.7) включает компоненты напряжения в некоторого третьего в компонентах деформации  $e_{ij}$  производное четвертого напряженно-деформированных состояний.

Эта зависимость, представляющаяся на первый взгляд несущественной, очень удобна для получения новых выражений новых приведений. При этом каждый раз нужно лишь привести паре произвольных напряженных состояний, входящих в выражение (13.7), в определенное соотношение друг с другом.

#### § 14. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИИ

##### 14.1. Модифицированный принцип возможных перемещений

Обычный принцип возможных перемещений, изложенный в § 6, в частности, требует, чтобы выбранные возможные перемещения удовлетворяли условию

$$\delta u_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ на } S_2. \quad (14.1)$$

Это ограничение можно устранить, если воспользоваться обобщенной формулировкой принципа возможных перемещений. С этой целью обратимся к формуле (13.7) для работы внешних сил и предположим, что входящие в нее перемещения  $u_i$ , деформации  $e_{ij}$  и напряжения  $\sigma_{ij}$  относят одному и тому же напряженно-деформированному состоянию, возникающему в теле при действии заданных внешних нагрузок  $\bar{X}_i$  и  $\bar{F}_{vi}$  на  $S_1$  и смещений  $u_i$  на  $S_2$ . Пусть далее  $b_{ij}$  есть некоторое бесконечно малые приведенные перемещения, не удовлетворяющие условию (14.1), т. е. приходящие к нарушению кинематических условий закрепления тела на  $S_2$ .

Подсчитаем с помощью формулы (13.7) работу внешних сил, производимую на перемещениях  $b_{ij}$ . При этом следует учесть, что компоненты деформации получат приращения  $\delta e_{ij}$ , кинематически соответствующие приращениям  $\delta u_{ij}$ , компоненты напряжений принимают значения, удовлетворяющие уравнениям равенств (6.11) и (6.12), а составляющие реактивных усилий  $\bar{F}_{vi}$  на поверхности  $S_1$  определяются через компоненты напряжения  $\sigma_{ij}$  из очевидных зависимостей

$$\bar{F}_{vi} = \sigma_{ij} l_{ij} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (14.2)$$

Тогда из формулы (13.7) получаем

$$\iiint_V \bar{X}_i \Delta u_i dV + \iint_{S_1} \bar{F}_{vi} \Delta u_i dS - \iiint_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV - \iint_{S_1} \sigma_{ij} l_{ij} \delta u_i dV,$$

или

$$\delta S_1 = \iiint_V \sigma_{ij} \Delta u_i dV - \iiint_V \bar{X}_i \Delta u_i dV - \\ - \iint_{S_1} \bar{F}_{vi} \Delta u_i dS - \iint_{S_1} \sigma_{ij} l_{ij} \delta u_i dV = 0. \quad (14.3)$$

Формулой (14.3) выражается так называемый лодыжкообразный принцип возможных перемещений.

Выражение (14.3) отличается от равенства (6.2), которое является математической формулировкой обычного принципа возможных перемещений, наличием последнего члена. Этот член определяется приращение работ реактивных поверхностных усилий  $\bar{F}_{vi} - \sigma_{ij} l_{ij}$  по части поверхности  $S_2$ .

Следует заметить, что зависимость (14.3) можно получить иначе: путем введения в основной функционал  $\mathcal{E} = V - U$  принципа возможных перемещений некоторых дополнительных членов с неопределенными множителями Лагранжа и изменения условия

экстремальности функционала  $\mathcal{S}$  условием стационарности некоторого обобщенного функционала<sup>1</sup>

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} - \int_{S_1} \int \lambda_i (u_i - \bar{u}_i) dS, \quad (14.4)$$

где каждый дополнительный член есть интеграл от произведения левой части граничного условия (предполагается, что в граничном условии все члены перенесены в левую часть) на неопределенное множества Лагранжа  $\lambda_i$ :

$$\mathcal{S} = V - U = V - \int_V \int \int \bar{X}_{ijk} dV - \int_{S_1} \int \bar{F}_{jk} u_i dS. \quad (14.5)$$

Приведем теперь зависимости модифицированного метода Ритца и модифицированного метода Бубнова—Галеркина, к которым приходим при использовании модифицированного принципа возможных перемещений.

#### 14.2. Модифицированный метод Ритца

Имеем тело, на которое действуют внешние силы — объемные  $\bar{X}_i$  и поверхностные  $\bar{F}_{jk}$ , на части поверхности  $S_2$ . На оставшейся части поверхности  $S_2$  заданы перемещения

$$u_i = \bar{u}_i(x, y, z) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (14.6)$$

При использовании модифицированного метода Ритца выражения для компонентов перемещений можно писать в виде

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{k=1}^{N_1} a_k f_k(x, y, z); \\ v(x, y, z) &= \sum_{k=1}^{N_2} b_k \varphi_k(x, y, z); \\ w(x, y, z) &= \sum_{k=1}^{N_3} c_k \psi_k(x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

где  $a_k$ ,  $b_k$  и  $c_k$  — произвольные постоянные, подлежащие определению. От функций  $f_k$  ( $k = 1, \dots, N_1 - 1$ ) требуется лишь выполнение условий их линейной независимости (то же для систем функций  $\varphi_k$  и  $\psi_k$ ). В зависимости от требуемой точности в практических расчетах числа  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$  часто принимаются неравными друг другу.

Если теперь занести выражения (14.7) для перемещений в уравнение (14.3) и воспользоваться произвольностью вариаций базисов  $\delta a_k$ ,  $\delta b_k$ ,  $\delta c_k$ , то для определения неизвестных параметров  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$

получим следующую систему уравнений модифицированного метода Ритца:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a_k} - \int_V \int \int \bar{X}_{ijk} dx dy dz - \int_{S_1} \bar{X}_i f_k dS - \\ - \int_{S_1} X_i f_k dS = 0 \quad (k = 1, \dots, N_1 - r); \\ \frac{\partial V}{\partial b_k} - \int_V \int \int \bar{V} v \varphi_k dx dy dz - \int_{S_1} \bar{V} v \varphi_k dS - \\ - \int_{S_1} V v \varphi_k dS = 0 \quad (k = 1, \dots, N_2 - r); \\ \frac{\partial V}{\partial c_k} - \int_V \int \int \bar{Z} \psi_k dx dy dz - \int_{S_1} \bar{Z} \psi_k dS - \\ - \int_{S_1} Z \psi_k dS = 0 \quad (k = 1, \dots, N_3 - r). \end{aligned} \right\} \quad (14.8)$$

Точно удовлетворить условию (14.6) в общем случае нельзя. Можно удовлетворить этому условию приближенно, если потребовать его выполнение хотя бы в конечном числе заблаговременно выбранных на поверхности  $S_2$  точек  $(x_i, y_i, z_i)$ .

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_1} a_k f_k(x_i, y_i, z_i) &= \bar{u}(x_i, y_i, z_i); \\ \sum_{i=1}^{N_2} b_k \varphi_k(x_i, y_i, z_i) &= \bar{v}(x_i, y_i, z_i); \\ \sum_{i=1}^{N_3} c_k \psi_k(x_i, y_i, z_i) &= \bar{w}(x_i, y_i, z_i) \quad (i = 1, 2, \dots, r). \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

Совокупность уравнений (14.8) и (14.9) образует необходимую систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $a_k$ ,  $b_k$  и  $c_k$ .

#### 14.3. Модифицированный метод Бубнова — Галеркина

Если выбранные выражения для перемещений не удовлетворяют кинематическим граничным условиям (14.6), то для решения задачи следует воспользоваться модифицированным принципом взаимных перемещений. При этом легко убедиться в том,

<sup>1</sup> См., например, [51, с. 325; 101; 360] и книгу Р. Швальтера «Модифицированный метод в инженерных расчетах». (Пер. с англ.). М., «Мир», 1971, § 1.5.

что уравнения метода Бубнова—Галеркина (9.3) дополняются некоторыми членами и имеют вид

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{X} \right) f_k dx dy dz - \\ & - \iint_{S_1} (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n) f_k dS = 0 \quad (k = 1, \dots, N_1 - r); \\ & \iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{Y} \right) q_k dx dy dz - \\ & - \iint_{S_1} (\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n) q_k dS = 0 \quad (k = 1, \dots, N_2 - r). \end{aligned} \quad (14.10)$$

Уравнения же обобщенного метода Бубнова—Галеркина (9.2) записаем так:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{X} \right) f_k dx dy dz - \\ & - \iint_{S_1} (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n - \bar{X}_0) f_k dS = \\ & - \iint_{S_1} (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n + \bar{X}_0) f_k dS = 0 \quad (k = 1, \dots, N_1 - r); \\ & \iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{Y} \right) q_k dx dy dz - \\ & - \iint_{S_1} (\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n - \bar{Y}_0) q_k dS = \\ & - \iint_{S_1} (\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n + \bar{Y}_0) q_k dS = 0 \quad (k = 1, \dots, N_2 - r). \end{aligned} \quad (14.11)$$

Заметим, что уравнения (14.11) можно было бы получать из уравнений (14.8) модифицированного метода Ритца. Во это лих раз подчеркивает тождественность этих двух различных лишь по форме методов.

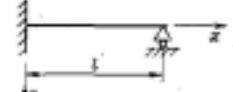
Система уравнений (14.11) дополняется уравнениями (14.9). Это же можно сказать о системе (14.10). В результате получаем необходимую систему  $N_1 + N_2 + N_3$  уравнений для определения коэффициентов  $a_k$  ( $k = 1, \dots, N_1$ ),  $b_k$  ( $k = 1, \dots, N_2$ ) и  $c_k$  ( $k = 1, \dots, N_3$ ).

В заключение приведем один простой пример использования модифицированного метода Ритца.

Пример. Требуется определить упругую линию балки, изображенной на рис. 8.

Решение. При использовании модифицированного метода Ритца упругую линию балки можно искать, например, в виде

$$w(x) = \sum_{k=1}^N a_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (a)$$



Для определения неизвестных параметров  $a_k$  составляем систему уравнений метода Ритца

$$\frac{\partial(Y-U)}{\partial a_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N-1), \quad (b)$$

которая дополняется оставшимся неподопределенным при выборе выражения для  $w(x)$  кинематическим условием

$$\frac{dw}{dx}(x=0) = \sum_{k=1}^N a_k \frac{k\pi}{l} = 0. \quad (b)$$

Из совместного решения полученной системы  $N$  уравнений определяем параметры  $a_k$ .

#### § 15. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

При использовании принципа возможных изменений напряженного состояния требовалось, чтобы возможные изменения напряженного состояния удовлетворяли условиям (12.3) и (12.4). Этих ограничений можно избежать, если воспользоваться так называемым модифицированным принципом возможных изменений напряженного состояния, математическая формулировка которого выражается уравнением (7.9). Заметим, что та же зависимость может быть получена из формулы (13.7) для функционала внешних сил.

Пусть входящие в формулу (13.7) напряжения  $\sigma_{ij}$ , деформации  $\epsilon_{ij}$  и перемещения  $u_i$  отвечают одному и тому же напряженному состоянию, возникающему в теле при действии заданных внешних нагрузок  $X_i$  в  $V$ ,  $F_{si}$  на  $S_1$  в смещениях  $\bar{u}_i$  на  $S_2$ . Пусть далее  $\delta\sigma_{ij}$  — некоторые бесконечно малые приращения напряжений, не удовлетворяющие условиям (12.3) и (12.4), т. е. производящие к нарушению условий равновесия по объему тела и на части его поверхности  $S_2$ .

Подсчитав с помощью формулы (13.7) изменение функционала  $U$ , связанное с приращениями напряжений  $\delta\sigma_{ij}$ ,

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_V \int \delta X_i \mu_i dV + \int_S \int \delta F_{ni} u_i dS = \int_V \int (\delta X_i + \frac{\partial \delta \sigma_{ij}}{\partial x_j}) u_i dV + \\ & + \int_S \int (\delta F_{ni} - \delta \sigma_{ij} l_{nj}) u_i dS = \int_S \int \delta \sigma_{ij} l_{nj} u_i dS + \int_V \int \delta \sigma_{ij} e_{ij} dV. \end{aligned}$$

Отсюда, если учесть, что приращения внешних заданных нагрузок равны нулю ( $\delta \bar{X}_i = 0$ ,  $\delta F_{ni} = 0$ ), а компоненты перемещения на  $S_1$  удовлетворяют условию (7.1), получим

$$\begin{aligned} \delta \vartheta_{ii} = & \int_V \int e_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \int_V \int u_i \delta X_i dV - \\ & - \int_S \int u_i \delta F_{ni} dS - \int_S \int u_i \delta F_{ni} dS = 0, \end{aligned} \quad (15.1)$$

где

$$\delta F_{ni} = \delta \sigma_{ij} l_{nj} \quad (i = 1, 2, 3); \quad (15.2)$$

$$\delta X_i = -\frac{\partial \delta \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (15.3)$$

Формулой (15.1), тождественно соотносящейся с равенством (7.9), является математическая формулировка модифицированного принципа винковских элементов напряженного состояния.

Использование функционала (15.1) значительно расширяет возможности применения принципа возможных изменений напряженного состояния к решению задач: при выборе выражения для  $\sigma_{ij}$  нет необходимости в соблюдении условий (12.7) и (12.8). Можно, в частности, рекомендовать искать  $\sigma_{ij}$  в таком виде (формии с формулой (12.6))

$$\sigma_{ij} = \sum_{m=1}^N A_m \tilde{\sigma}_m^i(x, y, z), \quad (15.4)$$

где  $\tilde{\sigma}_m^i$  — система линейно независимых функций.

Повторяя выкладки, аналогичные приведенным в § 12, для определения неизвестных параметров  $A_m$  в формуле (15.4) получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \int_V \int N_{ij} (\sigma_{ii}) \delta \sigma_{ij}^m dV + \int_V \int u_i \frac{\partial \delta \sigma_{ij}^m}{\partial x_j} dV - \\ & - \int_S \int u_i \delta \sigma_{ij}^m l_{nj} dS - \int_S \int \tilde{\sigma}_m^i \delta \sigma_{ij}^m l_{nj} dS = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, N-r). \quad (15.5) \end{aligned}$$

Оставшаяся часть неизвестных параметров  $A_m$  используется для приближенного выполнения уравнений статики (6.13) и (6.12). Для этого можно потребовать выполнения этих уравнений хотя бы в конечном числе заранее выбранных точек соответственно по объему тела  $V$  и на части поверхности  $S_1$ . Общее число дополнительных записанных условий должно быть равно  $r$ . В совокупности с уравнениями (15.5) эти дополнительные условия образуют систему  $N$  уравнений для определения параметров  $A_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ).

При использовании изложенного выше принципа есть еще одна дополнительная трудность. Она состоит в необходимости определения компонентов перемещения  $u_i$  по найденным компонентам напряжения  $\sigma_{ij}$ . При этом, используя приведенное выражение (15.4) для компонентов напряжения, из соотношений (12.9) сначала определяют деформации  $e_{ij}$ , а затем, вновь в зависимости Коши (7.1) найденные значения  $e_{ij}$  и интегрируя получающуюся при этом систему дифференциальных уравнений, определяют значения компонентов перемещения  $u_i$ . Ясно, что при достаточно сложных выражениях для  $\tilde{\sigma}_m^i(x, y, z)$  в наличии линейности в соотношениях (12.9) трудности в получении компонентов перемещения могут оказаться практическими непреодолимыми. Правда, нас может выручить использование эпирорных предположений о законе изменения компонентов перемещения по объему тела (см. пример 1 в § 12).

## § 18. СМЕШАННЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ

### 18.1. Функционал Винкса, обеспечивающий независимое варьирование компонентов перемещения, деформации и напряжения

При использовании модифицированного принципа возможных перемещений в форме (14.3) неизвестные перемещения входят в форму разложения по системе функций, которые должны удовлетворять лишь условиям их линейной независимости (см. формулы (14.7)). Входящие в условия (14.3) компоненты деформации и компоненты напряжения выражаются через компоненты перемещения с помощью кинематических уравнений связи между компонентами деформации и перемещения, а также физических соотношений между напряжениями  $\sigma_{ij}$  и деформациями  $e_{ij}$ .

Такой путь, например, при решении задач с учетом физической и геометрической нелинейностей может оказаться неудобным из-за больших трудностей представления потенциальной

<sup>1</sup> Основные результаты, приведенные в § 10, основаны на работах [1; 30; 73, гл. 4; 101; 160, гл. 2], в табл. 68 работы В. П. Г. и др. «Вариационные принципы линейной теории упругости при разложении смешанной деформации и напряжения». — В сб. перевода «Энциклопедия», 1969, № 5, с. 138–144; 3, Т. 1 и т. 2. Вариационные принципы в теории упругости. Там же, с. 124–138.

энергии тела в виде функции неизвестных коэффициентов  $a_{ij}$ ,  $b_i$  и  $c_{ij}$ , стоящих в выражениях для компонентов перемещения. В силу этих причин в отдельных случаях целесообразно расширять число выражаемых величин и дополнительно к компонентам перемещения  $u_i$ , подсоздавать в качестве неизвестных компоненты деформации  $\epsilon_{ij}$  и компоненты напряжения  $\sigma_{ij}$ .

Пусть имеется тело, находящееся под действием внешних объемных нагрузок  $\bar{X}_i$ , поверхностных сил  $\bar{F}_{vi}$  на части поверхности  $S_1$ . На оставшейся части поверхности  $S_2$  заданы компоненты перемещения  $\bar{u}_i$ .

Для известного равновесного состояния тела должны выполняться, как известно, следующие основные зависимости:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \bar{X}_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \text{ в } V; \quad (16.1)$$

$$\bar{F}_{vi} = F_{vi} - \sigma_{ij} l_{ij} \quad (i=1, 2, 3) \text{ на } S_2; \quad (16.2)$$

$$u_i - \bar{u}_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \text{ на } S_2; \quad (16.3)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \in V; \quad (16.4)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\delta W}{\delta u_{ij}} \in V, \quad (16.5)$$

где  $W$  — потенциальная энергия единицы объема тела, выраженная через компоненты деформации.

Ограничимся рассмотрением геометрически данной задачи.

Покажем, что зависимости (16.1)–(16.5) будут выполнены, если потребовать выполнения условия стационарности следующего расширенного функционала:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{III} = & \iiint_V W(u_{ij}) dV - \iiint_V \bar{X}_i u_i dV - \iint_{S_2} \bar{F}_{vi} u_i dS - \\ & - \iiint_V \left[ \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \alpha_{ij} dV - \iint_{S_2} (u_i - \bar{u}_i) \lambda_i dS. \quad (16.6) \end{aligned}$$

В выражение (16.6) входят 18 выражаемых параметров, а именно: 6 компонентов деформации  $u_{ij}$ , 3 компонента перемещения  $u_i$ , 9 неизвестных мноожителей Лагранжа ( $\alpha_{ij}$  и  $\lambda_i$ ) и 3 параметра  $\lambda_i$ . Каждый из этих параметров является некоей произвольной величиной, ее связанный необходимостью выполняет какое-либо условие в объеме или на поверхности тела.

Варьируя каждый из этих 18 параметров, получаем следующую формулу для определения вариации функционала  $\mathcal{E}_{III}$ :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_{III} = & \iiint_V \left( \frac{\delta W}{\delta u_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \delta u_{ij} dV - \iiint_V \left[ \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \times \\ & \times \delta u_{ij} dV - \iiint_V \left( \bar{X}_i + \frac{\delta \alpha_{ij}}{\delta x_j} \right) \delta u_i dV + \iint_{S_2} (u_i l_{ij} - \bar{F}_{vi}) \delta u_i dS - \\ & - \iint_{S_2} (u_i - \bar{u}_i) \delta u_i dS + \iint_{S_2} (\alpha_{ij} l_{ij} - \lambda_i) \delta u_i dS. \quad (16.7) \end{aligned}$$

Из условия стационарности

$$\delta \mathcal{E}_{III} = 0 \quad (16.8)$$

следует выполнение, в частности, таких равенств:

$$\alpha_{ij} = \frac{\delta W}{\delta u_{ij}} \text{ в } V; \quad (16.9)$$

$$\lambda_i = \alpha_{ij} l_{ij} \text{ на } S_2. \quad (16.10)$$

Зависимости (16.9) и (16.10) в совокупности с зависимостью (16.5) раскрывают физический смысл введенных в выражение  $\mathcal{E}_{III}$  неопределенных множителей Лагранжа

$$\alpha_{ij} = \sigma_{ij}, \quad \lambda_i = \sigma_{ij} l_{ij} = F_{vi}. \quad (16.11)$$

Если теперь воспользоваться результатом (16.11), то выражение для функционала  $\mathcal{E}_{III}$  можно упростить и представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{IV} = & \iiint_V W(u_{ij}) dV - \iiint_V \bar{X}_i u_i dV - \iint_{S_2} \bar{F}_{vi} u_i dS - \\ & - \iiint_V \left[ \sigma_{ij} \left( u_{ij} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \right] dV - \iint_{S_2} (u_i - \bar{u}_i) F_{vi} dS. \quad (16.12) \end{aligned}$$

Функционал (16.12) содержит 15 выражаемых величин: 6 компонентов деформации  $u_{ij}$ , 6 компонентов напряжения  $\sigma_{ij}$  и 3 компонента перемещения  $u_i$ . Их значения определяются из условия стационарности

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_{IV} = & \iiint_V \left( \frac{\delta W}{\delta u_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \delta u_{ij} dV - \\ & - \iiint_V \left[ \sigma_{ij} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \delta u_{ij} dV - \iiint_V \left( \bar{X}_i + \frac{\delta \sigma_{ij}}{\delta x_j} \right) \delta u_i dV + \\ & + \iint_{S_2} (u_i l_{ij} - \bar{F}_{vi}) \delta u_i dS - \iint_{S_2} (u_i - \bar{u}_i) \lambda_i \delta u_{ij} dS = 0, \quad (16.13) \end{aligned}$$

которое приводит к автоматическому выполнению зависимостей (16.1)–(16.5). Таким образом, условие стационарности (16.13) определяет действительное равновесное состояние рассматриваемого тела. Функционал  $\mathcal{E}_{IV}$  был предложен Ваншицем [160].

## 16.2. Функционал Рейсснера — Хеллингера, обеспечивающий независимое задирание компонентами перемещения и напряжения

Предположим теперь, что компоненты деформации  $\epsilon_{ij}$  не являются независимыми величинами, а связаны определенными соотношениями с компонентами напряжения [см. зависимость (16.9)]

$$\epsilon_{ij} = N_{ij}(\sigma_{kl}), \quad (16.14)$$

Используя формулу (16.14), можно исключить компоненты деформации в выражении (16.12). Получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_V = & - \iiint_V W_{\text{доп}}(\alpha_{ij}) dV - \iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{X}_i \right) \alpha_{ij} dV + \\ & + \iint_{S_1} (\alpha_{ij} l_{ij} - \bar{F}_{ni}) \alpha_{ij} dS + \iint_{S_2} \alpha_{ij} l_{ij} \bar{u}_j dS, \end{aligned} \quad (16.15)$$

где

$$W_{\text{доп}}(\alpha_{ij}) = \sigma_{ij} \alpha_{ij} - W(\epsilon_{ij}) = \alpha_{ij} N_{ij}(\sigma_{kl}) - \int_{S_2} \alpha_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (16.16)$$

— дополнительная потенциальная энергия единицы объема тела.

Функционал (16.15), правда в несколько иной форме, был предложен в работах Э. Рейсснера и Э. Хеллингера, поэтому часто именуется функционалом Рейсснера — Хеллингера. Он содержит двадцать параллельных величин: шесть компонентов напряжения  $\sigma_{ij}$  и три компонента перемещения  $\alpha_i$ . Компоненты деформации определяются через компоненты напряжения с помощью зависимости (16.14). Условие стационарности функционала

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_V = & - \iiint_V \frac{\partial W_{\text{доп}}}{\partial \alpha_{ij}} \delta \alpha_{ij} dV - \iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{X}_i \right) \delta \alpha_{ij} dV - \\ & - \iiint_V \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_j} u_i dV + \iint_{S_1} (\alpha_{ij} l_{ij} - \bar{F}_{ni}) \delta \alpha_{ij} dS + \\ & + \iint_{S_1} \delta \alpha_{ij} l_{ij} u_i dS + \iint_{S_2} \delta \alpha_{ij} l_{ij} \bar{u}_j dS = \\ & = - \iiint_V \left( \bar{X}_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) \delta \alpha_{ij} dV + \iint_{S_1} (\alpha_{ij} l_{ij} - \bar{F}_{ni}) \delta \alpha_{ij} dS - \\ & - \iint_{S_2} (\alpha_{ij} - \bar{u}_i) l_{ij} \delta \alpha_{ij} dS - \\ & - \iiint_V \left[ \frac{\partial W_{\text{доп}}}{\partial \alpha_{ij}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{X}_i \right) \right] \delta \alpha_{ij} dV = 0 \end{aligned} \quad (16.17)$$

выводит к выполнению условий (16.1) — (16.4), т. е. всех необходимых условий равновесия и сплошности тела.

Функционалы  $\mathcal{E}_{\text{Д}}$ ,  $\mathcal{E}_{\text{У}}$  и  $\mathcal{E}_V$  в дальнейшем будем называть стационарными, а методы, основанные на использовании условий их стационарности, — стационарными принципами.

При использовании этих принципов для решения задач строительной механики корабля и теории упругости уже не требуется предварительного выполнения какого-либо условий равновесия или сплошности. При этом каждую из независимых величин можно искать в виде ряда разложения по некоторой системе линейно независимых функций.

Наконец, в заключение заметим, что из условия стационарности (16.17) как частный случай могут быть получены математические формулировки обычного и модифицированного принципов возможных изменений перемещений и напряжений, которые были изложены в предыдущих параграфах. Возможность убедиться в этом предоставляем читателю.

## § 17. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 17.1. Переход от вариационных принципов линейной теории упругости к вариационным принципам нелинейной теории упругости

Выше уже упоминалось, что вариационные принципы с успехом могут быть использованы для решения геометрических и физических неделимых задач. И все же, по-видимому, требуется большая честность в ответе на вопрос, какие из изложенных вариационных принципов и в какой математической формулировке пригодны для решения нелинейных задач теории упругости и строительной механики.

Начнем рассмотрение поставленного вопроса с получения математической формулировки принципа возможных перемещений, пригодной для решения нелинейных задач.

Рассмотрим некоторое тело, загруженное объемными силами  $\bar{X}_i$  и поверхностью  $\bar{F}_{ni}$  за части поверхности  $S_1$ . Оставшаяся часть поверхности  $S_2$  имеет заданные перемещения  $u_i = \bar{u}_i$ . Составные равновесия такого тела определяются компонентами напряжения  $\sigma_{ij}$ , деформации  $\epsilon_{ij}$  и перемещения  $u_i$ .

Предположим теперь, что тело получило бесконечно малые возможные отклонения от равновесного положения, которые согласуются с условиями закрепления тела на  $S_1$ . Тогда независимо от характера геометрической и физической неделимости задачи

<sup>2</sup> Некоторые вариационные принципы называют первым уравнением, называемые также, содержится в работах [75, гл. 11; 101; 103, гл. 3].

справедливо основное выражение (6.2) для принципа возможных перемещений

$$\iiint_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV - \iint_{S_1} \bar{X}_i \delta u_i dV - \iint_{S_2} \bar{F}_i \delta u_i dS = 0. \quad (17.1)$$

Следует подчеркнуть, что зависимость (17.1) справедлива в случае действия неконсервативных внешних нагрузок. Если с помощью формулы (4.22) в уравнении (17.1) исключить компоненты деформации  $e_{ij}$  и проинтегрировать первый член этого уравнения по частям, то можно получить еще один вариант математической формулировки принципа возможных перемещений<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} & - \iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \sigma_{ij} \right] + X_j \right\} \delta u_i + \\ & + \iint_{S_1} \left\{ \sigma_{ij} t_{ij} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \bar{F}_{ij} \right\} \delta u_i dS = 0. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Уравнение (17.2) по своей структуре тождественно уравнению (6.9). Как и в уравнении (6.9), в фигурных скобках под знаком интегралов заключены левые части уравнений равновесия тела и силовых граничных условий на поверхности  $S_1$ , только теперь уже нелинейной теории упругости.

Если предположить существование потенциальной энергии тела, значение которой не зависит от азимута нагружения тела и одновременно определяется величинами компонентов деформации в конических нагрузках, то первый член в уравнении (17.1) равен варианту потенциальной энергии

$$\delta V = \iiint_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV. \quad (17.3)$$

С учетом равенства (17.3) уравнение (17.1) можно переписать в виде

$$6V - \iint_V \bar{X}_i \delta u_i dV - \iint_{S_1} \bar{F}_i \delta u_i dS = 0. \quad (17.4)$$

Если из тела действуют консервативные внешние силы, то уравнению (17.4) можно придать вид зависимости (6.18)

$$\delta \vartheta = \delta (V - U) = 0,$$

где  $\vartheta = V - U$  — полная энергия деформируемого тела;  $U$  — потенциал внешних сил, определяемых по формуле (6.12).

Внимательное рассмотрение полученной выше математической формулировки принципа возможных перемещений для решения нелинейных задач позволяет прийти к заключению, что и все оставшиеся изложенные пами в настоящей главе вариационные принципы могут быть приспособлены для решения нелинейных задач.

Для этого следует вместо некоторое изменения в математическую формулировку вариационных принципов. Суть этих изменений состоит в следующем: а) вместо компонентов  $u_{ij}$  следует вместо компоненты деформации  $e_{ij}$ , определяемые по законам (4.22); б) уравнения равновесия по объему заменить на соответствующие уравнения нелинейной теории упругости (4.28), а уравнения равновесия на поверхности  $S_1$  — уравнениями (4.32); в) поверхностные усилия  $\bar{F}_{ij}$  на части поверхности  $S_2$  определить с помощью зависимостей (4.32).

## 17.2. Математические формулировки вариационных принципов нелинейной теории упругости

Ниже приведены полученные таким путем математические формулировки основных вариационных принципов нелинейной теории упругости. Заметим, что в общем случае предполагается наличие геометрической и физической нелинейности.

### 17.2.1. Метод возможных перемещений

$$\delta \vartheta = \iiint_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV - \iint_V \bar{X}_i \delta u_i dV - \iint_{S_1} \bar{F}_i \delta u_i dS = 0. \quad (17.5)$$

Основные неизвестные при использовании этого принципа — компоненты перемещения  $u_{ij}$ , удовлетворяющие кинематическим граничным условиям на  $S_2$  [см. выражение (8.3) для этих перемещений].

Выполнение условия (17.5) приводит к удовлетворению всех уравнений равновесия.

### 17.2.2. Модифицированный принцип возможных перемещений

$$\begin{aligned} \delta \vartheta_1 = & \iiint_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV - \iint_V \bar{X}_i \delta u_i dV - \\ & - \iint_{S_1} \bar{F}_i \delta u_i dS - \iint_{S_2} \bar{F}_{ij} \delta u_i dS = 0. \end{aligned} \quad (17.6)$$

Основные неизвестные — компоненты перемещения  $u_{ij}$ , которые можно искать в виде выражений (14.7). Выражения (14.7) не удовлетворяют граничным условиям на  $S_2$ .

### 17.2.3. Принцип возможных изменивших напряженного состояния

$$\delta \vartheta = \iiint_V \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \iint_{S_1} \bar{u}_i \delta F_{ij} dS = 0. \quad (17.7)$$

Основные неизвестные — компоненты напряжения  $\sigma_{ij}$ , которые можно искать в виде выражений (12.6). Выражения (12.6) удовлетворяют всем уравнениям равновесия (4.28) и (4.32).

Выполнение условия стационарности (17.7) приводит к тождественному удовлетворению всех условий сложности.

<sup>1</sup> См. В. В. Новожилов [76, гл. III].

### 17.2.4. Модифицированный принцип возможных изменений напряженного состояния

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_M = & \int \int \int \sigma_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \int \int \int u_i \delta X_i dV - \\ & - \int \int \int u_i \delta F_{vi} dS - \int \int \int \tilde{u}_i \delta F_{vi} dS = 0. \end{aligned} \quad (17.8)$$

Основные неизвестные — компоненты напряжения  $\sigma_{ij}$ , которые можно искать в виде выражения (15.4). Выражения (15.4) не удовлетворяют уравнениям равновесия (4.28) и (4.32).

### 17.2.5. Смешанный вариационный принцип Винсента

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_{MV} = & \int \int \int \left( \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \delta \sigma_{ij} dV - \\ & - \int \int \int \left[ \sigma_{ij} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right] \delta \sigma_{ij} dV - \\ & - \int \int \int \left[ \bar{X}_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \sigma_{kj} \right] \right] \delta u_i dV + \\ & + \int \int \int \left[ \sigma_{ij} f_{iv} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \bar{F}_{vi} \right] \delta u_i dS - \\ & - \int \int \int (u_i - \tilde{u}_i) \delta F_{vi} dS = 0. \end{aligned} \quad (17.9)$$

Основные неизвестные — компоненты перемещения  $u_i$ , напряжения  $\sigma_{ij}$  в деформации  $\delta \sigma_{ij}$ .

Выполнение уравнения (17.9) приводит к автоматическому удовлетворению всех условий равновесия, условий сплошности и замкнутостей, устанавливающих связи между компонентами напряжения и компонентами деформации.

### 17.2.6. Смешанный вариационный принцип Рейесвера—Хеллингера

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_V = & - \int \int \int \left[ \bar{X}_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \sigma_{kj} \right] \right] \delta u_i dV + \\ & + \int \int \int \left[ \sigma_{ij} f_{iv} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \bar{F}_{vi} \right] \delta u_i dS - \\ & - \int \int \int (u_i - \tilde{u}_i) \delta F_{vi} dS - \\ & - \int \int \int \left[ \frac{\partial W_{\text{вн}}}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right] \delta \sigma_{ij} dV = 0. \end{aligned} \quad (17.10)$$

где

$$W_{\text{вн}}(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} e_{ij} - W(\sigma_{ij}). \quad (17.11)$$

Основные неизвестные — компоненты перемещения  $u_i$  и компоненты напряжения  $\sigma_{ij}$ . Выполнение уравнения (17.10) приводит к автоматическому удовлетворению всех условий равновесия и условий сплошности нелинейной теории упругости.

## § 18. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ

### 18.1. Постановка задачи<sup>1</sup> и вывод расчетных зависимостей

Известно, что использование линейной теории упругости дает для каждого тела при заданных внешних нагрузках и условиях закрепления единственное положение равновесия, другими словами, — единственное решение задачи. В действительности же появление деформируемых тел не всегда однозначно. Может оказаться, что тело при одних и тех же нагрузках и условиях закрепления имеет несколько возможных положений равновесия, некоторые из которых могут оказаться неустойчивыми. Поэтому возникает задача не только отыскать все равновесные формы, но и выяснить их устойчивость. При действии на тело нескольких нагрузок ( $P_1, P_2, \dots$ ) будем предполагать, что все они в процессе нагружения тела изменяются пропорционально одному параметру  $p$

$$P_i = k_i p, \quad (18.1)$$

При достижении внешней нагрузкой ее критического (затягивающего) значения возможно появление еще одной смежной формы равновесия, происходит как бы раздвоение решения задачи. Именно это обстоятельство и будет положено в дальнейшем основу метода определения критического значения параметра  $p$ .

Пусть нагрузка на тело равна критической. Тогда возможно существование двух смежных положений равновесия, одно из которых будет неустойчивым, а другое устойчивым.

Обозначим напряжение, деформации, перемещения и внешние силы, отвечающие неустойчивому и смежному устойчивому положениям равновесия, соответственно через

$$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i, \bar{X}_i, \bar{F}_{vi} \quad (18.2)$$

и

$$\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^*, \varepsilon_{ij}^* + \varepsilon_{ij}^*, u_i^* + u_i^*, \bar{X}_i^* + \bar{X}_i^*, \bar{F}_{vi}^* + \bar{F}_{vi}^*. \quad (18.3)$$

<sup>1</sup> Записано из [74, § 42] и [36].

Так как переход из одного положения равновесия в смежное происходит без нарушения условий закрепления тела, то должно выполняться условие

$$a_i^* = 0 \text{ на } S_3. \quad (18.4)$$

Сформулируем принцип возможных перемещений для тела в его втором устойчивом равновесном состоянии, полагая, что условия равновесия для напряженно-деформированного состояния (18.2) выполнены.

Пусть тело получило некоторые возможные отклонения  $\delta a_i^*$  из состояния (18.3). Тогда можно написать следующую формулу принципа возможных перемещений:

$$\begin{aligned} \iiint (\sigma_{ij} + \epsilon_{ij}^*) \delta (\epsilon_{ij} + \epsilon_{ij}^*) dV - \iiint (\bar{X}_i + X_i^*) \delta a_i^* dV - \\ - \iint_{S_1} (\bar{F}_{il} + F_{il}^*) \delta a_l^* dS = 0, \end{aligned} \quad (18.5)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} + \epsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial (u_i + u_i^*)}{\partial x_j} + \frac{\partial (u_j + u_j^*)}{\partial x_i} + \right. \\ \left. + \frac{\partial (u_k + u_k^*)}{\partial x_i} \frac{\partial (u_k + u_k^*)}{\partial x_j} \right], \end{aligned} \quad (18.6)$$

При определении  $\delta (\epsilon_{ij} + \epsilon_{ij}^*)$  вариация берется по отношению к  $u_i^*$ .

Так как оба равновесных положения полагаются бесконечно близкими друг к другу, можно с достаточной точностью принять, что изменения внешних нагрузок, напряжений и деформаций, связанные с переходом тела из состояния (18.2) в состояние (18.3), т. е. величины  $\sigma_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}^*$ ,  $X_i^*$  и  $F_{il}^*$  будут линейными функциями  $u_i^*$  и их производных.

Состояние (18.2) является равновесным и для него можно записать следующее уравнение принципа возможных перемещений:

$$\iiint \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}^* dV - \iiint \bar{X}_i \delta a_i^* dV - \iint_{S_1} \bar{F}_{il} \delta a_l^* dS = 0, \quad (18.7)$$

где

$$\epsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^*}{\partial x_i} \frac{\partial u_k^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k^*}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^*}{\partial x_i} \right). \quad (18.8)$$

Следует заметить, что при использовании уравнения (18.7) для определения исходного равновесного состояния целесообразно в качестве  $a_i^*$  выбрать  $u_i$ . Тогда уравнение (18.7) переходит в основное гармоническое уравнение принципа возможных перемещений (17.1) нелинейной теории упругости, которым и рекомендуется

использоваться для определения исходного равновесного состояния.

Если учсть уравнение (18.7), а также, что в уравнении (18.5)

$$\delta (\epsilon_{ij} + \epsilon_{ij}^*) = \delta \epsilon_{ij} + \frac{\partial a_i^*}{\partial x_i} \frac{\partial a_j^*}{\partial x_j} + \frac{\partial a_k^*}{\partial x_i} \frac{\partial a_k^*}{\partial x_j}, \quad (18.9)$$

то, вычитая из (18.5) выражение (18.7), получаем

$$\begin{aligned} \iiint_V \left( \sigma_{ij}^* \delta \epsilon_{ij} + \sigma_{ij} \frac{\partial a_i^*}{\partial x_i} \frac{\partial a_j^*}{\partial x_j} \right) dV - \\ - \iiint_V \left( \bar{X}_i \delta a_i^* dV - \iint_{S_1} \bar{F}_{il} \delta a_l^* dS \right) = 0. \end{aligned} \quad (18.10)$$

Пронтегрировав первый член в зависимости (18.10), с учетом выражения (18.8), за частям, получим

$$\begin{aligned} \iiint_V \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \sigma_{ik}^* \left( \delta_{ij} + \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) + \sigma_{kj} \frac{\partial a_i^*}{\partial x_i} \right] + \bar{X}_i^* \right] \delta a_i^* dV - \\ - \iint_{S_1} \left[ \left( \delta_{ij} \sigma_{ik} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) + \sigma_{kj} l_{ik} \frac{\partial a_i^*}{\partial x_j} \right) - \bar{F}_i^* \right] \delta a_i^* dS = 0. \end{aligned} \quad (18.11)$$

В силу произвольности вариаций  $\delta a_i^*$  полученное уравнение будет выполнено при условии равенства нулю коэффициентов при таких вариациях:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \sigma_{ik}^* \left( \delta_{ij} + \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) + \sigma_{kj} \frac{\partial a_i^*}{\partial x_i} \right] + \bar{X}_i^* = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ в } V; \quad (18.12)$$

$$\sigma_{ki}^* l_{ik} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) + \sigma_{kj} l_{ik} \frac{\partial a_i^*}{\partial x_j} - \bar{F}_i^* = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ на } S_1. \quad (18.13)$$

Уравнение (18.12) представляет собой основные уравнения нейтрального равновесия, системы же уравнений (18.13) есть сильные граничные условия на части поверхности тела  $S_1$ .

Следует заметить, что уравнения (18.12) и условия (18.13) линейны и однородны относительно производных от перемещений  $a_i$  по координатам  $x_j$ . Входящие же в уравнения (18.12) и (18.13) величины  $\sigma_{ij}$  и  $a_i$  определяются из решения линейной, в общем случае, задачи теории упругости. Для получения этого решения можно воспользоваться принципом возможных перемещений в форме (18.7). В результате устанавливается определенная зал-

сность между значениями компонентов перемещения  $\dot{u}_i$ , напряжений  $\sigma_{ij}$  и величиной внешней нагрузки

$$\begin{aligned} u_i &= u_i(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{X}_v, \bar{Y}_v, \bar{Z}_v); \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{X}_v, \bar{Y}_v, \bar{Z}_v). \end{aligned} \quad (18.14)$$

Если далее предположить, что все внешние нагрузки в процессе нагружения тела изменяются пропорционально одному параметру  $p$  (см. формулу (18.1)), то из выражений (18.14) следует, что каждый из компонентов  $u_i$  и  $\sigma_{ij}$  является некоторой (для линейных задач — линейной) функцией этого параметра

$$\begin{aligned} u_i &= u_i(p); \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}(p). \end{aligned} \quad (18.15)$$

Определение же критического значения параметра  $p$ , а тем самым и критических значений внешних нагрузок, требует уже интегрирования системы уравнений устойчивости (18.12) при условии (18.13) на части поверхности  $S_1$  и (18.4) на  $S_2$ .

В силу однородности основной системы уравнений устойчивости и граничных условий (18.13) и (18.4) решения, отличные от нуля, получим лишь при определенных собственных (критических) значениях параметра нагрузки  $p$ . Каждому такому критическому значению  $p$  будет соответствовать точка, характеризующая существование двух смежных равновесных состояний тела.

Заметим, что во многих практических задачах для исследования исходного положения равновесия с целью установления зависимостей (18.15) вполне приемлемы уравнения линейной теории упругости. При этом решение задачи устойчивости существенно упрощается.

Благодаря малости величин  $\dot{u}_{ij}$  и  $\dot{e}_{ij}$  приемлемо предположение о линейной связи между этими величинами

$$\dot{u}_{ij} = u_{ij}\dot{e}_{ij}, \quad (18.16)$$

где коэффициенты  $u_{ij}$  удовлетворяют условию симметрии

$$u_{ij} = u_{ji}. \quad (18.17)$$

Использование зависимости (18.16) позволяет переписать вариационное условие (18.10) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\delta \left\{ \frac{1}{2} \int_V \int \int \left[ \sigma_{ij} \dot{u}_{ij} \dot{e}_{ij} + \sigma_{ij} \frac{\partial u^*}{\partial x_i} \frac{\partial u^*}{\partial x_j} \right] dV \right\} - \\ &- \int_V \int X_v \delta u^* dV - \int_{S_1} F_v \delta u^* dS = 0. \end{aligned} \quad (18.18)$$

При действии консервативных внешних нагрузок, величины и направления которых остаются неизменными при переходе тела из первого равновесного состояния во второе,

$$X_v = F_v = 0 \quad (18.19)$$

и уравнение (18.18) принимает еще более простой вид

$$\delta \int_V \int \int \left[ \sigma_{ij} \dot{u}_{ij} \dot{e}_{ij} + \sigma_{ij} \frac{\partial u^*}{\partial x_i} \frac{\partial u^*}{\partial x_j} \right] dV = 0 \quad (18.20)$$

или

$$\delta \mathcal{E}^* = 0, \quad (18.21)$$

где через  $\mathcal{E}^*$  обозначено прращение полной энергии тела при переходе его из первого равновесного состояния во второе.

В дальнейшем функционал  $\mathcal{E}^*$  удобно представить в виде

$$\mathcal{E}^* = V^* - U^*, \quad (18.22)$$

где  $V^*$  — изменение потенциальной энергии, связанное с упомянутым выше переходом тела из одного равновесного положения в другое;  $U^*$  — работа напряжений, отвечающих исходному первому равновесному состоянию тела, на перемещения  $\dot{u}^*$ .

Полученные выше уравнения показывают, что критическая нагрузка зависит от значений коэффициентов  $u_{ij}$ , которыми фиксируется связь между приращениями напряжения  $\sigma_{ij}$  и приращениями деформации  $\dot{e}_{ij}$  в момент перехода тела из одного равновесного состояния в другое; жесткостные же параметры, устанавливающие связь между  $\sigma_{ij}$  и  $e_{ij}$ , определяют лишь то напряженно-деформированное состояние, с которым тело подходит к моменту смены равновесных состояний<sup>1</sup>. При наличии физической погрешности материала коэффициенты  $u_{ij}$  зависят от  $\sigma_{ij}$ .

Для приближенного вычисления критического значения параметра  $p$  можно воспользоваться вариационным уравнением в форме (18.10) либо (18.11). В уравнении следует вместо из формул (18.15) значений компонентов  $u_i$  и  $\sigma_{ij}$ , полученных в результате решения задачи о докритическом напряженно-деформированном состоянии рассматриваемого тела.

Далее, по существу, используется общая процедура метода Ритца.

Перемещения  $\dot{u}_i$  представляются в виде суммы

$$\dot{u}_i(x, y, z) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \varphi_{ik}(x, y, z) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (18.23)$$

где через  $a_{ik}$  обозначены неизвестные коэффициенты, а через  $\varphi_{ik}(x, y, z)$  — система линейно независимых функций, удовлетворяющих условиям полноты и условию

$$\dot{u}_{ik} = 0 \text{ на } S_2. \quad (18.24)$$

<sup>1</sup> См. В. А. Поступов [68, с. 88].

В случае, если внешние силы являются неконсервативными, то, располагая заданным законом изменения их величин и направления, представляем приращения внешних нагрузок  $\bar{F}_x$  и  $\bar{X}_z$  в виде линейных функций перемещений  $u_i$  и их производных по координатам (члены более высокой степени в силу малости  $\epsilon$  отбрасываются).

Используя формулы (18.8) и (18.16), последовательно получаем выражения для компонентов  $b_{ij}$  и  $\phi_{ir}$ , которые, как нетрудно видеть, будут линейными функциями параметров  $a_{ik}$ .

Всю теперь все найденные величины в любое из вариационных уравнений (18.10) или (18.11), используя произвольность вариаций  $a_{ik}$ , получим систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $a_{ik}$ . Интересующее нас решение, отличное от нуля, получим при условии равенства нулю основного определителя этой системы. Коэффициенты определителя содержат всю информацию о жесткостных параметрах рассматриваемого тела, о законах его нагружения внешней нагрузкой.

Некоторые из коэффициентов матрицы определителя являются нагрузочный параметр  $p$ . Разорвавши определитель, получаем уравнение для определения критического значения  $p$ . Решение этого уравнения дает спектр значений параметра  $p$

$$p_1 \ll p_2 \ll p_3 \ll \dots \quad (18.25)$$

Наибольшей внешней нагрузке, вызывающей потерю устойчивости упругой системы, соответствует наименьший корень, т. е.  $p_1$ .

## 18.2. Пример использования вариационного метода для исследования устойчивости стержней

**Пример 1.** Свободно опертый прismaticкий стержень, изображенный на рис. 9, загружается сжимающими консервативными силами  $T$ . Материя стержня подчиняется закону Гука. Требуется определить критическое значение  $T$ .

Решение. Вплоть до критического значения силы  $T$  прямолинейная форма равновесия будет устойчивой. При  $T = T_{kp}$  прямолинейная форма становится неустойчивой. При этом возможна появление сжимированной формы равновесия. Про такой момент раздвоения равновесных форм, когда на схему прямолинейной формы приходит искривленная, обычно говорят, что стержень теряет устойчивость прямолинейной формы равновесия.



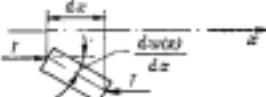
Рис. 9. Свободно опертая прismaticкая балка, загруженная сжимающими силами  $T$ .

Для определения  $T_{kp}$  воспользуемся вариационным уравнением (18.22). Так как переход из первого прямолинейного равновесного состояния во второе искривленное состояние происходит при фиксировании значений сжимающей силы  $T$ , при искривлении будет наблюдаться лишь погибание прогиба оси балки  $u^*$  ( $x$ ). Перемещение же  $u^*(x)$  точек оси балки в своем направлении равно нулю.

Подсчитаем теперь изменение полной энергии  $\mathcal{E}^* = V^* - U^*$  стержня при переходе от прямолинейной формы равновесия к искривленной.

Так как для прямолинейной формы равновесия прогиб равен нулю, изменение потенциальной энергии стержня определим по формуле

$$U^* = \frac{EI}{2} \int_a^b [u''(x)]^2 dx. \quad (18.26)$$



Функцию  $U^*$ , как это следует из уравнения (18.26), можно определить с помощью формулы

$$U^* = \frac{1}{2} \int \int \int \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i dx_j, \quad (18.27)$$

из которой, если учесть, что для критического состояния стержня лишь один компонент напряжения  $\sigma_{13} = \frac{T}{F}$  отличен от нуля, а  $u_1 = u_2 = 0$ ,  $u_3 = w(x)$ , получим

$$U^* = \frac{1}{2} \int_0^L T \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (18.28)$$

Формулу (18.28) для функции  $U^*$  можно найти более просто, путем следующих рассуждений.

Выделим элемент стержня длиной  $dx$ . При искривлении стержня на этот элемент будут действовать силы, изображенные на рис. 10.

При повторении на угол  $\theta'$  указанные силы образуют пару сил  $Tw' dx$ . Работа этой пары для элемента будет равна  $\frac{1}{2} T (w')^2 dx$ , а для всего стержня

$$U^* = \frac{1}{2} \int_0^L T \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx.$$

Полученное выражение совпадает с формулой (18.28).

Форму искривления стержня представим в виде ряда

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (18.29)$$

Координатные функции  $\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$  удовлетворяют всем необходимым граничным условиям для свободно опертой балки.

Подстановка выражений (18.29) в формулы (18.26) и (18.28) дает для функций  $V^*$  и  $U^*$  следующие выражения:

$$V^* = -\frac{EI}{4} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4; \quad (18.30)$$

$$U^* = \frac{Tl}{4} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2. \quad (18.31)$$

Отсюда полная энергия балки

$$\mathcal{E}^* = V^* + U^* = -\frac{EI}{4} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 - \frac{Tl}{4} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2. \quad (18.32)$$

Условие стационарности (18.21) выполняется, если

$$\frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial a_i} = \frac{\partial (V^* + U^*)}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (18.33)$$

Подставляя в формулу (18.33) выражение для  $\mathcal{E}^*$  из формулы (18.32), получаем

$$a_i \left[ EI \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 - T \right] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (18.34)$$

Видим, что система (18.33) распалась на независимые уравнения (18.34).

Уравнения (18.34) удовлетворяются при первых нуле  $a_i$ , когда выражения в квадратных скобках равны нулю. Отсюда следует

$$T = \frac{EI^2 n^2 \pi^2}{l^2} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (18.35)$$

Каждому значению  $i$  в формуле (18.35) соответствует свою сила. Наименьшее же значение силы  $T$ , при котором возможно появление искривленной формы равновесия, отвечает  $i = 1$ . Эту силу принято называть эндлеровой и обозначать  $T_{\text{энд}}$ . Очевидно имеем

$$T_{\text{энд}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (18.36)$$

## § 19. ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

Рассмотрим деформацию тела под действием нагрузок: объемных сил  $\bar{X}_i$  и поверхностных сил  $\bar{F}_{ik}$  на части поверхности  $S_1$ , изменяющихся во времени. На части поверхности тела  $S_2$  заданы перемещения  $u_i = u_i^*$ .

Согласно принципу Даламбера задачу динамики можно заменить соответствующей задачей статики при условии вложения инерционных сил

$$X_i^* := -\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (19.1)$$

где  $\rho$  — плотность материала тела,  $u$  — состав внешних нагрузок.

С учетом (19.1) из выражение (6.2) для принципа возможных перемещений получаем

$$\begin{aligned} \iiint_V a_{ij} \delta u_{ij} dV &= \iiint_V \left( \bar{X}_i - \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \delta u_i dV - \\ &- \iint_{S_1} \bar{F}_{ik} \delta u_i dS = 0. \end{aligned} \quad (19.2)$$

Уравнение (19.2) справедливо как для упругого, так и неупругого тела, для линейных и нелинейных соотношений между компонентами перемещений и деформаций. Ему нетрудно придать следующий вид:

$$\iiint_V \left( \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} + X_i - \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \delta u_i dV - \iint_{S_1} (a_i f_{ij} - F_{ik}) \delta u_i dS = 0. \quad (19.3)$$

При использовании метода Ритца для решения вариационной задачи, определенной условием стационарности (19.2), перемещения записываем в форме (8.3). Следует лишь при этом помнить, что коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  и  $c_{ij}$ , входящие в эти выражения, являются неизвестными функциями времени  $t$ . После выполнения всех операций метода Ритца, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для определения неизвестных функций  $a_i(t)$ ,  $b_i(t)$  и  $c_i(t)$ .

Для решения полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений можно воспользоваться либо методом Рунге—Кутта<sup>1</sup>, для которого имеются готовые стандартные программы, либо методами, излагаемыми в § 52.

<sup>1</sup> См., например, Н. С. Бахвалов [8, гл. VIII, § 2, с. 450].

Начальные условия для функций  $a_k(t)$ ,  $b_k(t)$  и  $c_k(t)$  получаем непосредственно из начальных условий для тела.

Рассмотрим теперь свободные колебания физически и геометрически линейного тела. При свободных колебаниях внешние силы  $\bar{X}_k$  и  $\bar{F}_w$  равны нулю, а перемещения, деформации и напряжения изменяются во времени по гармоническому закону

$$\left. \begin{aligned} u_k(x, y, z, t) &= a_k^0(x, y, z) \sin \lambda k t \\ u_{xy}(x, y, z, t) &= b_k^0(x, y, z) \sin \lambda k t \\ u_{yy}(x, y, z, t) &= c_k^0(x, y, z) \sin \lambda k t \end{aligned} \right\} \quad (19.4)$$

где  $\lambda$  — частота свободных колебаний.

С учетом выведенного из уравнения (19.3) получаем

$$\delta(U^0 - T^0) = 0, \quad (19.5)$$

где  $U^0$  — максимальное значение потенциальной энергии колеблющегося тела,

$T^0 = \frac{\lambda^2}{2} \iint_V p u_0^2 dV$  — максимальное значение кинетической энергии.

Внося в выражения для  $U^0$  и  $T^0$  компоненты перемещения  $u_i^0(x, y, z)$  в форме (8.3), получаем

$$U^0 := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} a_j a_i, \quad (19.6)$$

$$T^0 = \frac{\lambda^2}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} a_j a_i, \quad (19.7)$$

где  $c_{ij}$  и  $a_{ij}$  суть некоторые коэффициенты, зависящие от жесткостных и инерционных параметров тела;  $a_k$  — динамические коэффициенты в принятых выражениях для  $u^0$ ,  $v^0$  и  $w^0$ .

Подставляя выражения (19.6) и (19.7) в условие стационарности (19.5), получаем следующую систему линейных (для линейной системы) однородных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^N (c_{ik} - \lambda^2 a_{ik}) a_i = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (19.8)$$

Число уравнений системы (19.8) равно суммарному числу коэффициентов  $a_k$  в выражениях для перемещений  $u^0$ ,  $v^0$  и  $w^0$ .

Решение системы (19.8), отличное от нуля (только при этом  $\lambda$  возможны колебания тела), получаем при условии равенства нулю основного определителя

$$\Delta(\lambda) = |c_{ik} - \lambda^2 a_{ik}| = 0. \quad (19.9)$$

Корни частотного уравнения (19.9) являются значениями некомплексных частот  $\lambda_k$  свободных колебаний упругого тела.

Для иллюстрации применения принципа возможных перемещений к исследованию колебаний упругих тел рассмотрим пример.

Пример 1. Определить частоты свободных колебаний свободно опередкой пряматической балки жесткостью на изгиб  $EI$ , лежащей на сплошном упругом основании жесткости  $k_0 = \text{const}$ . Длина балки —  $l$ , погонная масса —  $m$ .

Решение. Выражение для формы свободных колебаний свободно опередкой балки можно задать в виде

$$w^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\lambda k \pi x}{l}, \quad (19.10)$$

Потенциальная энергия складывается из потенциальной энергии изгиба балки и потенциальной энергии упругого основания

$$U^0 = \frac{EI}{2} \int_0^l [w^0''(x)]^2 dx + \frac{k_0}{2} \int_0^l [w^0(x)]^2 dx. \quad (19.11)$$

Подставляя (19.10) в выражение (19.11), получаем

$$U^0 = \frac{EI}{4} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left[ \left( \frac{\lambda k}{l} \right)^4 + \frac{k_0}{EI} \right], \quad (19.12)$$

Кинетическую энергию определяем по формуле

$$T^0 = \frac{m l^2}{2} \int_0^l [w^0'(x)]^2 dx = \frac{m l^2}{4} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2. \quad (19.13)$$

Внося найденные значения  $U^0$  и  $T^0$  в условие стационарности (19.5), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{EI}{2} \left[ \left( \frac{\lambda k}{l} \right)^4 + \frac{k_0}{EI} \right] - \frac{m l^2}{2} \right) a_k \dot{a}_k = 0, \quad (19.14)$$

откуда

$$\frac{EI}{2} \left[ \left( \frac{\lambda k}{l} \right)^4 + \frac{k_0}{EI} \right] - \frac{m l^2}{2} = 0. \quad (19.15)$$

Из равенства (19.15) находим формулу для определения частот свободных колебаний рассматриваемой балки

$$\lambda_k = \lambda_0^2 \sqrt{1 + \frac{k_0^2}{EI m l^2}}, \quad (19.16)$$

где

$$\lambda_0^2 = \frac{E l^2}{m l^4} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad (19.17)$$

есть частота свободных колебаний  $k$ -го тона свободно опередкой пряматической балки без учета влияния упругого основания.

## § 20. ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Основной и самой трудоемкой операцией при исследовании свободных колебаний и устойчивости упругих систем является вычисление частот свободных колебаний к кратическим нагрузкам.

Рассмотрим сначала задачу о свободных колебаниях. Вычисление частот из уравнения (19.9) производится, как правило, путем подбора, т. е. задаются рядом числовых значений  $\lambda$ , по ним вычисляют значения  $\Delta(\lambda)$ , затем строят график и путем графической интерполяции находят корни.

При использовании этого метода можно значительно сократить трудоемкость вычислений и совершенно исключить возможность пропуска какой-либо частоты, если воспользоваться одним эффективным методом отыскания частот<sup>1</sup>.

Предположим, что для решения задачи о свободных колебаниях был использован смешанный метод, за основные неизвестные выбраны из перемещений (линейные перемещения и углы поворота определенных характеристических точек или сечений упругой системы)  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) и  $r$  статически неопределенных усилий  $R_i$  ( $i = s+1, s+2, \dots, s+r = n$ ). Для определения этих неизвестных необходимо составить из уравнений равновесия и уравнений совместности деформаций. В частном случае, когда за неизвестные принимаются только перемещения, получаем уравнения метода перемещений. Если же за неизвестные принимаются линии усилий, то получаем уравнения метода сил.

Неизвестные перемещения  $q_i$  и статически неопределенные усилия  $R_i$  представляем в виде

$$q_i(t) = q_i^0 \sin \lambda t; R_i(t) = R_i^0 \sin \lambda t. \quad (20.1)$$

Внося зависимость (20.1) в систему из уравнений равновесия и из уравнений совместности деформаций и приводя к определителю полученной системы  $\lambda - s + r$  алгебраических линейных однородных уравнений с неизвестными  $q_i^0$  и  $R_i^0$  нуль, получаем искомое частотное уравнение

$$\Delta(\lambda) = 0. \quad (20.2)$$

<sup>1</sup> Найденный способ отыскания частот разработан автором совместно с А. А. Кудашинским и был опубликован в статье [58]. Родственные приемы для стержневых систем изложены в работе Я. Л. Нудельмана «Об одном способе решения уравнений частот и кратических сил, составленных методом сил», — Труды Гипротехнического института, № 174, 1964, вып. 6, с. 155–160 и в монографии Р. Р. Матвеевской и Я. Л. Нудельмана «Устойчивость сложных стержневых систем [качественные методы]», М., Гостехиздат, 1961.

Здесь  $\Delta(\lambda)$  — определитель  $n$ -го порядка с симметричной относительно главной диагонали матрицей элементов

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{1,s+1} & b_{1,s+2} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{2,s+1} & b_{2,s+2} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_{s,s+1} & b_{s,s+2} & \cdots & b_{sn} \\ b_{s+1,1} & b_{s+1,2} & \cdots & b_{s+1,n} & c_{s+1,1} & c_{s+1,2} & \cdots & c_{s+1,n} \\ b_{s+2,1} & b_{s+2,2} & \cdots & b_{s+2,n} & c_{s+2,1} & c_{s+2,2} & \cdots & c_{s+2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{sn} & b_{s+1,n} & \cdots & b_{sn} & c_{sn} & c_{s+1,n} & \cdots & c_{sn} \end{vmatrix} = 0, \quad (20.3)$$

где  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  — коэффициенты, зависящие от упругих и кинематических свойств рассматриваемой упругой системы и от неизвестного значения  $\lambda$ .

Первые  $s$  строк в матрице (20.3) связаны с уравнениями равновесия, а последующие  $s = p - r$  строк являются следствием уравнений совместности деформаций.

Полагая в матрице (20.3)  $\lambda = \lambda_0$  ( $\lambda_0$  — некоторое произвольное число; о его выборе будет сказано ниже), получаем числовой определитель, матрица элементов которого с помощью использования процедуры Гаусса может быть легко преобразована к треугольному виду

$$\Delta^*(\lambda_0) = \begin{vmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* & b_{1,s+1}^* & b_{1,s+2}^* & \cdots & b_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* & b_{2,s+1}^* & b_{2,s+2}^* & \cdots & b_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1}^* & a_{s2}^* & \cdots & a_{sn}^* & b_{s,s+1}^* & b_{s,s+2}^* & \cdots & b_{sn}^* \\ b_{s+1,1}^* & b_{s+1,2}^* & \cdots & b_{s+1,n}^* & c_{s+1,1}^* & c_{s+1,2}^* & \cdots & c_{s+1,n}^* \\ b_{s+2,1}^* & b_{s+2,2}^* & \cdots & b_{s+2,n}^* & c_{s+2,1}^* & c_{s+2,2}^* & \cdots & c_{s+2,n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{sn}^* & b_{s+1,n}^* & \cdots & b_{sn}^* & c_{sn}^* & c_{s+1,n}^* & \cdots & c_{sn}^* \end{vmatrix} \quad (20.4)$$

Предположим далее, что рассматриваемая упругая система имеет частоты

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots \quad (20.5)$$

Тогда можно сформулировать следующее правило для определения местоположения произвольного числа  $\lambda = \lambda_0$  в спектре собственных частот системы (20.5):

$$\lambda_{min} < \lambda^0 < \lambda_{max}, \quad (20.6)$$

где  $m$  — число отрицательных диагональных элементов  $\Delta^*$  треугольной матрицы (20.4). Строки, в которых расположены элементы  $\Delta_{ii}^*$ , соответствуют уравнениям равенства;  $i$  — число собственных частот некоторой фиктивной упругой системы, получаемой из рассматриваемой системы путем наложения на нее абсолютно жестких связей  $q_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, b$ ) и удаления  $r$  связей  $R_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), значения которых меньше заданного значения  $\lambda^*$ ;  $k$  — число отрицательных диагональных элементов  $\Delta_{ii}^*$  той же матрицы (20.4). Строки этой матрицы, в которой расположены коэффициенты  $c_{ij}$  соответствуют уравнениям совместности деформаций.

Формула (20.6) предполагает порядок записи системы уравнений равенства и уравнений совместности деформаций, при котором все элементы на главной диагонали матрицы числового определителя  $\Delta^*$  ( $i = 0$ ) будут положительными числами. Поэтому, прежде чем начать пользоваться формулой (20.6), нужно убедиться в том, что все элементы на главной диагонали матрицы определителя  $\Delta^*$  (0), будут положительными числами. И если обнаружится, что  $i$ -й элемент на главной диагонали матрицы  $\Delta^*$  (0) — отрицательное число, необходимо в исходной матрице  $\Delta$  ( $\lambda$ ) поменять знак перед всеми элементами  $i$ -й строки.

Попытимся сформулировать содержание фиктивной упругой системы на примере решения задачи о свободных колебаниях неразрезной балки, опорой на ряд независимых упругих опор. В качестве основных неизвестных можно принять перемещение  $u_i$  и моменты  $R_i$  сечений балки над каждой опорой. Для получения фиктивной упругой системы необходимо все известные перемещения и узловые усилия системы положить равными нулю. В результате получим систему свободно опиравшихся на жесткие несмещаемые опоры балки, по сутиству, изолированных одна от другой. Для каждой из этих балок нужно определить число собственных частот, значения которых меньше  $\lambda_0$ . Сумма чисел, подсчитанных во всем этом блоке, и есть число  $b$ .

Используя зависимость (20.6), можно определить любую собственную частоту упругой системы с любой заданной точностью. Пусть для некоторой заданной упругой системы требуется определить, например, третью частоту  $\lambda_3$ . Если интервал ожидаемого расположения  $\lambda_3$  известен и сравнительно узок, то общая трудоемкость расчета по определению  $\lambda_3$  может заметно уменьшиться. Если же мы затруднимся сказать что-либо о пределах расположения значений  $\lambda_3$ , то в качестве  $\lambda^*$  придется принять некоторое положительное число, например  $\lambda^* = 50 \text{ c}^{-1}$ . Вновь  $\lambda^* = 50 \text{ c}^{-1}$  в (20.3), получим числовой определитель  $\Delta$  ( $\lambda = 50$ ), матрицу которого запишем с помощью процедуры Гаусса преобразуем к треугольному виду (20.4). Теперь остается определить значения чисел  $m$ ,  $i$  и  $k$  и воспользоваться формулой (20.6). Пусть  $m = 3$ ,  $i = 4$  и  $k = 2$ , тогда  $m + i - k = 5$

$$\lambda_3 < \lambda^* = 50 \text{ c}^{-1} < \lambda_2 \quad (a)$$

Таким образом, значения  $\lambda^* = 50 \text{ c}^{-1}$  располагаются между 5-й и 6-й собственными частотами упругой системы и, следовательно, частота  $\lambda_2$  располагается в интервале  $0 < \lambda_2 < 50 \text{ c}^{-1}$ .

При следующей пробе можно принять, например,  $\lambda^* = 25 \text{ c}^{-1}$ . Выполнив описанные выше операции, находим местоположение этого числа в секторе собственных чисел упругой системы. Пусть, например,

$$\lambda_2 < \lambda_3 = 25 \text{ c}^{-1} < \lambda_4 \quad (b)$$

Из совместного рассмотрения результатов (a) и (b) следует, что искомая частота  $\lambda_3$  располагается в интервале

$$25 \text{ c}^{-1} < \lambda_3 < 50 \text{ c}^{-1}. \quad (b)$$

Продолжая этот процесс дальше, легко выделить и определить с требуемой точностью значение  $\lambda_3$ .

Изложенный выше метод отыскания частот с последующим их определением может быть полностью перенесен на задачи по устойчивости консервативных упругих систем. Более того, метод применим и для определения критической нагрузки системы, теряющей устойчивость в упругопластической области.

### Глава III

## ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

В судостроении мы часто встречаемся с необходимостью рассмотрение сложного изгиба непрismaticеских балок, лежащих на упругом основании переменной жесткости. Изгиб таких балок описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями четвертого порядка с переменными коэффициентами. К решению уравнений такого вида сводятся задачи изгиба судна за такой воде и волнами, постановка судна в сухой и плавучий доки, спуск судна, изгиб судовых перекрытий с одной и несколькими перекрестными связями, осесимметричный изгиб оболочек вращения, подкрепленных колцевыми ребрами, и т. п.

При расчете пластики, оболочек, и более сложных объемных судовых конструкций мы встречаемся уже, как правило, с необходимостью решения одного дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений в частных производных. Однако и здесь при использовании метода появления мерности исходных задач (описаны в гл. VI) мы вновь приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

В настоящей главе приведены лишь те методы решения одномерных задач, которые нашли широкое использование в расчетах прочности судовых конструкций.

При решении одномерных задач широко используются и различные методы, изложенные в гл. II. Весьма популярны также метод сеток, метод коллокаций и метод конечных элементов. Эти методы изложены в последующих главах книги.

### § 21. МАТРИЧНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ КРАЕВЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Сложный изгиб неприматических балок, лежащих на упругом основании переменной жесткости (рис. II), описывается обыкновенным дифференциальным уравнением четвертого порядка с переменными коэффициентами

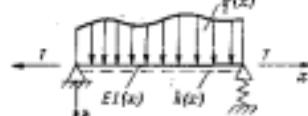
$$EI(x)w''(x)''' - Tw'(x) + k(x)w(x) = q(x). \quad (21.1)$$


Рис. II. Неприматическая балка, лежащая на слоистом упругом основании в загруженном изогнутой нагрузкой в основной рисунке.

Дифференциальное уравнение (21.1) можно переписать в виде совокупности четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} w'(x) &= \theta(x); \\ \theta'(x) &= \frac{M(x)}{EI(x)}; \end{aligned} \quad (21.2)$$

$$\begin{aligned} M'(x) &= N(x); \\ N'(x) &= q(x) + \frac{T}{EI}M(x) - k(x)w(x), \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$[W(x)]' = [A(x)][W(x)] + [B(x)], \quad (21.3)$$

где введены следующие обозначения:

$$[W(x)] = \begin{bmatrix} W(x) \\ \theta(x) \\ M(x) \\ N(x) \end{bmatrix}; \quad [A(x)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k(x) & 0 & \frac{T}{EI(x)} & 0 \end{bmatrix}; \quad (21.4)$$

$$[B(x)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q(x) \end{bmatrix}. \quad (21.4)$$

Обратимся теперь к граничным условиям и рассмотрим наиболее общий случай закрепления торцевых сечений балки. Пусть левый и правый концы балки скреплены на упругие опоры с коэффициентами податливости  $A_1$  и  $A_2$  и одновременно упруго защемлены с коэффициентами  $\mathfrak{A}_{11}$  и  $\mathfrak{A}_{12}$ , т. е.

$$\left. \begin{array}{l} w' = \mathfrak{A}_{11}Etw'; \\ (EIw'')' - Tw' = -\frac{x}{A_1}; \end{array} \right\} \quad (21.5)$$

$$\left. \begin{array}{l} w' = -\mathfrak{A}_{12}Etw'; \\ (EIw'')' - Tw' = \frac{x}{A_2}, \end{array} \right\} \quad (21.5)$$

или, если воспользоваться обозначениями для элементов вектора  $[W]$ ,

$$\left. \begin{array}{l} 0(0) - \mathfrak{A}_{11}M(0) = 0; \\ bw(0) - TA_1\theta(0) + A_2N(0) = 0; \end{array} \right\} \quad (21.6)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0(l) + \mathfrak{A}_{12}M(l) = 0; \\ w(l) + TA_2\theta(l) - A_1N(l) = 0. \end{array} \right\} \quad (21.6)$$

Условия (21.6) можно переписать в матричной форме

$$\left. \begin{array}{l} [C_1(0)][W(0)] = [D_1(0)]; \\ [C_2(l)][W(l)] = [D_2(l)]. \end{array} \right\} \quad (21.7)$$

где введены следующие обозначения:

$$[C_1(0)] = \begin{bmatrix} 0 & I & -\mathfrak{A}_{11} & 0 \\ I & -TA_1 & 0 & A_1 \end{bmatrix}; \quad [D_1(0)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (21.8)$$

$$[C_2(l)] = \begin{bmatrix} 0 & I & \mathfrak{A}_{12} & 0 \\ I & TA_2 & 0 & -A_1 \end{bmatrix}; \quad [D_2(l)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (21.8)$$

В результате все основные зависимости, описывающие изгиб рассматриваемой балки, представлены в матричной форме: основное уравнение изгиба балки (21.1) в форме матричного дифференциального уравнения (21.3), а граничные условия (21.6) в виде двух матричных зависимостей (21.7).

Следует также заметить, что к решению уравнения типа (21.3) при граничных условиях (21.7) мы приходим при использовании метода прямых, метода Фурье, метода Капитоновича для решения некоторых многомерных задач теории упругости и строительной механики.

Таким образом, решение многих важных в практическом отношении краевых задач строительной механики корабля приводит к необходимости численного интегрирования матричного уравнения (21.3) при краевых условиях (21.7) для неизвестного вектора  $|\Psi(x)|$ .

Изложение ряда широко используемых в судостроении методов численного интегрирования уравнения (21.3) при краевых условиях (21.7) посвящены последующие параграфы настоящей главы.

## § 22. МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Под общим названием «метод начальных параметров» понимается группа методов, основанных на прямой замене краевой задачи для одномерного процесса рядом задач Коши, т. е. задач с начальными условиями.

Метод начальных параметров широко используется в строительной механике в виде различных модификаций, предложенных в разное время Коши, Клейшем, А. Н. Крыловым, Н. П. Пузаревским, Ш. Е. Микаэладзе, Н. И. Безуходовым, Н. К. Синтио, В. С. Чуваковским<sup>2</sup> и др.

Идея метода начальных параметров применительно к линейным задачам весьма проста: заданные граничные условия на одном из краев конструкции дополняются такими начальными параметрами (на этой стадии они являются неизвестными и задаются обычно в буквенном виде), чтобы образовавшиеся при этом совокупности начальных условий полностью определили бы деформированное состояние конструкции. Неизвестные начальные параметры, заданные на одном краю конструкции, проходят в процессе решения задачи Коши по всей конструкции и определяются из краевых условий на другом краю. Метод начальных параметров можно использовать и для решения нелинейных одномерных задач, если вместо в алгоритма процедура проб<sup>3</sup>.

Пусть некоторая краевая задача описывается дифференциальным уравнением (21.3) при краевых условиях (21.7). Порядок дифференциального уравнения (21.3), представляющего со-

бой систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка, определяется числом неизвестных функций  $\psi_i(x)$  — элементов вектора-столбца  $|\Psi(x)|$ .

Рассмотрим весь интервал  $(0, l)$  изменения  $x$  на участков точками  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = l$  и рассмотрим для близлежащих точек  $x_k$  и  $x_{k+1}$ . Если  $\Delta_k = x_{k+1} - x_k$  достаточно мало по сравнению с  $l$ , то изменения коэффициентов в матрицах  $[A(x)]$  и  $[B(x)]$  уравнения (21.3) можно пренебречь и положить

$$[A(x)] = [A(x_k)], [B(x)] = [B(x_k)] \text{ при } x_k < x < x_{k+1}. \quad (22.1)$$

Тогда поведение рассматриваемой системы в  $k$ -м интервале ( $x_k < x < x_{k+1}$ ) приближенно может быть описано вместо дифференциального уравнения (21.3) уравнением вида

$$[\Psi'(x)]^t = [A_k] [\Psi(x)] + [B_k], \quad (22.2)$$

где обозначено

$$[A_k] = [A(x_k)], [B_k] = [B(x_k)]. \quad (22.3)$$

Раскладывая функцию  $[\Psi(x)]$  в окрестности точки  $x = x_k$  в ряд Тейлора<sup>4</sup> и сохранив, например, первые пять членов ряда, можно записать следующее выражение для определения  $[\Psi(x)]$  в точке  $x = x_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} [\Psi_{k+1}] = & [\Psi_k] + \Delta_k [\Psi'_k] + \frac{\Delta_k^2}{2!} [\Psi''_k] + \\ & + \frac{\Delta_k^3}{3!} [\Psi'''_k] + \frac{\Delta_k^4}{4!} [\Psi^{(4)}_k]. \end{aligned} \quad (22.4)$$

Значения производных в правой части выражения (22.4) легко определять, если воспользоваться уравнением (22.2). Получим

$$\begin{aligned} [\Psi_k] = & [A_k] [\Psi_k] + [B_k]; \\ [\Psi'_k] = & [A_k] [A_k \Psi_k + B_k]; \\ [\Psi''_k] = & [A_k]^2 [A_k \Psi_k + B_k]; \\ [\Psi'''_k] = & [A_k]^3 [A_k \Psi_k + B_k]. \end{aligned} \quad (22.5)$$

Используя с помощью зависимостей (22.5) значения производных в правой части выражения (22.4), будем иметь

$$\begin{aligned} [\Psi_{k+1}] = & [\Psi_k] + \left[ \Delta_k J + \frac{\Delta_k^2}{2!} A_k + \frac{\Delta_k^3}{3!} A_k^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta_k^4}{4!} A_k^3 \right] (A_k \Psi_k + B_k), \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Используется один из старейших методов решения дифференциальных уравнений — метод разложения решения в ряд Тейлора. См., например, Н. С. Бахвалов [8, гл. VIII, § 1, с. 458].

<sup>2</sup> П. Ф. Павлович [80]; А. Н. Крылов. О расчете балок, лежащих на упругих основаниях. АН СССР, 1930; Ш. Е. Микаэладзе. Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений. М., ГГУИ, 1956; Н. И. Б. в. у. х. о. Некоторые обобщенные методы строительной механики: движение сплошных сред. — Сб. Использование 40-ти температур. Гостройиздат, 1939, № 2, с. 172—213; И. К. С. и т. д. Устойчивость склонов и склоно-изогнутых стержневых систем. Л., Стройиздат, 1956; В. С. Чуваковский. Изгибно-крутильные колебания гидромашинных балок с учетом деформаций сечения от первичных сил и распределенных нагрузок. — Изв. АН СССР, ОТИ. «Механика и машиностроение», 1959, № 3, с. 72—77; В. З. Власов, Н. И. Лебонтьев. Балки, лежащие на упругих основаниях. Ж.-Л., Гостехиздат, 1949.

<sup>3</sup> В. И. Федоров [116]; В. С. Чуваковский, О. И. Палик, В. Е. Старк [124].

или

$$[\bar{W}_{k+1}] = [\bar{A}_k] [\bar{W}_k] + [\bar{B}_k], \quad (22.6)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} [\bar{A}_k] &= \left[ I + \Delta_k A_k + \frac{\Delta_k^2}{2!} A_k^2 + \frac{\Delta_k^3}{3!} A_k^3 + \frac{\Delta_k^4}{4!} A_k^4 \right]; \\ [\bar{B}_k] &= \left[ \Delta_k B_k + \frac{\Delta_k^2}{2!} A_k B_k + \frac{\Delta_k^3}{3!} A_k^2 B_k \right] [B_k]. \end{aligned} \quad (22.7)$$

Уравнение (22.6) определяет значение вектора  $[\bar{W}(x)]$  в сечении  $x_{k+1}$  через значения внешней нагрузки и вектора  $[\bar{W}]$  в сечении  $x_k$ . С помощью этого уравнения, задаваясь значением  $[\bar{W}]_k$  в сечении  $x = 0$ , путем последовательного перехода от сечения к сечению в направлении возрастания номера  $k$  можно получить  $[\bar{W}]_n$  ( $n$  — номер сечения при  $x = l$ ) в виде линейной функции  $[\bar{W}]_k$  и параметров внешней нагрузки. Действительно, по основанию уравнения (22.6) переход от 0-го сечения к 1-му выражается зависимостью

$$[\bar{W}]_1 = [\bar{A}]_k [\bar{W}]_0 + [\bar{B}]_k, \quad (22.8)$$

переход же от 1-го сечения ко 2-му — зависимостью

$$[\bar{W}]_2 = [\bar{A}]_k [\bar{W}]_1 + [\bar{B}]_k, \quad (22.9)$$

или, если учсть зависимость (22.8),

$$[\bar{W}]_2 = [\bar{A}]_k [\bar{W}]_0 + [\bar{B}]_k, \quad (22.10)$$

также

$$[\bar{A}]_k = [\bar{A}]_0 [\bar{A}]_k; [\bar{B}]_k = [\bar{B}]_0 + [\bar{A}]_0 [\bar{B}]_0. \quad (22.11)$$

Обобщая результаты (22.11) на случай перехода от  $k$ -го к  $k + 1$ -му сечению, можно записать

$$[\bar{W}]_{k+1} = [\bar{A}]_k [\bar{W}]_k + [\bar{B}]_k. \quad (22.12)$$

где

$$\begin{aligned} [\bar{A}]_k &= [\bar{A}]_0 [\bar{A}]_{k-1}; \\ [\bar{B}]_k &= [\bar{A}]_0 [\bar{B}]_{k-1} + [\bar{B}]_k. \end{aligned} \quad (22.13)$$

На основании выражения (22.12)

$$[\bar{W}]_n = [\bar{A}]_{n-1} [\bar{W}]_0 + [\bar{B}]_{n-1}. \quad (22.14)$$

Равенство (22.14) позволяет определить значение матрицы  $[\bar{W}]$  при  $x = l$ , если известно значение этой же матрицы при  $x = 0$ . В связи с тем выражение (22.14) можно назвать уравнением перехода граничных условий с конца на конец интервала изменения  $x$ .

Значения входящих в уравнение (22.14) матриц  $[\bar{A}]_{n-1}$  и  $[\bar{B}]_{n-1}$  определяются по зависимости (22.13) путем последова-

тельного перехода от 0-й точки к 1-й и т. д. вплоть до  $n - 1$ -й точки. При этом в 0-й точке ( $x = 0$ ) следует принять

$$[\bar{A}]_0 = [\bar{A}]_0, [\bar{B}]_0 = [\bar{B}]_0. \quad (22.15)$$

При вычислении значений матриц  $[\bar{A}]_{n-1}$  и  $[\bar{B}]_{n-1}$  производится последовательное перемножение и сложение некоторых матриц; эти операции весьма просто выполняются на современных вычислительных машинах.

Зависимость (22.12) позволяет определить элементы матрицы  $[\bar{W}]$  в любой  $k$ -й точке по длине отрезка  $(0, l)$  в функции от параметров внешней нагрузки и значений матрицы  $[\bar{W}]$  при  $x = 0$ .

Для определения матрицы  $[\bar{W}]$ , нужно дополнить уравнение (22.14) граничными условиями рассматриваемой краевой задачи, которые следует представить в матричной форме (21.7).

Соответствующее решение этой системы уравнений позволяет определить значения векторов  $[\bar{W}]_k$  и  $[\bar{W}]_n$ .

Вхождя в зависимость (22.12) найденное значение вектора  $[\bar{W}]_k$ , сможем определить интересующие нас элементы вектора  $[\bar{W}]$  в любой  $k$ -й точке интервала  $(0, l)$ .

Рассмотрим простой пример, который позволит проследить всю методику применения наложенного выше приближенного метода.

Пример 1. Пусть требуется определить элементы жесткости балки (рис. 12) переменного сечения, загруженной поперечной нагрузкой, изменяющейся по линейному закону

$$q(x) = q_0 \left( \frac{x}{l} + \frac{l}{l} \right).$$

Жесткость балки также изменяется по линейному закону

$$I(x) = I_0 \left( \frac{x}{l} + \frac{l}{l} \right).$$

Левый конец балки шарнирно оперт на жесткую опору, а правый — жестко заделан

$$\begin{cases} \text{при } x = 0: w = 0, w' = 0; \\ \text{при } x = l: w = 0, w' = 0. \end{cases} \quad (22.16)$$

Решение. Ограничимся разбиением балки на поперечной нагрузкой на три равные участка (рис. 13). В пределах каждого участка, согласно наложенной выше процедуре метода, жесткость балки и ее нагрузка заменяются их постоянными значениями, от-

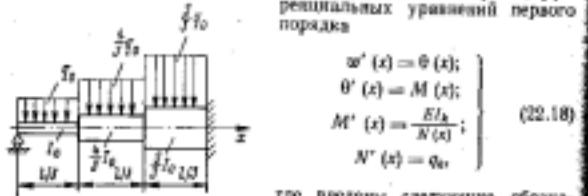
исчисленными к сечению на левом конце участка. При сравнительно малом числе участков разбиения можно значительно повысить точность решения, если вводить на каждом из участков средние значения жесткости балки и поперечной нагрузки, т. е. определять значения  $I_k$  и  $q_k$  по среднему сечению  $k$ -го участка балки.

В результате вместо исходной балки, изображенной на рис. 12, получаем балку ступенчатого постоянного сечения (см. рис. 13).

Тогда изгиб балки в  $k$ -м интервале ( $x_k < x < x_{k+1}$ ) будет описываться следующим дифференциальным уравнением:

$$EI\vartheta''(x) = q_k, \quad (22.17)$$

которое можно представить в виде совокупности четырех дифференциальных уравнений первого порядка



$$\begin{cases} \vartheta'(x) = \theta(x); \\ \theta'(x) = M(x); \\ M'(x) = \frac{EI_k}{N(x)}; \\ N'(x) = q_k, \end{cases} \quad (22.18)$$

где введены следующие обозначения:  $\theta(x)$  — угол поворота сечения балки;  $M(x)$  и  $N(x)$  — соответственно изгибающий момент и перерезывающая сила, или в матричной форме

$$[\bar{W}(x)]' = [\bar{A}_k] [\bar{W}(x)] + [\bar{B}_k], \quad (22.19)$$

где

$$[\bar{W}(x)] = \begin{pmatrix} \theta(x) \\ \vartheta(x) \\ M(x) \\ N(x) \end{pmatrix}, \quad [\bar{A}_k] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\bar{B}_k] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_k \end{pmatrix}. \quad (22.20)$$

Располагая значениями матриц  $[\bar{A}_k]$  и  $[\bar{B}_k]$ , с помощью формул (22.7) можно определить значение матриц  $[\bar{A}_k]$  и  $[\bar{B}_k]$ , которые входят в уравнение (22.6). Однако в нашем случае записать систему уравнений (22.6), а тем самым и найти матрицы  $[\bar{A}_k]$  и  $[\bar{B}_k]$ , можно значительно проще, если воспользоваться зависимостями метода начальных параметров, которые позволяют определить элементы изгиба балки  $\vartheta$ ,  $\theta$ ,  $M$  и  $N$  в  $k+1$ -

сечении по значениям тех же величин в внешней нагрузки в  $k$ -м сечении,

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= q_k \frac{\Delta_k^2}{2EI_k} + N_k \frac{\Delta_k^3}{2EI_k} + M_k \frac{\Delta_k^2}{2EI_k} + \theta_k \Delta_k + w_k, \\ \theta_{k+1} &= q_k \frac{\Delta_k^3}{EI_k} + N_k \frac{\Delta_k^2}{2EI_k} + M_k \frac{\Delta_k}{2EI_k} + \theta_k; \\ M_{k+1} &= q_k \frac{\Delta_k^2}{2} + N_k \Delta_k + M_k; \\ N_{k+1} &= q_k \Delta_k + N_k. \end{aligned} \quad (22.21)$$

или, используя матричную форму записи,

$$[\bar{W}_{k+1}] = [\bar{A}_k] [\bar{W}_k] + [\bar{B}_k], \quad (22.22)$$

где

$$[\bar{W}_k] = \begin{pmatrix} \bar{w}_k \\ \bar{\theta}_k \\ \bar{M}_k \\ \bar{N}_k \end{pmatrix}, \quad \bar{w}_k = w_k, \quad \bar{\theta}_k = \Delta_k \theta_k, \quad \bar{M}_k = \Delta_k^2 M_k; \quad \bar{N}_k = \Delta_k^2 N_k, \quad \bar{q}_k = \Delta_k^2 q_k. \quad (22.23)$$

$$[\bar{A}_k] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2EI_k} & \frac{1}{2EI_k} \\ 0 & 1 & \frac{1}{EI_k} & \frac{1}{2EI_k} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [\bar{B}_k] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2EI_k} \\ \frac{1}{2EI_k} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \bar{q}_k. \quad (22.24)$$

По формулам (22.24) подсчитаем значения матриц  $[\bar{A}_k]$  и  $[\bar{B}_k]$  для каждого из трех участков балки.

Далее с помощью рекуррентных зависимостей (22.13) последовательно определяются числовые значения матриц  $[\bar{A}_k]$  и  $[\bar{B}_k]$  в сечениях  $k = 0, 1, 2$  по длине балки.

Уравнение переноса граничных условий (22.14) с учетом найденных значений для матриц  $[\bar{A}_k]$  и  $[\bar{B}_k]$  примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{w}_0 \\ \bar{\theta}_0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{N}_0 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{157}{40EI_0} & \frac{419}{20EI_0} \\ 0 & 1 & \frac{47}{20EI_0} & \frac{25}{8EI_0} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_0 \\ \bar{\theta}_0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{N}_0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{67}{240EI_0} \\ \frac{13}{40EI_0} \\ \frac{16}{3} \\ 4 \end{bmatrix} \bar{q}_0. \end{aligned} \quad (22.25)$$

Если учесть, что согласно граничным условиям (22.16)

$$\bar{B}_3 = 0; \bar{M}_3 = 0; \bar{N}_3 = 0; \bar{\delta}_3 = 0,$$

то из матричного уравнения (22.25) можно получить следующие соотношения между оставшимися неизвестными элементами изгиба балки на левом и правом концах балки

$$\begin{aligned} 0 &= 3\bar{\delta}_3 + \frac{493q_0}{130E_1} + \frac{617}{245E_1}\bar{q}_3; \\ 0 &= \bar{\delta}_3 + \frac{25}{8}\frac{\bar{N}_3}{E_1} + \frac{13}{4}\frac{\bar{q}_3}{E_1}; \\ \bar{M}_3 &= 3\bar{N}_3 + \frac{16}{3}\bar{q}_3; \\ \bar{N}_3 &= \bar{N}_0 + 4\bar{q}_3. \end{aligned} \quad (22.26)$$

Решение полученной системы дает

$$\bar{\delta}_3 = 0.65 \frac{\bar{q}_3}{E_1}; \bar{N}_3 = -1.25\bar{q}_3; \bar{M}_3 = 1.59\bar{q}_3; \bar{N}_0 = 2.75\bar{q}_3, \quad (22.27)$$

откуда, если учесть соотношение (22.23),

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 0.024 \frac{q_0^R}{E_1}; N_0 = -0.416q_0; M_0 = 0.177q_0^R; \\ N_3 &= 0.917q_3. \end{aligned} \quad (22.28)$$

Итак, все составляющие матрицы  $[W]_0$  или известны. Известны и значения матриц  $[A]_0$  и  $[B]_0$ . Тогда с помощью зависимости (22.12) при желании можем определить интересующие нас элементы изгиба в промежуточных сечениях по длине балки.

Приведенный числовый пример наглядно демонстрирует ясность механического содержания и простоту расчетного алгоритма обобщенного метода начальных параметров.

Не представляют труда составить машинную программу этого метода<sup>1</sup>.

Наличие такой программы позволяет сравнительно просто решать весьма широкий класс задач строительной механики корабля, о которых уже упоминалось во введении к настоящей главе.

В заключение приведем оценку погрешности изложенного метода. Метод основан на разложении решения в ряд Тейлора (см. формулу (22.4)). Погрешность в определении решения при сохранении в ряду Тейлора производных до четвертого порядка включительно имеет порядок остаточного члена, т. е.  $O(\Delta^5)$ . Если далее погрешность от замены значений матриц  $[A(x)]$  и  $[B(x)]$  в пределах каждого отрезка  $\Delta = x_{k+1} - x_k$  некоторыми

<sup>1</sup> Сегодня такие программы имеются во многих судостроительных организациях, связанных с расчетами прочности судовых конструкций.

постоянными осредненными матрицами (см. формулу (22.1)) одниной величиной  $O(\Delta^{-1})$ , то можно полагать, что величина погрешности в определении узловых значений компонентов вектора  $[W]$  имеет порядок  $O(\Delta^4)$ .

Данная оценка характеризует погрешность, связанную с сокращением в решении (22.4) ограниченного числа членов ряда Тейлора. При этом предполагалось, что все вычислительные операции в рамках используемого алгоритма выполняются абсолютно точно (без округления чисел). Но погрешности округления незбежны, и поэтому, помимо оценки погрешности поставленной задачи, погрешности собственно метода исследования, возникает необходимость анализа устойчивости алгоритма, т. е. степени чувствительности окончательных результатов к этим погрешностям. Неустойчивый алгоритм может привести к совершенно неверному результату, даже если он абсолютно точек в математическом смысле, а исходная задача хорошо и достаточно обусловлена.

Приведенный выше алгоритм не всегда обладает удовлетворительной устойчивостью, что не позволяет использовать его для решения ряда важных задач строительной механики корабля. Дело в том, что в основе этого метода лежит прием замены исходной краевой задачи совокупностью задач Коши. Решение же отдельных задач Коши с увеличением независимой переменной  $x$  сильно варьируют. Это приводят к тому, что искомые элементы изгиба определяются через малую разность близких величин и добиться удовлетворительной точности числовых расчетов становится затруднительным<sup>1</sup>.

Выйти из этого положения можно было бы путем увеличения числа знаков цифр в мантиссе числа. К сожалению, возможности используемых в настоящее время электронных цифровых машин ограничены: большинство из них ведет числовые расчеты при сохранении в мантиссе числа лишь 8–9 десятичных знаков. Такая точность часто оказывается недостаточной.

Заметим, что слабые стороны метода начальных параметров проявляются тем сильнее, чем слабее влияние краевых условий закрепления одного конца балки на поведение искомой функции в районе другого конца. Следовательно, при расчете, например, балки на упругом основании с помощью обобщенного метода начальных параметров увеличение ее длины или жесткости упругого основания сопровождается ростом погрешности в числовых результатах. К счастью, именно для этих задач, ряд методов, которые будут изложены в дальнейшем, обеспечивают хорошую числовую устойчивость алгоритма.

<sup>1</sup> Использование традиционных методов начальных параметров, а также приближенные оценки зонтики области использования этого метода приведены в монографии В. С. Чувилковского [127, с. 180–184].

## § 28. ПОГРЕШНОСТЬ И ДОСТОВЕРНОСТЬ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Результаты использования численных методов должны быть проверяваны с целью проверки их достоверности и точности.

Причины возможных погрешностей много: неадекватность главных свойств физической модели и исследуемого объекта (конструкции), введение дополнительных упрощающих гипотез при рассмотрении математической модели, приближенность выбранного метода исследования математической модели и, наконец, неточность задания исходных данных и вычислений при числовых операциях в ЭВМ погрешности из-за округления значащих цифр.

Большинство из указанных причин полностью устраивать нельзя, но всегда можно с помощью определенных дополнительных мер снизить их отрицательные последствия.

Очень важно на каждом этапе расчета распределять оценкой его погрешности. В самом деле, не имеет особого смысла продолжать исследования, если физическая модель не достаточно точно отражает интересующие нас свойства моделируемого объекта, если математическая модель не в состоянии с требуемой строгостью описать поведение физической модели или если численный алгоритм для исследования математической модели, не обладает хорошей устойчивостью.

Оценку погрешностей при построении физической и математической моделей можно произвести путем сопоставления полученных результатов с идентичными результатами для уточненных моделей. На этой стадии расчета многое зависит от квалификации и опыта расчетчика, от его умения выделить в моделируемом объекте главные черты интересующего нас явления с целью поискающего их включения в физическую модель.

Обычно термин «устойчивость» в численных расчетах связывают с понятием устойчивости алгоритма для исследования математической модели.

Можно расширить это понятие и трактовать устойчивость процесса, какого-то явления как свойство сохранения при этом всех существенных черт при малых отклонениях исходных данных. Тогда, по образному выражению В. С. Чуваковского [127, с. 27], «устойчивость выражается тезисом: почти одинаковое происхождение сопутствует почти полное совпадение всех интересующих нас в данном исследовании событий».

Такая трактовка понятия устойчивости позволяет воспользоваться им для оценки качества выполняемых операций на каждом из этапов численного расчета и тем самым повысить достоверность, т. е. надежность расчета [78].

Возвращаясь к построению физической и математической моделей, очень важно заметить, что они должны обладать такой же устойчивостью, т. е. степенью чувствительности на изменение

своих входных данных, какой обладает и моделируемый объект.

Определить, устойчив ли не устойчив исследуемый объект, как правило, не представляет особого труда. Неразрезная балка, лежащая на жестких промежуточных опорах и загруженная поперечной нагрузкой, является объектом с хорошей устойчивостью; здесь малые изменения нагрузки и условий закрепления (исходные данные) не приводят к сколько-нибудь значительным изменениям прогиба (ходовые данные).

Заменим теперь жесткие опоры домкратами и попытаемся создать в каждом домкрате такие усилия, действия которых совместно с поперечной нагрузкой привели бы к куполам прогибам в местах расположения домкратов. Легко видеть, что при достаточно большом числе пролетов малые изменения усилий в домкратах (исходные данные) вызывают значительные изменения в прогибах. Объект в этом смысле явно неустойчив, и раздовать этот процесс в эксперименте будет крайне затруднительно<sup>1</sup>.

Требование, чтобы физическая модель обладала той же устойчивостью, что и сам моделируемый объект, обычно легко выполнимо.

Значительно сложнее обстоит дело с математической моделью. Поскольку исходная математическая модель, адекватно отображающая все главные свойства физической модели, часто оказывается чудовищной для построения алгоритма, обычно переходит к преобразованной математической модели. Например, исходную краевую задачу заменяют решением ряда задач Коши, или от исходных дифференциальных уравнений переходят к алгебраическим, используя метод конечных разностей.

При наличии таких замен и переходов нужно следить за склонностью схем (например, при уменьшении шага в методе краевых разностей должен быть обеспечен переход к исходным дифференциальным уравнениям) и производить оценку погрешности дискретизации, связанной с погрешностью собственно метода (замены непрерывного объекта с бесконечным числом степеней свободы некоторой математической моделью с конечным числом степеней).

Последнее может носить иной характер, как, например, в методе конечных элементов, и иной при использовании вариационных методов, когда сохраняется в разложениях для исковых функций ограниченное число варируемых параметров.

Пусть исходные данные задачи определяются в пространстве исходных данных точку  $x_1$ . Система дифференциальных уравнений и краевых условий математической модели — своего рода некоторый линейный оператор  $L(x)$  — однозначно (предполагается однозначность решения) преобразует точку  $x_1$  в точку  $y_1$ . Пространства исковых результатов. Координата  $y_1$  есть инте-

<sup>1</sup> Пример замечаний из автографа В. С. Чуваковского [127, с. 78].

ресурсующий нас результат, а совокупность  $x_1$  и оператора  $L(x)$  представляет исходную математическую модель физической модели.

Точная расчетная схема входит эквивалентно оператору  $L(x)$ , а приближенная схема, основная, например, на замене дифференциальных зависимостей их конечно-разностными отношениями, дает уже некоторый оператор  $L^k(x)$ , преобразующий значение  $x_1$  в  $y_1$ , а в некоторую близкую к ней точку  $y^k = y_1 + \Delta y_{\text{дискр}}$ . Здесь  $\Delta y_{\text{дискр}}$  определяет погрешность дискретизации.

Приемлемость принятого для исследования конкретного приближенного решения оценивается полностью величиной  $\Delta y_{\text{дискр}}$ . Если получаемая величина погрешности дискретизации находится за пределы допустимых значений, то вводят уточнение в оператор  $L^k(x)$ . Например, увеличивают шаг в конечно-разностных схемах или размер элементов в методе конечных элементов.

Погрешность дискретизации, дополненная погрешностями от замены объекта его физической моделью, точно определена бы погрешность расчета, если бы все вычислительные операции, включая задание исходных данных, могли выполняться абсолютно точно. В практических же расчетах, выполняемых на ЭВМ, происходит округление значащих цифр, в исходные данные задаются с некоторой погрешностью  $\delta$ , а потому вводится погрешность, хорошо и легко обусловленной задачи, используемой и пересматриваемой алгоритмом (алгоритмом) решения задачи. Метод уточнения, в задаче хорошо обоснованного в точке  $x_1$ , если в некоторой области в окрестности точки преобразования  $L(x_1 + \Delta x)$  дает точку  $y_1 = y_1 + \Delta y$ , лежащую в пределах допустимых малой области в окрестности точки  $y_1$ . Если  $y_1$  выходит за пределы допустимых значений  $\epsilon$ , то задача плохо обусловлена, а ее алгоритм обладает слабой числовой устойчивостью (применительно к данной задаче).

Погрешность, связанная с якобианом исходных данных и округлением значащих цифр при выполнении вычислительных операций в машине, принято называть неопределенностью округления.

Полная погрешность результата расчета конструкции складывается из погрешности  $\Delta y_{\text{дискр}}$ , связанной с отсутствием строгой адекватности между конструкцией и ее физической моделью, погрешности дискретизации  $\Delta y_{\text{дискр}}$  и погрешности округления  $\Delta y_{\text{окр}}$ .

$$\Delta y = \Delta y_{\text{дискр}} + \Delta y_{\text{окр}} + \Delta y_{\text{погр}}.$$

Увеличением числа конечных элементов мы снижаем ошибку дискретизации, но одновременно увеличиваем ошибку округления. Неодуманное увеличение числа конечных элементов может не уменьшить, а увеличить погрешность в результатах расчета.

Возможность достаточно строгого определения  $\Delta y$  обеспечивает надежность расчета. К сожалению, при расчете сложных инженерных конструкций весьма трудно определить значения отдельных составляющих  $\Delta y$ . В ряде случаев для оценки  $\Delta y$  можно рекомендовать проведение такого численного эксперимента: незначительно параллельно параллельно исходными данными  $\delta$ , смотря, как при этом изменится результат счета (а). Анализ получаемой при этом зависимости в  $\{\delta\}$ , если учесть пределы возможного разброса исходных данных  $\delta$  и допустимую погрешность в результатах, позволяет судить о степени устойчивости схемы и о ее пригодности для данного расчета.

Для повышения уверенности в результатах расчета сложных и ответственных конструкций рекомендуется выполнять расчеты с помощью разных методов. При этом очень полезно уметь сочетание строгих численных методов с приближенными.

Приближенные методы позволяют в первом приближении открыть область ожидаемого результата и тем самым осуществить, хотя и грубый, контроль над результатами расчета по уточненным численным методам.

В заключение необходимо подчеркнуть, что надежность расчета не может гарантироваться строгим математическим аппаратом. Она не в меньшей мере зависит от квалификации, опыта и интуиции расчетчика, от его умения понять основные черты в построении изучаемой конструкции и его способности выбрать наиболее подходящий для данной задачи математический метод.

#### § 24. МЕТОД ПРОГОННИ<sup>1</sup>

Выше отмечалось, что при использовании метода начальных параметров наблюдается для определенного класса одномерных задач слабая устойчивость численного алгоритма. В связи с этим представляется уместным привести еще один численный метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами — метод прогонки [34; 124, с. 59; 10], позволяющий получить устойчивый расчетный алгоритм как раз в той области, где метод начальных параметров работает плохо.

Изложим существо метода прогонки для численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений

<sup>1</sup> Идея метода применительно к решению уравнения второго порядка была впервые в работе [34], которая, однако, долгое время оставалась незвестной. Практически одновременно появился монография [124], в которой ее авторы (В. С. Чуваковская, О. М. Поляк и В. Е. Смирнов) изложили новый численный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений — метод прогонки с отложением. Метод сразу же получил широкое распространение в расчетах прочности конструкций. Дальнейшие исследования [10] показали, что метод прогонки в методе начальных параметров достаточно блекни, хотя их авторы исходили из разных физических представлений.

порядка  $2m$  с двуточечными граничными условиями. При этом будем придерживаться трактовки метода, содержащейся в статье В. Л. Бадермана [10].

Система уравнений может быть записана в матричной форме (24.3)

$$[\mathbf{W}(x)]' = [\mathbf{A}(x)] [\mathbf{W}(x)] + [\mathbf{B}(x)], \quad (24.4)$$

где  $[\mathbf{W}(x)]$  — вектор из  $2m$  неизвестных функций  $x$ ;  $[\mathbf{A}(x)]$  — квадратная матрица порядка  $2m$ ;  $[\mathbf{B}(x)]$  — вектор-столбец размером  $2m$ .

Границные условия при  $x = 0$  и  $x = l$  (по  $m$  условий на каждой границе) можно представить в форме (24.1)

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = 0: [\mathbf{C}_1(0)] [\mathbf{W}(0)] = [\mathbf{D}_1(0)]; \\ \text{при } x = l: [\mathbf{C}_2(l)] [\mathbf{W}(l)] = [\mathbf{D}_2(l)], \end{array} \right\} \quad (24.2)$$

где  $[\mathbf{C}_1(0)]$  и  $[\mathbf{C}_2(l)]$  — прямоугольные матрицы размера  $m \times 2m$ ;  $[\mathbf{D}_1(0)]$  и  $[\mathbf{D}_2(l)]$  — векторы-столбцы из  $m$  элементов.

Разобьем вектор  $[\mathbf{W}]$  на два вектора по  $m$  функций в каждом

$$[\mathbf{W}(x)] = [\mathbf{W}_1(x) \ \mathbf{W}_2(x)]. \quad (24.3)$$

Заметим, что не всегда безразлично, в какой из двух векторов (24.3) включить ту или иную исходную функцию. Ответ на этот вопрос будет дан в ходе дальнейшего изложения.

Уравнение (24.1) можно переписать в виде системы двух матричных уравнений

$$\left. \begin{array}{l} [\mathbf{W}_1]' = [\mathbf{A}_{11}] [\mathbf{W}_1] + [\mathbf{A}_{12}] [\mathbf{W}_2] + [\mathbf{B}_1]; \\ [\mathbf{W}_2]' = [\mathbf{A}_{21}] [\mathbf{W}_1] + [\mathbf{A}_{22}] [\mathbf{W}_2] + [\mathbf{B}_2], \end{array} \right\} \quad (24.4)$$

где  $[\mathbf{A}_{ij}]$  — квадратные блоки размера  $m \times m$  в матрице  $[\mathbf{A}]$ ;  $[\mathbf{B}_1]$  и  $[\mathbf{B}_2]$  — матрицы-столбцы из  $m$  элементов в матрице  $[\mathbf{B}]$ .

Границное условие (24.2) при  $x = 0$  можно представить так:

$$[\mathbf{C}_{11}(0) \ \mathbf{C}_{12}(0)] \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1(0) \\ \mathbf{W}_2(0) \end{pmatrix} = [\mathbf{D}_1(0)],$$

откуда при  $x = 0$

$$[\mathbf{W}_1(0)] = [\mathbf{Q}_1] [\mathbf{W}_2(0)] + [\mathbf{R}_0], \quad (24.5)$$

где  $[\mathbf{C}_{11}(0)] \equiv [\mathbf{C}_{12}(0)]$  — квадратные блоки матрицы  $[\mathbf{C}_1(0)]$ :

$$\left. \begin{array}{l} [\mathbf{Q}_1] = -[\mathbf{C}_{11}(0)]^{-1} [\mathbf{C}_{12}(0)]; \\ [\mathbf{R}_0] = [\mathbf{C}_{11}(0)]^{-1} [\mathbf{D}_1(0)]. \end{array} \right\} \quad (24.6)$$

Предполагается, что матрица  $[\mathbf{C}_{11}]$  — косоединичная.

Решение уравнений (24.4), тождественно удовлетворяющее граничным условиям (24.5) при  $x = 0$ , содержит  $m$  произвольных постоянных и может быть представлено в виде

$$[\mathbf{W}] = [\mathbf{W}_1] + \mathbf{C}_1 [\mathbf{W}^{(1)}] + \dots + \mathbf{C}_m [\mathbf{W}^{(m)}]. \quad (24.7)$$

Здесь  $[\mathbf{W}_i(x)]$  — частное решение системы (24.4), удовлетворяющее условию (24.5);  $[\mathbf{W}^{(i)}] = [\mathbf{W}]^{(i)} [\mathbf{W}_1^{(i)}]$  — линейно независимые решения однородной системы (24.4)

$$\left. \begin{array}{l} [\mathbf{W}_1^{(i)}]' = -[\mathbf{A}_{11}] [\mathbf{W}_1^{(i)}] + [\mathbf{A}_{12}] [\mathbf{W}_2^{(i)}]; \\ [\mathbf{W}_2^{(i)}]' = -[\mathbf{A}_{21}] [\mathbf{W}_1^{(i)}] + [\mathbf{A}_{22}] [\mathbf{W}_2^{(i)}], \end{array} \right\} \quad (24.8)$$

удовлетворяющие однородным граничным условиям (24.5)

$$[\mathbf{W}_1^{(i)}(0)] = [\mathbf{Q}_i] [\mathbf{W}_2^{(i)}(0)]. \quad (24.9)$$

Общее решение (24.7) системы (24.1) можно подчинять и дополнительным линейным соотношениям в каждой точке  $x$ , которые можно записать в виде

$$[\mathbf{W}_1(x)] = [\mathbf{Q}(x)] [\mathbf{W}_2(x)] + [\mathbf{R}(x)], \quad (24.10)$$

где  $[\mathbf{Q}(x)]$  и  $[\mathbf{R}(x)]$  — неизвестные матрицы, имеющие вид

$$[\mathbf{Q}(x)] = \begin{bmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) & \dots & q_{1m}(x) \\ q_{21}(x) & q_{22}(x) & \dots & q_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1}(x) & q_{m2}(x) & \dots & q_{mm}(x) \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{R}(x)] = \begin{bmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \\ \vdots \\ r_m(x) \end{bmatrix}. \quad (24.11)$$

Внося  $x = 0$  в формулу (24.10) и сопоставляя полученные выражение с (24.5), получим начальные значения для функций  $[\mathbf{Q}(x)]$  и  $[\mathbf{R}(x)]$

$$[\mathbf{Q}(0)] = [\mathbf{Q}_0]; \quad [\mathbf{R}(0)] = [\mathbf{R}_0]. \quad (24.12)$$

Переходим к выводу дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций  $[\mathbf{Q}(x)]$  и  $[\mathbf{R}(x)]$ .

Естественно, что частное решение  $[\mathbf{W}^{(i)}]$  должно удовлетворять однородному уравнению

$$[\mathbf{W}^{(i)}]' = [\mathbf{Q}(x)] [\mathbf{W}_2^{(i)}]. \quad (24.13)$$

Дифференцируя уравнение (24.13) по  $x$ , получаем

$$[\mathbf{W}^{(i)}]'' = [\mathbf{Q}(x)]' [\mathbf{W}_2^{(i)}] + [\mathbf{Q}(x)] [\mathbf{W}_2^{(i)}]'. \quad (24.14)$$

Исклучим из выражения (24.14) с помощью системы (24.8) производные функции  $[\mathbf{W}_1^{(i)}]$  и  $[\mathbf{W}_2^{(i)}]$ , а затем, используя зависимость (24.13), вектор  $[\mathbf{W}_1^{(i)}]$ . В результате получаем

$$[\mathbf{S}(x)] [\mathbf{W}_2^{(i)}](x) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m), \quad (24.15)$$

где

$$\left. \begin{array}{l} [\mathbf{S}(x)] = [\mathbf{Q}(x)]' + Q [\mathbf{A}_{21}] Q + A_{22} - [A_{11}] Q = \\ = -[A_{12}]. \end{array} \right\} \quad (24.16)$$

Так как матрицы  $[\mathbf{W}_2^{(i)}]$  при разных значениях  $i$  линейно независимы, выполнение равенства (24.15) возможно лишь при условии  $[\mathbf{S}(x)] = 0$ . Отсюда, если учесть выражение (24.16),

получим искомое дифференциальное уравнение для определения неизвестной матрицы  $[Q(x)]$

$$\begin{aligned} [Q(x)]' = & -[Q(x)] \{A_{11}(x) Q(x) + A_{12}(x)\} + \\ & + [A_{21}(x) Q(x)] + [A_{22}(x)]. \end{aligned} \quad (24.17)$$

Матричное уравнение (24.17) может быть проинтегрировано по  $x$  от 0 до  $I$  любым численным методом при начальном условии  $[Q(0)] = [Q_0]$ .

Прежде всего при интегрировании уравнения (24.17) воспользуемся методом Эйлера, согласно которому переход от  $k$ -го сечения по длине балки к последующему  $k+1$ -му осуществляется матричной зависимостью вида

$$\begin{aligned} [Q(x_{k+1})] = & -[[Q(x_k)] \{A_{11}(x_k) Q(x_k) + A_{12}(x_k)\} - \\ & - A_{21}(x_k) Q(x_k) - A_{22}(x_k)] (x_{k+1} - x_k) + [Q(x_k)]. \end{aligned} \quad (24.18)$$

Уравнение для определения матрицы  $[R(x)]$  получим, если продифференцируем по  $x$  выражение (24.10) и полученным выражением с помощью зависимостей (24.4), (24.17), (24.10) исключим  $[W_1(x)]'$ ,  $[W_2(x)]'$ ,  $[Q(x)]'$  и  $[W_1(x)]$ . В результате будем иметь

$$\begin{aligned} [R(x)]' = & [A_{11}(x) - Q(x) A_{21}(x)] [R(x)] + \\ & + [B_1(x)] - [Q(x)] [B_2(x)]. \end{aligned} \quad (24.19)$$

Так как функция  $[Q(x)]$  найдена выше, уравнение (24.19) может быть проинтегрировано по  $x$  от 0 до  $I$  при начальном условии  $[R(0)] = [R_0]$  любым численным методом.

Итак, функции  $[Q(x)]$  и  $[R(x)]$  можно считать теперь известными. Внося их значения при  $x = I$  в зависимость (24.10), находим

$$[W_1(I)] = [Q(I)] [W_2(I)] + [R(I)]. \quad (24.20)$$

Последнюю зависимость как бы переводят граничные условия с левого конца интервала  $x = 0$  на правый  $x = I$ .

Дополнение уравнение (24.20) граничными условиями при  $x = I$  (см. формулы (24.2)), получаем необходимую систему уравнений для определения  $[W_1(I)]$  и  $[W_2(I)]$ .

Зная  $[W(I)]$ , можно было бы проинтегрировать исходное уравнение (24.1) в направлении от  $x = I$  к  $x = 0$  (так называемая обратная прогонка). Однако такой путь пересонализации, так как он сует быстро возрастающих решений снова может привести к потерии точности.

Целесообразнее поступить несколько иначе: проинтегрировать одно из уравнений системы (24.4) с предварительным исключением из него с помощью зависимости (24.10)  $[W_1(x)]$  либо  $[W_2(x)]$ .

Исключим, например, из второго уравнения системы (24.4) функцию  $[W_1(x)]$ . Получим

$$\begin{aligned} [W_2(x)]' = & \{A_{11}(x) Q(x) + A_{12}(x)\} [W_2(x)] + \\ & + [A_{21}(x)] [R(x)] + [B_2(x)]. \end{aligned} \quad (24.21)$$

Интегрируя (24.21) по  $x$  от  $x = I$  в направлении  $x = 0$  при известном значении  $[W_2(I)]$ , находим  $[W_2(x)]$ .

Внося далее функцию  $[W_2(x)]$  в зависимость (24.10), сможем определить и функцию  $[W_1(x)]$ . После чего можно считать, что элементы матрицы  $[W(x)]$  полностью определены.

Остается теперь на высказанных физическом смысле функций  $[Q(x)]$  и  $[R(x)]$ . Они зависят от выбора векторов  $[W_1]$  и  $[W_2]$ .

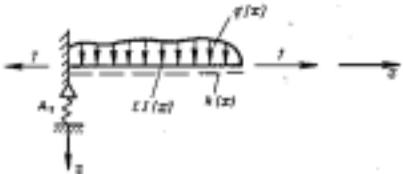


Рис. 14. Балка, лежащая на сплошном упругом основании в нагрузке единичной нагрузкой  $q(x)$  в расстоянии  $c$  от оси симметрии  $T$ .

В задачах строительной механики неизвестные обычно делятся на две группы — перемещения (и неизвестных) и силовые факторы (также и неизвестных). Если под  $[W_1]$  понимать столбец перемещений, а под  $[W_2]$  — столбец силовых факторов, то, как видно из формулы (24.10),  $[Q(x)]$  представляет матрицу податливостей части системы, расположенной слева от текущего сечения  $x = c$ , при действии в этом сечении силовых факторов. При этом  $[R(x)]$  определяет перемещения той же части системы в сечении  $x = c$  от внешней нагрузки, приложенной слева от сечения  $x = c$ . Наоборот, если  $[W_1]$  включает силовые факторы, а  $[W_2]$  — перемещения, то  $[Q(x)]$  будет матрицей жесткостей, а  $[R(x)]$  определят усилия, которые возникают в закрепленном сечении  $x = c$  от действия внешней нагрузки, приложенной слева от сечения.

Поясним вышеизложенное на примере изгиба балки переменного сечения, лежащей на сплошном упругом основании (рис. 14).

Включим в вектор  $[W_1]$  перемещения  $\omega(x)$  и  $\theta(x)$ , а в вектор  $[W_2]$  — усилия  $M(x)$  и  $N(x)$ . Тогда, как это следует непосредственно из формулы (24.10),

$$\begin{aligned} \omega(x) = & q_{11}(c) M(c) + q_{12}(c) N(c) + r_1(c); \\ \theta(x) = & q_{21}(c) M(c) + q_{22}(c) N(c) + r_2(c). \end{aligned} \quad (24.22)$$

и функцию  $[Q(x)]$  можно рассматривать как матрицу коэффициентов податливости левой части балки ( $0 < x < c$ ) от действия единичных усилий, приложенных в сечении  $x = c$ . Так, элемент матрицы  $q_{11}(c)$  численно равен прогибу  $w(c)$  конца левой отсеченной части балки ( $0 < x < c$ ) от действия единичного положительного момента, приложенного в сечении  $x = c$  (рис. 15, а).

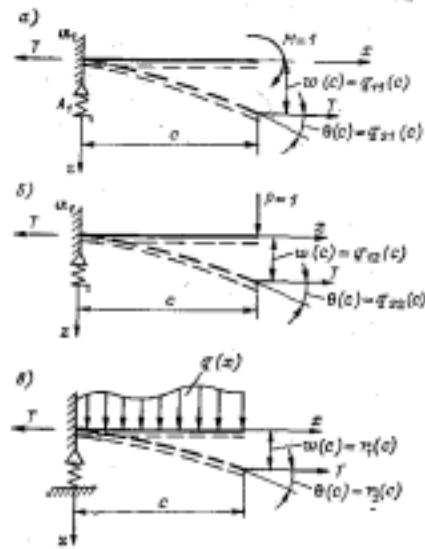


Рис. 15. К раскрытию физического смысла матриц  $[Q(x)]$  и  $[R(x)]$ : а, б — к раскрытию физического смысла элементов матрицы  $[Q(x)]$ ; в — то же для элементов матрицы  $[R(x)]$ .

Величиной  $[R(c)]$  определяется перемещение правого конца левой отсеченной части балки ( $0 < x < c$ ) от внешней нагрузки  $q(x)$ , приложенной в интервале  $0 < x < c$ . Например,  $r_2(c)$  — второй элемент вектора-столбца  $[R(c)]$  — есть угол поворота правого конца левой части балки ( $0 < x < c$ ) от действующей на нее внешней нагрузки (рис. 15, в).

Если бы мы включили в состав вектора  $[W_1]$  усилия, а в состав  $[W_2]$  перемещения, то матрица  $[Q(x)]$  характеризовалась бы

матрицу жесткостей правого конца левой отсеченной части балки ( $0 < x < c$ ) на действие единичных смещений сечения разреза  $x = c$ . Величиной же  $[R(c)]$  характеризовались бы усилия  $M(c)$  и  $N(c)$ , которые возникали в сечении  $x = c$  (при условии полного его закрепления в отношении перемещений) от действия внешней нагрузки  $q(x)$ , приложенной слева от  $x = c$ .

Рациональный выбор того или иного варианта распределения элементов изгиба по векторам  $[W_1]$  и  $[W_2]$  зависит от характера граничных условий при  $x = 0$ . Если при  $x = 0$  перемещения равны нулю ( $w = \theta = 0$ ), то в состав  $[W_1]$  необходимо включить эти перемещения. Включение в этом случае в состав вектора  $[W_1]$  усилий привело бы к тому, что элементы матрицы жесткости по мере приближения сечения  $x = c$  к левой опоре сильно бы возрастали, а при  $x = 0$  вообще оказались бы равными бесконечности.

Если же при  $x = 0$  усилия равны нулю, ( $N = M = 0$ ), то в  $[W_1]$  следует включать усилия, а в  $[W_2]$  — перемещения. Функция  $[Q(x)]$ , играющая в этом случае роль матрицы жесткости, с уменьшением  $x$  убывает, а при  $x = 0$  становится равной нулю.

Тогда же, когда, например, при  $x = 0$   $w = M = 0$ , именно последние величины и следует включать в состав вектора  $[W_1]$ . Наконец, если левое сечение балки оперто на упругую опору и одновременно упруго заделано, то в качестве элементов вектора может быть выбрана любая из следующих комбинаций: ( $w, \theta$ ), ( $w, M$ ), ( $N, M$ ), ( $0, N$ ).

Иногда целесообразно разбить балку по ее длине на ряд участков и в пределах каждого из них, ориентируясь в основном на возможность получения достаточно ограниченных значений функции  $Q(x)$ , вводить различные варианты состава вектора  $[W_1]$ .

С первого взгляда метод прогонок может показаться достаточно сложным и громоздким. Это не так. Расчетный алгоритм метода очень прост и включает выполнение следующих основных этапов.

1. Матричная запись исходного дифференциального уравнения, описывающего рассматриваемую задачу, в форме (24.1). Определение, как следствие такой записи, матриц  $[A(x)]$  и  $[B(x)]$ .

2. Представление граничных условий балки при  $x = 0$  в форме матрицы (24.5). Определение матриц  $[Q_1]$ ,  $[R_1]$ .

3. Распределение неизвестных функций в зависимости от характера граничных условий при  $x = 0$  между векторами  $[W_1]$  и  $[W_2]$ .

4. Представление основного матричного уравнения задачи в виде системы двух уравнений (24.4). Определение матриц  $[A_{11}(x)]$ ,  $[A_{12}(x)]$ ,  $[A_{21}(x)]$ ,  $[A_{22}(x)]$ ,  $\{B_1\}$ ,  $\{B_2\}$ .

5. Вычисление матрицы  $[Q(x)]$  в дискретных точках  $x = x_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) по длине балки в результате численного

интегрирования матричного уравнения (24.17) при начальном условии  $[Q(x=0)] = [Q_0]$ .

6. Вычисление матрицы  $[R(x)]$  в точках  $x = x_k$  по длине интервала  $[0, l]$  а результатом численного интегрирования матричного уравнения (24.19) при начальном условии  $[R(x=0)] = [R_0]$ .

#### 7. Составление уравнения (24.20).

8. Решение уравнений (24.20) совместно с граничными условиями (24.2). Определение значений векторов  $[\Psi_1(0)]$  и  $[\Psi_2(0)]$ .

9. Вычисление вектора  $[\Psi_1(x)]$  в точках  $x = x_k$  путем численного интегрирования уравнения (24.21) при начальном условии  $[\Psi_1(0)]$ .

10. Вычисление вектора  $[\Psi_1(x)]$  в точках  $x = x_k$  с помощью матричного уравнения (24.10).

В результате все элементы вектора  $\Psi(x)$  будут определены и задачу можно считать решенной.

П р и м е р. Проиллюстрируем особенности использования метода прогонки на числовом примере расчета балки, изображенной на рис. 12. Напомним, что в § 22 эта балка была рассчитана с помощью обобщенного метода начальных параметров. Интересно сопоставить результаты расчета балки по двум различным и в известной мере конкурирующим между собой методам. Именно по этой причине мы хотя и разделим балку на шесть равных участков, но изменение жесткости и нагрузки сохраним таким, каким оно показано на рис. 13. Нумерация промежуточных сечений балки приведена на рис. 16.

**Решение.** Для получения решения задачи необходимо последовательно выполнить описанные выше этапы расчетного алгоритма метода прогонки.

1. Основное матричное уравнение (24.1) для изгиба балки, загруженной лишь поперечной нагрузкой, запишем в виде

$$[W(x)]' = [A(x)][W(x)] + [B(x)],$$

где

$$\begin{aligned} [W(x)] &= \begin{pmatrix} w(x) \\ \theta(x) \\ M(x) \\ N(x) \end{pmatrix}; \quad [A(x)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EI(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ [B(x)] &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (24.23)$$

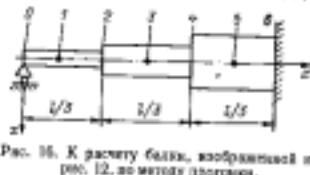


Рис. 16. К расчету балки, изображенной на рис. 12, по методу прогонки.

2. Поскольку на левом конце балки  $x = 0$  прогиб и момент равны нулю, в состав вектора  $[\Psi_1]$  следует включить именно эти элементы изгиба. Получаем

$$[\Psi_1] = [wM]; \quad [\Psi_2] = [qN].$$

3. Границные условия балки при  $x = 0$   $w = 0$ ,  $M = 0$  можно представить в виде матрицы (24.5)

$$[\Psi_1(0)] = [Q_0][\Psi_1(0)] + [R_0], \quad (24.24)$$

где

$$[Q_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [R_0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (24.25)$$

4. Представляя уравнение (24.23) в виде системы двух матричных уравнений (24.4), получим

$$\begin{aligned} [\Psi_1] &= [A_{11}][\Psi_1] + [A_{12}][\Psi_2] + [B_1]; \\ [\Psi_2] &= [A_{21}][\Psi_1] + [A_{22}][\Psi_2] + [B_2], \end{aligned} \quad (24.26)$$

где

$$[A_{11}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [A_{12}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$[A_{21}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{EI(x)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [A_{22}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (24.27)$$

$$[B_1] = [0 \ 0]; \quad [B_2] = [0 \ q(x)]. \quad (24.28)$$

5. Поскольку матрицы  $[A_{11}]$  и  $[A_{22}]$  в нашем случае равны нулю, формула (24.18) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} [Q(x_{k+1})] &= [Q(x_k)] - [Q(x_k)][A_{11}(x_k)][Q(x_k)] - \\ &\quad - [A_{12}(x_k)][x_{k+1} - x_k]. \end{aligned} \quad (24.29)$$

С помощью зависимости (24.29), если учесть, что

$$[Q(0)] = [Q_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

можно, переходя последовательно от 0-го к 1-му сечению, затем ко 2-му и т. д., определить все матрицы  $Q(x)$  в сечениях  $x = x_k$  по длине балки. Приведем окончательные матрицы  $Q(x_k)$

$$\left. \begin{aligned} [Q(0)] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [Q(x_1)] = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}; \\ [Q(x_2)] &= \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1/344EI_1}{l/3}; \quad \dots; \\ [Q(x_6)] &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{4320 \cdot \frac{P}{l}}{4320 \cdot \frac{EI}{l}}. \end{aligned} \right\} \quad (24.30)$$

6. Используя для численного интегрирования матричного уравнения (24.19) метод Эйлера, можно получить зависимость

$$\begin{aligned} \{R(x_{k+1})\} &= \{R(x_k)\} - \{[Q(x_k)A_{11}(x_k) - A_{11}(x_k)]\} \{R(x_k)\} + \\ &+ \{[Q(x_k)]\} \{B_1(x_k)\} - \{B_1(x_k)\} \{x_{k+1} - x_k\}, \end{aligned} \quad (24.31)$$

которая, если учесть, что в нашем случае матрицы  $\{A_{11}\}$  и  $\{B_1\}$  равны нулю, несколько упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \{R(x_{k+1})\} &= \{R(x_k)\} - \{[Q(x_k)]\} \{A_{11}(x_k)\} \{R(x_k)\} + \\ &+ \{[Q(x_k)]\} \{B_1(x_k)\} \{x_{k+1} - x_k\}. \end{aligned} \quad (24.32)$$

С помощью зависимости (24.32), если учесть, что

$$\{R(0)\} = \{R_k\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

можно по аналогии с вычислением матрицы  $\{Q(x_k)\}$  последовательно определять значения вектора  $\{R(x_k)\}$

$$\{R(0)\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \{R(x_1)\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; \{R(x_4)\} = \begin{pmatrix} 0,0827 \frac{q_0^2}{EI_0} \\ -0,630q_0I \end{pmatrix}. \quad (24.33)$$

7. Уравнение (24.20), если внести в него найденные выше значения матриц  $\{Q(t)\}$  и  $\{R(t)\}$ , примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} W(t) \\ M(t) \end{pmatrix} = \left[ \frac{t}{0} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{435}{4350} \frac{I^2}{EI_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} Q(t) \\ N(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,0827 \frac{q_0^2}{EI_0} \\ -0,630q_0I \end{pmatrix}. \quad (24.34)$$

8. Отсюда, если учесть, что  $w(t) = \theta(t) = 0$ , можно получить

$$M(t) = 0,185q_0I; \quad N(t) = 0,815q_0I. \quad (24.35)$$

9. Используя метод Эйлера для численного интегрирования уравнения (24.21), можно получить следующую матричную зависимость:

$$\begin{aligned} \{W_2(x_{k+1})\} &= \{W_2(x_k)\} + \{A_{11}(x_k)Q(x_k)W_2(x_k)\} + \\ &+ \{A_{11}(x_k)W_1(x_k)\} + \{A_{11}(x_k)R(x_k) + B_1(x_k)\} \{x_k - x_{k+1}\}. \end{aligned} \quad (24.36)$$

Последовательно передвигаясь от сечения к сечению с правого конца балки к левому, с помощью формулы (24.36) можно определить значение матрицы  $\{W_2(x_0)\}$ .

$$\begin{aligned} \{W_2(x_0)\} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0,815q_0I \end{pmatrix}; \quad \{W_2(x_1)\} = \begin{pmatrix} -0,0191 \frac{q_0^2}{EI_0} \\ 0,537q_0I \end{pmatrix}; \\ \dots; \quad \{W_2(0)\} &= \begin{pmatrix} 0,0165 \frac{q_0^2}{EI_0} \\ -0,519q_0I \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (24.37)$$

10. Внося найденные матрицы  $\{Q(x_k)\}$ ,  $\{W_2(x_k)\}$  и  $\{R(x_k)\}$  в уравнение (24.10), можем определить матрицы  $\{\Psi_1(x_k)\}$ .

Сравнивая полученные методом прогонки числовые результаты расчета балки и аналогичные результаты расчета той же балки по методу начальных параметров, можно видеть различие значительной разницы:

Метод начальных параметров

Метод прогонки

$$\begin{aligned} w'(x=0) &= 0,024 \frac{q_0^2}{EI_0}; & w'(x=0) &= 0,0165 \frac{q_0^2}{EI_0}; \\ N(x=0) &= -0,416q_0I; & N(x=0) &= -0,519q_0I; \\ M(x=0) &= 0,177q_0I^2; & M(x=0) &= 0,185q_0I^2; \\ N(x=I) &= 0,917q_0I; & N(x=I) &= 0,815q_0I. \end{aligned} \quad (24.38)$$

Если теперь соопоставить приближенные результаты (24.38) с точным решением задачи, то можно убедиться, что при сравнении малом числе участков разбиения балки, которое принято в нашем примере, погрешность метода прогонки больше погрешности метода начальных параметров. Это связано с особенностями метода прогонки, который требует некоторого радиального участка. При использовании этого метода рекомендуется первые несколько участков, расположенных неподалеку левой опоры, делать более короткими.

Результаты, полученные по методу прогонки, можно значительно уточнить, если для численного интегрирования уравнений (24.17), (24.19) и (24.21) вместо метода Эйлера использовать более точные методы — метод Рунге—Кутта или процедуру метода начальных параметров.

В заключение при增添 еще несколько замечаний и советов по практическому использованию метода прогонки.

Иногда при численном интегрировании уравнения (24.17) все же появляются быстро растущие решения, которые придают избыточно большим значениям определители  $|Q|$ , составленного из элементов матрицы  $\{Q(x)\}$ .

В результате полученные матрицы  $\{Q(x)\}$  могут содержать значительные, а порою и недопустимые погрешности.

Поэтому в процессе интегрирования уравнения (24.17) рекомендуется [19] на каждом шаге вычислять значения определителя  $|Q|$ . И если на каком-то шаге окажется, что  $|Q| > 1$ , то производится обращение матрицы  $|Q|^{-1}$ . Найденное при данном фиксированном значении  $x^*$  значение обратной матрицы  $|T(x^*)|^{-1} = |Q(x^*)|^{-1}$  используется в качестве начального значения для определения матрицы  $|T(x)|$  путем интегрирования следующего дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} |T(x)|' &= -|T(x)| |A_{11}(x) T(x) + A_{12}(x)| + \\ &+ |A_{21}(x) T(x)| + |A_{22}(x)|. \end{aligned}$$

При этом на каждом шаге вновь следует контролировать значение определителя  $|T|$  и в случае необходимости опять перейти к матрице  $\{Q\}$  и к уравнению (24.17) для ее определения.

Следует отметить, что затруднения, связанные с построением матрицы  $\{Q(x)\}$ , характерны лишь для задач теории колебаний и устойчивости. При исследовании же задач о напряжении со стояния конструкций они не возникают.

Изложенный выше метод прогонки применим только для линейных задач. Как уже отмечалось выше, с его помощью удается преодолеть трудности, связанные с решением типа краевого эффекта, которое приводит к появлению быстро возрастающих и убывающих членов.

Аналогичные трудности, связанные с появлением решения типа краевого эффекта, возникают и в линейных задачах теории пластики и оболочек.

Для их преодоления используются схемы метода прогонки с итерационными процедурами<sup>1</sup>.

## § 28. МЕТОД ГОДУНОВА

Метод начальных параметров — один из простейших методов численного решения краевых одномерных задач, — как уже отмечалось, обладает существенным недостатком, а именно: при некоторых параметрах задачи в процессе численного интегрирования с увеличением  $x$  в матрице  $[A^*]$  уравнения (22.12) появляются быстро возрастающие и быстро убывающие элементы, что ведет к потерям точности решения.

Метод прогонки в значительной мере свободен от указанного недостатка, но и он в задачах устойчивости и свободных колебаний может привести к появлению в решении быстро возрастающих и убывающих членов.

В 1951 г. С. Г. Годунов<sup>2</sup> предложил достаточно простой и вместе с тем эффективный способ численного интегрирования систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, лишенный упомянутого выше недостатка.

Перейдем к изложению существа метода.

Пусть двухточечная краевая задача описывается дифференциальным уравнением 2-го порядка

$$[W(x)]' = [A(x)] [W(x)] + \{B(x)\} \quad (25.1)$$

<sup>1</sup> В. И. Григорьев, В. И. Жигай, А. Н. Фролов. Исследование устойчивости некоторой сферической оболочки при изолированных перемещениях ее оси. Ученые записки МГТУ им. Н. Э. Баумана. № 5, с. 154–168.

<sup>2</sup> С. Г. Годунов. О численном решении краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. — «Советская математическая наука», Т. XVI, ГИФМАН, № 1, 1961, вып. 3, с. 173–174.

при граничных условиях [см. формулы (24.1) и (24.2)]

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad & [C_1(0)] [W(0)] = [D_1(0)]; \\ \text{при } x = l \quad & [C_2(l)] [W(l)] = [D_2(l)]. \end{aligned} \quad (25.2)$$

Разобъем интервал  $(0, l)$  изменения  $x$  на  $n$  участков точками  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = l$ .

Согласно этому методу для интегрирования уравнения (25.1) на каждом из участков используется метод начальных параметров. При этом участки должны быть достаточно короткими<sup>3</sup>, чтобы не происходило накопления ошибок из-за попытки быстро возрастающих и убывающих частных решений в общей формуле метода начальных параметров

$$[W(x)] = [W_0(x)] + \sum_{i=1}^n c_i [W_i(x)], \quad (25.3)$$

где  $[W_0(x)]$  — частное решение уравнения (25.1), удовлетворяющее граничным условиям при  $x = 0$ ,  $[W_i(x)]$  — частное решение однородного уравнения

$$[W_i(x)]' = [A(x)] [W_i(x)] \quad (25.4)$$

при однородных граничных условиях

$$\text{при } x = 0 \quad [C_1(0)] [W_i(0)] = 0. \quad (25.5)$$

Решение  $[W(x)]$  подвергается линейному преобразованию, в результате которого система векторов  $[W_0(x_1)], [W_1(x_1)], \dots, \dots, [W_n(x_1)]$  становится ортогональной.

Полученные в результате этой операции значения векторов принимаются в качестве начальных условий при интегрировании уравнения (25.1) с помощью метода начальных параметров в пределах следующего участка  $x_1 < x < x_2$ .

Значения частных решений на правом конце участка  $x = x_2$  вновь ортогонализируются. Этот процесс повторяется по всем участкам, вплоть до точки  $x = l$ .

Таким образом, характерной особенностью метода является наличие операции ортогонализации, которая в приведет попытке в формуле (25.3) быстро возрастающих и убывающих частных решений.

Система полученных в каждой точке  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) ортогональных векторов позволяет, как будет показано ниже, определять значения  $[W(x_k)]$  во всех точках деления интервала  $(0, l)$  на участки.

Приведем основные расчетные зависимости метода.

Прежде всего введем обозначение некоторой операции  $[M_1]$ , действие которой над векторами  $[V_1(x_k)]$  таково, что  $[M_1] \times$

<sup>3</sup> Длина каждого из участков должна быть тем меньше, чем больше различия между наибольшей и наименьшей величинами частных собственных чисел матрицы  $[A]$ .

$\times \{V_0(x_0)\}$  — есть результат интегрирования от точки  $x = x_0$  до точки  $x = x_{0+1}$  уравнения (25.1) с начальными условиями  $[W(x_0)] = \{V_0(x_0)\}$ , а  $[M_{i+1}] \{V_i(x_0)\}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ) — есть результат интегрирования от  $x = x_0$  до  $x = x_{0+1}$  однородного уравнения (25.4) при начальных условиях  $[W_i(x_0)] = \{V_i(x_0)\}$ . Пусть

$$\{V_i(x_0)\} = [W_i(x_0)], \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m).$$

Пронтегрировав на участке от  $x_0$  до  $x_1$  уравнение (25.1) для  $i = 0$  и уравнение (25.4) для  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  получим значения некоторых векторов

$$\{U_1(x_0)\} = [M_1] \{V_1(x_0)\}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m).$$

Далее производится ортогонализация и нормирование векторов  $\{U_i(x_0)\}$ , за исключением вектора  $\{U_0(x_0)\}$ , который лишь ортогонализируется. Полученные и результаты этих операций векторы обозначим через  $\{V_i(x_0)\}$  ( $i = 0, 1, 2, 3, \dots, m$ ).

Приведем формулы ортогонализации (скобками обозначается скалярное произведение) и нормализации векторов  $\{U_i(x_0)\}$ :

$$\begin{aligned} u_{01} &= V(U_0, U_1) = \sqrt{\sum_{i=1}^m u_{0i}^2}; \\ &\quad \{V_1\} = \frac{\{U_1\}}{u_{01}} = \left\{ \frac{u_{11}}{u_{01}} \right\}; \\ u_{02} &= \langle U_0, V_1 \rangle = \sum_{i=1}^m u_{0i} v_{1i}; \quad u_{03} = V(U_0, U_2) = u_{02}^2 = \\ &\quad - \sqrt{\sum_{i=1}^m u_{0i}^2 - u_{02}^2}; \\ &\quad \{V_2\} = \frac{1}{u_{02}} \langle U_2 - u_{02} V_1, \dots \rangle = \left\{ \frac{u_{21} - u_{02} v_{11}}{u_{02}} \right\}; \end{aligned} \quad (25.6)$$

$$\begin{aligned} u_{03} &= \langle U_0, V_2 \rangle; \quad u_{04} = \langle U_0, V_3 \rangle; \quad u_{05} = V(U_0, U_3) = u_{03}^2 - u_{04}^2; \\ &\quad \{V_3\} = \frac{1}{u_{03}} \langle U_3 - u_{03} V_2 - u_{04} V_3, \dots \rangle; \end{aligned}$$

$$\{V_n\} = \frac{1}{u_{0n}} \langle U_n - u_{0n} V_1 - u_{0n} V_2 - \dots - u_{0n} V_{n-1}, \dots \rangle;$$

$$u_{01} = \langle U_0, V_1 \rangle; \quad u_{02} = \langle U_0, V_2 \rangle, \dots, \quad u_{0n} = \langle U_0, V_n \rangle;$$

$$\{V_n\} = \{U_1 - u_{01} V_1 - u_{02} V_2 - \dots - u_{0n} V_n\}.$$

Совокупность всех операций (25.6) над векторами  $\{U_i\}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ) в точке  $x = x_0$  обозначим символом  $[N^{(0)}]$ .

При выполнении всех операций, включенных в  $[N^{(0)}]$ , вырабатывается треугольная матрица  $[\Omega^{(0)}]$ , состоящая из чисел  $\omega_{ij}^{(0)}$ :

$$[\Omega^{(0)}] = \begin{bmatrix} \omega_{01}^{(0)} & \omega_{02}^{(0)} & \omega_{03}^{(0)} & \dots & \omega_{0n}^{(0)} & \omega_{01}^{(0)} \\ 0 & \omega_{12}^{(0)} & \omega_{13}^{(0)} & \dots & \omega_{1n}^{(0)} & \omega_{12}^{(0)} \\ 0 & 0 & \omega_{23}^{(0)} & \dots & \omega_{2n}^{(0)} & \omega_{23}^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_{3n}^{(0)} & \omega_{33}^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_{nn}^{(0)} \\ 1 & & & & & \end{bmatrix} \quad (25.7)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Матрицы (25.7) потребуются нам в дальнейшем.

Последовательно проходя по участкам интервала  $(0, l)$ , строим систему векторов

$$\begin{aligned} \{V_1(x_0)\} &= [N^{(1)}] [M_1] \{V_1(x_0)\}; \quad \{V_1(x_0)\} = [N^{(1)}] \times \\ &\quad \times [M_1] \{V_1(x_0)\}; \dots; \quad \{V_1(x_0)\} = [N^{(1)}] \times \\ &\quad \times [M_{n-1}] \{V_1(x_0)\}; \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m). \end{aligned} \quad (25.8)$$

В результате для значения вектора  $[W(l)]$  можно записать следующее выражение:

$$[W(l)] = [V_0(x_0)] + \sum_{i=1}^m c_i^{(0)} [V_i(x_0)]. \quad (25.9)$$

Входящие в формулу (25.9) коэффициенты  $c_i^{(0)}$  определяем из второго граничного условия (25.2) при  $x = L$ .

Теперь вернемся к вопросу определения значений  $[W(i)]$  в точках  $x = x_k$  по длине отрезка  $(0, l)$ .

Значения вектора  $[W(x_k)]$  можно найти по формуле

$$[W(x_k)] = [V_0(x_0)] + \sum_{i=1}^m c_i^{(0)} [V_i(x_0)]. \quad (25.10)$$

Коэффициенты  $c_i^{(0)}$  получаем по рекуррентным зависимостям через  $c_i^{(k+1)}$

$$[c^{(k+1)}] [c^{(0)}] = [c^{(k+1)}]. \quad (25.11)$$

т.е.

$$[c^{(1)}] = [c^{(0)}] [c^{(1)}] \dots [c^{(0)}] [c^{(1)} - 1]. \quad (25.12)$$

Таким образом,  $[c^{(0)}]$  находят через значения  $[c^{(k+1)}]$  из решения системы алгебраических уравнений (25.11) с треугольной матрицей.

Использование метода С. Г. Годунова позволяет на всем протяжении интервала изменения  $x$  сохранить линейную независимость частных решений и избежать чрезмерного роста их числовых

значений. Можно сказать, что самой легкой операцией в этом методе является операция решения системы уравнений (26.1). Однако эта система вполне устойчива, поскольку ее нормированный определитель может быть сделан сколь угодно близким к единице прибором достаточно малого разбиения интервала интегрирования на отдельные участки.

Метод легко может быть реализован на современных вычислительных машинах.

В заключение отметим, что изложенный выше метод в настоящее время получил широкое использование в исследованиях по теории пластичности и оболочек [123].

### § 10. ПРИМЕНЕНИЕ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ МИКЕЛАДЗЕ – ЛАНЦОША

Приведем еще один метод численного решения краевых задач. Этот метод применим как для линейных, так и нелинейных, одномерных и многомерных задач.

Ш. Е. Мицеладзе<sup>1</sup> предложил способ решения некоторых краевых задач строительной механики при помощи квадратурных формул, позволяющих выразить определенный интеграл через значения подынтегральной функции и ее производных в конечных точках интервала интегрирования.

При использовании этого способа существует выбор квадратурной формулы. В расчетной практике, в частности, находится применение формула, предложенная К. Ланцошем [60, с. 420] и позволяющая решать ряд интересных задач об изгибе и колебаниях пластин и оболочек<sup>2</sup>, включая судовой корпус как призматическую оболочку [90, 151].

Формула Ланцоша имеет следующий вид:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) dx \approx \frac{1}{D_k^{\mu}} \sum_{j=0}^{2m-1} D_{j+1}^{\mu} \Delta_k^{\mu+1} [w^{(j)}(x_0) + (-1)^{j+1} w^{(j)}(x_{k+1})], \quad (26.1)$$

где  $\mu$  — число членов разложения;  $\Delta_k = x_{k+1} - x_k$ ;  $w^{(j)}$  —  $j$ -я производная подынтегральной функции;

$$D_{j+1}^{\mu} = \frac{(2m-j-1)!}{(\mu-j-1)!(j+1)!}. \quad (26.2)$$

<sup>1</sup> Ш. Е. Мицеладзе. Новые квадратурные формулы в их применении к интегрированию дифференциальных уравнений. — ДАН Груз. АН. Т. 61, 1968, № 4, с. 613–615.

<sup>2</sup> А. И. Бельдэр. Применение квадратурной формулы Ланцоша к мембранным функционалам. — «Вопросы динамики и прочности». Рига, Эзнатак, 1970, вып. 20, с. 173–179; Ю. Н. Равскис и др. Применение квадратурной формулы Ланцоша к исследованию колебаний полиномиальных пластинок. — Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 2, с. 28.

Например, при  $\mu = 4$  формула (26.1) примет такой вид:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) dx \approx \frac{\Delta_k}{2} [w(x_{k+1}) + w(x_k)] + \frac{3\Delta_k^2}{38} [w'(x_k) - w'(x_{k+1})] + \frac{\Delta_k^3}{84} [w''(x_k) + w''(x_{k+1})] + \frac{\Delta_k^4}{1680} [w'''(x_k) - w'''(x_{k+1})]. \quad (26.3)$$

Изложим существо метода, в основе которого лежит использование краевой задачи, описываемой дифференциальным уравнением порядка 2m

$$L^{2m}[w(x), q(x)] = 0 \quad (26.4)$$

при точечных граничных условиях

$$Q_i [w(0)] = 0, R_i [w(0)] = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m). \quad (26.5)$$

Здесь  $L^{2m}$ ,  $Q_i$ ,  $R_i$  суть заданные операторы над функцией  $w(x)$ . В общем случае упомянутые операторы могут быть нелинейными.

Рассмотрим область определения функции  $(0 < x < l)$  на  $n$  участков точками  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = l$  и прием в качестве основных неизвестных значения основной функции и ее нескольких первых производных в сечениях, расположенных в непосредственной близости справа и слева от сечения  $x_k$ , т. е. при  $x = x_k + 0$  и  $x = x_k - 0$

$$\left( \frac{d^i w(x)}{dx^i} \right)_{x=x_k+0}; \quad \left( \frac{d^i w(x)}{dx^i} \right)_{x=x_k-0} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 2m+\mu); \quad (26.6)$$

Понятно, что в крайней левой точке ( $x = x_k - 0$ ) неизвестные выбираются лишь для сечения  $x = x_k + 0$ , а в крайней правой точке ( $x = x_k + l$ ) — для сечения  $x = x_k - 0$ .

Если теперь в формуле (26.1) вместо подынтегральной функции последовательно принять  $w^{(0)}(x)$  и учесть, что

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} w^{(0)}(x) dx = w^{(1)}(x_{k+1}) - w^{(1)}(x_k), \quad (26.7)$$

то для каждого  $k$ -го участка можно составить по  $2m$  уравнений вида

$$w^{(j+1)}(x_{k+1}) - w^{(j+1)}(x_k) = \frac{1}{D_k^{2m-j-1} (j+1)!} \sum_{i=0}^{2m-j-1} D_{i+1}^{2m-j-1-i} \Delta_k^{j+1} \times \\ \times [w^{(j+1)}(x_k) + (-1)^i w^{(j+1)}(x_{k+i})] \quad (j = 1, 2, 3, \dots, 2m). \quad (26.8)$$

Входящие в формулу (26.8) производные порядка  $2m$  и выше с помощью дифференциального уравнения (26.4) можно выразить через значения исходной функции и ее низших производных  $w^{(j)}$  ( $j \leq 2m-1$ ).

Необходимую для этой цели систему дополнительных зависимостей получим, если проанализируем уравнение (26.4), записанное для  $k$ -го участка, последовательно  $\mu$  раз по  $x$  и внесем в найденные при этом выражения значения  $x = x_k$  и  $x = x_{k+1}$

$$\left( \frac{d^k L_k^{(2m)} [w(x), q(x)]}{dx^k} \right)_{x=x_k+1} = 0; \\ \left( \frac{d^k L_k^{(2m)} [w(x), q(x)]}{dx^k} \right)_{x=x_{k+1}} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots, \mu). \quad (26.9)$$

В дополнение к зависимостям (26.8) и (26.9) необходимо составить для каждого из сечений  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ ) по  $2m$  условий сопряжения. Если в точках  $x = x_k$  отсутствуют разрывы в коэффициентах уравнения (26.4), то это обеспечит непрерывность в этих же точках самой функции и ее производных и, следовательно,

$$\left( \frac{dw(x)}{dx^l} \right)_{x=x_k+1} = \left( \frac{dw(x)}{dx^l} \right)_{x=x_k-0} \quad (l = 0, 1, 2, \dots, 2m - 1); \quad (26.10)$$

что почти вдвое сокращает число неизвестных.

Несколько сложнее представить условия сопряжения для тех точек  $x = x_k$ , в которых некоторые коэффициенты уравнения (26.4) имеют разрывы I-го рода. В задачах строительной механики это связано с изменением склоном жесткости параметров системы, внешней нагрузки и т. п.

В этом случае для получения условий сопряжения нужно составлять следующие зависимости:

$$x_k^{(k)} \int_{x_k-\Delta_k}^{x_k} \int_{x_k-\Delta_k}^{x_k} \cdots \int_{x_k-\Delta_k}^{x_k} L_k^{(2m)} \left( \frac{dx_1}{dx} \right) \cdots \left( \frac{dx_{2m-k-1}}{dx} \right) \left( \frac{dx_{2m-k}}{dx} \right) = 0 \\ (k = 0, 1, 2, \dots, 2m - 1); \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n - 1). \quad (26.11)$$

Объединяя уравнения (26.8) во всем участкам ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ), найдем  $2m$  уравнений, которые совместно с  $2m$  краевыми условиями (26.5), с  $2(\mu + 1)$  вспомогательными зависимостями (26.9) и  $2m(n - 1)$  условиями сопряжения (26.11) образуют систему  $2n(2m + \mu + 1)$  алгебраических уравнений для определения основных неизвестных (26.6).

Точность решения задачи можно повысить как увеличением количества участков разбиения, так и увеличением количества неизвестных (26.6) путем включения в их число производных от искомой функции еще более высокого порядка.

**Пример.** Продемонстрируем использование изложенного выше метода на примере решения задачи об изгибе балки переменной жесткости  $EI(x)$ , загруженной произвольной поперечной нагрузкой  $q(x)$ . Для определенности примем левый конец балки

( $x = 0$ ) свободно опертым на жесткую опору, а правый ( $x = l$ ) жестко защелканным.

**Решение.** Дифференциальное уравнение изгиба балки и ее граничные условия записем соответственно в виде

$$[EI(x) w''(x)]'' = q(x); \quad (26.12)$$

$$\text{при } x = 0 \quad w = w' = 0; \quad (26.13)$$

$$\text{при } x = l \quad w = w' = 0. \quad (26.13)$$

Разобьем балку, например, на три одинаковых участка, для каждого из которых введем осредненные постоянные значения жесткости  $EI_1$ ,  $EI_2$ ,  $EI_3$ .

Внешняя нагрузка в пределах каждого участка остается равной заданному значению (рис. 17).

Тогда для  $k$ -го участка вместо уравнения (26.12) можем написать такое уравнение:

$$EI_k w^{IV}(x) = q(x)$$

$$(k = 1, 2, 3). \quad (26.14)$$

Рис. 17. Балка со ступенчатым изменением жесткости в поперечной нагрузке.

Для каждого участка балки можно записать систему уравнений (26.8). Представим эту систему в общем виде для  $k$ -го участка, причем ограничимся сохранением в уравнениях (26.8) производных лишь до пятого порядка включительно. Получим

$$w_k - w_{k+1} + A_{11}(w_k' + w_{k+1}') \Delta_k + A_{12}(w_k'' - w_{k+1}'') \Delta_k^2 + \\ + A_{13}(w_k''' + w_{k+1}''') \Delta_k^3 + A_{14}(w_k^{IV} - w_{k+1}^{IV}) \Delta_k^4 + \\ + A_{15}(w_k^{V} + w_{k+1}^{V}) \Delta_k^5 + \cdots = 0;$$

$$w_k' - w_{k+1}' + A_{21}(w_k' + w_{k+1}') \Delta_k + A_{22}(w_k'' - w_{k+1}'') \Delta_k^2 + \\ + A_{23}(w_k''' + w_{k+1}''') \Delta_k^3 + A_{24}(w_k^{IV} - w_{k+1}^{IV}) \Delta_k^4 + \cdots = 0;$$

$$w_k'' - w_{k+1}'' + A_{31}(w_k' + w_{k+1}') \Delta_k + A_{32}(w_k'' - w_{k+1}'') \Delta_k^2 + \\ + A_{33}(w_k''' + w_{k+1}''') \Delta_k^3 + A_{34}(w_k^{IV} - w_{k+1}^{IV}) \Delta_k^4 + \cdots = 0;$$

$$w_k''' - w_{k+1}''' + A_{41}(w_k' + w_{k+1}') \Delta_k + A_{42}(w_k'' - w_{k+1}'') \Delta_k^2 + \cdots = 0 \\ (k = 0, 1, 2). \quad (26.15)$$

где  $A_{ij} = \frac{D_j^{r-i+1}}{D_0^{r-i+1}}$ ;  $r$  — порядок высшей производной, оставленной в уравнениях (26.15). Заметим, что  $r > 2m$ .

Система (26.15), написанная для всех трех пролетов балки, содержит 12 уравнений. Общее же число входящих в нее неизвестных

$$\left. \begin{aligned} w(0), w'(0), w''(0), \dots, w^{IV}(0); \\ w(x_k=0), w'(x_k=0), w''(x_k=0), \dots, w^{IV}(x_k=0); \\ w(x_k+0), w'(x_k+0), w''(x_k+0), \dots, w^{IV}(x_k+0); \\ \vdots \\ w(l), w'(l), w''(l), \dots, w^{IV}(l) \quad (k=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (26.16)$$

равно 36.

Значение производных  $w^{IV}$  и  $w'$  (члены с четными производными в системе (26.15) подчеркнуты штриховой линией) легко выразить через значения пятых производных, если воспользоваться системой уравнений (26.9), которая в нашем случае приведет к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} EI_2w^{IV}(x_{k+1}-0) = q(x_k); \quad EI_2w^{IV}(x_k-0) = q(x_k); \\ EI_2w^V(x_{k-1}+0) = q'(x_k); \quad EI_2w^V(x_k-0) = q'(x_k) \\ \quad (k=1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (26.17)$$

Система (26.17) позволяет сразу исключить из (26.15) все 12 входящих в нее производных четвертого и пятого порядков. В результате в (26.15) остается 24 неизвестные величины.

Обратимся теперь к составлению уравнений совместности (26.11), которые, если учесть общий вид уравнений изгиба балки (26.12), можно записать для  $k$ -й точки так:

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_k=0}^{x_k+1} [(EIw''(x))'' - q(x)] dx = 0; \\ \int_{x_k=0}^{x_k+1} \int_{x_k}^x [(EIw''(x))'' - q(x)] dx dx_k = 0; \\ \int_{x_k=0}^{x_k+1} \int_{x_k}^x \int_{x_k}^y [(EIw''(x))'' - q(x)] dx dx_k dy_k = 0; \\ \int_{x_k=0}^{x_k+1} \int_{x_k}^x \int_{x_k}^y \int_{x_k}^z [(EIw''(x))'' - q(x)] dx dx_k dy_k dz_k = 0 \quad (k=1, 2). \end{aligned} \right\} \quad (26.18)$$

Отсюда, если учесть, что элементы изгиба балки на  $k$ -м участке определяются из уравнения (26.14), можно получить

$$\left. \begin{aligned} EI_2w''(x_k=0) = EI_{k+1}w''(x_k+0); \\ EI_2w''(x_k=0) = EI_{k+1}w''(x_k+0); \\ w''(x_k=0) = w''(x_k+0); \\ w(x_k=0) = w(x_k+0) \quad (k=1, 2). \end{aligned} \right\} \quad (26.19)$$

Система (26.19) включает восемь равенств. Их использование позволяет понизить число неизвестных в уравнениях (26.15) до 16.

Дополнив, наконец, уравнения (26.15) системой четырех граничных условий (26.13), получаем необходимую систему 16 уравнений для определения оставшихся 16 неизвестных величин, после чего при желании нетрудно определить любой элемент изгиба балки в каждом сечении с координатами  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{l}{3}$ ,

$$x_2 = \frac{2l}{3}, \quad x_3 = l.$$

В заключение отметим, что изложенный выше метод применим и для решения многомерных краевых задач.

В частности, его использование для двухмерных краевых задач (плоская задача теории упругости, изгиб пластин, вынужденные поверочные колебания балок) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для интегрирования полученной системы можно воспользоваться одним из методов, изложенных в предыдущих параграфах настоящей главы, либо методом, рассматриваемым в настоящем параграфе.

Уже отмечалось, что метод применим и для решения нелинейных задач. При его использовании при решении одномерных нелинейных краевых задач получаем для определения основных неизвестных нелинейную систему алгебраических уравнений. В случае же двухмерных нелинейных задач приходим к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

## § 27. ДРУГИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Выше были рассмотрены лишь некоторые методы численного решения одномерных краевых задач, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными во общем случае коэффициентами.

Наряду с этими методами для решения одномерных краевых задач широко используются параллельные методы, изложенные в гл. II. Кстати, многие числовые примеры, помещенные в гл. II,

как раз и иллюстрируют использование вариационных методов для решения задач изгиба и устойчивости балок, т. е. для решения одномерных краевых задач.

Бесспорно популярны при решении одномерных краевых задач разностные, вариационно-разностные методы, метод коллокаций и метод конечных элементов.

В силу ограниченности объема учебника мы лишены возможности изложить эти методы применительно к решению одномерных задач; они будут описаны в последующих главах при рассмотрении методов решения многомерных задач теории упругости и строительской механики.

Много говорилось в пределах настоящей главы о методах решения величинных одномерных краевых задач. Извиняющим обстоятельством является то, что в целях в настоящем учебнике вопросам решения величинных краевых задач уделяется достаточно внимание. Так, в гл. 11 подробно изложены вопросы использования вариационных методов для решения физически- и геометрически-величинных задач теории упругости; многие из методов, о которых пойдет в дальнейшем речь (разностные методы, метод коллокаций, метод конечных элементов), также применимы и для решения величинных задач.

## Глава IV

### СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ

В главе рассмотрен ряд методов решения многомерных краевых задач: метод коллокаций, метод заменяющих квадратов и метод сеток. Их объединение в одной главе в известной мере условно. Общее в них — наличие «сеток» с узловыми точками.

В методе коллокаций и методе заменяющих квадратов приближенное решение краевой задачи строится путем точного удовлетворения основных дифференциальных уравнений для рассматриваемой краевой задачи в узловых точках области. В методе же сеток упомянутые дифференциальные уравнения заменяются конечно-разностными алгебраическими уравнениями, содержащими в качестве неизвестных значения искомых функций в узловых точках.

Во всех этих методах мы приходим к системе алгебраических уравнений для отыскания некоторых параметров, через которые определяются приближенные значения искомых функций в рассматриваемой области.

### § 28. МЕТОД КОЛЛОКАЦИЙ<sup>4</sup>

Излагаемый в этом параграфе метод позволяет найти приближенное решение краевой задачи не в виде числового массива, а при помощи функций. В этом отождествим окрестности к краевым условиям.

Выше уже подчеркивалось, что для решения любой задачи механики деформируемых сред необходимо рассмотреть в общем случае некоторую систему дифференциальных уравнений, которая описывается поведение искомых функций в занятой телом области при определенных выраженных через искомые функции условиях на поверхности тела (или контуре для двухмерных областей).

На основании вышесказанного задача может быть сформулирована так: методом коллокаций требуется найти приближенное решение краевой задачи, удовлетворяющее внутри области  $V$  уравнению

$$L^{(k)}[\psi(x, y, z)] = q(x, y, z) \quad (28.1)$$

при краевых условиях на  $S$

$$Q_j[\psi(x, y, z)] = f_j(x, y, z) \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (28.2)$$

где  $L^{(k)}$  и  $Q_j$  — заданные операторы;  $q(x, y, z)$  и  $f_j(x, y, z)$  — заданные функции координат.

Приближенное решение для функции  $\psi(x, y, z)$  можно представить в виде суммы

$$\psi(x, y, z) = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x, y, z), \quad (28.3)$$

где  $a_k$  — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению;  $\varphi_k(x, y, z)$  — система линейно независимых функций.

В общем случае выражение (28.3) не удовлетворяет дифференциальному уравнению (28.1) и граничным условиям (28.2). Поэтому подстановка выражения (28.3) в уравнения (28.1) и (28.2) приводит к возникновению явлений  $\Delta$  и  $\delta$ ,

$$\Delta(x, y, z) = L \left[ \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x, y, z) \right] - q(x, y, z) \text{ в } V; \quad (28.4)$$

$$\delta_j(x, y, z) = Q_j \left[ \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x, y, z) \right] - f_j(x, y, z) \quad (j = 1, 2, \dots, m) \text{ на } S. \quad (28.5)$$

Для получения приближенного решения необходимо, чтобы Невязки  $\Delta$  и  $\delta_j$  обратились в нуль хотя бы в конечном числе выбранных в области  $V$  и на поверхности  $S$  точек

<sup>4</sup> См., например, Б. П. Демидович [39, с. 256]; А. П. Фадеев [21, с. 145].

$(x_i, y_i, z_i)$ , где  $i = 1, 2, \dots, N_1 + N_2$ . В результате получим следующую систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $a_k$ :

$$\Delta(x_i, y_i, z_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N_1); \quad (28.6)$$

$$\delta_j(x_i, y_i, z_i) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} (i = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2); \\ (j = 1, 2, \dots, m). \end{array} \right\} \quad (28.7)$$

Заметим, что

$$N_1 + mN_2 = N. \quad (28.8)$$

Возможен ряд вариантов метода коллокаций. Например, принятые выражение (28.3) для  $\varphi(x, y, z_i)$  тождественно удовлетворяет всем граничным условиям (28.2), и параметры  $a_k$  определяются лишь из условий (28.6) для внутренних точек области  $V$ . Если же принятное выражение для  $\varphi(x, y, z)$  удовлетворяет уравнению (28.1), то необходимые уравнения для определения параметров  $a_k$  получаются из условий (28.7) для точек коллокаций, расположенных на поверхности  $S$ .

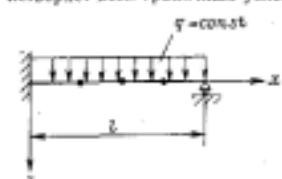


Рис. 18. К расчету методом коллокаций пряматической балки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой.

Недостаток метода коллокаций является известный прошуп в выборе точек коллокаций, вследствие чего при одной и той же аппроксимирующей функции может быть получено решение, как правило, менее точное, чем решение, полученное вариационным методом.

Приведем пример, иллюстрирующий применение метода коллокаций.

При мер 1. Определить методом коллокаций упругую линию пряматической балки, изображенной на рис. 18. Точки коллокаций расположены по длине балки из равном друг от друга расстояния  $\Delta = \frac{l}{4}$ . Дифференциальное уравнение изгиба рассматриваемой балки запишем в виде

$$EIw''(x) = q. \quad (28.9)$$

Границные условия, отвечающие жесткому заделке левого конца балки и свободного опирания на жесткую опору правого конца, запишем так:

$$\text{при } x = 0 \quad w = w' = 0; \quad (28.10)$$

$$\text{при } x = l \quad w = w' = 0. \quad (28.11)$$

Выражение для упругой линии балки зададим в виде степенного ряда

$$w(x) = \sum_{k=0}^N a_k \left(\frac{x}{l}\right)^k. \quad (28.12)$$

Выражение (28.12) при произвольных  $a_k$  не удовлетворяет ни дифференциальному уравнению (28.9), ни граничным условиям (28.10) и (28.11). Поэтому число неизвестных коэффициентов  $a_k$  должно быть такое, чтобы могли быть выполнены четыре граничных условия и уравнение (28.9) в трех точках коллокаций  $f, 2, 3$ . Таким образом, в сумме (28.12) необходимо оставить семь первых членов

$$\begin{aligned} w(x) = & a_0 + a_1 \frac{x}{l} + a_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + a_3 \left(\frac{x}{l}\right)^3 + a_4 \left(\frac{x}{l}\right)^4 + \\ & + a_5 \left(\frac{x}{l}\right)^5 + a_6 \left(\frac{x}{l}\right)^6. \end{aligned} \quad (28.13)$$

Вносим выражение (28.13) в граничные условия (28.10) и (28.11), будем иметь

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 0; \quad a_1 = 0; \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0; \\ 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 + 20a_5 + 30a_6 = 0. \end{array} \right\} \quad (28.14)$$

Подставляя далее выражение (28.13) в левую часть уравнения (28.9), получаем

$$24a_4 + 120a_5 \frac{x}{l} + 360a_6 \frac{x^2}{l^2} = \frac{q l^4}{EI}. \quad (28.15)$$

Потребуем, чтобы нагрузка  $\bar{q}$  в зависимости (28.15) совпадала с заданной равномерной нагрузкой  $q$  в точках коллокаций:  $x_1 = -\frac{l}{4}$ ,  $x_2 = -\frac{l}{2}$ ,  $x_3 = \frac{3l}{4}$  (рис. 18). Получим дополнительно к системе четырех уравнений (28.14) еще три следующих уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} 24a_4 + 30a_5 + 22.5a_6 = \frac{q l^4}{EI}; \\ 24a_4 + 60a_5 + 90a_6 = \frac{q l^4}{EI}; \\ 24a_4 + 90a_5 + 202.5a_6 = \frac{q l^4}{EI}. \end{array} \right\} \quad (28.16)$$

Решая систему уравнений (28.14) и (28.16) совместно, получаем

$$a_0 = 0; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = -\frac{q l^4}{16EI}; \quad a_3 = -\frac{5q l^4}{48EI};$$

$$a_4 = -\frac{q l^4}{24EI}; \quad a_5 = a_6 = 0. \quad (28.17)$$

Введя найденные значения коэффициентов  $a_k$  в формулу (28.13), получаем для прогона балки окончательно такое выражение:

$$w(x) = \frac{q^6}{EI} \left[ \frac{1}{16} \left( \frac{x}{l} \right)^5 - \frac{5}{48} \left( \frac{x}{l} \right)^3 + \frac{1}{24} \left( \frac{x}{l} \right)^4 \right]. \quad (28.18)$$

Формула (28.18) определяет точное решение нашей задачи; легко убедиться, что она тождественно удовлетворяет уравнению (28.9) и граничным условиям (28.10), (28.11).

## § 29. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ<sup>1</sup>

Вновь рассмотрим краевую задачу, описываемую внутри области  $V$  уравнением 2-го порядка

$$L^{(2)}[\omega(x, y, z)] = q(x, y, z) \in V \quad (29.1)$$

при краевых условиях

$$Q_j[\omega(x, y, z)] = f_j(x, y, z) \quad (j = 1, 2, \dots, m) \text{ на } S. \quad (29.2)$$

При аппроксимации методом наименьших квадратов принимаем для получения приближенного решения выражение для искомой функции  $\omega(x, y, z)$  должно удовлетворять всем граничным условиям (29.2).

В связи с этим примем

$$\omega(x, y, z) = w_0(x, y, z) + \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x, y, z), \quad (29.3)$$

где  $w_0(x, y, z)$  — функция, удовлетворяющая всем граничным условиям (29.2),  $\varphi_k(x, y, z)$  — линейно независимые функции, удовлетворяющие однородным граничным условиям

$$Q_j[\varphi_k(x, y, z)] = 0 \\ (j = 1, 2, \dots, m) \text{ на } S; \quad (k = 1, 2, \dots, N); \quad (29.4)$$

$a_k$  — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Для определения коэффициентов  $a_k$  поступим следующим образом. Выберем определяющее число точек коллокации в области  $V$ . Важно при этом подчеркнуть, что число этих точек должно быть больше числа неизвестных коэффициентов  $a_k$  в выражении (29.3).

Подставляя далее выражение (29.3) в дифференциальное

уравнение (29.1), получаем определенную величину  $\Delta_1$  в каждой  $i$ -й точке коллокации ( $i = 1, 2, \dots, N^*$ )

$$\Delta_i = L^{(2)} \left[ \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x_i, y_i, z_i) \right] - q(x_i, y_i, z_i) \\ (i = 1, 2, \dots, N^*). \quad (29.5)$$

Суммарная квадратичная погрешность во всем точкам коллокации определяется по формуле

$$\Delta_0^2 := \sum_{i=1}^{N^*} \Delta_i^2(x_i, y_i, z_i, a_1, a_2, \dots, a_N). \quad (29.6)$$

Из условия минимума величины  $\Delta_0^2$  выписываем следующую систему уравнений:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta_0^2}{\partial a_i} = \Delta_0 \frac{\partial \Delta_0}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (29.7)$$

В результате получаем систему алгебраических уравнений (для нелинейных краевых задач система будет нелинейной) относительно коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_N$ .

Известный выше метод часто называют линейным методом наименьших квадратов.

Если число точек коллокации  $N^*$  равно числу  $N$  неизвестных коэффициентов  $a_k$  в выражении для определяемой функции, то точечный метод наименьших квадратов переходит в один из вариантов метода коллокаций.

Следует заметить, что увеличение отношения  $N^*/N$  всегда приводит к повышению числовых устойчивости системы уравнений для определения  $a_k$ .

В заключение обратим внимание еще на одно обстоятельство. Если число точек коллокации беспредельно увеличивать и занять всю область  $V$ , то в выражении (29.6) мы должны будем сумму заменить интегралом по области  $V$

$$\Delta_0^2 = \iiint_V \Delta^2(x, y, z, a_1, a_2, \dots, a_N) dV, \quad (29.8)$$

и в

$$\Delta = L^{(2)} \left[ \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x, y, z) \right] - q(x, y, z). \quad (29.9)$$

Подставляя  $\Delta_0^2$  из формулы (29.8) в формулу (29.7), получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $a_k$ . Известный метод, базирующийся на использовании формулы (29.8) для полной квадратичной троичности удовлетворения основного дифференциального уравнения в области  $V$ , принято называть интегральным методом наименьших квадратов. Можно показать, что получающиеся при этом уравнения тождественны методу Бубнова—Галеркина.

<sup>1</sup> В. П. Денисович, И. А. Марков [39, с. 257]; М. К. Гашев [29, с. 61].

## § 30. МЕТОД СЕТОК<sup>3</sup>

Метод сеток, или, как иногда говорят, метод конечных разностей, с появлением быстродействующих вычислительных машин нашел широкое использование для решения самых разнообразных краевых задач механики деформируемых тел.

При использовании метода сеток все дифференциальные уравнения и краевые условия заменяют приближенно некоторыми уравнениями в конечных разностях, которые, как правило, получают из дифференциальных уравнений и краевых условий путем замены в них производных и различных дифференциальных выражений их приближенными представлениями через разностные отношения или значения функций в отдельных точках. Эти точки являются узлами сетки, положенной определенным образом на область задания функции.

Начнем изложение метода с получения выражений для производных через разностные отношения.

### 30.1. Построение интерполирующих полиномов

Формулы для определения производных через значения функции в узлах сетки обычно получают следующим способом. Строят интерполирующий полином, который в точках сетки принимает те же значение, что и заданная функция, а затем производные от заданной функции приближенно считают равными соответствующим производным от интерполирующего полинома.

Приведем краткие сведения из теории интерполяционных формул [46, с. 179].

Пусть даны производные значения  $a_0, a_1, \dots, a_n$  независимой переменной  $x$  и соответствующие им значения функции  $f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n)$ .

Рассмотрим разностные соотношения, построенные по следующему правилу:

$$f(a_1, a_0) = \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}, \quad f(a_2, a_1) = \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1}, \dots \quad (30.1)$$

Выражения (30.1) называют разностными отношениями перв-

<sup>3</sup> Для более детального ознакомления с основами построения метода, а также вопросами устойчивости разностных схем рекомендуем обратиться к книге Л. В. Калугина, В. И. Крылова [66, с. 279–286]; М. Г. Гавурова [29, с. 130–187]; С. К. Голубкова, В. С. Рыбакова [8]; Р. Рихтера, К. Мортон [102].

Вопросы использования метода сеток для решения задач механики деформируемых тел содержатся в работах: П. М. Вервик [20]; М. С. Коркина и др. [38]; П. М. Огабекова, М. К. Колтупов [97, с. 245–258]; Г. А. Угольчикова, Я. Ч. Дхугчаг, А. Е. Степанов [116]; А. П. Федяк [121, с. 127–140].

ого порядка. По нему образуем разностные отношения второго порядка

$$f(a_2, a_1, a_0) = \frac{f(a_2, a_1) - f(a_1, a_0)}{a_2 - a_0};$$

$$f(a_3, a_2, a_1, a_0) = \frac{f(a_3, a_2, a_1) - f(a_2, a_1, a_0)}{a_3 - a_0}, \dots \quad (30.2)$$

затем разностные отношения третьего порядка

$$f(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0) = \frac{f(a_4, a_3, a_2, a_1) - f(a_3, a_2, a_1, a_0)}{a_4 - a_0} \quad (30.3)$$

и т. д.

Для равноточечных значений аргумента  $a_0, a_1 = a_0 + h, a_2 = a_0 + 2h, \dots, a_n = a_0 + nh$  разностные отношения выражены в виде

$$\left. \begin{aligned} f(a_0, a_0) &= \frac{\Delta f(a_0)}{h}, \quad f(a_1, a_0) = \frac{\Delta f(a_0)}{h}, \quad f(a_2, a_0) = \frac{\Delta f(a_0)}{h}, \dots \\ f(a_0, a_1, a_0) &= \frac{\Delta^2 f(a_0)}{2!h^2}, \quad f(a_0, a_2, a_1, a_0) = \frac{\Delta^4 f(a_0)}{2!h^4}, \dots \\ f(a_0, a_0, a_0, a_1, a_0) &= \frac{\Delta^5 f(a_0)}{4!h^4}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (30.4)$$

Разностные отношения могут быть представлены в более симметричном виде, в именно:

$$\left. \begin{aligned} f(a_1, a_0) &= \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0} = \frac{f(a_0)}{a_0 - a_1} + \frac{f(a_1)}{a_1 - a_0}, \dots \\ f(a_2, a_1, a_0) &= \dots \\ f(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0) &= \dots \\ &- \sum_{k=0}^5 \frac{f(a_k)}{(a_k - a_0) \cdots (a_k - a_{k-1}) (a_k - a_{k+1}) \cdots (a_k - a_n)}. \end{aligned} \right\} \quad (30.5)$$

Из написанных равенств видно, что правые части симметричны относительно  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , поэтому  $f(a_0, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$  не изменится при любой перестановке значений  $a_k$  аргумента.

Приведем теперь без вывода выражение полинома Ньютона степени  $n$ , который при значениях аргумента  $a_0, a_1, \dots, a_n$  принимал бы значение, соответствующее  $f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n)$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a_0) + (x - a_0) f(a_1, a_0) + (x - a_0) (x - a_1) \times \\ &\times f(a_2, a_1, a_0) + \dots + (x - a_n) (x - a_{n-1}) \cdots (x - a_{n-2}) \times \\ &\times f(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0). \end{aligned} \quad (30.6)$$

Для исследований более удобна другая форма записи полинома (30.6), предложенная Лагранжем [в дальнейшем этот интерполирующий полином будем обозначать через  $P_n(x)$ ],

$$P_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^n \frac{f(a_k)}{\omega'(a_k)(x-a_k)}, \quad (30.7)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \omega(x) &= (x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_n); \\ \omega'(a_k) &= (a_k-a_0)\cdots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\cdots(a_k-a_n). \end{aligned} \quad (30.8)$$

Если с помощью полинома  $P_n(x)$  мы интерполируем некоторую алгебраическую функцию  $f(x)$ , степень которой равна степени полинома  $P_n(x)$ , то интерполирующий полином  $P_n(x)$  будет тождественно совпадать с интерполируемой функцией  $f(x)$ . В противном случае  $f(x)$  и  $P_n(x)$  примут одинаковые значения лишь в узлах интерполяции.

Разность  $f(x) - P_n(x) = R_{n+1}(x)$  называется остаточным членом интерполяционной формулы

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x). \quad (30.9)$$

Остаточный член  $R_{n+1}(x)$  определяется по формуле

$$R_{n+1}(x) = \omega(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad (30.10)$$

где  $\xi$  есть число, лежащее между  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, x$ ;  $f^{(n+1)} = \dots = f^{(n+1-k)}$  — производная функции  $f(x)$ .

Приведем частные случаи общей формулы интерполяции (30.6).

**Формула Ньютона для интерполяции вперед.** Пусть функция  $f(x)$  задана для следующих равноточечных значений аргумента:  $a_0 = a, a_1 = a + h, a_2 = a + 2h, \dots, a_n = a + nh$ . Непосредственно из формулы (30.9) с учетом выражения (30.6) получим

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{x-a}{h} \Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{2!h^2} \Delta^2 f(a) + \dots \\ &\dots + \frac{(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-(n-1)h)}{n!h^n} \Delta^n f(a) + R_{n+1}(x). \end{aligned} \quad (30.11)$$

Формула (30.11) удобна при вычислении значений функции и ее производных для значений  $x$ , близких к значению  $a$ .

**Формула Ньютона для интерполяции назад.** Пусть  $f(x)$  задана для следующих значений  $x$ :

$$a_0 = a, a_1 = a - h, a_2 = a - 2h, \dots, a_n = a - nh.$$

В этом случае для определения значения функции  $f(x)$  и ее производных при значениях  $x$ , близких к  $a$ , используется интерполяционная формула в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1!h} \Delta f(a-h) + \frac{(x-a)(x-a+h)}{2!h^2} \Delta^2 f(a-2h) + \dots \\ &\dots + \frac{(x-a)(x-a+h)\cdots(x-a+(n-1)h)}{n!h^n} \Delta^n f(a-nh) + R_{n+1}(x). \end{aligned} \quad (30.12)$$

**Формула Стирлинга.** Этой формулой, имеющей вид

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1!h} \left[ \Delta f(a) - \frac{1}{2} \Delta^2 f(a-h) \right] + \\ &+ \frac{(x-a)^2}{2!h^2} \Delta^2 f(x-a) + \frac{(x-a)[(x-a)^2 - h^2]}{3!h^3} \times \\ &\times \left[ \Delta^3 f(a-h) - \frac{1}{3} \Delta^4 f(a-2h) \right] + \\ &+ \frac{(x-a)^3 [(x-a)^2 - h^2]}{4!h^4} \Delta^4 f(a-3h) + \dots + R_{n+1}(x), \end{aligned} \quad (30.13)$$

используются для определения значений функции или ее производных, близких среднего из узлов интерполяции. В формуле (30.13) приведена такая схема узлов:  $a = a\bar{h}, \dots, a - h, a, a + h, \dots, a + nh$ .

## 30.2. Формулы для вычисления производных

Обратимся теперь к задаче о вычислении производных. Для этого можно воспользоваться приведенными выше формулами (30.11), (30.12) и (30.13) для функции  $f(x)$ . При этом остаточный член  $R_{n+1}(x)$  в этих формулах отбрасывается.

Дифференцируя выражение (30.11) по  $x$  и делая в полученном результате  $x = a$ , находим

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{1}{h} \left[ \Delta f(a) - \frac{1}{2} \Delta^2 f(a) + \frac{1}{3} \Delta^3 f(a) - \dots \right]; \\ f''(a) &= \frac{1}{h^2} \left[ \Delta^2 f(a) - \Delta^3 f(a) + \frac{11}{12} \Delta^4 f(a) - \dots \right] \end{aligned} \quad (30.14)$$

и т. д.

Формулы (30.14) позволяют находить значения производных в любом из узлов по значениям функции в узлах интерполяции, расположенных по соседству справа.

Для определения производных в некоторой узловой точке по значениям функции в узлах интерполяции, расположенных по соседству слева, следует воспользоваться формулами

$$\left. \begin{aligned} f'(a) &= \frac{1}{h} \left[ \Delta f(a-h) + \frac{1}{2} \Delta^2 f(a-2h) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \Delta^3 f(a-3h) + \dots \right]; \\ f''(a) &= \frac{1}{h^2} \left[ \Delta^2 f(a-2h) + \Delta^3 f(a-3h) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{11}{32} \Delta^4 f(a-4h) + \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (30.15)$$

и т. д.

Формулы (30.15) получены путем дифференцирования выражения (30.12) и подстановки в полученный результат  $x = a$ .

Формулами (30.14), (30.15) очень удобно пользоваться при замене краевых условий уравнениями в конечных разностях.

Далее, из формулы (30.13) можно получить следующие формулы для определения значений производных в некоторой узловой точке  $x = a$  по значениям функции в узлах интерполяции, лежащих симметрично с обеих сторон от рассматриваемого узла  $x = a$ :

$$\left. \begin{aligned} f'(a) &= \frac{1}{h} \left[ \frac{\Delta f(a) + \Delta f(a-h)}{2} - \frac{1}{31} \frac{\Delta^2 f(a-h) + \Delta^2 f(a-2h)}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{61} \frac{\Delta^3 f(a-2h) + \Delta^3 f(a-3h)}{2} + \dots \right]; \\ f''(a) &= \frac{1}{h^2} \left[ \Delta^2 f(a-h) - \frac{2}{41} \Delta^2 f(a-2h) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{61} \Delta^4 f(a-3h) + \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (30.16)$$

и т. д.

Формулы (30.16) используются при замене дифференциальных уравнений краевых задач уравнениями в конечных разностях.

При выполнении числовых расчетов по методу сеток для определения значений производных в узловых точках обычно используют простейшие интерполяционные формулы, которые получаются из формул (30.14), (30.15) и (30.16) при сокращении в них лишь одного первого члена. Так, из формулы (30.16) получаем следующие простейшие формулы для определения значений производных в узле  $x = a$  по значениям функции в узлах, расположенных

находящимся с обеих сторон от узла  $x = a$ :

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{f_a - f_{a-h}}{2h} + \frac{h^2}{6} 0M_2; \\ f_2 &= \frac{f_a - 2f_{a-h} + f_{a-2h}}{h^2} + \frac{h^2}{32} 0M_4; \\ f_3 &= \frac{f_a - 2f_{a-h} + 2f_{a-2h} - f_{a-3h}}{h^3} + \frac{17h^2}{63} 0M_6; \\ f_4^{IV} &= \frac{f_a - 4f_{a-h} + 6f_{a-2h} - 4f_{a-3h} + f_{a-4h}}{h^4} + \frac{17h^2}{93} 0M_8. \end{aligned} \right\} \quad (30.17)$$

и т. д.

Здесь введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} f(a-h) &= f_1, \dots, f(a) = f_0; \\ f(a+h) &= f_1, \dots, f(a+nh) = f_n; \\ M_n &= \max \{ |f^n(x)| \}; \\ a-(s-2)h < x < a+(s-2)h; \end{aligned} \right\} \quad (30.18)$$

$\theta$  — числовой коэффициент, меньший единицы.

Последние члены в формулах (30.17) дают оценку остаточных членов в выражениях для производных.

Пренебрегая в формулах (30.17) остаточными членами получаем разностные формулы, аппроксимирующие значения производных с точностью до  $M^k$ .

Сокращение в формулах (30.16) не один, а два первых члена, можно найти более точные формулы для определения производных в узловой точке  $x = a$ .

Приведем уточненные формулы для определения первых четырех производных <sup>1</sup>:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{-f_a + 8f_{a-h} - 8f_{a-2h} + f_{a-3h}}{12h} + \frac{h^2}{30} 0M_2; \\ f_2 &= \frac{-f_a + 16f_{a-h} - 56f_{a-2h} + 16f_{a-3h} - f_{a-4h}}{12h^2} + \frac{h^4}{34} 0M_4; \\ f_3 &= \frac{-f_a + 8f_{a-h} - 13f_{a-2h} + 13f_{a-3h} - 8f_{a-4h}}{6h^3} + \frac{403h^4}{2030} 0M_6; \\ f_4^{IV} &= \frac{-f_a + 12f_{a-h} - 39f_{a-2h} + 56f_{a-3h} - 39f_{a-4h} + 12f_{a-5h} - f_{a-6h}}{6h^4} + \end{aligned} \right\} \quad (30.19)$$

$$+ \frac{403h^4}{5046} 0M_8.$$

<sup>1</sup> Значения остаточных членов взяты из книги Л. В. Канторовича и В. И. Кутателадзе [46, с. 196].

Пренебрегая в формулах (30.19) остаточным членом порядка  $O(h^4)$ , получаем разностные формулы, определяющие значения производных с точностью уже до  $h^4$ .

Следует заметить, что формулы (30.17) для определения производных (без учета остаточных членов) могут быть получены из очень простых построений. В самом деле, пусть график функции  $f(x)$  изображается кривой, показанной на рис. 19.

Точка 0 на оси абсцисс определяет точку  $x = a$  и соответствующую для этой точки функцию  $f_a = f(a)$ . Другие точки на оси абсцисс расположены на равном друг от друга расстоянии  $h$  и отмечены натуральными рядом чисел. Таким образом, значение абсциссы для  $i$ -й точки равно  $x = a + ih$ , а значение соответствующей этой точке функции  $f_i = f(a + ih)$ .



Рис. 19. К приближенному определению производной функции  $f'(x)$  при дискретном ее задании.

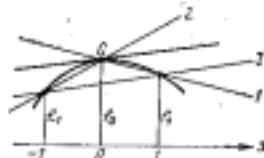


Рис. 20. К приближенному определению производной функции при дискретном ее задании:  
 $I_1$  — прямая, называемая первоочередной касательной угла  $\alpha$  касательной в точке  $C$  первой разности;  $I_2$  — то же значение второй разности;  $I_3$  — то же значение третьей центральной разности.

Используем значения функции  $f(x)$  в узловых точках, которые, как и прежде, будем обозначать символами  $f_{-1}, \dots, f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \dots, f_i, \dots$ , представим первую производную в точке  $C$  графика функции  $f(x)$  в трех вариантах формулами

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0 \approx \frac{f_1 - f_0}{h}; \quad (30.20)$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0 \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}; \quad (30.21)$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0 \approx \frac{\left(\frac{df}{dx}\right)_0 + \left(\frac{df}{dx}\right)_1}{2} = \frac{f_1 - f_0 + f_{-1} - f_{-2}}{2h}. \quad (30.22)$$

Рассмотрим рис. 20. Легко видеть, что касательная в точке  $C$  по углу наклона ближе к прямой  $I_3$ , чем к прямой  $I_1$  и  $I_2$ . Вместе

с тем тангенсы углов наклона прямых  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  выражаются соответственно формулами (30.20), (30.21) и (30.22). Таким образом, формула (30.22) обычно дает лучший результат при определении производной функции по сравнению с формулами (30.20) и (30.21).

Перепишем эти формулы так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{df}{dx}\right)_0 \approx \frac{f_1 - f_0}{h}; \quad \left(\frac{df}{dx}\right)_0 \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}; \\ \left(\frac{df}{dx}\right)_0 \approx \frac{f_1 - f_0 + f_{-1} - f_{-2}}{2h}, \end{array} \right\} \quad (30.23)$$

где выражения

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0 = \underline{\Delta f}_0 = f_1 - f_{-1}, \quad \underline{\Delta f}_0 = \frac{f_1 - f_{-1}}{2}, \quad (30.24)$$

называются первыми разностями операд, надеж  $\underline{\Delta}$  — центральной соответственно. Чертка сверху в обозначении производной и разности указывает на то, что разность взята вперед, чертка снизу — назад и отсутствие черты означает, что эта разность — центральная.

Теперь найдем приближенные выражения для производной второго порядка. Отыскавшую вторую производную, можно воспользоваться схемой определения первой производной, но вместо значений функции  $f(x)$  вносят значения ее первой производной

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 \approx \frac{\left(\frac{df}{dx}\right)_1 - \left(\frac{df}{dx}\right)_0}{h} = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} = \frac{(\Delta f)_0}{h^2}; \\ \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 \approx \frac{\left(\frac{df}{dx}\right)_2 - \left(\frac{df}{dx}\right)_{-1}}{h} = \frac{f_0 - 2f_{-1} + f_{-2}}{h^2} = \frac{(\Delta f)_0}{h^2}; \\ \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 \approx \frac{\left(\frac{df}{dx}\right)_1 - \left(\frac{df}{dx}\right)_{-1}}{2h} = \frac{f_0 - 2f_1 + f_{-2}}{4h^2} = \frac{(\Delta f)_0}{h^2}. \end{array} \right\} \quad (30.25)$$

Здесь

$$\begin{aligned} (\Delta f)_0 &= f_1 - 2f_0 + f_{-1}; \quad (\Delta f)_0 = f_0 - 2f_{-1} + f_{-2}; \\ (\Delta f)_0 &= \frac{f_0 - 2f_1 + f_{-2}}{4}. \end{aligned} \quad (30.26)$$

Однако для уточнения второй производной можно, используя вторую центральную разность, вычислять ее же по формуле (30.26), а так:

$$(\Delta f)_0 = \bar{\Delta}(\underline{\Delta}f)_0 = f_1 - 2f_0 + f_{-1}. \quad (30.27)$$

Легко убедиться, что приведенные выше приближенные формулы (30.23) и (30.25) для определения производных функции

по ее дискретным значениям в узлах интерполяции, расположенных справа, слева или симметрично по обе стороны узла, можно получить соответственно из формул (30.14), (30.15) и (30.16), если ограничиться в этих формулах лишь первыми членами.

Продолжая приведенную выше процедуру для получения приближенных выражений производных более высокого порядка, например при использовании лишь центральных разностей, получим выражения, полностью совпадающие с формулами (30.17), если в последних отбросить остаточный член.

Приближенные формулы (30.17) для определения центральных производных функции по значениям функции в узловых точках, расположенных симметрично с обеих сторон от рассматриваемого узла и на равном расстоянии друг от друга, при расчетах удобно представить в форме табл. 1.

Таблица 1

Значения числовых коэффициентов при узловых значениях функции в формулах (30.17) для определения центральных производных функции

Производные	Функция в узловых точках										Источник
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	
$f'_0 = f'(x_0)$				-1	0	1					$\frac{1}{24}$
$f'_1 = f'(x_1)$				1	-2	1					$\frac{1}{8}$
$f'_2$			-1	3	0	-2	1				$\frac{1}{24}$
$f''_0$			1	-4	6	-4	1				$\frac{1}{8}$
$f''_1$		-1	4	-5	0	5	-4	1			$\frac{1}{24}$
$\vdots$											

### 30.3. Применение метода сеток для решения одномерных краевых задач

В качестве примера рассмотрим изгиб неизогнутой балки, лежащей на сплошном упругом основании и загруженной поперечной нагрузкой интенсивности  $q(x)$  и осевыми растягивающими силами  $T$ .

Дифференциальное уравнение изгиба для такой балки имеет вид

$$L(w) = [EI(x)w''(x)]'' - Tw''(x) + k(x)w(x) - q(x) = 0, \quad (30.28)$$

или

$$L(w) = a(x)w'''(x) + b(x)w''(x) + c(x)w'(x) + d(x)w(x) - q(x) = 0, \quad (30.29)$$

где

$$\begin{aligned} d(x) &= k(x); \quad a(x) = EI(x); \quad b(x) = 2EI'(x); \\ c(x) &= EI''(x) - T. \end{aligned} \quad (30.30)$$

В дополнение к уравнению (30.28) следовало бы наложить по два граничных условия на каждом из торцевых сечений балки ( $x = 0$ ,  $x = l$ ). Однако граничными условиями мы займемся несколько позже, а сейчас остановимся на операции замены дифференциального уравнения (30.29) системой уравнений в конечных разностях. С этой целью разобьем интервал  $(0, l)$  изменения переменной  $x$  на  $n$  равных участков точками

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{l}{n} < x_2 = \frac{2l}{n} < x_3 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = l$$

и для каждой из промежуточных точек  $x = x_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ) выполним конечно-разностную аппроксимацию уравнения (30.29).

Для этого необходимо в уравнениях (30.29) входящие в него производные заменить их приближенными, разностными формулами (30.17). Получим

$$\begin{aligned} a(x_i)(w_{i-4} - 4w_{i-3} + 6w_{i-2} - 4w_{i-1} + w_{i+1}) \frac{1}{k^2} + \\ + b(x_i)(-w_{i-4} + 2w_{i-3} - 2w_{i-2} + w_{i-1}) \frac{1}{k^2} + \\ + c(x_i)(w_{i-3} - 2w_{i-2} + w_{i-1}) \frac{1}{k^2} + d(x_i)w_i - q(x_i) = 0 \end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n-1), \quad (30.31)$$

или сокращенно

$$L_i(w) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n-1), \quad (30.32)$$

где  $L_i$  — конечно-разностный оператор, вид которого легко устанавливается непосредственно из формулы (30.31).

Погрешность аппроксимации дифференциального уравнения (30.29) разностным (30.31) связана с отображением в формулах (30.17) для производных остаточных членов  $\sim h^2$ . Следовательно,

погрешность замены дифференциального уравнения (30.29) разностным (30.31) определяется формулой

$$\delta = c \left( \frac{h}{T} \right)^2, \quad (30.33)$$

где  $c$  — некоторый постоянный множитель, зависящий от геометрических параметров балки.

Для увеличения точности расчета по методу сеток можно либо идти на уменьшение размера шага  $h$ , либо применять при получении конечно-разностного уравнения (30.31) уточненные выражения (30.19) для производных.

Если изменение жесткости балки  $EI(x)$  задано графически, то переход от уравнения (30.28) к уравнению (30.29) становится

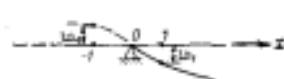


Рис. 21. К формулировке в конечно-разностной форме граничного условия для левого конца балки, свободно защелкнутой на жесткую пятачную опору.



Рис. 22. К формулировке в конечно-разностной форме граничного условия для нестационарного левого конца балки.

затруднительным. В этом случае целесообразно, используя формулы (30.17), поступать с первым членом в уравнении (30.28) так:

$$\frac{d^2}{dx^2} [EI(x)w'(x)]|_{x=-1} = \frac{EI(x_{-1})w''_{-1} - 2EI(x_0)w'_0 + EI(x_{-1})w''_{-1}}{h^2},$$

так

$$w'_0 = \frac{w_{-1} - 2w_0 + w_{-1}}{h^2}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} [EI(x)w'(x)]|_{x=-1} &= \frac{EI_{-1}w'_{-1} - 2(EI_{-1} + EI_0)w_0 +}{h^2} \\ &+ \frac{(EI_{-1} - 2EI_0 + EI_{-1})w_0 - 2(EI_0 + EI_{-1})w_{-1} + EI_{-1}w'_{-1}}{h^4}. \end{aligned} \quad (30.34)$$

Имея полученное выражение (30.34), уже без особых трудностей сможем выписать для уравнения (30.28) его конечно-разностную аппроксимацию.

Обратимся теперь к граничным условиям для уравнения изгиба балки и займемся их заменой конечно-разностными уравнениями. При этом для определения производных будем пользоваться, как и прежде, формулами (30.17) без остаточного члена.

Для каждого торца балки можно записать по два граничных условия.

Рассмотрим несколько вариантов закрепления левого торца балки:

а) балка свободно оперта на жесткую опору

$$\text{при } x = 0 \quad w = 0, \quad w' = 0. \quad (30.35)$$

Используя из формул (30.17) выражение для второй производной, вместо выражений (30.35) получаем два следующих разностных отношения (рис. 21):

$$w_0 = 0, \quad w_{-1} + w_0 = 0; \quad (30.36)$$

б) левый конец балки жестко заделан на жесткую опору

при  $x = 0$

$$w = 0, \quad w' = 0. \quad (30.37)$$

С помощью первого выражения (30.17) вместо формулы (30.37) получаем (рис. 22)

$$w_0 = 0, \quad w_1 - w_{-1} = 0; \quad (30.38)$$

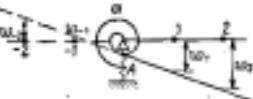


Рис. 23. К формулировке в конечно-разностной форме граничного условия для левого конца балки, укрепленной в коэффициентом податливости  $A$  и скрепленной на упругую опору с коэффициентом податливости  $\bar{A}$ .

в) левый конец балки оперт на упругую опору с коэффициентом податливости  $A$  и упруго заделан на коэффициентом упругой заслойки  $\bar{A}$ .

$$\begin{aligned} w^2 &= \frac{qL}{EI} w^2, \\ \text{при } x = 0 \quad (EIw')' - Tw' &= -\frac{w}{A}, \end{aligned} \quad | \quad (30.39)$$

Получаем два следующих разностных отношения (рис. 23):

$$w_1 - w_{-1} = \frac{2qL^2}{h} (w_1 - 2w_0 + w_{-1}),$$

$$\begin{aligned} EI_1(w_2 - 2w_1 + w_0) - EI_{-1}(w_3 - 2w_{-1} + w_{-2}) - \\ - Th^2(w_1 - w_{-1}) = -\frac{3qL^2w_0}{h}. \end{aligned} \quad | \quad (30.40)$$

Аналогично можно произвести замену граничных условий балки на правом конце соответствующими конечно-разностными условиями.

Если конечно-разностные граничные условия содержат две нечетные узловые точки (как, например, в варианте «в»), то в этом случае в число точек, для которых составляется разностное уравнение (30.31), дополнительно включается контурная точка (в варианте «в» дополнительно включается точка  $x = 0$ ).

Совокупность разностных уравнений (30.31) с граничными условиями, представленными в конечно-разностной форме, обра-

зует систему алгебраических уравнений, решение которой позволяет определить перемещения в узловых точках.

Внося найденные значения узловых перемещений в формулы (30.17), сможем определить значения производных, а по ним и все интересующие нас элементы изгиба рассматриваемой балки, включая изгибающие моменты и перерезывающие силы.

**Пример 1.** Составить систему конечнодифференциальных уравнений метода сеток для расчета на изгиб прямолинейной балки жесткости  $EI$ , загруженной равномерно распределенной нагрузкой  $q$ . Левый конец балки жестко заделан, а правый ( $x = l$ ) свободен (рис. 24).

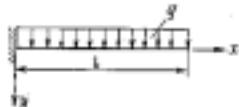


Рис. 24. Прямолинейная балка, загруженная равномерно распределенной нагрузкой.

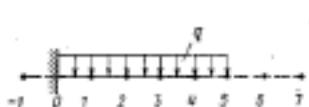


Рис. 25. К расчету балки, изображенной на рис. 24 методом сеток.

**Решение.** Изгиб рассматриваемой балки описывается дифференциальным уравнением

$$EIw''(x) = q(x) \quad (30.41)$$

при граничных условиях

$$\left. \begin{array}{ll} w = 0; & w' = 0; \\ x = 0; & x = l; \\ w' = 0; & w'' = 0. \end{array} \right\} \quad (30.42)$$

Разобьем балку на пять равных участков (рис. 25). Используя формулы (30.17), перепишем граничные условия (30.42) в конечнодифференциальном виде

$$\left. \begin{array}{ll} w_0 = 0; & w_4 - 2w_3 + w_2 = 0; \\ x = 0; & x = l; \\ -w_{-1} + w_1 = 0; & -w_3 + 2w_4 - 2w_5 + w_7 = 0. \end{array} \right\} \quad (30.43)$$

Уравнение равновесия (30.41) преобразуется для  $i$ -й узловой точки в следующее уравнение в конечных разностях:

$$w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2} = \frac{qH}{EI}. \quad (30.44)$$

Совокупность четырех уравнений (30.43) с уравнениями (30.44), записанными для узловых точек  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , образует систему из девяти линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых перемещений  $w_i$  ( $i = -1, 0, 1, \dots, 7$ ).

#### 30.4. Неравномерное разделение одномерной области на отдельные участки

Пусть поведение некоторой функции  $w(x)$  в интервале  $(0, l)$  при некоторых заданных граничных условиях описывается дифференциальным уравнением вида

$$f(x)w'(x)l'' = g(x), \quad (30.45)$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  есть заданные непрерывные функции  $x$ . Если одна из этих функций в каком-то районе  $x$  имеет резкий характер



Рис. 26. К выводу приближенного выражения для производной функции при неравномерной сетке расположения узловых точек.

изменения, то может оказаться целесообразным предусмотреть в этом районе более частую к неравномерную сеть расположения узловых точек (рис. 26).

При этом уравнение (30.45), если воспользоваться первой формулой из выражений (30.17), для  $i$ -й узловой точки перепишем в следующем виде (рис. 26):

$$\left[ f_i(x)w'(x)l''_{i+1} = (f_{i+1}w'_i)l''_{i+1} - (f_{i-1}w'_{i-1})l''_{i-1} \right] \frac{1}{h_i} = \\ = \left[ f_{i+1}(w_{i+1} - w_i) \frac{1}{h_{i+1}} - f_{i-1}(w_i - w_{i-1}) \frac{1}{h_{i-1}} \right] \frac{1}{h_i} = q_i. \quad (30.46)$$

Обозначения ясны из рассмотрения рис. 26.

#### 30.5. Применение метода сеток для решения двухмерных краевых задач

Пусть на некоторую двухмерную область положена ортогональная сетка, образованная семейством прямых

$$x = x_0 + ih; \quad y = y_0 + jk \quad (i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

В этой области задана некоторая функция  $f(x, y)$ .

Входя для узловых точек обозначения согласно рис. 27 и используя зависимости вида (30.17), легко получить формулу для определения смешанных производных  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y^2}$  через узловые значения функции  $f(x, y)$ .

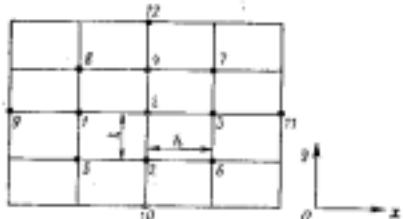


Рис. 27. Ортогональная сетка, наложенная на двумерную область.

В качестве примера приведем вычисление формулы для следующей смешанной производной:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{ij} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (f_{i+2,j} - 2f_{i+1,j} + f_{i,j}) = \\ &= \frac{1}{h^2} (f_{i+2,j} - 2f_{i+1,j} + f_{i,j} - 2(f_{i,j} - 2f_{i-1,j} + f_{i-2,j}) = \\ &= \frac{1}{h^2} (f_{i+2,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j} + f_{i-1,j} - 2(f_{i,j} + f_{i-1,j} + f_{i-2,j}) + 4f_{i-3,j}). \quad (30.47) \end{aligned}$$

В табличной форме (см. табл. 2) представлены формулы для некоторых производных, которые нам потребуются ниже.

Приведем примеры замены дифференциальных уравнений в частных производных уравнениями в конечных разностях.

**Пример 2.** Требуется построить разностное уравнение для бигармонического уравнения

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (30.48)$$

**Решение.** Используя данные табл. 2, нетрудно написать выражения для производных, которые входят в левую часть уравнения (30.48). Внесем эти выражения для производных в (30.48).

Значения числовых коэффициентов при узловых значениях функции в формулах для определения производных в i-й точке двумерной сеточной области, изображенной на рис. 27

Производная	Формулы в узловых точках												Максимальная ошибка
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	
$f_{xx}$	-1												$\frac{1}{2h}$
$f_{yy}$	-2	1											$\frac{1}{h^2}$
$f_{xxxx}$	6	-4											$\frac{1}{h^4}$
$f_{yy}$													1
$f_{xy}$													$\frac{1}{2h^3}$
$f_{yy}$	-2		1										$\frac{1}{h^3}$
$f_{xxyy}$	6	-4	-4										$\frac{1}{h^6}$
$f_{xyxy}$													$\frac{1}{4h^5}$
$f_{xxyy}$													$\frac{1}{h^5}$
$f_{xyxy}$	4	-2	-2	-2	-2	1	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{h^8}$

получаем,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)_{ij} + 2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_{ij} + \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{ij} &= (6w_i - 4w_1 - 4w_3 + \\ &+ w_5 + w_{11}) \frac{1}{h^4} + 2(w_1 - 2w_2 - 2w_3 - 2w_4 + \\ &+ w_5 + w_6 + w_7 - w_9) \frac{1}{h^2 D} + (6w_2 - 4w_1 - \\ &- 4w_3 + w_{10} + w_{11}) \frac{1}{h^2} - \frac{q}{D}. \quad (30.49) \end{aligned}$$

$$\text{Если } h = l, \text{ то уравнение (30.49) можно переписать в виде} \\ 20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) + \\ + (w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12}) = qA^4. \quad (30.50)$$

Заметим, что разностное уравнение (30.50) аппроксимирует соответствующее дифференциальное уравнение с точностью до  $h^4$ .

Наглядное представление о структуре разностного уравнения (30.50) дает рис. 28, где в кружках приведены значения числовых коэффициентов, стоящих перед соответствующими узловыми значениями функций. Каждый из упомянутых кружков расположен на месте той узловой точки, для значения функции которой записаны в этот кружок числовые коэффициенты.

**Пример 3.** Решить методом сеток задачу об изгибе прямоугольной квадратной пластины, загруженной равномерно распределенной нагрузкой  $\varphi$ . Две кромки пластины  $x = \text{const}$  свободно опоры, а кромки  $y = \text{const}$  жестко заделаны (рис. 29).

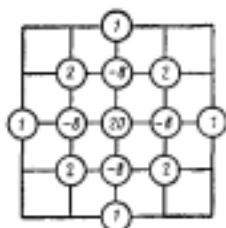


Рис. 28. Расположение узловых точек, участвующих в конструировании уравнения (30.50), и числовые коэффициенты при узловых значениях функции.

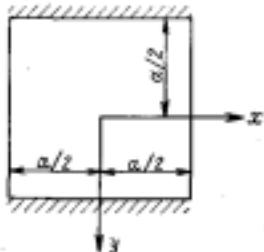


Рис. 29. Прямоугольная пластина, загруженная равномерно распределенной изгибающей нагрузкой. Для кромки пластины  $x = \text{const}$  свободно опоры, а кромки  $y = \text{const}$  жестко заделаны.

**Решение.** Изгиб рассматриваемой пластины описывается дифференциальным уравнением (30.48) при граничных условиях

$$\begin{aligned} &\text{при } x = \pm \frac{a}{2}, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \\ &\text{при } y = \pm \frac{b}{2}, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (30.51)$$

Наложим на пластину сетку с квадратными ячейками, размер сторон которых равен  $\frac{a}{4}$  (рис. 30).

Легко видеть, что для рассматриваемой пластины перемещения в узловых точках, симметрично расположенных относительно координатных осей, одинаковы. Это позволяет резко сократить число неизвестных узловых перемещений.

Дополнятельно к внутренним узловым точкам на рис. 30 пополняет ряд наружных узловых точек, которые входят в разностные уравнения равновесия и граничные условия.

Согласно граничным условиям

$$w = 0 \quad \text{при } x = \pm \frac{a}{2} \quad \text{и } y = \pm \frac{b}{2}$$

перемещения в узловых точках, расположенных вдоль контура пластины, равны нулю и из числа основных неизвестных исключаются.

Приступим к составлению системы разностных уравнений для определения десяти неизвестных узлов перемещений. Эта система объединяет разностные уравнения равновесия типа (30.50) для внутренних узловых точек 1, 2, 3 и 4 и разностные уравнения для тех граничных условий на опорном контуре пластины, которые остались невыполнимыми.

При составлении уравнений равновесия внутренних узловых точек в нашем случае очень удобно воспользоваться рисунком бигармонического оператора, который изображен на рис. 28.

Современный центральный узел рисунка оператора с узлом сетки, для которого требуется написать разностное уравнение, получаем полную информацию о том, какие из узловых перемещений и с какими числовыми коэффициентами входят в это уравнение. Окончательно разностные уравнения равновесия для внутренних узловых точек принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} 20w_1 - 16w_2 - 16w_3 + 8w_4 &= \frac{ab^4}{2600}; \\ -8w_1 + 21w_2 + 4w_3 - 16w_4 + w_5 &= \frac{ab^4}{2600}; \\ -8w_1 + 4w_2 + 21w_3 - 16w_4 + w_5 &= \frac{ab^4}{2600}; \\ 2w_1 - 8w_2 - 8w_3 + 22w_4 + w_5 + w_6 &= \frac{ab^4}{2600}. \end{aligned} \quad (30.52)$$

Границочное условие  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$  в узловых точках кромки  $x = \pm \frac{a}{2}$  приводит к следующим разностным отношениям:

$$w_2 + w_4 = 0; \quad w_4 + w_5 = 0; \quad w_5 = 0. \quad (30.53)$$

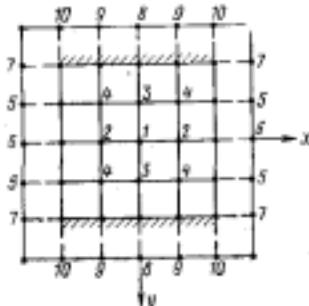


Рис. 30. Сетка узловых точек для пластины, изображенной на рис. 29.

а граничное условие  $\frac{dw}{dy} = 0$  в узловых точках кромки  $y = \frac{a}{2}$  к разностным отношениям ведет

$$w_3 - w_8 = 0; \quad w_1 - w_6 = 0; \quad w_{10} = 0. \quad (30.54)$$

Уравнения (30.52), (30.53) и (30.54) образуют систему десяти линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых перенесений  $w_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, 10$ ).

### 30.6. Аппроксимация граничных условий на криволинейном контуре двухмерной области

Пусть на криволинейном контуре (рис. 31) сеточная области для некоторой краевой задачи заданы значения некоторой функции

$$\psi(s) = \varphi(s) \quad (30.55)$$

либо ее нормальной производной

$$\frac{dw}{ds} = \psi(s). \quad (30.56)$$

Если контур  $s$  заменяется ступенчатой ломаной линии  $s-7-1-6-5$ , то для установления величины функции  $w$  на границе сеточной области по известным значениям функции  $\varphi$  на криволинейном контуре можно воспользоваться линейной аппроксимацией изменения функции  $\varphi$  в любом из направлений сеточной области. Например, значение функции  $\varphi$  в узле  $I$  можно выразить через неизвестное значение функции  $\varphi$  в узле  $A$  и заданное значение в точке  $A$

$$\frac{w_6 - w_A}{l - l_A} = \frac{w_4 - w_3}{l_3},$$

откуда

$$w_6 = \frac{l_A - (l - l_A)}{l_3} w_3. \quad (30.57)$$

Рис. 31. К аппроксимации граничных условий на криволинейном контуре двухмерной области.

Точно так же определяются значения функции в остальных узлах ступенчатой ломаной линии, которой аппроксимируется криволинейный контур области.

Покажем теперь, каким образом от контурного условия (30.56) перейти к разностным формулам.

Нормальная производная  $\frac{dw}{ds}$  в контурном узле  $E$  (рис. 31)

определенна по формуле

$$\left( \frac{dw}{ds} \right)_E = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_E \cos \alpha_E + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_E \sin \alpha_E,$$

откуда

$$\left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)_E \approx \frac{w_1 - w_5}{l_5} \cos \alpha_E + \frac{w_4 - w_3}{l_3} \sin \alpha_E, \quad (30.58)$$

т.е.

$$\left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)_E \approx \frac{w_6 - w_1}{l_1} \cos \alpha_E + \frac{w_4 - w_3}{l_3} \sin \alpha_E. \quad (30.59)$$

Точно так же можно получать выражения для конечно-разностной аппроксимации любой высшей производной, заданной на контуре. Располагая же разностными выражениями для производных, сможем представить в конечно-разностной форме любые заданные на криволинейном контуре граничные условия и тем самым получить для рассматриваемой краевой задачи недостающие разностные уравнения для определения значений узловых функций сеточной области.

### § 31. МЕТОД СЕТОК ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ УЗЛОВЫХ ТОЧЕК

Использование прямоугольной сетки может привести к значительным погрешностям в конечно-разностном представлении граничных условий для определенной функции на криволинейном контуре. Точность представления краевых условий, а тем самым и точность решения самой краевой задачи можно было бы повысить, если аппроксимировать контур области ломаной линией с узловыми точками, расположенным на контуре (рис. 32).

На примере рассмотренного двухмерного дифференциального уравнения будет изложен общий метод получения конечно-разностных уравнений при произвольном расположении сетки узлов.

Любое из дифференциальных линейных уравнений 2-го порядка для двухмерной области

$$L^{(2m)}(w) = q(x, y) \quad (31.1)$$

можно переписать в виде

$$\begin{aligned} L^{(2m)}(w) &= a_{00}w_{0,0} + a_{10}w_{1,0} + a_{01}w_{0,1} + a_{20}w_{2,0} + \\ &+ a_{11}w_{1,1} + a_{02}w_{0,2} + a_{30}w_{3,0} + a_{21}w_{2,1} + \dots + \\ &+ a_{03}w_{0,3} + \dots + a_{qp}w_{q,p} + \dots + a_{mn}w_{n,m} = q(x, y), \end{aligned} \quad (31.2)$$



Рис. 32. Сеточная область, ограниченная криволинейным контуром.

где  $a_{\alpha\beta}$  — известные функции  $x, y$ ; а

$$w_{\alpha\beta} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} w}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}.$$

Например, гармоническое уравнение  $\nabla^2 w = q$  в соответствии с уравнением (31.2) записано так:

$$\begin{aligned} \nabla^2 w = 0w + 0 \frac{\partial w}{\partial x} + 0 \frac{\partial w}{\partial y} + 1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ + 1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x, y). \end{aligned} \quad (31.3)$$

Теперь поставим перед собой следующую задачу: для  $i$ -го узла при произвольном расположении соседних узловых точек ( $j = 1, 2, 3, \dots, \mu$ ) заменить дифференциальное уравнение (31.2) разностным уравнением вида

$$\sum_{j=1}^{\mu} (w_j - w_i) k_{ij} - w_i k_{ii} = L_i^{(diff)}(w) + R_i(w) = q_i, \quad (31.4)$$

где  $k_{ij}$  — коэффициенты, подлежащие определению;  $L_i(w)$  — разностный оператор для  $i$ -й узловой точки сеточной области;  $R_i(w)$  — остаточный член для  $i$ -й узловой точки.

Систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $k_{ij}$  можно получить следующим образом. На основании формулы Тейлора

$$\begin{aligned} w_j - w_i = (x_j - x_i) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_i + (y_j - y_i) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_i + \\ + \frac{(x_j - x_i)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_i + \dots + \frac{(x_j - x_i)^\mu (y_j - y_i)^\mu}{\alpha! \beta!} \times \\ \times \left( \frac{\partial^{\alpha+\beta} w}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \right)_i + \dots; \quad (j = 1, 2, 3, \dots, \mu). \end{aligned} \quad (31.5)$$

Восс из формулы (31.5) значение разности в левую часть уравнения (31.4), находим

$$\begin{aligned} -w_i k_{ii} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_i \sum_{j=1}^{\mu} k_{ij} (x_j - x_i) + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \times \\ \times \sum_{j=1}^{\mu} k_{ij} (y_j - y_i) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_i \sum_{j=1}^{\mu} k_{ij} \frac{(x_j - x_i)^2}{2!} + \dots \\ \dots + \left( \frac{\partial^{\alpha+\beta} w}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \right)_i \sum_{j=1}^{\mu} \frac{(x_j - x_i)^\mu (y_j - y_i)^\mu}{\alpha! \beta!} + \dots = q_i. \end{aligned} \quad (31.6)$$

Приравнивая коэффициенты при членах с одинаковыми производными в левых частях уравнений (31.2) и (31.6), получим искомую систему алгебраических уравнений для определения неизвестных  $k_{ij}$

$$\begin{aligned} k_{ii} &= -a_{\alpha\beta}(x_i, y_i); \\ \sum_{j=1}^{\mu} (x_j - x_i) k_{ij} &= a_{\alpha\beta}(x_i, y_i); \\ \sum_{j=1}^{\mu} (y_j - y_i) k_{ij} &= a_{\alpha\beta}(x_i, y_i); \\ \sum_{j=1}^{\mu} \frac{(x_j - x_i) (y_j - y_i)}{\alpha! \beta!} k_{ij} &= a_{\alpha\beta}(x_i, y_i). \end{aligned} \quad (31.7)$$

Естественно, что число уравнений в системе (31.7) определяется числом коэффициентов  $a_{\alpha\beta}$ , которое зависит от порядка  $2m$  дифференциального уравнения (31.2). С другой стороны, число подлежащих определению  $k_{ij}$ , зависящее от числа  $\mu$ , должно быть равно числу уравнений в системе (31.7). Отсюда легко получить значение минимального числа смежных точек  $\mu$  в зависимости от порядка дифференциального уравнения  $2m$ :

$2m$	2	3	4	—	$2m$
$\mu$	5	9	14	—	$m(2m+3)$

Если число смежных точек больше  $\mu$ , то уравнение (31.2) следует дополнить членами с более высоким порядком производных, например членами вида  $0 \frac{\partial w}{\partial x^0} + 0 \frac{\partial w}{\partial y^0}$  и т. д.

Вопрос найденные из решения системы (31.7) коэффициенты  $k_{ij}$  в уравнение (31.4), получает окончательный вид искомого разностного уравнения, аппроксимирующего значение дифференциального уравнения (31.1) в  $i$ -й узловой точке.

Пример 1. Для дифференциального уравнения  $\nabla^2 w(x, y) = q(x, y)$  требуется получить соответствующее ему разностное уравнение.

Решение. Поскольку в нашем случае  $2m = 2$ , число смежных узлов должно быть не меньше  $\mu = 5$ . Этим требованием будет удовлетворять треугольная сетка, изображенная на рис. 33.

Сопоставляя уравнения (31.3) и (31.2), находим значения коэффициентов  $a_{\alpha\beta}$

$$a_{00} = 0, \quad a_{02} = 0, \quad a_{20} = 0, \quad a_{10} = 1, \quad a_{01} = 1, \quad a_{22} = 1. \quad (31.8)$$

Используя данные на рис. 33, легко перенести для рассматриваемого случая систему уравнений (31.7). Имеем

$$\begin{aligned} k_{11} &= 0; \\ -k_{11} - \frac{1}{2}k_{12} + \frac{1}{2}k_{13} + k_{14} + \frac{1}{2}k_{15} - \frac{1}{2}k_{16} &= 0; \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}k_{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}k_{13} - \frac{\sqrt{3}}{2}k_{14} + \frac{\sqrt{3}}{2}k_{15} &= 0; \\ \frac{1}{2}k_{11} + \frac{1}{8}k_{12} + \frac{1}{8}k_{13} + \frac{1}{2}k_{14} + \frac{1}{8}k_{15} + \frac{1}{8}k_{16} &= \frac{1}{N^2}; \\ \frac{\sqrt{3}}{4}k_{16} - \frac{\sqrt{3}}{4}k_{15} + \frac{\sqrt{3}}{4}k_{14} - \frac{\sqrt{3}}{4}k_{13} &= 0; \\ \frac{3}{8}k_{12} + \frac{3}{8}k_{13} + \frac{3}{8}k_{15} + \frac{3}{8}k_{16} &= \frac{1}{N^2}. \end{aligned} \quad (31.9)$$

Для получения симметричного рисунка расположения смежных узловых точек выше был введен дополнительный, шестой узел. Это привело к появление в системе (31.9) однолинейной неизвестной. Поэтому одним из коэффициентов  $k_{ij}$  можно было бы задаться произвольно либо определять его значение с помощью одного из дополнительных условий

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0, \\ a_{14} = 0.$$

Однако более целесообразным будет, если мы, используя симметрию, например, расположения точек 1 и 4, предположим, что

$$k_{11} = k_{14}, \quad (31.10)$$

Тогда из выражений (31.9) получим окончательно следующие значения коэффициентов  $k_{ij}$ :

$$k_{11} = 0, \quad k_{1j} = \frac{2}{3} \frac{1}{N^2} \quad (j = 1, 2, \dots, 6). \quad (31.11)$$

Внося найденные значения  $k_{ij}$  в уравнение (31.4), получаем разностное уравнение

$$\sum_{i=1}^6 (w_i - w_1) + R_c = \frac{2aN^2}{3}, \quad (31.12)$$

которым аппроксимируется значение дифференциального уравнения  $\nabla^2 w = q(x, y)$  в  $i$ -й узловой точке.

Здесь  $R_c$  — остаточный член, величина которого имеет порядок  $N^4$  по сравнению с остальными членами уравнения.

Преобразуя выражение остаточного члена из уравнения (31.12), получаем

$$\sum_{i=1}^6 (w_i - w_1) = \frac{3aN^2}{2}. \quad (31.13)$$

Рисунок дифференциального оператора  $\nabla^2$  для треугольной сетки, дающей полное представление о содержании любой части разностного уравнения (31.13), приведен на рис. 34.

Изложенная выше процедура составления разностных уравнений весьма просто может быть запрограммирована с целью

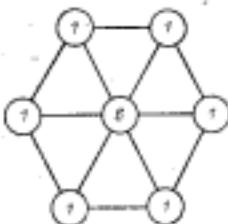


Рис. 34. Расположение узловых точек, участвующих в конструировании уравнения (31.12), в зависимости от коэффициентов при смежных узловых функциях.



Рис. 35. Пример неудовлетворительного расположения сеточных узловых точек.

автоматического получения с помощью ЭВМ необходимой системы разностных уравнений для каждого внутреннего узла рассматриваемой области.

Хотя всегда выше и предполагалось, что смежные точки  $j (1, 2, 3, \dots, p)$  произвольно расположены относительно узла  $i$ , все же для получения удовлетворительной часовой устойчивости при решении системы (31.12) нужно стремиться равномерно распределить точки  $j$  в окрестности узла.

Например, совершение неудовлетворительный результат получим при расположении смежных точек  $j$  вдоль одного направления (рис. 35).

В заключение отметим, что точность аппроксимации дифференциального уравнения разностным уравнением можно повысить либо уменьшением шага сетки, либо сохранением в расположении уравнения (31.6) членов с производными более высоких порядков (зан остаточного члена). Учет таких членов, естественно, потребует увеличения числа смежных узловых точек, что приведет к определенному усложнению структуры разностного уравнения.

## МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В последние годы исключительно широкое использование в расчетах прочности строительных, аэрокосмических и судовых конструкций получили метод конечных элементов (МКЭ). Этот метод нашел применение не только в расчетах прочности, но также в целом при решении краевых задач механики сплошных сред, т. е. при решении задач теплопроводности, термоупругости и термопластичности, волновых процессов, гидромеханики, гидроупругости и т. д. Несмотря на сравнительно короткий срок «использования» этого метода (около 30 лет), достаточно оснований рассматривать его в качестве одного из наиболее эффективных численных методов оценки прочности сложных судовых конструкций.

Широкое использование МКЭ в значительной мере объясняется наличием машинных программ, обладающих высокой степенью автоматизации трудоемких операций составления и решения систем алгебраических уравнений, автоматизация сеточного представления области, минимумом требований к исходной информации и оптимальной формой выдачи результатов.

Большим достоинством МКЭ является также его исключительная индифферентность в отношении характера закрепления рассматриваемой конструкции, закона изменения векторной нагрузки и т. д. Тогда как в «классической» строительной механике или теории упругости, где положение рассматриваемого упругого тела в общем случае определяется некоторой совокупностью дифференциальных зависимостей, геометрия тела, характер граничных условий, закон изменения жесткостных свойств материала по объему тела и т. д. существенно влияют на выбор подходящего метода и на трудоемкость расчета в целом. В самом деле с позиций «классических» методов элементарная задача кратко свободно оторвавшейся призмой пластинки при введении точечных закреплений по опорному контуру переходит в разрывно-непрерывно-трудные задачи. При использовании же МКЭ переход к другим граничным условиям по контуру пластины требует лишь соответствующего изменения исходных данных задачи. Учет температурного влияния в упругопластичной работе материала не вносит принципиальных затруднений при использовании МКЭ.

Важно также подчеркнуть, что для метода конечных элементов тип дифференциального уравнения не имеет особого значения. Он лишь определяет характер и содержание краевых условий. Хотя заметим, что большинство приложений МКЭ связано с рассмотрением краевых задач, описываемых уравнениями эллиптического типа.

Первоначально развитие МКЭ шло по двум направлениям. С одной стороны, он разрабатывался на основе краев, используемых в строительной механике стержневых систем. С другой стороны, МКЭ развивался как некоторая разновидность вариационно-разностного метода решения задач математической физики. Нанесло упомянутых направлений заложено соответственно в работах Р. Куранта [134], Таргера, Клаффа и Мартинса [158]. В дальнейшем оба эти направления объединились.

В последние годы появилось большое число работ, посвященных самым различным аспектам МКЭ. Перечень монографических литературы достаточно обширен [42, 43, 87, 104, 106, 131, 135, 139, 143, 144, 152].

Наше прследует цель изложить основные идеи, связанные с применением МКЭ в механике деформируемых тел, в строительной механике корабля.

Изложение построено таким образом, чтобы были показаны возможности применения МКЭ к решению краевых задач механики любой сплошной среды.

В главе с достаточной полнотой излагаются пути получения матрицы жесткости конечного элемента. Показаны особенности использования МКЭ при учете геометрической и физической нелинейности материала конструкций. Указана связь между МКЭ и вариационными методами. Излагаются вопросы использования МКЭ для расчета стержней, стержневых конструкций, пластин и оболочек, для решения пространственных задач теории упругости. Освещается вопрос использования МКЭ для решения нестационарных и динамических задач. Рассмотрены вопросы оценки сходимости и точности МКЭ и путей дальнейшего повышения эффективности этого метода при расчете сложных судовых конструкций.

### § 32. СУЩНОСТЬ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

#### 32.1. Вводные замечания

Выше уже отмечалась математическая родственность многих различных по своему физическому содержанию краевых задач. Приведем в качестве примера плакагармоническое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = q(x, y, z), \quad (32.1)$$

где  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  — заданные функции независимых переменных, которыми характеризуются свойства среды внутри некоторой замкнутой области  $U$ ;  $q(x, y, z)$  — внешнее воздействие. Физическая интерпретация этих функций зависит от характера рассматриваемой физической проблемы.

Границное условие на поверхности  $S$  для уравнения (32.1)

в наиболее общем виде формулируется так:

$$k_x \frac{\partial w}{\partial x} + k_y \frac{\partial w}{\partial y} + k_z \frac{\partial w}{\partial z} + f(x, y, z) + l(x, y, z)w = 0, \quad (32.2)$$

где  $f(x, y, z)$  и  $l(x, y, z)$  — известные функции;  $k_x, k_y, k_z$  — направляющие косинусы нормали к поверхности  $S$ .

Уравнениям (32.1) и (32.2) описывается краевая задача математического типа для ряда физических проблем: а) кручение прismaticальных стержней; б) теплопроводность; в) гравитация; г) стационарные волновые процессы; д) гидродинамика идеальной несжимаемой жидкости и т. д.

Математическая родственность многих современно разработанных по физическому содержанию проблем послужила основой для расширения в последние годы области применения метода конечных элементов. Сформировавшись первоначально в качестве приближенного метода решения задач механики деформируемых сред метод конечных элементов начинает все шире использоваться в задачах гидродинамики, теплопроводности, гравитации и т. п., постепенно превращаясь в один из наиболее эффективных численных методов решения краевых задач механики сплошных сред.

Переходим к изложению сущности МКЭ.

Пусть поведение искомой функции  $w(x, y, z)$  внутри заданной ограниченной области  $V$  определяется некоторым дифференциальным уравнением 2-го порядка

$$L^{(m)}(w, K, x, y, z) = q(x, y, z) \in V. \quad (32.3)$$

Здесь  $K$  — параметр, характеризующий свойства сплошной среды в объеме  $V$ ;  $q(x, y, z)$  — внешнее воздействие.

Уравнение (32.3) дополняется совокупностью  $m$  краевых условий:

а) замкнут, в которые входят производные от искомой функции по координатам не выше  $m - 1$ -го порядка,

$$\Gamma_i \left( w, \dots, \frac{\partial^{a+b+c}}{\partial x^a \partial y^b \partial z^c}, x, y, z \right) = f_i(x, y, z) \quad (32.4)$$

$$(1 \leq a + b + c \leq m - 1; i = 1, 2, \dots, r),$$

б) естественных, условия которых содержат хотя бы один член с производной порядка  $a + b + c \geq m$ ,

$$E_i \left( w, \dots, \frac{\partial^{a+b+c}}{\partial x^a \partial y^b \partial z^c}, x, y, z \right) = f_i(x, y, z) \quad (32.5)$$

$$(m < a + b + c \leq 2m - 1; i = r + 1, \dots, m).$$

В строительной механике главные краевые условия часто являются кинематическими, а естественные — силовыми краевыми или граничными условиями.

Известно, что для определения функций  $w(x, y, z)$  вместо совместного рассмотрения уравнений (32.3), (32.4) и (32.5) можно воспользоваться условием стационарности некоторого функционала

$$\mathcal{E}(w) = 0. \quad (32.6)$$

Функционал  $\mathcal{E}(w)$  содержит производные от  $w(x, y, z)$  до  $m$ -го порядка (вместо производных до 2-го порядка в дифференциальном уравнении (32.3)). Это облегчает подбор аппроксимирующей функции для  $w(x, y, z)$ , поскольку для получения однозначного функционала  $\mathcal{E}(w)$  требуется обеспечить непрерывность функции  $w(x, y, z)$  и ее производных лишь до  $m - 1$ -го порядка включительно.

Конкретное же выражение функционала  $\mathcal{E}$  определяется содержанием дифференциального уравнения (32.3) и тех из граничных условий (32.4) и (32.5), которые оставались невыполнимыми при выборе аппроксимирующей функции для  $w(x, y, z)$ .

Выполненного вполне достаточно, чтобы понять и правильно сформулировать необходимые и достаточные условия, соблюдение которых при выборе аппроксимирующей функции для  $w(x, y, z)$  обеспечивает сходимость решений по МКЭ с точным при уменьшении размеров конечных элементов, на которые разбивается рассматриваемая область  $V$ .

## 32.2. Основные операции в процедуре метода конечных элементов

Процедура метода конечных элементов состоит из следующих основных операций:

**I. Идеализация области.** Область  $V$  представляется в виде совокупности конечных элементов  $V_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, M$ ), взаимодействующих между собой в узловых точках. Здесь  $M$  — общее число конечных элементов.

Выбор формы и числа узловых точек для конечных элементов зависит от характера рассматриваемой задачи и от той точности решения, которую требуется обеспечить. Например, при решении плоских задач (плоское напряженное состояние, обтекание тела потоком жидкости, задача теплопроводности в пластике и т. д.) аппроксимация области производится треугольными, четырехугольными плоскими конечными элементами (рис. 36). Если рассматривается трехмерная область, то обычно она идеализируется с помощью элементарных тетраэдров, премногулочных параллелепипедов либо неправильных пятисторонников (рис. 37).

**II. Выбор основных неизвестных.** В качестве основных неизвестных в МКЭ принимаются узловые значения искомой функции и ее частных производных до  $m$ -го порядка. Правда, как будет показано ниже, для обеспечения условий сходимости метода достаточно включить в число узловых неизвестных лишь опреде-

ленную часть из общего числа производных  $m$ -го порядка. Более того, иногда вообще производные  $m$ -го порядка полностью исключаются из числа узловых неизвестных.

Например, при решении задач, описываемых квазигармоническим уравнением ( $2m = 2$ ), в качестве неизвестных в каждой

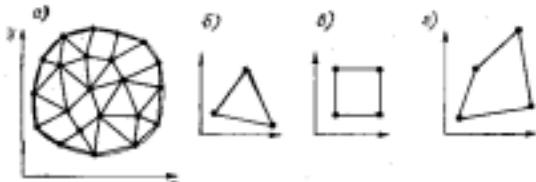


Рис. 36. Плоские двумерные конечные элементы: а — двумерная область, разбитая на конечные элементы; б — треугольный элемент; в — квадратный элемент; г — четырехугольный элемент.

$i$ -й узловой точке достаточно принять значения определяемой функции  $\psi_i$ . Если же рассматривается плоская краевая задача, описываемая биархимоническим уравнением ( $2m = 4$ ), то здесь при строгом соблюдении условий сходимости метода в каждой

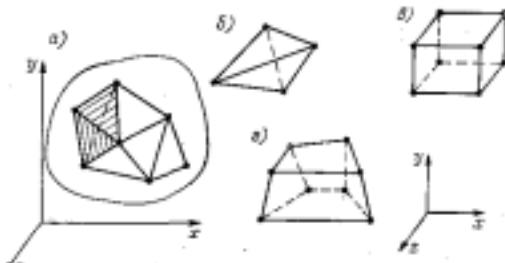


Рис. 37. Объемные конечные элементы: а — область, разбитая на объемные элементы; б — тетраэдр; в — квадратный параллелепипед; г — шестигранник.

узловой точке следует уже принять в качестве неизвестных  $\psi_i$ ,  $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_i$ ,  $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_i$ ,  $\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)_i$ .

Видим, что в первом примере в число узловых неизвестных производные  $m$ -го порядка не входят, во втором — они входят лишь частично.

Число узловых точек, умноженное на число неизвестных в каждой из точек, определяет число степеней свободы, от которого зависит точность определения искомой функции в объеме каждого из конечных элементов, а следовательно, и во всей области  $V$ . Увеличить точность решения можно либо путем увеличения числа конечных элементов, на которые разбивается область, либо путем увеличения числа узловых точек, т. е. числа степеней свободы для каждого из конечных элементов. Примеры построения таких высокоточных элементов приведены на рис. 38.

III. Построение интерполирующего полинома. После выбора узловых неизвестных переходим к выполнению следующей основ-

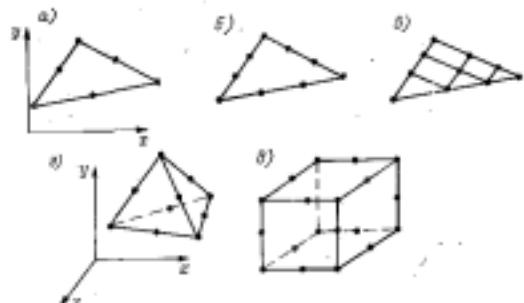


Рис. 38. Высокоточные конечные элементы: а, б — плоские; в, г — объемные.

ной операции метода — построению интерполирующего полинома, который выражается законом изменения искомой функции  $\psi(x, y, z)$  по объему конечного элемента через значения его узловых неизвестных.

Основная трудность построения состоит в том, что полученные интерполирующие полиномы для каждого конечного элемента должны обеспечить непрерывность функции  $\psi(x, y, z)$  и ее производных до  $m = 1$ -го порядка наклонительно во всей области  $V$ . Что же касается производных  $m$ -го порядка, то в каждом из интерполирующих полиномов должны содержаться члены, обеспечивающие их переход к постоянным значениям при уменьшении размеров конечного элемента. При этом производные  $m$ -го порядка могут иметь разрывы первого рода по границам стыковки смежных конечных элементов.

При соблюдении этих условий построения интерполирующих полиномов становится возможным в дальнейшем при определении

значения функционала  $\mathcal{E}$  для всей области  $V$  воспользоваться следующей зависимостью:

$$\mathcal{E}(w) = \sum_{i=1}^M \mathcal{E}(w^{(i)}), \quad (32.7)$$

где  $\mathcal{E}(w^{(i)})$  — значение функционала  $\mathcal{E}(w)$  в замкнутом объеме  $i$ -го конечного элемента.

При этом с увеличением числа конечных элементов сумма в правой части равенства (32.7) будет равномерно стремиться к точному значению функционала  $\mathcal{E}(w)$  для всей области  $V$ .

В дальнейшем вопросы построения интерполирующих полиномов для конечных элементов определены геометрии и класса задач будут рассмотрены подробно. Пока же предположим, что интерполирующий полином для  $i$ -го конечного элемента определен и может быть представлен в виде

$$w^{(i)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^r \beta_k^{(i)}(x, y, z) q_k^{(i)} - [\mathcal{E}(x, y, z)]^{(i)} [q]^{(i)}, \quad (32.8)$$

где  $[\mathcal{E}(x, y, z)]^{(i)}$  — вектор-строчка, элементами которой являются известные функции координат точек. Вид функций  $\beta_k(x, y, z)$  определяется геометрией элемента, классом задач и содержанием вектора  $[q]^{(i)}$ ;  $[q]^{(i)}$  — вектор-столбец, состоящий из  $r$  узловых неизвестных  $i$ -го конечного элемента. Тогда аппроксимация закона изменения искомой функции  $w(x, y, z)$  по всей области  $V$  определяется суммой

$$w(x, y, z) = \sum_{i=1}^M w^{(i)}(x, y, z) = \sum_{i=1}^M [\mathcal{E}]^{(i)} [q]^{(i)} \quad (32.9)$$

или

$$w(x, y, z) = [\mathcal{E}(x, y, z)] [q]. \quad (32.10)$$

где

$$[\mathcal{E}(x, y, z)] = [\mathcal{E}]^{(1)} [\mathcal{E}]^{(2)} \dots [\mathcal{E}]^{(M)}; \quad (32.11)$$

$$[q] = [[q]^{(1)} [q]^{(2)} \dots [q]^{(M)}] \quad (32.12)$$

— вектор неизвестений для полной области в местной системе координат.

**IV. Получение основной системы разрешающих уравнений.** Минимизируя функционал  $\mathcal{E}(w)$  по всем элементам вектора  $[q]$  всей области, получаем

$$\frac{\partial \mathcal{E}(w)}{\partial [q]} = \left[ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_1} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_2} \dots \right] = 0. \quad (32.13)$$

Если справедлива зависимость (32.7), то уравнение (32.13) принимает вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}(w)}{\partial [q]} = \sum_{i=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}(w^{(i)})}{\partial [q]} = \sum_{i=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}(w^{(i)})}{\partial [q]^{(i)}}. \quad (32.14)$$

Так суммирование производится по всем конечным элементам.

Для линейных задач функционал  $\mathcal{E}(w)$  является квадратичной функцией от  $w$  и ее производных, и, следовательно,  $i$ -й член правой части выражения (32.14) примет вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}(w^{(i)})}{\partial [q]^{(i)}} = [K]^{(i)} [q]^{(i)} + [P]^{(i)}, \quad (32.15)$$

где  $[K]^{(i)}$  — квадратная матрица размером  $r \times r$ . Коэффициенты этой матрицы определяются свойствами среды. Для линейных задач матрица  $[K]^{(i)}$  будет функцией вектора  $[q]^{(i)}$ ;  $[P]^{(i)}$  — вектор размером  $r$ . Он определяет внешнее воздействие на  $i$ -й элемент.

С учетом результата (32.15) уравнение (32.14) перепишем в виде

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial [q]} = \sum_i [K]^{(i)} [q] + [P] = 0, \quad (32.16)$$

или

$$\sum_i [K]^{(i)} = -[P]^{(1)} - [P]^{(2)} - \dots - [P]^{(M)} \quad (32.17)$$

— квазидиагональная матрица размером  $rM \times rM$ ;

$$[P] = ([P]^{(1)} [P]^{(2)} \dots [P]^{(M)}) \quad (32.18)$$

— вектор-столбец размером  $rM$ .

Уравнение (32.16) записано в местной системе координат. В целях дальнейших упрощений целесообразно от местной системы осуществлять переход к так называемой общей системе координат. Поясним это новое и требует некоторых пояснений.

Ранее отмечалась непрерывность функции  $w(x, y, z)$  и ее производных до  $m$ -го порядка во всей области  $V$ . Означает, что в узловых точках эти величины, приимаемые нами за основные неизвестные, также непрерывны и, следовательно, не зависят от координатности узловой точки в том или ином из примыкающих к ней конечных элементов.

Введем для  $i$ -й узловой точки вектор неизвестных  $\{\tilde{q}\}_i$ . Составность этих векторов образует вектор основных неизвестных в общей системе координат

$$[\tilde{q}] = [\tilde{q}_1] [\tilde{q}_2] \dots [\tilde{q}_M] = [\tilde{q}_1 \ \tilde{q}_2 \ \dots \ \tilde{q}_M], \quad (32.19)$$

где  $M$  — число узлов;  $N$  — число неизвестных по всей области. Между векторами  $[q]$  и  $[\tilde{q}]$  существует определенная связь:

$$[q] = [B] [\tilde{q}], \quad (32.20)$$

где  $[H]$  — базисная матрица размером  $rM \times N$ . Её структура определяется геометрией элемента, классом краевой задачи и принятым порядком нумерации для элементов векторов  $\{\bar{q}\}$  и  $\{\bar{p}\}$ . Более детально о содержании матрицы  $[H]$  будет сказано ниже.

Если теперь принять в векторе  $[P]^{(0)}$  тот же порядок нумерации компонентов, который использован в векторе  $\{\bar{q}\}^{(0)}$ , то, умножив уравнение (32.16) слева на матрицу  $[H]^T$  и учтывая зависимость (32.20), получим

$$[\bar{K}] \{\bar{q}\} + \{\bar{p}\} = 0, \quad (32.21)$$

где

$$[\bar{K}] = [H]^T [K_{el}] [H] \quad (32.22)$$

— общая матрица коэффициентов при основных неизвестных в общей системе координат для всей области. Размер квадратной матрицы  $[\bar{K}]$  равен  $N \times N$ ;

$$\{\bar{P}\} = [H]^T [P] \quad (32.23)$$

— вектор-столбец размером  $N \times 1$ . Его элементы характеризуют внешнее воздействие на всю область  $V$ .

Полученное матричное уравнение (32.21) есть исходная система алгебраических уравнений для определения основных узловых неизвестных.

**V. Совместное решение системы алгебраических уравнений (32.21). Определение отдельных «выходных» параметров краевой задачи.** Для линейных краевых задач система уравнений (32.21) линейна. Для ее решения обычно используются методы Гаусса, Холецкого, Зейцеля, спиральных градиентов и многое другое, при очень высоком порядке системы, итерационные методы.

Для нелинейных краевых задач система уравнений (32.21) нелинейна, поскольку матрица  $[\bar{K}]$  является функцией определяемых неизвестных параметров  $\bar{q}$ . При решении нелинейной системы алгебраических уравнений используются итерационные методы. Некоторые из этих методов изложены в § 42.

Пусть вектор  $\{\bar{q}\}$  найден. Тогда с помощью зависимости (32.20) можно определить вектор  $\{q\}$ , в этом, воспользовавшись выражением (32.10), — функцию  $\psi(x, y, z)$  для всей области  $V$ . Значения производных от функции  $\psi(x, y, z)$ , которые нас также могут интересовать при решении краевых задач, определяются либо дифференцированием полученного выражения для  $\psi(x, y, z)$ , либо непосредственно через узловые значения исковых производных, если последние входят в состав вектора  $\{\bar{q}\}$ .

### 32.3. Характерные черты метода конечных элементов

Из вышеизложенного следует, что МКЭ имеет, с одной стороны, сеточный (разбиение области на конечные элементы) и, с другой стороны, вариационный (решение непосредственно вариационной задачи) характер. Именно с этим связаны преимущества МКЭ как приемного метода математической физики. Вариационный подход обеспечивает более широкие теоремы существования, так как выражения, стоящие в функционалах, имеют порядок производных, равный половине порядка исходных дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемую краевую задачу. Это расширяет класс допустимых функций и, в частности, позволяет конструировать решение при помощи не очень гладких, но, что важно, локализованных функций, составляющих основу МКЭ [8]. Одним словом, МКЭ впитал в себя преимущества сеточных и вариационных методов решения задач математической физики, сбросив их слабые стороны.

Сеточные методы очень затруднительно использовать при сложной геометрии области  $V$ . Для области со сложной геометрией практически невозможно использовать вариационные методывиду очевидных затруднений с построением координатных функций. Метод конечных элементов лишен указанных выше затруднений. Это, пожалуй, единственный из сегодня метод, который бы позволял такое «образование» к геометрии области, к характеру краевых условий, законам изменения свойств среды и внешнему воздействию на область.

Сеточный характер МКЭ приводит к тому, что разрешающие системы алгебраических уравнений оказываются хорошо обусловленными с редко заполненными матрицами и, что очень важно, формирование таких матриц резко упрощается.

МКЭ можно трактовать как специфический метод Ритца. Специфика состоит в выборе координатных функций и в формировании функционала. Координатные функции в МКЭ отличны от кляя только в окрестности соответствующего узла и, следовательно, носят локальный характер. Это обеспечивает решающее преимущество МКЭ по сравнению с классическими вариационными методами, изложенными в гл. II. Кроме того, в классическом варианте метода Ритца добавление новых координатных функций не меняет координатные функции, использованные ранее. В МКЭ добавление новых координатных функций связано с новой разбивкой на элементы и узлы и может вызвать изменение всех координатных функций. Таким образом, в МКЭ при переходе от одного приближения к другому, мы встречаемся же с последовательностью координатных функций, как в классическом методе Ритца, а с последовательностью набора координатных функций.

Указанные преимущества МКЭ вряд ли обеспечили бы ему ту популярность, которой он пользуется при решении различных

различ механизмы сплошных сред. Дело здесь еще и в том, что для таких задач вся процедура МКЭ допускает простую и удобную механическую интерпретацию, которая позволяет ясно понять существо каждого составного этапа метода при решении краевых задач.

Метод конечных элементов можно было бы назвать детинской вычислительной техники, и он не мыслим без использования ЭВМ.

На сегодня большинство наиболее трудоемких операций в процедуре МКЭ обеспечены программами. Последнее в совокупности с отмеченными выше положительными чертами и обеспечивает методу конечных элементов исключительно широкую область использования при решении самых разнообразных задач механики сплошных сред.

#### § 33. ИДЕАЛИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ

Замена исходной конструкции совокупностью дискретных элементов подразумевает равенство энергий конструкции и ее дискретной модели. Для некоторых конструкций соблюдение энергетического баланса ведет к получению дискретной модели, точно описывающей поведение исходной конструкции. Это характерно для конструкций, которые уже состоят из отдельных элементов с дискретным сопряжением их между

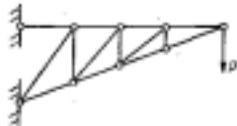


Рис. 38. Плановая ферма.

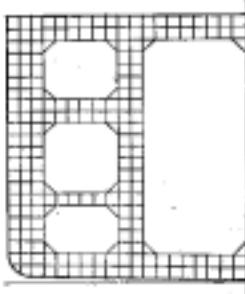


Рис. 40. Идеализация поверхности супертрактории совокупностью плановых конечных элементов.

собой. В качестве примера можно указать на фермы, рамы, стяжные перекрытия.

Если же элементы реальной конструкции вдоль своей границы имеют непрерывные связи со смежными элементами, то при построении дискретной модели мы вынуждены вводить некоторые априорные предположения о характере силового или кинематического взаимодействия между смежными элементами. В этом случае дискретная модель будет лишь приближенно отражать поведение исходной конструкции.

Приведем примеры разбиения конструкций на конечные элементы.

При мер 1. Ферма, изображенная на рис. 38, состоит из прямолинейных шарниро-состыкованных между собой стержней. Каждый стержень фермы работает лишь на растяжение-сжатие.

Если за элементы принять отдельные стержни, то дискретная модель будет точной копией реальной конструкции. В узловых

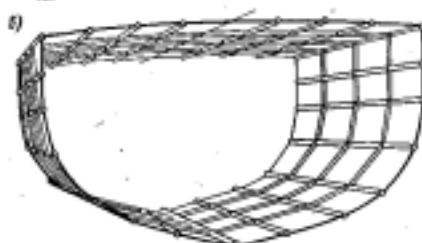
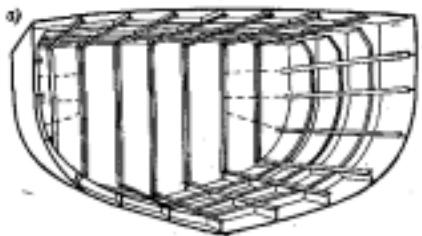


Рис. 41. Объемный судовой отsek: а— конструкция отсека; б— дискретная модель отсека.

точках вводятся усилия взаимодействия между отдельными стержнями. Для определения этих усилий составляется необходимое число уравнений равновесия узловых точек.

При мер 2. Стержни конструкции, изображенной на рис. 39, жестко скреплены друг с другом. В этом случае общий вид дискретной модели остается прежним. Однако характер взаимодействия между стержнями в узловых точках становится более сложным: паряду с осевыми усилиями появляются перерезывающие силы, изгибающие и крутящие моменты. Это приводит к увеличению

личению числа неизвестных узловых усилий, а следовательно и к необходимости составления дополнительных уравнений для их определения.

**Пример 3.** Треугольные и прямоугольные конечные элементы широко используются в расчетах прочности судовых конструкций. На рис. 40 приведена схема идеализации поперечной рамы судорогатника.

Не всегда целесообразно использовать один и тот же размер конечного элемента по всему полю пластины. В местах окончания концентрации напряжений, резкого изменения напряжений полезно уменьшить размеры конечных элементов путем введения дополнительных рассечений с образованием дополнительных узловых точек.

**Пример 4.** Судовой корпус представляет конструкцию состоящую из пластин, оболочек и подкрепляющих их ребер. Поэтому дискретная модель судового корпуса включает стержневые, пластинчатые и оболочечные конечные элементы (рис. 41).

### § 34. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛИРУЮЩИХ ПОЛИНОМОВ

В § 32 отмечалось, что одной из наиболее ответственных операций метода конечных элементов является построение интерполирующих функций для приближенного отображения законов изменения искомой функции  $w(x, y, z)$  по объему конечного элемента. Операция часто оказывается и весьма трудоемкой. Ее основная трудность состоит в том, что построенные интерполяционные функции для каждого конечного элемента должны обеспечивать непрерывность функции  $w(x, y, z)$  и ее производных до  $m - 1$ -го порядка во всей области. Напомним, что производные  $m$ -го порядка могут иметь разрывы первого рода по границам смежных конечных элементов.

Выполнение указанных выше требований обеспечивает сходимость решения по МКЭ с точным при уменьшении размеров конечных элементов. Естественно, что при выбранной геометрии конечного элемента для обеспечения условий сходимости необходимо располагать в интерполирующей функции определенные минимальные производственные параметры. Дальнейшее увеличение числа производственных параметров в интерполирующей функции связано с появлением дополнительных узловых неизвестных и введением по объему конечного элемента дополнительных узловых точек. В результате получаем так называемые высокоточные конечные элементы (см. рис. 38).

В качестве узловых неизвестных принимаются значения искомой функции и ее производных до  $m - 1$ -го порядка. При этом необходимое число неизвестных в основных узловых точках следует набирать последовательно, переходя от функции к производным первого порядка, затем — к производным второго порядка и т. д. Исключение из числа узловых неизвестных какое-

либо производной выше порядка наименшей производной, включенной в состав узловых неизвестных, может привести к нарушению сходимости решения по МКЭ с точным.

В дальнейшем, при изложении вопроса построения интерполирующих функций, мы последовательно рассмотрим одномерные, двухмерные и трехмерные области.

#### 34.1. Одномерная область

Пусть замкнутый интервал  $[0, l]$  измененен  $x$  разбит внутренними точками

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_M = l \quad (34.1)$$

на ряд замкнутых участков-элементов

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{k-1}, x_k], \dots, [x_{M-1}, x_M]. \quad (34.2)$$

Изменение искомой функции  $w(x)$  для  $k$ -го элемента аппроксимируем полиномом  $\pi$ -й степени

$$w^{(k)}(x) = p^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i, \quad (34.3)$$

$$x \in [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, 2, 3, \dots, M).$$

Можно показать, что непрерывность функции  $w(x)$  и ее производных до  $m - 1$ -го порядка в интервале  $[0, l]$  будет обеспечена, если степень каждого из полиномов  $w^{(k)}$  удовлетворяет зависимости

$$n > 2m - 1 \quad (34.4)$$

и для определения неизвестных параметров  $\alpha_i$  среди  $n + 1$ -го условия для каждого  $k$ -го участка обязательно будут содержаться следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} p^{(k)}(x_{k-1}) &= w^{(k)}(x_{k-1}), \quad p^{(k)}(x_k) = w^{(k)}(x_k); \\ \frac{\partial p^{(k)}}{\partial x}(x_{k-1}) &= \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x}(x_{k-1}), \quad \frac{\partial p^{(k)}}{\partial x}(x_k) = \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x}(x_k); \\ \frac{\partial^{m-1} p^{(k)}}{\partial x^{m-1}}(x_{k-1}) &= \frac{\partial^{m-1} w^{(k)}}{\partial x^{m-1}}(x_{k-1}), \quad \frac{\partial^{m-1} p^{(k)}}{\partial x^{m-1}}(x_k) = \frac{\partial^{m-1} w^{(k)}}{\partial x^{m-1}}(x_k). \end{aligned} \right\} \quad (34.5)$$

При  $n > 2m - 1$  недостающие для определения параметров  $\alpha_i$  условия составляются по аналогии с условиями (34.5), но для некоторой промежуточных узловых точек. Если для  $k$ -го элемента выбрана не одна, а несколько промежуточных точек, то не обязательно в каждой из них требовать выполнения одних и тех же условий. Важно лишь в каждой из точек не допускать пропуска условий по производным более низких порядков <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Принцип, в этом правила есть свои исключения.

Описанный подход приводит к построению высокоточного одномерного конечного элемента.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением простейших одномерных конечных элементов с расположением узловых точек по его концам. Для таких элементов степень интерполирующего полинома  $n$  определяется из равенства

$$n = 2m - 1. \quad (34.6)$$

Приведем два примера построения интерполирующих полиномов.

**Пример 1.** Для одномерной краевой задачи, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка ( $2m = 2$ ), построить интерполирующий полином для  $k$ -го конечного элемента. Заметим, что уравнениям такого типа описываются некоторые задачи растяжения и кручения стержней.

**Решение.** Согласно равенству (34.6) степень полинома  $n = 2m - 1 = 1$ , следовательно, интерполирующий полином (34.3) запишем в виде

$$p(x) = a_0 + a_1 x. \quad (34.7)$$

Невозвестные параметры  $a_i$  определяются из условий (34.5), которые для  $2m = 2$  дают следующие два условия:

$$p(x_{k-1}) = w(x_{k-1}); \quad (34.8)$$

$$p(x_k) = w(x_k). \quad (34.9)$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{w(x_{k-1})x_k - w(x_k)x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}};$$

$$a_1 = \frac{w(x_k) - w(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}. \quad (34.10)$$

Подставляя найденные значения  $a_0$  и  $a_1$  в формулу (34.7), получаем следующее выражение для интерполирующего полинома  $k$ -го конечного элемента:

$$w(x) = w(x_{k-1}) + w(x_k) \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}. \quad (34.11)$$

Пусть для определенности интервал изменения  $x$  (рис. 42, а) разбит на четыре конечных элемента. Тогда «склеивая» интерполирующие полиномы по отдельным элементам, получаем аппроксимирующую функцию  $w(x)$  для всей области (рис. 42, б). Полученную функцию  $w(x)$ , как показано на рис. 42, в, можно представить в виде суммы

$$w(x) = \sum_{i=0}^4 w(x_i) \varphi_i(x). \quad (34.12)$$

Отсюда видна отмечавшаяся ранее «локальность» координатных функций  $\varphi_i(x)$ , каждая из которых оказывается отличной от нуля лишь в области конечных элементов, непосредственно примыкающих к данному узлу. Такое свойство координатных функций в МКЭ позволяет как бы набирать искомое решение

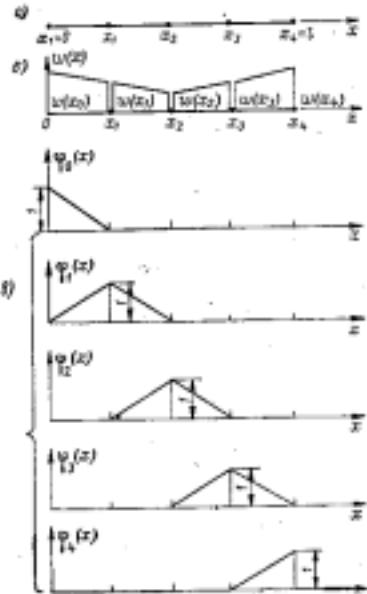


Рис. 42. К построению интерполирующей функции для одномерной области при  $2m = 2$ .

из отдельных «локальных» кирпичиков». Именно в этом прачина большинства дополнительных черт метода конечных элементов.

**Пример 2.** Для одномерной краевой задачи, описываемой дифференциальным уравнением четвертого порядка ( $2m = 4$ ), построить интерполирующий полином для конечного элемента. К этому классу задач относится задача изгиба балок.

**Решение.** Согласно равенству (34.6) в данном случае  $n = 2m - 1 = 3$ , и интерполирующий полином будет иметь вид

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \quad (34.13)$$

Невозвестные параметры  $\alpha_i$  в выражении (34.13) определяются согласно равенству (34.5) из следующих четырех условий (рис. 43):

$$\left. \begin{aligned} p(0) &= w(0); \quad p(a) = w(a); \\ \frac{\partial p}{\partial x}(0) &= \frac{\partial w}{\partial x}(0); \quad \frac{\partial p}{\partial x}(a) = \frac{\partial w}{\partial x}(a). \end{aligned} \right\} \quad (34.14)$$

Введем для узловых значений функции  $w(x)$  обозначения

$$w(0) = q_1; \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0) = q_2; \quad w(a) = q_3; \quad \frac{\partial w}{\partial x}(a) = q_4. \quad (34.15)$$

Положительные направления этих величин приведены на рис. 43.

Вписав выражение (34.15) в формулы (34.14), с учетом обозначений (34.15) получаем

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= q_1; \quad \alpha_3 + \alpha_2 a + \\ &\quad + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^2 = q_3; \\ \alpha_2 &= q_2; \quad \alpha_1 + \\ &\quad + 2\alpha_2 a + 3\alpha_3 a^2 = q_4, \end{aligned} \quad (34.16)$$

откуда

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= q_1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{a^2}(-3q_1 - 2q_2 a + 3q_3 - q_4 a); \\ \alpha_3 &= q_3, \quad \alpha_4 = \frac{1}{a^2}(2q_1 + q_2 a - 2q_3 + q_4 a). \end{aligned} \quad (34.17)$$

Рис. 43. Положительные направления узловых невозвестных для одномерного конечного элемента в местной системе координат.

Подставляя найденные значения параметров  $\alpha_i$  в выражение (34.13), получаем для интерполирующего полинома элемента выражение вида

$$w(x) = \sum_{i=1}^{i=4} q_i \beta_i(x), \quad (34.18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \beta_1(x) &= 1 - 3 \frac{x^2}{a^2} + 2 \frac{x^3}{a^3}; \quad \beta_3(x) = x - 2 \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}; \\ \beta_2(x) &= 3 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{x^3}{a^3}; \quad \beta_4(x) = -\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (34.19)$$

— так называемые одномерные функции Эрмита, удовлетворяющие следующим свойствам:

$$\left. \begin{aligned} \beta_1(0) &= 1; \quad \beta_1'(0) = 0; \quad \beta_1(a) = 0; \quad \beta_1''(a) = 0; \\ \beta_2(0) &= 0; \quad \beta_2'(0) = 1; \quad \beta_2(a) = 0; \quad \beta_2''(a) = 0; \\ \beta_3(0) &= 0; \quad \beta_3'(0) = 0; \quad \beta_3(a) = 1; \quad \beta_3''(a) = 0; \\ \beta_4(0) &= 0; \quad \beta_4'(0) = 0; \quad \beta_4(a) = 0; \quad \beta_4''(a) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (34.20)$$

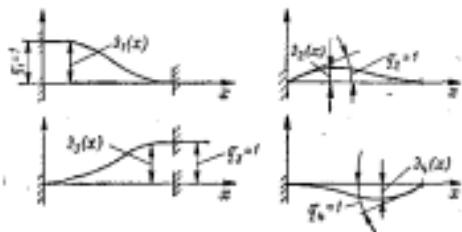


Рис. 44. Функции Эрмита для одномерного элемента.

Изменение каждой из этих функций по длине конечного элемента представлено на рис. 44.

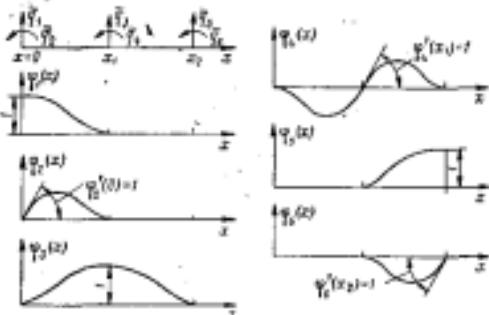


Рис. 45. К построению интерполирующей функции для одномерной области при  $2n = 4$ .

Располагая выражениями для интерполирующих полиномов каждого конечного элемента рассматриваемой области нетрудно представить выражение для аппроксимирующей функции  $w(x)$

в виде суммы произведений узловых неизвестных на соответствующие координатные функции

$$w(x) = \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i(x). \quad (34.21)$$

Вид координатных функций  $\varphi_i(x)$  для одномерной области, разбитой на два элемента, приведен на рис. 4б. Здесь через  $\varphi_i$  обозначены узловые неизвестные для всей области, т. е. неизвестные в общей системе координат.

## 34.2. Двухмерная область

Ограничимся построением интерполирующих полиномов для прямоугольного и треугольного конечных элементов. Именно эти два простейших конечных элемента наиболее часто используются при моделировании двухмерных областей.

**Прямоугольный элемент.** Пусть некоторая двухмерная область  $V$  разбита на совокупность конечных прямоугольных элементов. Стороны каждого элемента  $V_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, M$ ) параллельны осям  $Ox$  и  $Oy$  области  $V$ .

Изменение вспомогательной функции  $w(x, y)$  в объеме  $k$ -го элемента представим в виде полинома

$$p^{(k)}(x, y) = \sum_{\alpha=0}^5 \sum_{\beta=0}^5 a_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta}, \quad (34.22)$$

который является простым произведением двух одномерных полиномов вида (34.3).

Общее число неизвестных коэффициентов  $a_{\alpha\beta}$  равно  $(n+1)^2$ . Можно показать [131], что если среди  $(n+1)^2$  условий для определения коэффициентов  $a_{\alpha\beta}$  полинома (34.22) присутствуют  $4m^2$  следующих условий:

$$\frac{\partial^{(\alpha+\beta)} p}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}}(x_0, y_0) = \frac{\partial^{(\alpha+\beta)} w^{(k)}}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}}(x_0, y_0) \quad (34.23)$$

$$\begin{cases} \alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots, m-1 \\ i = 1, 2, 3, 4, \end{cases}$$

то получаемые при этом аппроксимирующие функции  $w^{(k)}(x, y)$  обеспечивают непрерывность функции

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^M w^{(k)}(x, y)$$

и ее производных до  $m-1$ -го порядка во всей области  $V$ . Отсюда следует, что минимальное число членов подилема (34.22), при котором оказываются выполненными условия сходимости метода, равно

$$r = (n+1)^2 = 4m^2. \quad (34.24)$$

Если же  $r = (n+1)^2 > 4m^2$ , то для условий (34.23) необходимо дополнить аналогичными условиями, то написанными для некоторых других узловых точек, расположенных, например, посередине каждой из сторон примотильного элемента (из рис. 4б точки  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ ).

При м е р 3. Для двухмерной задачи, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка ( $\Delta u = 2$ ), построить интерполирующий полином.

**Решение.** Согласно формуле (34.24) число узловых неизвестных  $r = 4m^2 = 4$ , а показатель степени полинома (34.22)  $n = 2m-1 = 1$ . Следовательно, интерполирующий полином имеет вид

$$\begin{aligned} p(x, y) = & a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + \\ & + a_{11}xy = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy. \end{aligned} \quad (34.25)$$

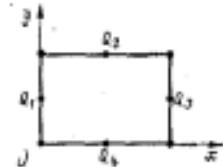


Рис. 4б. Высокоточный прямоугольный плоский элемент.

Неизвестные коэффициенты  $a_i$ , определяются из условий (34.23), которые в данном случае примут вид

$$\begin{cases} p(0, 0) = w(0, 0) = q_1; \quad p(a, 0) = w(a, 0) = q_2; \\ p(0, b) = w(0, b) = q_3; \quad p(a, b) = w(a, b) = q_4. \end{cases} \quad (34.26)$$

С учетом выражения (34.25) из системы (34.26) получаем уравнения

$$\begin{cases} a_0 = q_1; \quad a_0 + a_1a = q_2; \\ a_0 + a_3b = q_3; \quad a_0 + a_1a + a_2b + a_3ab = q_4. \end{cases} \quad (34.27)$$

Подставляя найденные из решения системы (34.27) коэффициенты  $a_i$  в правую часть зависимости (34.25), получаем для интерполирующего полинома конечного элемента выражение вида

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^4 q_i \beta_i(x, y), \quad (34.28)$$

где

$$\begin{cases} \beta_1(x, y) = \frac{(a-x)(b-y)}{ab}; \quad \beta_2(x, y) = \frac{x(b-y)}{ab}; \\ \beta_3(x, y) = \frac{(a-x)y}{ab}; \quad \beta_4(x, y) = \frac{xy}{ab}. \end{cases} \quad (34.29)$$

Пример 4. Требуется построить интерполирующий полином для краевой задачи, описываемой дифференциальным уравнением четвертого порядка ( $2m = 4$ ).

**Решение.** Согласно формуле (34.24) число узловых неизвестных конечного элемента  $r = 4m^2 - 16$ , а показатель степени полинома (34.22)  $n = 2m - 1 = 3$ . Следовательно, интерполирующий полином будет иметь вид

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \\ + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + \dots + a_{33}x^3y^3. \quad (34.30)$$

Для определения 16 неизвестных коэффициентов  $a_{ij}$  в каждой из четырех узловых точек прямоугольного элемента нужно составить по четыре условия типа условий (34.23)

$$\begin{aligned} p(x_i, y_j) &= w(x_i, y_j); \\ \frac{\partial p}{\partial x}(x_i, y_j) &= \frac{\partial w}{\partial x}(x_i, y_j); \\ \frac{\partial p}{\partial y}(x_i, y_j) &= \frac{\partial w}{\partial y}(x_i, y_j); \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) \end{aligned} \quad (l = 1, 2, 3, 4). \quad (34.31)$$

Подстановка выражения (34.30) в равенства (34.31) приводит к получению системы 16 алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_{ij}$ . Решение этой системы позволяет выразить значения коэффициентов  $a_{ij}$  через узловые значения искомой функции  $w(x, y)$  и ее производных  $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ , которые в МКЭ признаются в качестве основных неизвестных. Введя найденные значения  $a_{ij}$  в полином (34.30), получаем окончательное выражение для интерполирующего полинома.

**Треугольный элемент.** Пусть некоторая двумерная область  $\Omega$  разбита на совокупность треугольных конечных элементов  $V_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, M$ ). Изменение искомой функции  $w(x, y)$  в объеме  $k$ -го элемента представим в виде полинома

$$p^{(k)}(x, y) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 a_{ij}^k x^i y^j. \quad (34.32)$$

Здесь для каждого  $k$ , пробегающего последовательно значения  $0, 1, \dots, n$ , суммируются все члены, для которых сумма показателей степеней  $i$  и  $j$  равна  $s$ , т. е.  $i + j = s$ .

Например, для  $n = 3$  полином (34.32) в развернутом виде записем так:

$$p(x, y) = a_{00}^{(k)} + a_{10}^{(k)}x + a_{01}^{(k)}y + a_{20}^{(k)}x^2 + a_{11}^{(k)}xy + a_{02}^{(k)}y^2 + \\ + a_{30}^{(k)}x^3 + a_{21}^{(k)}x^2y + a_{12}^{(k)}xy^2 + a_{03}^{(k)}y^3. \quad (34.32')$$

Число коэффициентов  $a_{ij}^{(k)}$  в полиноме (34.32) определяется зависимостью

$$N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad (34.33)$$

Показано [131], что использование степенных полиномов (34.32) может обеспечить получение аппроксимирующей функции  $p(x, y)$ , непрерывно дифференцируемой до  $m - 1$ -го порядка во всей области  $\Omega$ , если степень полинома  $n$  будет не меньше значения  $n^*$ , определяемого из зависимости

$$\frac{(s+1)(s+2)}{3} = 8m^2 - 8m + 1. \quad (34.34)$$

В таблице приведены для ряда значений  $m$  (положения порядка дифференциального уравнения, которым описывается краевая задача) соответствующие значения минимальной степени  $n^*$  полинома (34.32) и числа  $s$  неизвестных коэффициентов  $a_{ij}^{(k)}$  этого полинома.

Видим, что при  $m \geq 2$  число членов в интерполирующем полиноме треугольного элемента выше числа членов в интерполирующем полиноме прямоугольного элемента. И есть основания полагать, что условие (34.34) является излишне жестким.

Вернемся вновь к полиному (34.32).

Для определения в нем коэффициентов  $a_{ij}^{(k)}$  требуется необходиное число условий, обеспечивающих в заранее выбранных узловых точках равенство значений полинома, значений искомой функции  $w(x, y)$  и некоторых их производных.

Обычно в качестве узловых точек для треугольного элемента (рис. 47) выбирают три его вершины (точки  $P_1, P_2, P_3$ ), центр тяжести ( $P_0$ ) и по несколько (в зависимости от потребности) точек, расположенных по сторонам треугольника (точки  $Q_1, Q_2, \dots$ ).

Тогда в соответствии с данными приведенной выше таблицы при  $m = 1$  полином (34.32) содержит лишь три коэффициента  $a_{ij}^{(k)}$ , для определения которых достаточно в каждой из вершин  $P_1, P_2, P_3$  потребовать выполнения

$$p(P_i) = w(P_i) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Значения  $w(P_i)$  принимаются за основные неизвестные.

При  $m = 2$  волнико (34.32) содержит уже 21 коэффициент  $a_{ij}^{(k)}$ . Набрать необходимые 21 условие для определения  $a_{ij}^{(k)}$  можно различными путями, каждый из которых приводит к определенной способности узловых коэффициентов конечного элемента. Вот некоторые из возможных вариантов задания узловых неизвестных:

$$a) w(P_1); \frac{\partial w}{\partial x}(P_1); \frac{\partial w}{\partial y}(P_1);$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(P_1); \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(P_1); \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(P_1)$$

для каждой из вершин треугольного элемента. В результате получают 18 неизвестных. В качестве оставшихся трех неизвестных можно принять либо значение производной по нормали  $\frac{\partial w}{\partial n}$  в точках  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ , либо значения  $w$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}$  и  $\frac{\partial w}{\partial y}$  в точке  $P_0$  (см. рис. 47);

$$b) w, \frac{\partial w}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial w}{\partial y} \text{ в точках } P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3 = P_0.$$

Ясно, что в методе конечных элементов узловые точки, показанные на рис. 47, не равнозначны. Так, условия в точке  $P_0$  накладывают связи лишь на рассматриваемый элемент, условия в точках  $Q_i$  уже захватывают и соседний элемент, а в точках  $P_j$ , расположенных в вершинах, условия переносятся на сходящиеся в них элементы. По-видимому, этим объясняется тот факт, что лучшую склонность решения краевых задач обеспечивает использование конечных элементов, у которых большее число узловых неизвестных спредотвращено в вершинах. Отсюда следует, что вариант а) выбора узловых неизвестных предпочтительнее.

### 34.3. Пространственная область

Ограничимся построением интерполирующих полиномов для прямоугольного параллелепипеда и элементарного тетраэдра, поскольку именно эти два простейших элементы наиболее часто используются при моделировании пространственных областей.

Как и ранее, перед нами стоит задача построения интерполирующего полинома для конечного элемента, который обеспечивает функции  $w(x, y, z)$ , ее непрерывность и дифференцируемость  $m - 1$  раз во всей области  $V$ .

**Прямоугольный параллелепипед.** Пусть некоторая пространственная область  $U$  с помощью сечений, параллельных координат-

ным плоскостям, разбита на совокупность параллелепипедов  $V_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, M$ ).

Изменение исходной функции  $w(x, y, z)$  в объеме  $k$ -го элемента представим в виде полинома

$$p^{(k)}(x, y, z) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^n a_{ijk} x^i y^j z^l, \quad (34.35)$$

получаемого простым перемножением одномерных степенных полиномов (34.3) соответственно по направлениям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Число коэффициентов  $a_{ijk}$  полинома (34.35)

$$N = (n + 1)^3. \quad (34.36)$$

Можно показать [131, с. 81], что если среди  $(n + 1)^3$  условий для определения этих коэффициентов присутствуют  $8m^3$  условий

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{n+3+i} w}{\partial x^n \partial y^i \partial z^0}(x_i, y_i, z_i) = \\ & = \frac{\partial^{n+3+i} w}{\partial x^n \partial y^i \partial z^0}(x_j, y_j, z_j) \\ & (i, j = 0, 1, 2, \dots, m - 1); \\ & (i = 1, 2, 3, \dots, 8), \end{aligned} \quad (34.37)$$

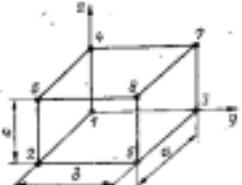


Рис. 48. Прямоугольный конечный элемент (параллелепипед).

то получаемые при этом аппроксимирующие функции  $w^{(k)}(x, y, z)$  обес печивают непрерывность функций

$$w(x, y, z) = \sum_{k=1}^M w^{(k)}(x, y, z) \quad (34.38)$$

и ее производных по  $m - 1$ -му порядку во всей области  $V$ .

Отсюда следует, что минимальное число членов полинома (34.35), при котором оказываются выполненными условия склонности метода, равно

$$r = (n + 1)^3 = 8m^3. \quad (34.39)$$

Если же  $N > 8m^3$ , то  $8m^3$  условий (34.37) следует дополнять аналогичными условиями, поставленными для некоторых других узловых точек, расположенных, например, в центре каждой грани прямоугольного параллелепипеда.

**Пример 5.** Для трехмерной краевой задачи, описываемой дифференциальными уравнениями второго порядка ( $2m = 2$ ), построить интерполирующий полином для прямоугольного параллелепипеда (рис. 48).

**Решение.** Согласно выражению (34.39) число узловых неизвестных  $r = 8m^3 = 8$ , а показатель степени полинома (34.35)

$n = 2m - 1 = 1$ . Следовательно, интерполирующий полином имеет вид

$$p(x, y, z) = \alpha_{000} + \alpha_{100}x + \alpha_{010}y + \alpha_{001}z + \alpha_{110}xy + \alpha_{101}xz + \alpha_{011}yz + \alpha_{111}xyz. \quad (34.40)$$

Ненулевые коэффициенты  $\alpha_{ijk}$  определяются из условий (34.37), которые в рассматриваемом случае примут вид

$$\begin{aligned} p(0, 0, 0) &= w(0, 0, 0) = q_1; \quad p(a, 0, 0) = w(a, 0, 0) = q_2; \\ p(a, 0, 0) &= w(a, 0, 0) = q_3; \quad p(a, 0, c) = w(a, 0, c) = q_4; \\ p(0, b, 0) &= w(0, b, 0) = q_5; \quad p(0, b, c) = w(0, b, c) = q_6; \\ p(0, 0, c) &= w(0, 0, c) = q_7; \quad p(a, b, c) = w(a, b, c) = q_8. \end{aligned} \quad (34.41)$$

Внося выражение (34.40) в условия (34.41), получаем систему восьми алгебраических уравнений для определения восьми ненулевых коэффициентов  $\alpha_{000}, \alpha_{100}, \dots, \alpha_{111}$ . Подставляя найденные значения этих коэффициентов в полином (34.40), получаем окончательное выражение для искомого интерполирующего полинома

$$w(x, y, z) = \sum_{i=0}^3 q_i \beta_i(x, y, z), \quad (34.42)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_0(x, y, z) &= \frac{(a-x)(b-y)(c-z)}{abc}; \quad \beta_1(x, y, z) = \frac{x(b-y)(c-z)}{abc}; \\ \beta_2(x, y, z) &= \frac{(a-x)y(z-z)}{abc}; \quad \beta_3(x, y, z) = \frac{(a-x)(b-y)z}{abc}; \\ \beta_4(x, y, z) &= \frac{xy(c-z)}{abc}; \quad \beta_5(x, y, z) = \frac{x(b-y)z}{abc}; \\ \beta_6(x, y, z) &= \frac{(a-x)y^2}{abc}; \quad \beta_7(x, y, z) = \frac{xyz}{abc}. \end{aligned} \quad (34.43)$$

**Тетраэдр.** На сегодня не существует общей теории интерполирующих полиномов для конечного элемента в форме тетраэдра. Поэтому мы ограничимся лишь записью некоторых степенных полиномов, которые могут быть использованы при решении ряда практических задач.

Введем обозначения:  $P_1, P_2, P_3, P_4$  — вершины тетраэдра;  $Q_1, Q_2, \dots, Q_6$  — середины ребер тетраэдра;  $R_1, R_2, R_3, R_4$  — центры плоскостей граний тетраэдра (рис. 49).

Линейный полином

$$p_1(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4z$$

однозначно определяется в тетраэдре через значения

$$p_1(P_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Полином второй степени

$$\begin{aligned} p_2(x, y, z) &= p_1(x, y, z) + \alpha_5x^2 + \alpha_6y^2 + \\ &\quad + \alpha_7z^2 + \alpha_8xy + \alpha_9xz + \alpha_{10}yz \end{aligned}$$

однозначно определяется через значения

$$p_2(P_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4);$$

$$p_2(Q_j) \quad (j = 1, 2, \dots, 6).$$

Кубический полином

$$\begin{aligned} p_3(x, y, z) &= p_2(x, y, z) + \alpha_{11}x^3 + \\ &\quad + \alpha_{12}x^2y + \alpha_{13}x^2z + \alpha_{14}yz^2 + \\ &\quad + \alpha_{15}xy^2 + \alpha_{16}xz^2 + \alpha_{17}yz^2 + \\ &\quad + \alpha_{18}xy^2 + \alpha_{19}yz^2 + \alpha_{20}xyz \end{aligned}$$

однозначно определяется через зна-

чения

$$p_3(P_i), \frac{\partial p_3}{\partial x}(P_i), \frac{\partial p_3}{\partial y}(P_i), \frac{\partial p_3}{\partial z}(P_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4);$$

$$p_3(Q_j) \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Использование приведенных выше полиномов приводит к построению интерполирующих функций, которые обеспечивают условия сходимости решения по методу конечных элементов для краевых задач, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка. В отдельных случаях полином 3-й степени может обеспечить сходимость решения и для краевых задач, описываемых дифференциальными уравнениями четвертого порядка.

### § 35. К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ МАТРИЦЫ $[K]^{(i)}$ И ВЕКТОРА $[P]^{(i)}$ ДЛЯ $i$ -ГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

#### 35.1. Вводные замечания

Матрица  $[K]^{(i)}$  осредняющая характеризует свойства среди в объеме  $i$ -го конечного элемента, а вектор  $[P]^{(i)}$  — приводящиеся на этот элемент внешнее воздействие (силовое, температурное и т. п.).

Располагая значениями  $[K]^{(i)}$  и  $[P]^{(i)}$  при  $i = 1, 2, 3, \dots, M$  и используя зависимости (32.17), (32.18), (32.20), (32.22) и (32.23), можно построить матрицу  $[K]$  и вектор  $[P]$ , которым соответ-



ствию определяются свойства среды для всей области и внешнее воздействие на всю область. После этого сразу же выписывается разрешающая система уравнений (35.21) для определяемых узловых неизвестных в общей системе координат  $\{\varphi\}$ .

Таким образом видим, что определение матриц  $[K]^{(1)}$  и  $[P]^{(1)}$  является необходимым и важным звеною построения разрешающей системы уравнений метода конечных элементов.

На сегодня для определения этих матриц используются три основных метода, излагаемых ниже.

### 35.2. Прямой метод

Прямой метод применим лишь для конечных элементов простой геометрии при малом числе степеней свободы.

### 35.3. Вариационный метод<sup>1</sup>

Для  $i$ -го конечного элемента выписывается значение соответствующего для рассматриваемой краевой задачи функционала  $\mathcal{E}(\{w\}^{(1)})$ . Далее подсчитывается производная  $\frac{\partial \mathcal{E}(\{w\}^{(1)})}{\partial \{q\}^{(1)}}$ .

Полученное при этом выражение для производной представляется в виде

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\{w\}^{(1)})}{\partial \{q\}^{(1)}} = [K]^{(1)} \{q\}^{(1)} + [P]^{(1)},$$

где  $[K]^{(1)}$  и  $[P]^{(1)}$  есть исходные матрицы.

Приведем примеры использования вариационного метода получения матрицы  $[K]^{(1)}$  и вектора  $\{P\}^{(1)}$ .

**Пример 1.** Рассмотрим изгиб непрismaticкой балки жесткости  $EI(x)$ , загруженной по длине поперечной нагрузкой интенсивности  $q(x)$ .

Определение упругой линии балки  $w(x)$  сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$EI(x) w''(x)'' = q(x) = 0 \quad (35.1)$$

при заданных граничных условиях на концах балки ( $x = 0$ ,  $x = l$ ).

Известно, что решение этой задачи эквивалентно нахождению функции  $w(x)$ , удовлетворяющей граничным условиям и минимизирующей функционал

$$\mathcal{E} = V - U = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) |w''(x)|^2 dx - \int_0^l q(x) w(x) dx. \quad (35.2)$$

При использовании метода конечных элементов балка разбивается на ряд конечных элементов, для каждого из которых выписывается выражение для упругой линии

$$w^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^4 \varphi_k \vartheta_k(x) = [\vartheta]^{(1)} \{q\}^{(1)}. \quad (35.3)$$

Заметим, что построение интерполяционной функции вида (35.3) подробно обсуждалось в § 34. Там же был приведен пример определения интерполирующего полинома для одномерной краевой задачи, описываемой дифференциальным уравнением четвертого порядка (см. пример 2).

Подставляя выражение (35.3) в формулу (35.2), выписанную для  $i$ -го элемента (линии элемента обозначим через  $a$ ), и производя операцию дифференцирования найденного выражения для  $\mathcal{E}(w^{(1)})$  по каждой из узловых неизвестных, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}(w^{(1)})}{\partial q_i} &= \int_a^b EI(x) w^{(1)} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial q_i} dx - \int_a^b q(x) \frac{\partial w^{(1)}}{\partial q_i} dx = \\ &= \sum_{k=1}^4 \left[ \int_a^b EI(x) \vartheta_k(x) \vartheta'_k(x) dx \right] \vartheta_k - \int_a^b q(x) \vartheta'_k(x) dx \quad (i = 1, 2, 3, 4), \end{aligned} \quad (35.4)$$

откуда

$$\frac{\partial \mathcal{E}(w^{(1)})}{\partial \{q\}^{(1)}} = [K]^{(1)} \{q\}^{(1)} + [P]^{(1)},$$

где

$$k_{ij} = \int_a^b EI(x) \vartheta_i(x) \vartheta'_j(x) dx, \quad (35.5)$$

$$P_i = - \int_a^b q(x) \vartheta'_i(x) dx. \quad (35.6)$$

При известных координатных функциях все элементы матрицы  $[K]^{(1)}$  и  $[P]^{(1)}$  легко могут быть вычислены по формулам (35.5) и (35.6).

**Пример 2.** Задача о кручении прismaticкого стержня произвольного сечения сводится к решению уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2Gt = 0 \quad (35.7)$$

при нулевом значении функции  $\varphi = 0$  на контуре поперечного сечения стержня (рис. 50, а).

Известно, что решение этой задачи эквивалентно нахождению функции  $\varphi$ , которая удовлетворяет на контуре краевым условиям и минимизирует функционал

$$\mathcal{E} = \iint_V \left[ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2Gt \varphi \right] dx dy. \quad (35.8)$$

<sup>1</sup> См. работы [41, 43, 84, 87, 105, 142, 143, 152, 160].

При использовании метода конечных элементов сечение стержня разбивается на совокупность конечных элементов (рис. 50, б), для каждого из которых записывается выражение, аппроксимирующее закон изменения искомой функции  $\varphi(x, y)$ .

$$\varphi^{(i)}(x, y) = \sum \varphi_0 \vartheta_i(x, y) - [L]^{(i)}[\varphi]^{(i)}. \quad (35.9)$$

Построение выражения (35.9) для треугольного плоского элемента подробно описано в § 34.

Подставив выражение (35.9) в формулу (35.8), интегрируя по площади  $i$ -го конечного элемента  $V_i$ , и произведя операцию

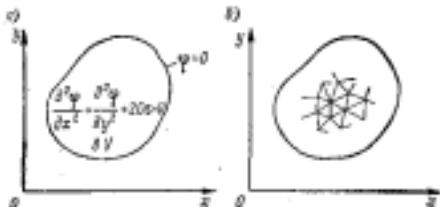


Рис. 50. К задаче о кручении прismaticкого стержня.

дифференцирования полученного выражения  $\mathcal{E}(\varphi^{(i)})$  по каждой из узловых неизвестных, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}(\varphi^{(i)})}{\partial \vartheta_i} &= \iint_{V_i} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial y} \right] - 2G \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta_i} dx dy - \\ &- \sum_k \left[ \iint_{V_i} \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_k}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial y} dx dy \right] q_k - 2G \iint_{V_i} \vartheta_i dx dy, \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\varphi^{(i)})}{\partial [\varphi]^{(i)}} = [K]^{(i)}[\varphi]^{(i)} + [P]^{(i)}, \quad (35.10)$$

т.е.

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \iint_{V_i} \left( \frac{\partial \vartheta_j}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_j}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial y} \right) dx dy; \\ p_j &= -2G \iint_{V_i} \vartheta_i dx dy, \end{aligned} \quad | \quad (35.11)$$

### 35.4. Метод Бубнова — Галеркина

Если запись общего выражения для функционала  $\mathcal{E}(\varphi)$  затруднительна, а дифференциальное уравнение рассматриваемой краевой задачи известно, то для определения матриц  $[K]^{(i)}$  и  $[P]^{(i)}$  можно воспользоваться процедурой метода Бубнова — Галеркина

$$\iint_V [L]^{(i)}(\varphi) - q(x, y, z) \vartheta_i(x, y, z) dx dy dz = 0. \quad (35.12)$$

От подинтегральной функции  $\varphi(x, y, z)$  требуется непрерывность во всей области  $V$ , вплоть до производных 2-го — 1-го порядка. Напомним, что при использовании вариационного способа для получения уравнений метода конечных элементов достаточно было обеспечить непрерывность функции и ее производных до  $m$  — 1-го порядка.

Выполнение требований обеспечения непрерывности для производных до 2-го — 1-го порядка могло бы значительно усложнить процесс построения аппроксимирующего полинома для искомой функции. Однако этого можно избежать, если первый член уравнения (35.12) пронтегрировать по частям  $m$  раз. В результате получим уравнение, содержащее производные не выше  $m$ -го порядка. А при этом, как известно, от аппроксимирующей функции  $\varphi(x, y, z)$  требуется обеспечение непрерывности как самой функции, так и ее производных лишь до  $m$  — 1-го порядка во всей области  $V$ .

Пронстрируем вышеизложенное на примере получения матриц  $[K]^{(i)}$  и  $[P]^{(i)}$  в задаче о кручении прismaticкого стержня, рассмотренной в примере 2 настоящего параграфа.

В соответствии с уравнением (35.12) можно записать

$$\iint_V \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 2G\varphi \right) \vartheta_i(x, y) dx dy = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

или

$$\begin{aligned} &- \iint_V \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vartheta_i \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vartheta_i \right) \right) dx dy + \\ &+ \iint_V \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial y} - 2G\varphi \vartheta_i \right] dx dy = 0. \end{aligned} \quad (35.13)$$

Первый интеграл с помощью формулы Гаусса — Остроградского можно заменить контурным интегралом. В результате уравнение (35.10) примет следующий вид:

$$\iint_V \left[ \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_j}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_i}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_j}{\partial y} - 2G\vartheta_i \vartheta_j \right] dx dy - \oint_S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_{xz} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_{yz} \right) \vartheta_j dS = 0. \quad (35.14)$$

Рабочая область  $Y$  на конечные элементы, в пределах каждого из которых некоторая функция  $\varphi(x, y)$  аппроксимируется выражением (35.9), подсчитывая значение первого интеграла по площади каждого из конечных элементов с последующим суммированием полученных результатов, будем иметь

$$\sum_{i=1}^M \left( [K]^{(i)} [\varphi]^{(i)} + [P]^{(i)} \right) - \oint_S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} t_{xy} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} t_{yy} \right) \beta_i dS = 0. \quad (35.15)$$

В уравнении (35.15) элементы матриц  $[K]^{(i)}$  и  $[P]^{(i)}$  вычисляются соответственно по формулам (35.11).

С учетом обозначений § 32 уравнение (35.15) можно переписать в виде

$$[K]_e [\varphi] + [P] = \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial x} \beta_i dS = 0. \quad (35.16)$$

В уравнении (35.16) по сравнению с уравнением (32.16) присутствует дополнительный член — поверхностный интеграл, который в силу условия на контуре  $\varphi = 0$  обращается в нуль.

Таким образом, применяя процедуру метода Бубнова — Галеркина<sup>1</sup> непосредственно к дифференциальному уравнению, описывающему рассматриваемую краевую задачу, находим систему уравнений метода конечных элементов, полученную ранее с помощью вариационного метода.

В заключение отметим еще один оригинальный метод получения конечно-элементных уравнений, разработанный К. Райсманом [97, 155]. Согласно этому методу на рассматриваемую, например, плоскую область накладываются сетки с треугольными ячейками. Проводят через середину каждого из отрезков этой сетки перпендикуляры, получаемую каждую точку, образующую многоугольники вокруг каждой узловой точки первоначальной сетки. Вычисляя теперь контурный интеграл надолго каждого из многоугольников по дифференциальному уравнению рассматриваемой краевой задачи и выражая производные через разностные отношения, получаем систему алгебраических уравнений для определения узловых значений исходной функции.

Описанный метод содержит в себе отдельные черты, свойственные методам конечных элементов и конечных разностей. Получаемая матрица коэффициентов при узловых неизвестных симметрична и имеет ленточную структуру.

Остается пока нерешенным вопрос, обладает ли метод Райсмана преимуществом по сравнению с обычной процедурой метода конечных элементов.

<sup>1</sup> Оценочные вопросы использования метода Бубнова — Галеркина для замены конечно-элементных уравнений изложены в работах [41, 87, 128, 143, 157, 160].

## § 36. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

### 36.1. Вводные замечания

В предыдущих параграфах настоящей главы изложены основы метода конечных элементов для решения краевых задач механики произвольных сплошных сред, в том числе и деформируемых сред, используемых в теории упругости и строительной механике. И все же наличие в теории упругости и строительной механики своей терминологии и возможность придать многим из вычислительных операций ясный физический смысл определяют дополнительное рассмотрение вопроса о применении метода конечных элементов к решению задач механики деформируемых сред.

При использовании метода конечных элементов для решения задач о напряженно-деформированном состоянии тел, последние представляются в виде совокупности конечных элементов, связанных между собой в узловых точках. Если используется метод конечных элементов в варианте метода перемещений, то за основные неизвестные принимаются компоненты перемещений узловых точек. При этом напряженно-деформированное состояние  $i$ -го элемента однозначно определяется через его узловые перемещения  $[\varphi]^{(i)} = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]^{(i)}$ .

Связь между конечными элементами вызывает в узловых точках реактивные усилия взаимодействия, и каждый из конечных элементов оказывается загруженным этими усилиями  $[R]^{(i)} = [R_1, R_2, \dots, R_n]^{(i)}$ .

Вектор усилий  $[R]^{(i)}$  также однозначно определяет напряженно-деформированное состояние элемента. Правда, при этом сразу же возникает вопрос: куда делась часть внешних нагрузок, действующих непосредственно на элемент? Забегая вперед, укажем, что она заменяется некоторыми приложенными в узлах сосредоточенными усилиями, эквивалентными по своему действию заданной нагрузке. Эти сосредоточенные узловые усилия учитываются при составлении уравнений равновесия в узлах.

### 36.2. Матрица жесткости

Между векторами  $[R]^{(i)}$  и  $[\varphi]^{(i)}$  существует определенная связь

$$[R]^{(i)} = [K]^{(i)} [\varphi]^{(i)}. \quad (36.1)$$

где  $[K]^{(i)}$  — есть матрица, встречающаяся ранее в § 35. Ее коэффициенты характеризуют свойства среды в объеме конечного элемента. В данном же случае, если принять за линейную структуру зависимости (36.1), матрица  $[K]^{(i)}$  есть матрица жесткости, которая определяет упругие свойства элемента.

Для определения матрицы жесткости  $[K]^{(1)}$  могут быть использованы способы, о которых говорилось в предыдущем параграфе. Наиболее часто используется вариационный способ, причем в форме, которая позволяет различно определять для каждого из элементов матрицу жесткости  $[K]^{(1)}$  и вектор внешних эквивалентных усилий  $\{P\}^{(1)}$ .

Пусть имеется произвольный объемный элемент, для которого выбран вектор узловых неизвестных  $\{\varphi\} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r\}$ . Предполагается также, что для каждого компонента перемещения  $u, v, w$  построены соответствующие интерполяирующие полиномы

$$u = \lfloor \varphi \rfloor_u \{\varphi\}; \quad v = \lfloor \varphi \rfloor_v \{\varphi\}; \quad w = \lfloor \varphi \rfloor_w \{\varphi\}$$

или для  $i$ -го элемента

$$\{U\}^{(1)} = [B]^{(1)} \{\varphi\}^{(1)}, \quad (36.2)$$

где

$$\{U\} = \{u, v, w\}, \quad [B] = \Gamma \lfloor \varphi \rfloor_u \lfloor \varphi \rfloor_v \lfloor \varphi \rfloor_w,$$

— прямоугольная матрица размером  $3 \times r$ , элементы которой зависят от положения рассматриваемой точки.

Используя далее зависимости Коши и закона Гука, можно получить выражения для компонентов деформации  $\{e\}$  и напряжения  $\{n\}$   $i$ -го элемента

$$\{e\}^{(1)} = [D]^{(1)} \{\varphi\}^{(1)}; \quad (36.3)$$

$$\{n\}^{(1)} = [E_s]^{(1)} \{\varphi\}^{(1)}. \quad (36.4)$$

где  $[D]$  и  $[E_s]$  — некоторые известные прямоугольные матрицы, элементы которых зависят от координат положения рассматриваемой точки. Элементы матрицы  $[E_s]$  дополнительно зависят от параметров, которыми характеризуются упругие свойства материала тела в пределах объема рассматриваемого конечного элемента.

Если прикатые выражения для компонентов перемещения (36.2) удовлетворяют всем условиям сплошности, включая условия кинематической стыковки смежных конечных элементов, то для определения матрицы жесткости можно воспользоваться математической формализированной принципа возможных перемещений в форме (6.2). В противном случае следует воспользоваться уже модифицированным принципом возможных перемещений, который излагался в § 14.

Следует заметить, что выполнение условий кинематической стыковки смежных элементов в совокупности с условиями сплошности по объему каждого из конечных элементов равносильно обеспечению непрерывности по всему объему тела самой функции (в нашем случае — перемещений).

Пусть перемещения (36.2)<sup>1</sup> удовлетворяют требованиям кинематической стыковки смежных конечных элементов. Тогда согласно принципу (6.2) сумма работ всех внешних  $\{R\}$  и внутренних  $\{S\}$  сил на возможном перемещении системы  $\{S\}$  равна нулю

$$R_1 \delta q_1 + R_2 \delta q_2 + \dots + R_r \delta q_r - \int \sigma_{ij} \delta e_{ij} + \dots + \tau_{ij} \delta \eta_{ij} dV = 0. \quad (36.5)$$

Второй член в левой части уравнения (36.5) выражает привращение потенциальной энергии, которая, как известно, равна с обратным знаком работе внутренних сил. Интеграл берется по всему объему конечного элемента.

В матричной форме зависимость (36.5) можно переписать в более компактном виде

$$[\delta q]^T [R] = \int [Be]^T [n] dV. \quad (36.6)$$

Используя далее выражения (36.3) и (36.4), непосредственно из зависимости (36.6) получаем

$$[R] = \left[ \int_V [D]^T [E_s] dV \right] [\varphi]. \quad (36.7)$$

Отсюда, если учесть зависимость (36.1),

$$[K] = \int_V [D]^T [E_s] dV. \quad (36.8)$$

При выводе формулы (36.8) не вводились какие-либо ограничения, касающиеся формы конечного элемента, поэтому полученное выражение (36.8) для матрицы жесткости может быть использовано для самых разнообразных форм конечного элемента. Матрица  $[K]$  является квадратной; ее порядок равен числу степеней свободы рассматриваемого конечного элемента.

Приведем еще один способ получения матрицы жесткости, который в практическом отношении часто оказывается более простым, чем непосредственное использование формулы (36.8). Согласно теореме Клавенбрана удвоенное значение потенциальной энергии равно сумме произведений внешних обобщенных сил на соответствующие им обобщенные перемещения. Примем в качестве обобщенных сил и обобщенных перемещений соответственно узловые усилия элемента  $\{R\}$  и узловые перемещения  $\{\varphi\}$ . Тогда

$$2V = R_1 q_1 + R_2 q_2 + \dots + R_r q_r \quad (36.9)$$

или в матричной форме

$$2V = [\varphi]^T [R]. \quad (36.10)$$

Исключая далее из формулы (36.10) с помощью зависимости (36.1) вектор узловых усилий  $[R]$ , получаем

$$V = \frac{1}{2} [q]^T [K] [q], \quad (36.11)$$

или в развернутом виде

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j, \quad (36.12)$$

где  $k_{ij}$  — элементы матрицы жесткости  $[K]$ :

$$[K] = [k_{ij}]. \quad (36.13)$$

Отсюда следует, что для получения матрицы жесткости линейной системы достаточно располагать выражением для потенциальной энергии конечного элемента в форме (36.12).

Задания элементов матрицы  $[K]$  зависит от геометрических и жесткостных параметров конечного элемента, а также от принятого закона изменения компонентов перемещения (или напряжения).

Выбор выражений, аппроксимирующих закон изменения перемещений (напряжений) по объему конечного элемента, является одним из наиболее ответственных моментов в общей процедуре МКЭ. Вообще желательно, чтобы этот выбор приводил к удовлетворению уравнений равновесия и уравнений совместности деформаций внутри объема каждого конечного элемента  $x$  по линиям (границам) их стыковки.

Ограничительность числа степеней свободы для конечного элемента не подавляет удовлетворять всем этим условиям, а следовательно, и получать точное решение задачи.

Следует отметить, что формулу (36.8), как и зависимость (36.12), можно применить лишь при условии, когда применимы выражения для компонентов перемещения удовлетворяют все условия сплошности, включая условия кинематической стыковки смежных конечных элементов. Получаемая при этом матрица жесткости называется совместной. К сожалению, часто об это забывают, что приводят при использовании формулы (36.8) к получению так называемых псевдоматриц матриц жесткости. Использование таких матриц жесткости в практических расчетах таит в себе большую опасность, поскольку наряду с удовлетворительным результатом для одной задачи они могут привести к тому, что ошибочное решение для другой задачи.

Матрица жесткости  $[K]$  полностью определяет жесткостные свойства рассматриваемого конечного элемента.

### 36.3. МНЭ в варианте метода перемещений

За основные неизвестные принимаются перемещения в узловых точках. Для определения этих неизвестных составляется необходимое число уравнений равновесия узловых точек. Узловые усилия, которые войдут в эти уравнения, исключаются с помощью матриц жесткости. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения основных неизвестных — узловых перемещений.

### 36.4. МНЭ в варианте метода сил<sup>1</sup>

В некоторых случаях удобнее за основные неизвестные принимать же узловые перемещения, а узловые усилия взаимодействия между элементами. Для их определения составляются уравнения совместности перемещений в узловых точках. Компоненты узловых перемещений в уравнениях совместности затем выражаются через узловые усилия.

Может показаться, что для этого достаточно воспользоваться зависимостью (36.1), т. е. найти обратную матрицу  $[K]^{-1}$ . Однако такой путь невозможен, поскольку в общем случае матрица жесткости  $[K]$  является особенной. Объясняется это тем, что компоненты вектора  $[R]$  в выражении (36.1) линейно связаны между собой с помощью системы уравнений равновесия для конечного элемента в целом. Поэтому при получении матрицы податливости на конечный элемент следует наложить определенное число кинематических связей, которые ликвидировали бы его перемещения как абсолютно твердого тела. В результате зависимость (36.1) примет вид

$$[R^k] = [K] [q^k]. \quad (36.14)$$

Матрица  $[K^k]$  допускает обращение

$$[q^k] = [F] [R^k], \quad (36.15)$$

где  $[F] = [K^k]^{-1}$  — матрица податливости конечного элемента.

Заметим, что матрицы  $[q^k]$  определяются лишь перемещениями, которые связаны с изменением напряженно-деформированного состояния элемента.

<sup>1</sup> Недостигаю я очевидные преимущества метода сил при решении отдельных задач, от которых не получают широкого распространения. Примером может быть Финишский «струйный» метод для стержневых систем, который этот достоинство теряет в более общих задачах с узловыми системами. Никакой, отсутствие альтернативных аналогичных методов.

В статье Л. А. Розина (Автоматизация авторства метода сил в строительной механике — Строительной машине и роботе сооружений, 1976, № 4, с. 21–26) предпринята попытка полностью формулировать в автоматизированном методе сил для общего случая. В связи с этим можно надеяться, что в ближайшее время, когда метод сил займет достойное место в расчетах инженерных конструкций.

Хотя порядок матрицы податливости  $|F|$  меньше порядка матрицы жесткости  $|K|$ , общее число уравнений для определения основных неизвестных в методе сил <sup>1</sup>, как правило, оказывается больше, чем в методе перемещений.

#### § 37. ПРОСТЕЙШИЕ ТИПЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Приведем наиболее характерные типы конечных элементов, употребляемые в МКЭ для расчета прочности различных конструкций.

1. Элемент стержня, работающий в условиях одностороннего напряженного состояния на растяжение-сжатие (рис. 51). При использовании метода перемещений (МП) требуется вводить две реактивные силы (см. рис. 51, а); при использовании же метода

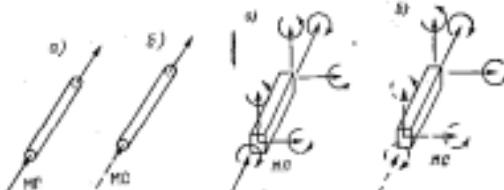


Рис. 51. Элемент стержня, работающий в условиях растяжения-сжатия.

Рис. 52. Элемент прогонатического стержня, работающий в условиях растяжения-сжатия, крученя и изгиба в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

сил (МС) — лишь одно реактивное уравнение, так как второе (написано на рис. 51, б пунктирной линией) определяется из уравнений равновесия рассматриваемого элемента при выбранных кинематических закреплениях, устраивающих его перемещения как абсолютно твердого тела.

2. Элемент стержня, работающий на расщепление-скатие с оголовком патролем, но скручивание и изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 52). При использовании МП требуется вводить в каждый элемент по четыре перемещивающие силы, по две осевые силы, четыре изгибающих момента и два скручивающих момента (рис. 52, а). Общее число реактивных уравнений равно числу степеней свободы конечного элемента. Порядок матрицы жесткости равен 12. При использовании МС неяв-

реактивных усилий (на рис. 52, б изображены пунктирными линиями) можно исключить из общего рассмотрения с помощью уравнений равновесия. Порядок матрицы податливости равен 6.

3. Плоский треугольный элемент пластины при рассмотрении плоской задачи теории гармоники (рис. 53). В МП в каждом узле вводится по два реактивных уравнения. Порядок матрицы жесткости

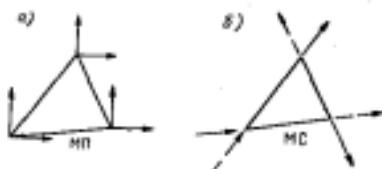


Рис. 53. Треугольный элемент пластины, работающей в условиях плоского изогнувшего состояния или плоской деформации: а — метод перемещений; б — метод сил.

равен 6. В МС три узловые реакции исключаются из общего рассмотрения с помощью уравнений равновесия элемента в целом. Порядок матрицы податливости равен 3.

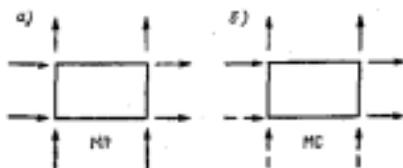


Рис. 54. Прямоугольный элемент пластины, работающей в условиях плоского изогнувшего состояния или плоской деформации: а — метод перемещений; б — метод сил.

4. Прямоугольный плоский элемент пластины при рассмотрении плоской задачи (рис. 54). При использовании МП общее число узловых усилий равно 8. Порядок матрицы жесткости равен 6. В МС три из восьми узловых усилий исключаются с помощью уравнений равновесия элемента как жесткого тела. Порядок матрицы податливости равен 5.

<sup>1</sup> С методом конечных элементов в вероятном методе сил можно ознакомиться во монографии [166].

5. Тетраэдр (рис. 55). Конечный элемент такой формы используется при решении объемной задачи теории упругости. Порядок матрицы жесткости равен 12. Порядок матрицы податливости равен 6.

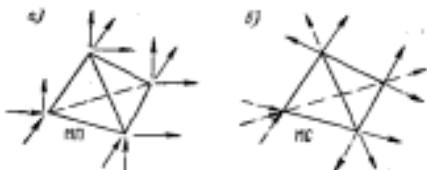


Рис. 55. Конечный элемент в форме тетраэдра для решения объемной задачи теории упругости: а — метод вершин; б — метод граней.

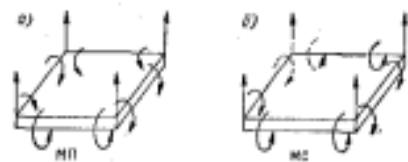


Рис. 56. Плоский прямоугольный элемент в задачах изгиба пластин: а — метод перекрестов; б — метод граней.

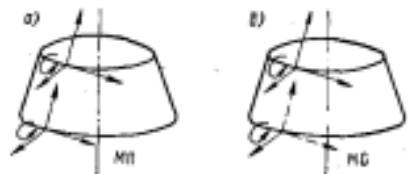


Рис. 57. Конечный элемент оболочки вращения при осесимметричном напряжении состоящий: а — метод вершин; б — метод граней.

6. Плоский прямоугольный элемент в задачах задачи жесткости пластин (рис. 56). Порядок матрицы жесткости элемента равен 12, матрицы податливости — 9.

7. Элемент оболочки вращения при осесимметричном напряжении состоящий (рис. 57). Оболочка вращения может быть идеализирована совокупностью элементов конических, торондальных или с действительной меридиональной кривизной. При использовании МП в каждом торцевом сечении такого элемента (рис. 57, а) действуют по три реактивные силы и одному изгибающему моменту. Порядок матрицы жесткости равен 8, матрицы податливости — 6.

### § 38. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ КОНЧЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ПРИ ПОВОРОТЕ НОВОКИДИНАТНЫХ ОСЕЙ

Используя метод, изложенный в § 36, мы могли бы найти матрицы жесткости конечных элементов для случая, когда местная система координат элемента совпадает с общей системой для конструкции.

Однако в практических расчетах, как правило, используются уже готовые, полученные ранее, матрицы жесткости для отдельных типовых элементов конструкции. Здесь может оказаться, что местная система координат, для которой я была вычислена матрица жесткости элемента, не совпадает с общей системой координат для конструкции.

Покажем, каким образом с помощью использования матриц перехода от одной новокординатной системы к другой можно получить выражение для матрицы жесткости конечного элемента в новой системе координат.

Пусть оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — местные оси конечного элемента, и известно для этих осей была вычислена матрица жесткости элемента  $[K]$ , т. е. установлена связь между его узловыми усилиями  $\{R\}$  к узловым перемещениям  $\{q\}$ .

$$\{R\} = [K]\{q\}. \quad (38.1)$$

Введем новые оси координат для элемента:  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ . В новой системе координат зависимость (38.1) примет вид

$$\{R'\} = [K']\{q'\}. \quad (38.2)$$

Здесь индекс ' $'$  подчеркивает, что соответствующая матрица записана для осей  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ .

Далее предположим, что нам известна матрица преобразования перемещений для элемента из новой системы координат в старую

$$\{q\} = [T]\{q'\}. \quad (38.3)$$

Записать в общем виде выражение для матрицы преобразования  $[T]$  сложно. Процедура получения этой матрицы для некоторых типовых элементов изложена ниже.

Так как направления узловых усилий совпадают с направлениями соответствующих узловых перемещений, легко понять, что связь между узловыми усилиями в старой и новой системах координат осуществляется с помощью той же матрицы преобразования  $[T]$ , т. е.

$$[R] = [T][R']. \quad (38.4)$$

Внося значения матриц  $[R]$  и  $[q]$  из (38.4) и (38.3) в зависимость (38.1) и разрешая получившее при этом уравнение относительно матрицы  $[R']$ , получаем

$$[R'] = [T]^{-1}[K][T][q']. \quad (38.5)$$

Покажем далее, что матрица преобразования  $[T]$  для элемента является ортогональной матрицей, т. е.

$$[T]^{-1} = [T]^T. \quad (38.6)$$

Действительно, работа, производимая узловыми силами на действительных перемещениях, не зависит от выбора системы координат, следовательно,

$$[q]^T[R] = [q']^T[R']. \quad (38.7)$$

Подставляя в левую часть последнего равенства выражение  $[q]$  и  $[R]$  из выражений (38.3) и (38.4), получаем

$$[q]^T[T]^T[T][T][R'] = [q']^T[R']. \quad (38.8)$$

откуда следует, что

$$[T]^T[T] = I, \quad (38.9)$$

где  $I$  — единичная матрица.

Следовательно,  $[T]^{-1} = [T]^T$ , что и требовалось доказать. Тогда зависимость (38.5) можно переписать в виде

$$[R'] = [K'][q'], \quad (38.10)$$

где

$$[K'] = [T]^T[K][T] \quad (38.11)$$

— матрица жесткости конечного элемента в системе координат  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ .

Формулой (38.11) можно воспользоваться для определения матрицы жесткости при переходе от местной к общей системе координат.

## § 39. МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

### 39.1. Вводные замечания

В § 35 и 36 изложены способы определения матрицы жесткости конечного элемента, которая устанавливает связь между узловыми усилиями и его узловыми перемещениями.

Наличие матриц жесткости для отдельных элементов позволяет заменить исходную конструкцию с бесконечным числом степеней свободы дискретной моделью с конечным числом степеней свободы. Наша ближайшая задача — определить для этой дискретной модели ее общую матрицу жесткости, которая устанавливает связь между узловыми перемещениями дискретной модели и внешней нагрузкой исходной конструкции. Рассматривая выражением для общей матрицы, по заданным значениям внешней нагрузки можно найти узловые перемещения и далее по формуле (36.4) — компоненты напряжения

$$[\sigma]^{(0)} = [E_0]^{(0)} [q]^{(0)}. \quad (39.1)$$

Можно было бы сразу написать основное матричное уравнение (32.21) методом конечных элементов для определения узловых неизвестных  $[q]$  и формулы (33.22) и (32.23) для вычисления общей матрицы жесткости  $[K]$  и общего вектора значений узловых усилий  $[\bar{P}]$ . Однако будет полезно повторить вывод основной системы разрешающих уравнений МКЭ, используя зависимости и приемы механики деформируемых сред. Это позволит еще лучше понять физическое содержание каждой операции метода конечных элементов.

### 39.2. Вывод основных уравнений МКЭ — в варианте метода перемещений

Пусть имеем произвольное тело, находящееся в равновесном состоянии при действии заданных внешних нагрузок. Тело разбивается на  $M$  конечных элементов.

Напряженное состояние  $[\sigma]^{(0)}$  внутри каждого  $i$ -го элемента устанавливается его узловыми усилиями  $[R]^{(0)}$ , которые связаны с помощью матрицы жесткости элемента  $[K]^{(0)}$  с соответствующими им узловыми перемещениями  $[q]^{(0)}$  зависимостью

$$[R]^{(0)} = [K]^{(0)} [q]^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (39.2)$$

Объединим уравнения (39.2), выписанные для каждого из конечных элементов конструкции, в одно матричное уравнение вида

$$[R] = \bigcup K_i \bigcup [q]. \quad (39.3)$$

四

$$\left. \begin{aligned} [R] &= \{[R]^{(1)}, [R]^{(2)}, \dots, [R]^{(M)}\}; \\ [-K_{\alpha}] &= \{[-K]^{(1)}, [-K]^{(2)}, \dots, [-K]^{(M)}\}; \\ |\alpha\rangle &\rightarrow |\alpha|^{(1)}, |\alpha|^{(2)}, \dots, |\alpha|^{(M)}. \end{aligned} \right\} \quad (39.4)$$

Уравнение (39.3) устанавливает связь между внутренними узловыми усилиями  $\{R\}$  и узловыми перемещениями  $\{\bar{q}\}$  рассматриваемой конструкции.

Введем вектор узловых перемещений 3-го узла

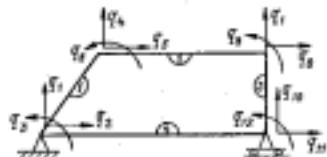


Рис. 58. Площадь стекловидного ряда.

Заметим, что термин «суперпозиция» вносит обобщенный характер. В зависимости от рассматриваемой задачи он обозначает как перемещение, так и их частные производные до  $n$ -го порядка включительно. Тогда

$$|\overline{g}| = \{|g|_1, |g|_2, \dots, |g|_r, \dots, |g_s|\} \quad (39.7)$$

будет вектором узловых перемещений для всей конструкции в общей системе координат, а

$$|\vec{P}| = \{|P|_1, |P|_2, \dots, |P|_3, \dots, |P|_d\} \quad (39.8)$$

— вектором внешней узловой нагрузки также для всей конструкции (здесь  $f$  — число узловых точек).

Для любой конкретной конструкции путем непосредственного рассмотрения содержания векторов  $\{q\}$  и  $\{\bar{q}\}$  нетрудно установить связь между их отдельными элементами, а следовательно, и между указанными векторами.

$$|q\rangle = |H\rangle |\tilde{q}\rangle, \quad (39.9)$$

С целью лучшего поиска места содержания матрицы  $[H]$  напишем ниже в развернутом виде уравнение (36.9) для плоской рамы, изображенной на рис. 58 [выражение (39.9')].

Для составления уравнения равновесия конструкции в целом воспользуемся принципом возможных перемещений.

$$\delta U = \delta V, \quad (39.10)$$

Преобразование работы внешних узловых сил  $\{P\}$  определяется по формуле

$$\delta U = \sum_{s=1}^{n+1} [\delta q]_s^T [P]_s, \quad (39.11)$$

и.e., если воспользоваться выражениями (39.7) и (39.8),

$$8U \rightarrow |\delta\tilde{\varphi}|^2 |\tilde{P}|. \quad (39.12)$$

Приращение потенциальной энергии конструкции  $\delta V$  равно работе внутренних узловых усилий за соответствующих имеющихся перемещениях

$$\delta V = \sum_{i=1}^{imM} \{ \delta q_i \}^{(i)T} \{ R_i \}^{(i)},$$

шан с учетом обозначенной (39.4)

$$\delta V = [\delta g]^T \{R\}. \quad (39.13)$$

Внося выражения (39.12) и (39.13) для  $\delta U$  и  $\delta V$  в уравнение (39.10), получаем

$$\{\delta q\}^T [R] = \{\delta q\}^T [\bar{P}]. \quad (39.14)$$

Отсюда, если заметить, что на основании зависимости (39.8)

$$[\delta q] = [H] [\delta \bar{q}] \quad (39.15)$$

и что  $[\delta \bar{q}] \neq 0$ , можно получить

$$[H]^T [R] = [\bar{P}]. \quad (39.16)$$

Подставляя в формулу (39.16) вместо  $[R]$  его выражение из зависимости (39.3) и учитывая зависимость (39.9), получаем

$$[\bar{K}] [\bar{q}] = [\bar{P}], \quad (39.17)$$

где

$$[\bar{K}] = [H]^T [K_x] [H] \quad (39.18)$$

— общая матрица жесткости для всей конструкции в общей системе координат.

Уравнение (39.17) есть матричное уравнение равновесия метода конечных элементов в общей системе координат. Заметим, что при выводе этого уравнения система предполагалась совершенно свободной, т. е. не закрепленной в пространстве. Поэтому каждое узловое перемещение в составе  $[\bar{q}]$  будет зависеть от неопределенных значений перемещения конструкции как абсолютно твердого тела.

Из вышеизложенного ясно, что полученные ранее уравнения равновесия (39.17) содержат в себе в общем случае шесть уравнений равновесия, соответствующих шести степеням свободы движения конструкции как абсолютно твердого тела. Это приводит к тому, что матрица жесткости всей конструкции  $[\bar{K}]$  является особенной: ее ранг меньше ее порядка из числа степеней свободы как твердого тела.

Для исключения из вектора  $[\bar{q}]$  перемещений конструкции как абсолютно твердого тела необходимо внести определение числа кинематических закреплений в отдельных ее узлах по некоторым обобщенным узловым координатам. В общем случае объемной конструкции число таких закреплений, которые позволяют анимировать поступательные и вращательные движения (идоль и вокруг какой-либо координат) системы как твердого тела, равно шести. В случае же, например, плоской рамы, изображенной на рис. 58, достаточно ввести три кинематические связи  $q_1 = q_2 = q_3 = \bar{q}_{10} = 0$ , чтобы полностью избежать ее перемещений как твердого тела.

Исключая из матрицы  $[\bar{K}]$  соответствующие узловым перемещениям строки и столбцы, на которые накладываются кинемати-

ческие связи, получаем некоторую несобственную матрицу жесткости  $[\bar{K}^*]$ . При этом уравнение равновесия (36.17) перепишем в виде

$$[\bar{K}^*] [\bar{q}^*] = [\bar{P}^*], \quad (39.19)$$

где индекс  $*^*$  означает, что из соответствующей матрицы исключены члены, связанные с наличием у конструкции перемещений как единого целого.

В заключение отметим, что получение общей матрицы жесткости  $[\bar{K}]$  из выражения (39.18) возможно при наличии значительной оперативной памяти ЭВМ, так как размеры матрицы  $[H]$  могут достигнуть очень больших величин.

Значительно более простой прием для автоматического формирования общей матрицы жесткости системы, а также для одновременного учета кинематических граничных условий и т. д., связанный с использованием так называемой матрицы индексов и реализованный в универсальной программе МКЭ [22], описан в § 53.

#### § 40. ПРИВЕДЕНИЕ ОБЪЕМНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ СИЛ, А ТАКЖЕ НАЧАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ К ЭКВИВАЛЕНТНЫМ УЗЛОВЫМ ВНЕШНИМ СИЛАМ

При составлении уравнений равновесия узлов в методе перемещений предполагалось, что все внешние силы применимы в узлах.

Предположим теперь, что помимо узловых внешних сил на рассматриваемый элемент действуют объемные силы интенсивностью  $[F_v] = [XYZ]$  и поверхностные силы интенсивностью  $[F_s] = [X_s Y_s Z_s]$ . Кроме того, рассматриваемый элемент имеет начальные деформации  $\{e^0\} = \{\bar{e}_1^0 \dots \bar{e}_n^0\}$ , которые могут быть вызваны, например, температурным воздействием на него.

Для определения эквивалентных узловых сил воспользуемся следующим образом. Дадим перемещениям элемента  $\{U\} = \{u_i\}$  малые вариации  $\{\delta U\} = \{\delta u_i\}$  и найдем работу в объеме конечного элемента указанных выше сил на этих вариациях

$$\delta P = \int \{\delta U\}^T [F_v] dV + \int \{\delta U\}^T [F_s] dS + \int \{\delta U\}^T \{e^0\} dV. \quad (40.1)$$

Второй интеграл в правой части выражения (40.1) берется по поверхности конечного элемента. Если далее учесть, что из основания зависят (36.2), (36.3) и закона Гука  $\{\sigma\} = [E_d] \{e\}$  вида

$$\left. \begin{aligned} \{\delta U\}^T &= \{\delta q\}^T [B]^T; \\ \{\delta e\}^T &= \{\delta q\}^T [D]^T; \\ \{e^0\} &= [E_d] \{e^0\}, \end{aligned} \right\} \quad (40.2)$$

то правую часть выражения (40.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \delta P = & [\delta q]^T \int_V [B]^T [F_V] dV + [\delta q]^T \int_S [B]^T \times \\ & \times [F_v] dS + [\delta q]^T \int_V [D]^T [E_e] [\epsilon^e] dV. \end{aligned} \quad (40.3)$$

В полученных выражениях коэффициенты, стоящие при значениях узловых перемещений  $[\delta q]$ , и будут представлять матрицы некоих эквивалентных узловых усилий:

от действия объемных сил интенсивностью  $[F_V]$

$$[P_V] = \int_V [B]^T [F_V] dV; \quad (40.4)$$

от действия поверхностных сил интенсивностью  $[F_v]$

$$[P_v] = \int_S [B]^T [F_v] dS; \quad (40.5)$$

от учета начальных деформаций  $[\epsilon^0]$

$$[P_{\epsilon^0}] = \int_V [D]^T [E_e] [\epsilon^0] dV. \quad (40.6)$$

Таким образом, если в отдельных конечных элементах действуют внешние объемные и поверхностные силы и имеется начальное деформированное состояние, то при составлении уравнений равновесия приведенного  $i$ -го узла  $i$ -й узловой системы (39.17) вместо узловой силы  $[P_i]^{(0)}$  следует застичь величину

$$[P_i]^{(0)} = [P_i]^{(0)} + \sum_s [P_V^{(s)} + P_v^{(s)} + P_{\epsilon^0}^{(s)}]^{(0)}. \quad (40.7)$$

В выражении (40.7) суммирование производится по всем элементам, сходящимся в  $i$ -м узле.

Заметим, что при учете начальных деформаций компоненты напряжения  $[\sigma]$  в каждом из элементов будут определяться с помощью зависимости

$$[\sigma] = [E_e] [\epsilon - \epsilon^0].$$

или, если принять во внимание зависимость (39.1),

$$[\sigma] = [E_e] [\eta] - [E_e] [\epsilon^0]. \quad (40.8)$$

Приведенный выше вывод выражений для эквивалентных узловых усилий (40.4), (40.5) и (40.6) был основан на равенстве работ, совершаемых действующей на элемент внешней нагрузкой и эквивалентными ей узловыми усилиями на соответствующих конечных перемещениях. Естественно, что точность замены

внешних нагрузок эквивалентными узловыми усилиями во многом зависит от того, насколько удачно выбранное выражение (36.2) для перемещений  $[U]$  отображает действительный характер перемещений по объему рассматриваемого конечного элемента<sup>1</sup>.

#### § 41. ОБЩАЯ СХЕМА ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РАСЧЕТУ КОНСТРУКЦИЙ<sup>2</sup>

Основные блоки алгоритма метода перемещений и МКЭ и последовательность их выполнения приведены для наглядности на рис. 59. Их содержание состоит в следующем.

1. Задание исходной информации, которая должна включать: расположение узловых точек в общей системе координат; взаимное расположение конечных элементов (головка конструкции). Более детально об этом сказано в § 53;

значения геометрических и жесткостных параметров каждого элемента конструкции;

значения внешних узловых, поверхностных и объемных сил.

2. Определение положения узловых точек элементов в местной системе координат.

3. Построение матрицы жесткости  $i$ -го элемента в местной системе координат  $[K]^{(i)0}$ .

4. Определение направляющих косинусов для каждого элемента и матрицы преобразования перемещений элемента в местной системе координат в общую  $[T]^{(i)0}$ .

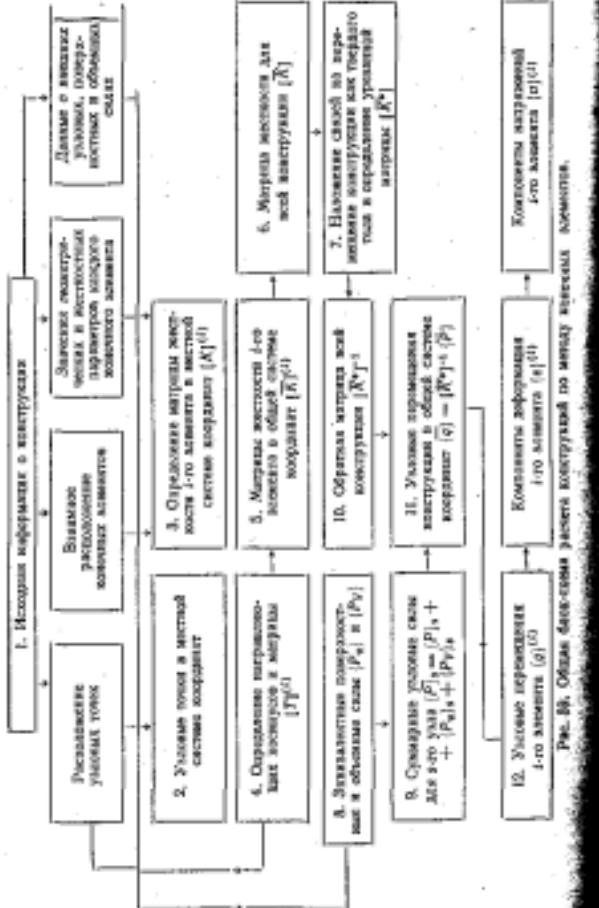
5. Определение матрицы жесткости  $i$ -го элемента в общей системе координат.

6. Определение матрицы жесткости для всей конструкции  $[K]$ .

7. Наложение на конструкцию определенного числа связей, исключающих ее перемещения как абсолютно жесткого тела. Последнее приводит к получению некоторой урезанной общей матрицы жесткости.

<sup>1</sup> МКЭ позволяет также учесть особенности, вызванные, например, пропажами сопротивления сил или резким изменением геометрии контура элемента в узлах трещины.

Для этого следует в квадратурную формулу вместо дифференциальных членов, соответствующих характеристикам элемента, подставить соответствующие характеристики элемента. См. по этому вопросу: И. Ф. и С. К. Понг. Нахождение распределения напряжений элементов вокруг особенности. — «Радиотехника и электроника», 1972, № 9, с. 136—137; Small Scale Yielding Near a Crack in Plate Strain. — Inter. J. of Fracture Mechanics, 1974, № 2, р. 143—156; К. Л. Гатт, Р. В. Магнус, У. Й. Остинген, Дж. Р. Райс. — В практике применения метода МКЭ к расчету конструкций для членов примера, структура которого здесь опущена из-за особой остроты. Членов примера, подробно охарактеризованной содержанием основных этапов метода конечных элементов, имеется в учебнике пособия Л. Н. Ростовцева «Расчет скелетных рам с помощью метода перемещений в интегральной форме». ЛНН, 1976.



8. Приведение поверхностных и объемных сил к эквивалентным узловым слоям  $[F_{1i}]_1$  и  $[F_{2i}]_1$ .

9. Определение суммарных узловых сил в каждом 1-м узле

$$[P_i]_1 = [P_i]_1 + [P_{vi}]_1 + [P_{2i}]_1$$

10. Определение обратной матрицы  $[K^{*-1}]$ .

11. Определение узловых перемещений конструкции в общей системе координат

$$[q]_1 = [K^{*-1}] [P_i]_1$$

12. Определение узловых перемещений и напряженного состояния для каждого 1-го конечного элемента.

## § 42. УЧЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ КОНСТРУКЦИИ\*

### 42.1. Вводные замечания

Два типа нелинейности встречаются при расчете конструкций. Первый тип связан с нелинейностью зависимости  $\sigma = \sigma(\epsilon)$ , которой характеризуется материал конструкции в упругопластической области. Второй тип связан с геометрической нелинейностью, когда перемещения конструкций вызывают значительные изменения ее геометрии, так что уравнения равновесия приходится составлять уже для деформированного состояния.

Метод конечных элементов может быть использован при учете геометрической и физической нелинейности. Учет любого из этих двух типов нелинейности приводит к получению разрешающей системы уравнений, содержащей нелинейные относительно определяемых основных неизвестных члены. Присутствие в уравнениях нелинейных членов не позволяет получить их решение в замкнутом виде подобно тому, как это наблюдалось в случае расчета линейных систем. Здесь приходится использовать различные процедуры последовательных приближений.

При учете физической нелинейности связь между вектором напряжений  $[\sigma]$  и вектором деформаций  $[\epsilon]$  может быть выражена формулой

$$[\sigma] = [E_s(\epsilon)] [\epsilon], \quad (42.1)$$

где матрица  $[E_s]$  зависит от подлежащего определению деформированного состояния  $[\epsilon]$ , которое, как известно, в методе конеч-

\* См. по этому вопросу следующие работы: B. M. Айроне [3]; Дж. Аргирес [5]; О. Зенкевич [48]; В. А. Постков, И. Я. Хархурин [67]; А. Г. Угольников, Ю. Г. Коротков [116]; R. H. Gallagher, Y. Yamada, J. T. Oden [126]; R. H. Gallagher [129]; J. Hoiland, K. Bell [142]; K. H. Huebscher [143]; J. T. Oden, R. W. Clough, Y. Yamamoto [148]; J. S. Przemieniecki [152]; J. Whitteman [351].

ных элементов является однозначной функцией узловых перемещений  $\{q\}$ . Последнее позволяет переписать зависимость (42.1) в виде

$$[\sigma] = [E_e(q)] \{q\}. \quad (42.2)$$

В общем случае каждый элемент матрицы  $[E_e(q)]$  можно представить в виде степенного полинома от компонентов вектора  $\{q\}$ .

Учет геометрической нелинейности приводит к тому, что зависимость (36.3) между  $\{\varepsilon\}$  и  $\{q\}$  перестает быть линейной

$$[\varepsilon] = [D(q)] \{q\}. \quad (42.3)$$

Элементы матрицы  $[D(q)]$  являются степенными функциями компонентов вектора  $\{q\}$  для рассматриваемого конечного элемента.

Если теперь воспользоваться принципом возможных перемещений в форме зависимости (36.6) и учесть, что в рассматриваемом случае

$$[\delta\varepsilon] = [D^*] [\delta q], \quad (42.4)$$

где  $[D^*]$  — матрица, элементы которой определяются по формуле

$$d_{ij}^* = d_{ij} + \sum_{\mu=1}^r \frac{d d_{ij}}{d q_\mu} q_{\mu}, \quad (42.5)$$

$d_{ij}$  — элемент матрицы  $[D]$ , то для определения матрицы жесткости получим вместо (36.8)

$$[K^*] = \int_V [D^*]^T [E_e] dV. \quad (42.6)$$

Если ввести в рассмотрение матрицу  $[K^*]$ , зависимость между узловыми усилиями и узловыми перемещениями для  $i$ -го конечного элемента

$$[R_i] = [K^*] \{q\}, \quad (42.7)$$

при учете физической и геометрической нелинейности застывает быть линией.

Располагая  $[R_i]$ , для  $i$ -го элемента, по формуле (39.18) можно построить общую матрицу жесткости  $[K^*]$  для всей конструкции. При этом основное матричное уравнение (39.17) для определения неизвестных узловых перемещений перепишется в виде

$$[K^*] \{\bar{q}\} = \{\bar{P}\}. \quad (42.8)$$

Матрица  $[K^*]$  зависит не только от жесткостных параметров конструкции, но и от ее напряженно-деформированного состоя-

ния, выражаемого через узловые перемещения. Именно это обстоятельство и приводят к тому, что решение системы (42.8) может быть получено лишь с помощью итерационных методов. Остановимся на некоторых из них<sup>3</sup>.

## 42.2. Метод последовательных приближений<sup>2</sup>

Метод состоит в том, что значение общей матрицы  $(\bar{K}^*)$  на каждом этапе решения системы (42.8) определяется через значения узловых перемещений, полученных на предыдущем этапе,

$$[K^*(q_{i-1})] \{\bar{q}\}_i = \{\bar{P}\}, \quad (42.9)$$

где  $i$  — номер этапа приближения.

На первом этапе ( $i = 1$ ) значение узловых перемещений, от которых зависят отдельные элементы матрицы жесткости  $[K^*]$ , следует положить равными нулю. Последнее приводит к тому, что все члены, связанные с учетом геометрической или физической нелинейности, обращаются в нуль, и мы получаем обычную матрицу  $[K]$  для линейной задачи.

Процесс последовательных решений уравнения (42.9) с процедурой уточнения значения матрицы жесткости  $[K^*]$  на каждом этапе продолжается до тех пор, пока разница между результатами решения, полученными на данном и предыдущем этапе приближения не будет достаточно малой (рис. 60).

Описанный выше процесс последовательных приближений при всей своей простоте обладает тем существенным недостатком, что при сильной нелинейности оказывается слабо сходящимся, а иногда расходящимся.

<sup>2</sup> Достаточно полное изложение изысканий употребительных в инженерных расчетах численных методов решения систем линейных алгебраических уравнений дано в книге Н. С. Вахилова [3, с. 405]. Некоторые из методов, приведенных в этой книге, излагаются ниже, вместе сяд другими изложенными методами, приведены в литературе по механике деформируемых сред.

<sup>3</sup> Испол был предложен И. А. Бергером для решения задач теории пластичности и ползучести [И. А. Бергер. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности. // Продолжение математики и механики, 1961, № 6, с. 765–770]. В литературе по строительной механике и теории упругости он часто называется методом первичных жесткостей или методом Бергера.



Рис. 60. Принцип метода последовательных приближений жесткостей при решении нелинейных задач.

### 4.2.3. Метод упругих решений<sup>1</sup>

Этот метод по сравнению с предыдущим приводит к определенному уменьшению общей трудоемкости вычислительных операций. Он основан на выделении из матрицы жесткости системы  $\{\bar{K}\}$  ее линейной составляющей

$$\{\bar{K}^k\} = \{\bar{K}\} + \{\bar{K}_{\text{лис}}\}, \quad (42.10)$$

где второй член в правой части полностью связан с наличием нелинейности в рассматриваемой конструкции.

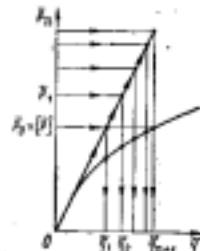


Рис. 61. Проду́рда ме́тода упругих ре́шений.

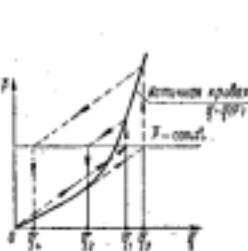


Рис. 62. Пример итера́цио́нной ме́тодики проце́дуры.

Принимая далее во внимание выражение (42.10), уравнение (42.8) можно переписать в следующем виде:

$$\{\bar{K}\} \{\bar{q}\} = \{\bar{P}\} - \{\bar{K}\}_{\text{лис}} \{\bar{q}\}. \quad (42.11)$$

К решению матричного уравнения (42.11) можно применить процедуру последовательных приближений согласно следующему алгоритму:

$$\{\bar{K}\} \{\bar{q}^{(k)}\} = \{\bar{P}^{(k-1)}\}, \quad (42.12)$$

где

$$\{\bar{P}^{(k-1)}\} = \{\bar{P}\} - \{\bar{R}(\bar{q}^{(k-1)})\}_{\text{лис}} \{\bar{q}^{(k-1)}\}. \quad (42.13)$$

Таким образом, на каждом этапе последовательных приближений приходится решать систему линейных алгебраических уравнений (42.12) с постоянными коэффициентами в правых частях,

<sup>1</sup> Этот метод предложен А. А. Ильюшиным [44] для решения задач деформационной теории пластичности. В соответствии с этим методом рассматриваются линейные упругие тела, имеющие те же деформации, что и упругопластичные тела, но с дополнительными объемными и измереностными напряжениями.

значения которых [см. формулу (42.13)] уточняются с помощью результатов, полученных на предыдущем этапе. Процедура метода для системы с одной степенью свободы представлена на рис. 61.

Видим, что метод упругих решений очень прост. Он требует лишь разового обращения матрицы  $\{\bar{K}\}$ . Следует заметить, что число необходимых приближений сильно зависит от точности начального приближения. Процедура плохо справляется при большой разнице между линейными и нелинейными решениями, в частности, при значительных пластических деформациях. Более того, при некоторой форме кривой  $\bar{F}(\bar{q})$  процесс оказывается осциллирующим (рис. 62).

### 4.2.4. Метод Ньютона — Рафсона<sup>1</sup>

При медленной сходимости метода последовательных приближений или метода упругих решений часто используют уточненную процедуру Ньютона — Рафсона.

Пусть для некоторого  $k$ -го приближения при выполнении уравнения (42.11) мы получаем невязку  $\{\delta\}$ ,

$$\{\delta\}_k = \{\bar{P}\} - \{\bar{K}\} \{\bar{q}\}_k - \{\bar{K}\}_{\text{лис}} \{\bar{q}\}_k. \quad (42.14)$$

Дадим узловым перемещениям  $\{\bar{q}\}$  некоторые малые приращения  $\{\Delta\bar{q}\}$ , а затем новому  $\{\bar{q}\}$  для положения системы, определяемого узловыми перемещениями  $\{\bar{q} + \Delta\bar{q}\}$ , разложим в ряд Тейлора

$$\{\delta(\bar{q} + \Delta\bar{q})\}_k = \{\delta(\bar{q})\}_k + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \{\delta(\bar{q})\}}{\partial q_i} \left|_{\bar{q}=q_k} \right. \Delta q_i + O(\{\Delta\bar{q}\}^2). \quad (42.15)$$

Сокращая в разложении (42.15) лишь первые два члена ряда и полагая, что выбранные приращения  $\Delta\bar{q}_i$  обращают невязку  $\{\delta(\bar{q} + \Delta\bar{q})\}_k$  в нуль, получаем

$$-\sum_{i=1}^N \frac{\partial \{\delta(\bar{q})\}}{\partial q_i} \left|_{\bar{q}=q_k} \right. \Delta q_i = \{\delta(\bar{q})\}_k. \quad (42.16)$$

Вносим в левую часть равенства (42.16) выражение  $\{\delta(\bar{q})\}_k$ , из формулы (42.14) и выполняя необходимые операции дифференцирования, получаем

$$\{\bar{K} + \Delta\bar{K}\}_k \{\Delta\bar{q}\}_{k+1} = \{\delta(\bar{q})\}_k. \quad (42.17)$$

<sup>1</sup> Метод Ньютона — Рафсона и все последующие методы, которые приводятся в настоящем параграфе, достаточно хорошо зарекомендовали себя при решении нелинейных задач структурной механики и теории упругости [см. статью Дж. Стернхайма, Б. Хейслера, В. Ризенхайса [111].

где элементы матрицы  $[\Delta \bar{K}]$  определяем по формуле

$$\Delta \bar{K}_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{K}_{ik}^{ext}}{\partial q_j} \bar{q}_k. \quad (42.18)$$

$\bar{K}_{ik}^{ext}$  — элементы матрицы  $[K_{ext}]$ .

На решении системы линейных алгебраических уравнений (42.17) определяем  $\{\Delta \bar{q}\}_{ext}$  и уточненное значение  $\{\bar{q}\}$  находим из зависимости

$$\{\bar{q}\}_{ext} = \{\bar{q}\}_{ext} + \{\Delta \bar{q}\}_{ext}. \quad (42.19)$$

Графическое изображение процедуры Ньютона—Рафсона приведено на рис. 63.

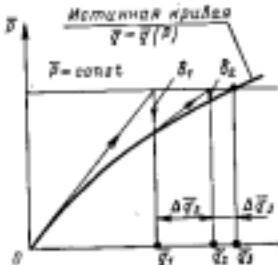


Рис. 63. Процедура метода Ньютона—Рафсона.

$$[\bar{K}] \{\Delta \bar{q}\}_{ext} = \{\delta(\bar{q})\}, \quad (42.20)$$

При этом получаем так называемый модифицированный метод Ньютона—Рафсона. Его графическое изображение для системы с одной степенью свободы приведено на рис. 64.

Хотя процедурно изложенные выше методы различны между собой, их объединяет общее стремление линеаризировать систему  $\{\delta\}$ , которая служит оценкой отклонения положения системы от ее действительного равновесного состояния.

Возможен и другой подход к построению методов решения нелинейных задач. Он основан на предположении (в подавляющем большинстве задач вполне оправданном), что в процессе нагружения отдельные составляющие вектора нагрузки изменяются пропорционально общему параметру нагружения  $\lambda$

$$\{\bar{P}\} = \lambda \{\bar{P}_0\}, \quad (42.21)$$

Дифференцируя равенство (42.14) по параметру  $\lambda$  и учитывая зависимость (42.21), получим

$$\{\dot{\delta}\} = [\bar{P}_0] - [\bar{K} + \bar{K}_{int} + \Delta \bar{K}] \{\dot{q}\}, \quad (42.22)$$

где точкой обозначена производная по  $\lambda$ .

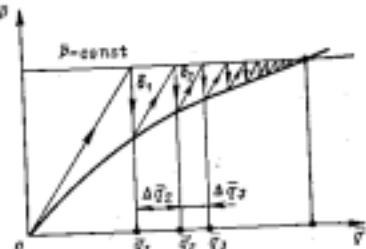


Рис. 64. Процедура метода дифференциального метода Ньютона—Рафсона.

Равновесное состояние рассматриваемой системы можно определить из условия минимума величины  $\|\delta\|$  по параметру  $\lambda$

$$\{\dot{\delta}\} = 0. \quad (42.23)$$

#### 42.5. Метод шагового нагружения

На основании зависимостей (42.23) и (42.22) можно записать уравнение

$$[\bar{K} + \bar{K}_{int} + \Delta \bar{K}] \{\dot{q}\} = \{\bar{P}_0\}. \quad (42.24)$$

Для интегрирования уравнения (42.24) могут быть использованы любые процедуры решения задач Коши. В частности, алгоритм решения удобно представить в форме шагового увеличения параметра нагружения  $\lambda$ . Для этого разобьем интервал изменения  $\lambda$  на ряд отдельных участков точками  $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_s < \lambda_{s+1} < \dots < \lambda_L = 1$ , что позволяет переписать уравнение (42.24) для  $s+1$ -го шага нагружения в следующем виде:

$$[\bar{K} + \bar{K}_{int} + \Delta \bar{K}]_s \{\Delta \bar{q}\}_{ext} = (\lambda_{s+1} - \lambda_s) \{\bar{P}_0\}, \quad (42.25)$$

где

$$\{\Delta \bar{q}\}_{ext} = \{\bar{q}\}_{ext} - \{\bar{q}\}_0. \quad (42.26)$$

С помощью уравнения (42.25), последовательно переходя от нулевой ступени нагружения ( $s=0$ ) к первой ( $s=1$ ), от первой к второй ( $s=2$ ) и т. д., можно получить значение вектора узло-ко второй

вых перемещений  $\{\bar{q}\}$ ; при интересующем нас значении  $\lambda_0 = 1$ . Заметим, что значение  $\{\bar{q}\}$  на каждой ступени нагружения определяется согласно зависимости (42.26) по формуле

$$\{\bar{q}\}_{n+1} = \{\bar{q}\}_n + [\Delta\bar{q}]_{n+1}. \quad (42.27)$$

Последовательность операции метода шагового нагружения легко прослеживается по рис. 65.

Недостатком метода шагового нагружения является наличие «крюфаз» приближенного решения от точного (рис. 65). Поэтому через каждые несколько шагов нагружения накопленную величину невязки  $\{\delta\}$  рекомендуется ликвидировать с помощью одного из накопленных выше методов. При этом в качестве нулевого приближения используется результат шаговой процедуры.

Рис. 65. Принцип шагового метода нагружения.

одного из накопленных выше методов. При этом в качестве нулевого приближения используется результат шаговой процедуры.

## 42.6. Самокорректирующий метод<sup>3</sup>

Изложим еще один метод решения нелинейных задач, который в известной мере обладает достоинствами как методов, направленных на непосредственную линквидацию невязки  $\{\delta\}$ , так и методов, использующих условие минимизации невязки по параметру нагрузки  $\lambda$ . Такое объединение достоинств в пределах одного метода позволяет устранить недостатки, присущие ранее изложенным методам.

Самокорректирующий метод основан на использовании уравнения

$$[\delta] + Z[\delta] = 0, \quad (42.28)$$

справедливость которого очевидна. Здесь  $Z$  — некоторый скалярный множитель, выбираемый из условия получения наилучшей устойчивости расчетного алгоритма.

Самокорректирующее свойство уравнения (42.28), т. е. его повышенная устойчивость, непосредственно следует из записанного решения, например, для  $i$ -го компонента  $[\delta]$

$$\delta_i = C_i e^{-\mu_i}, \quad (42.29)$$

Видим, что с увеличением  $\lambda$  величина невязки  $|\delta|$  экспоненциально уменьшается.

<sup>3</sup> См. Д. Стражекин, В. Е. Хейслер, В. А. Рязанов. Метод самокорректирующихся начальных значений в нелинейной механике конструкций. — «Ракетная техника и космонавтика», 1971, № 30, с. 213–215.

Внося в уравнение (42.28) выражения для  $[\delta]$  и  $[\delta]$  из зависимости (42.22) и (42.14), получаем

$$[\bar{K}]([\bar{q}] + Z[\bar{q}]) = (1 + Z\lambda_0)[\bar{P}_0] - [\bar{K}_{\text{нал}} + \Delta\bar{K}]([\bar{q}]) - Z[\bar{K}_{\text{нал}}([\bar{q}])] \quad (42.30)$$

В конечно-разностной форме уравнение (42.30), если учесть, что

$$[\bar{K}_{\text{нал}} + \Delta\bar{K}]([\bar{q}]) = \frac{\partial}{\partial \lambda} (0[\bar{R}_{\text{нал}}(\bar{W})]),$$

перепишем так:

$$\begin{aligned} [\bar{q}]_{n+1} &= (1 - Z\Delta\lambda_{n+1})[\bar{q}]_n + [\bar{K}]^{-1} \left( \Delta\lambda_{n+1}(1 + \right. \\ &\quad \left. + Z\lambda_0)[\bar{P}_0] + \frac{\Delta\lambda_{n+1}}{\Delta\lambda_n} [\bar{K}_{\text{нал}}]_{n-1}([\bar{q}]_{n-1} - \right. \\ &\quad \left. - \Delta\lambda_{n+1} \left( Z + \frac{1}{\Delta\lambda_n} \right) [\bar{R}_{\text{нал}}([\bar{q}]]_n) \right). \end{aligned} \quad (42.31)$$

Для начала расчета по формуле (42.31) в дополнение к  $[\bar{q}_0]$  необходимо располагать величиной  $[\bar{q}_1]$ . Для определения  $[\bar{q}_1]$  можно воспользоваться любым из накопленных выше методов.

Теперь о выборе значения множителя  $Z$ .

На основании расчетной практики рекомендуется его выбирать за следующего условия [111]:

$$1 < Z\Delta\lambda < 1.3. \quad (42.32)$$

Невыполнение условия (42.32) может привести к заметной потере точности расчета.

В заключение отметим, что сходимость итерационных методов<sup>3</sup> сильно зависит от «качества» начального приближения. При выборе начального приближения в нелинейных задачах мы можем, как правило, ориентироваться лишь на линейное приближение той же задачи. И если величина величиной мало, то начальное приближение оказывается достаточно близким к решению задачи, что обеспечивает сходимость решения. При сильной нелинейности и, следовательно, значительном отклонении начального приближения от решения задачи скорость сходимости резко снижается; более того, в отдельных случаях процесс решения оказывается расходящимся.

Воспользоваться какими-либо априорными оценками условий сходимости достаточно трудно. Большинство таких оценок сра-

<sup>3</sup> Некоторая информация по этим вопросам содержится в книгах Н. С. Бахиладзе [8, гл. VIII]; Б. В. Демидовича, И. А. Маркова [9, гл. XIII]; А. Г. Уголчикова, Ю. Г. Коротких [116].

ботает объем искомого решения и, следовательно, косвенно предполагает наличие хорошего начального приближения. Поэтому расчетчику приходится в основном полагаться на имеющейся в его распоряжении силы решения аналогичных нелинейных задач и на анализ получаемых в процессе численного решения результатов.

## § 43. СВЯЗЬ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С МЕТОДОМ РИТЦА И УСЛОВИЯ СХОДСТВА РЕШЕНИЯ ПО МКЭ

### 43.1. Связь метода конечных элементов с методом Ритца [43, 87, 105]

Установим связь между методом конечных элементов и методом Ритца. Попутно выясним, в чем состоит специфика метода конечных элементов по сравнению с методом Ритца.

На основании принципа возможных перемещений для системы, находящейся в положении равновесия, должно быть справедливо равенство (6.2)

$$\int_V (\sigma_x \delta x + \sigma_y \delta y + \dots + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy dz - \int_V (\bar{X} \delta x + \bar{Y} \delta y + \bar{Z} \delta z) dV = - \int_{S_1} (\bar{X}_x \delta x + \bar{Y}_y \delta y + \bar{Z}_z \delta z) dS = 0. \quad (43.1)$$

При этом предполагается, что кинематические граничные условия (6.1) закрепления тела на поверхности  $S_1$  удовлетворены при выборе выражений для компонентов перемещения.

Входящие в равенство (43.1) обозначения уже встречались ранее. Используя матричную запись для компонентов перемещений, деформаций и напряжений, равенство (43.1) можно переписать в виде

$$\int_V [\delta e]^T [\sigma] dV - \int_V [\delta U]^T [\bar{F}_V] dV - \int_{S_1} [\delta U]^T [\bar{F}_v] dS = 0, \quad (43.2)$$

$$\left. \begin{aligned} [\epsilon] &= [\epsilon_x \epsilon_y \dots \epsilon_{xy}], \quad [\sigma] = [\sigma_x \dots \sigma_{xy}] \\ [\bar{F}_V] &= [\bar{X} \bar{Y} \bar{Z}], \quad [\bar{F}_v] = [\bar{X}_x \bar{Y}_y \bar{Z}_z]; \\ [\delta U] &= [\nu \nu \omega]. \end{aligned} \right\} \quad (43.3)$$

Разобьем мысленно весь объем тела на конечные элементы (рис. 66). Каждый элемент будет находиться под воздействием приложенной к нему внешней нагрузки и усилий взаимодействия со смежными элементами. Эти усилия взаимодействия по своему характеру тождественны внешним поверхностным нагрузкам. Если тело находится в равновесии, то и каждый  $i$ -й ее элемент при воздействии на него вышеупомянутых усилий также будет находиться в равновесии, и для него на основании принципа возможных перемещений можно записать уравнение, аналогичное уравнению (43.2).

$$\int_V [\delta e]^T [\sigma] dV - \int_V [\delta U]^T [\bar{F}_V] dV - \int_{S_i} [\delta U]^T [\bar{F}_{v,i}] dS - \int_{S_i} [\delta U]^T [\bar{F}'_{v,i}] dS = 0. \quad (43.4)$$

Индекс  $i$  подчеркивает, что данная величина связана с рассмотрением  $i$ -го конечного элемента.

При записи уравнения (43.4) плоскость наружной поверхности  $i$ -го элемента  $S_i$  была разделена на две части:  $S'_i$  — наружная поверхность элемента, которая одновременно является частью наружной поверхности для рассматриваемого тела в целом;  $S''_i$  — часть наружной поверхности элемента, которая образовалась при разбиении тела на конечные элементы.

В соответствии с этим в (43.4) через  $[\bar{F}'_{v,i}]$  обозначена поверхностная нагрузка, действующая на тело и приходящаяся на часть поверхности  $i$ -го элемента  $S'_i$ , а через  $[\bar{F}'_{v,i}]$  — усилия взаимодействия со стороны прилегающих к рассматриваемому  $i$ -му элементу смежных элементов.

Просуммируем выражение (43.4) по всем  $i$ -м конечным элементам тела

$$\sum_{i=1}^M \int_V [\delta e]^T [\sigma] dV - \sum_{i=1}^M \int_V [\delta U]^T [\bar{F}_V] dV - \sum_{i=1}^M \int_{S'_i} [\delta U]^T [\bar{F}_{v,i}] dS - \sum_{i=1}^M \int_{S'_i} [\delta U]^T [\bar{F}'_{v,i}] dS = 0. \quad (43.5)$$

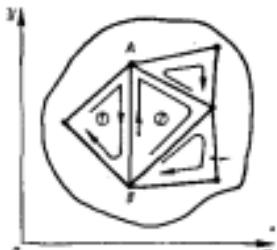


Рис. 66. К составлению уравнения МКЭ для плоской области.

Легко видеть, что первые три члена в левой части уравнения (43.5) в точности равны соответствующим членам в уравнении (43.2). Таким образом, разделение целого тела на конечные элементы с последующим составлением уравнений элем (43.4), а затем и уравнения (43.5) приводят к появлению в последнем уравнении дополнительного члена в левой части (он подчеркнут сплошной линией). Покажем, что для сплошного тела, внутри которого выполняются условия разгруженности в сплошности, этот член обращается в нуль. В самом деле, для любого участка линии двух смежных элементов (например, вдоль линии  $AB$  из рис. 66) в последнем члене левой части уравнения (43.5) будут присутствовать два следующих члена:

$$\int\limits_A^B (X_V^{(1)} \delta u^{(1)} + Y_V^{(1)} \delta v^{(1)}) dS + \int\limits_B^A (X_V^{(2)} \delta u^{(2)} + Y_V^{(2)} \delta v^{(2)}) dS, \quad (43.6)$$

где через  $X_V^{(1)}$ ,  $Y_V^{(1)}$  и  $\delta u^{(1)}$ ,  $\delta v^{(1)}$  обозначены соответственно проекции усилий и вариации перемещений вдоль линии-контура  $AB$ , принадлежащей  $i$ -му конечному элементу ( $i = 1, 2$ ).

В случае приближенного решения задач по методу Ритца, когда перемещения заданы в форме непрерывных по объему тела функций, обеспечивающих отсутствие разрывов самих функций и их производных до  $(i-1)$ -го порядка включительно, будут отсутствовать внутри объема разрывы как в перемещениях, так и в напряжениях. Отсюда

$$X_V^{(1)} - X_V^{(2)}, \dots, \delta u^{(1)} - \delta u^{(2)}, \dots \quad (43.7)$$

Это приводит к тому, что члены в уравнении (43.6) взаимно уничтожаются. В результате четвертый член в левой части (43.5) обращается в нуль.

При использовании в методе конечных элементов совместных матриц жесткости (см. § 36) некоторые компоненты напряжения на границе раздела двух смежных элементов теряет разрыв. В результате четвертый член в уравнении (43.5), помимо которого связано с представлением рассматриваемого тела в виде совокупности конечных элементов, оказывается не равным нулю. Этим членом и определяется одно из отличий МКЭ от классического варианта метода Ритца.

### 43.2. Условия сходимости решения по МКЭ [48, 149, 163]

Сформулируем требования к выбору функции перемещения (36.2), выполнение которых гарантирует сходимость решения по МКЭ с точным решением теории упругости. О них непосредственно следуют из § 34, 35 и состоят в следующем.

1. Узловые перемещения, соответствующие перемещениям защемления как твердого тела, не должны сопровождаться деформацией элемента.

2. Выбранные выражения для перемещений должны содержать члены, которые приводят при уменьшении размера конечного элемента к появление постоянных значений для основных составляющих напряженно-деформированного состояния. Например, при решении плоской задачи теории упругости, выбранные выражения для компонентов перемещения должны приводить к появлению постоянных слагаемых в выражениях для компонентов деформации  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ . В задаче же изгиба пластины такие постоянные должны появиться в выражениях для кривизн  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y}$ .

3. Выбранные выражения для функций перемещения должны обеспечивать непрерывность функций и их производных до  $(i-1)$ -го порядка включительно по всей области, т. е. по объему каждого из конечных элементов и по границамстыковки смежных элементов. Производная  $i$ -го порядка может быть кусочно-непрерывной функцией, имеющей разрывы первого рода по границамстыковки смежных элементов. Только при этих условиях функционал  $\mathcal{E}$  (полная энергия) рассматриваемой системы будет определяться суммой полных энергий по всем конечным элементам

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^M \mathcal{E}_i. \quad (43.8)$$

### § 44. МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА СТЕРНОНА<sup>1</sup>

Для призматического элемента балки (рис. 43) примем следующие направления координатных осей: ось  $Ox$  совместим с осью балки, а оси  $Oy$  и  $Oz$  — с главными центральными осями инерции поперечного сечения. Ограничимся рассмотрением изгиба элемента балки в плоскости  $Oxy$ .

При использование технической теории изгиба балок изгиб конечного элемента, загруженному лишь в узловых сечениях узловыми усилиями (реакциями взаимодействия со смежными конечными элементами)  $\{R\} = [R_1 R_2 R_3 R_4]$ , описывается дифференциальным уравнением

$$EIv''(x) = 0 \quad (44.1)$$

и относится к классу одномерных краевых задач при  $2m = 4$ . Согласно данным § 34 (см. пример 2) прогиб элемента можно аппроксимировать выражением (34.18)

$$v(x) = \sum_{i=1}^{i=4} q_i \varphi_i(x), \quad (44.2)$$

<sup>1</sup> См. В. А. Постнов, И. Я. Хархурин [87, с. 53–71].

где одномерные функции Эрмита  $\beta_i(x)$  определяются формулами (34.19).

Положительные направления компонентов вектора узловых перемещений  $\{q\} = \{q_1 q_2 q_3 q_4\}$  и вектора узловых усилий  $\{R\}$  приведены на рис. 43.

Для получения матрицы жесткости рассматриваемого элемента балки воспользуемся приемом, который требует предварительного определения потенциальной энергии

$$V = \frac{EI}{2} \int_a^b [\sigma'(x)]^2 dx. \quad (44.3)$$

Подставив выражение (44.2) в формулу (44.3), получим

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 k_{ij} q_i q_j, \quad (44.4)$$

где

$$k_{ij} = EI \int_a^b \beta'_i(x) \beta'_j(x) dx \quad (44.5)$$

и есть элементы искомой матрицы жесткости конечного элемента  $[K] = [k_{ij}]$ .

Матрица  $[K]$  входит в зависимость, связывающую узловые перемещения  $\{q\}$  и узловые усилия элемента  $\{R\}$ ,

$$\{R\}_n = [K]_n \{q\}_n. \quad (44.6)$$

Индекс « $n$ » подчеркивает, что данная величина связана с изгибом деформациями элемента.

Зависимость (44.6) в развернутой форме запишем так:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline R_1 & \left[ \begin{array}{cccc} \frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} & -\frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} \\ \hline \frac{4EI}{a} & -\frac{6EI}{a^2} & \frac{25EI}{a} & \\ \hline & & \frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} \\ \hline R_4 & \text{Симметрия} & & \frac{4EI}{a} & q_4 \\ \hline \end{array} \right] & q_1 \\ \hline R_2 & q_2 \\ \hline R_3 & q_3 \\ \hline \end{array} \quad (44.7)$$

Физический смысл значения каждого элемента матрицы жесткости  $[K]$  легко понять непосредственно из зависимости (44.7): произвольный элемент матрицы жесткости  $k_{ij}$  численно равен

реактивному узловому усилию в жесткоузделанном элементе балки по  $i$ -му направлению при единичном смещении по  $j$ -му направлению ( $q_j = 1$ ).

Обратимся теперь к определению эквивалентных узловых усилий для элемента балки, загруженной некоторой поперечной нагрузкой интенсивностью  $q(x)$ . Воспользуемся для этой цели формулой (40.5), которую применительно к рассматриваемому случаю перепишем в виде

$$\{P\}_n = \int_a^b q(x) \{\beta\}(x) dx. \quad (44.8)$$

Отсюда получаем следующую формулу для определения  $i$ -го элемента матрицы  $[P]$

$$P_i = \int_a^b q(x) \beta_i(x) dx \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (44.9)$$

Для частного случая  $q(x) = \text{const}$

$$\{P\}_n = \left( \frac{1}{2} q a, \frac{1}{12} q a^3, \frac{1}{2} q a, -\frac{1}{12} q a^3 \right).$$

В заключение заметим, что в работе [87] приведены матрицы жесткости балочного элемента с учетом как изгибных деформаций, так и деформаций сдвига, а также влияния осевых усилий и крутящих моментов.

#### § 48. МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТА ПЛАСТИНЫ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

К необходимости решения плоской задачи теории упругости приводят многие важные задачи строительной механики корабля: об изгибе широкополосных балок к судовым переходам со вторым дном, концентрации напряжений вокруг вырезов в судовых пластинах, напряженном состоянии в шпангоутных рамках суперстрайкеров, об изгибе судового корпуса как пластинчато-оболочечной упругой системы и т. п. При этом чаще всего используются два типа конечных элементов: пластины треугольной и прямоугольной формы, для которых ниже и будут получены соответствующие матрицы жесткости<sup>1</sup>.

Рассматриваемая задача относится к классу двухмерных задач, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка ( $2m = 2$ ). Следовательно, для обеспечения условий сходимости метода интерполяцииющие полиномы для компонентов перемещения должны удовлетворять условиям непрерывности по всей области.

<sup>1</sup> Первые простейшие матрицы жесткости треугольного и прямоугольного конечных элементов для решения плоской задачи теории упругости приведены в работе М. Л. Тиггаэлт, Р. В. Слондиг, Н. С. Маггин, Е. С. Торр [158].

### 45.1. Треугольный элемент с тремя узловыми точками

Закон изменения каждого из компонентов перемещения ( $u, v$ ) по полю конечного элемента (рис. 67) можно аппроксимировать (см. § 34) степенными полиномами вида

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y, \\ v(x, y) &= a_4 + a_5x + a_6y, \end{aligned} \right\} \quad (45.1)$$

или

$$[U] = [A1][\alpha]. \quad (45.2)$$

Здесь

$$[U] = [u \ v]; \quad [\alpha] = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_6]; \quad (45.3)$$

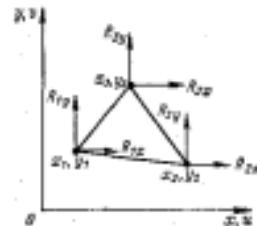


Рис. 67. К определению матрицы жесткости треугольного конечного элемента для решения плоской задачи теории упругости.

$$[A1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y \end{bmatrix}, \quad (45.4)$$

где  $a_i$  — произвольные параметры.

В качестве неизвестных выбираются узловые значения перемещения

$$[\varphi] = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3].$$

В направлении каждого узлового перемещения будут действовать со стороны смежных конечных элементов реактивные усилия

$$[R] = [R_{12} \ R_{13} \ R_{23} \ R_{21} \ R_{31} \ R_{32}].$$

Матрицу  $[\alpha]$  можно выразить через  $[\varphi]$ . Для этого, используя зависимость (45.2), записываем значения компонентов перемещения узловых точек элемента

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= a_1 + a_2x_1 + a_3y_1; & u_2 &= a_4 + a_5x_2 + a_6y_2; \\ u_2 &= a_1 + a_2x_2 + a_3y_2; & v_2 &= a_4 + a_5x_2 + a_6y_2; \\ u_3 &= a_1 + a_2x_3 + a_3y_3; & v_3 &= a_4 + a_5x_3 + a_6y_3, \end{aligned} \right\} \quad (45.5)$$

или в матричной форме

$$[\varphi] = [B][\alpha], \quad (45.6)$$

где

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 & 0 & y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & 0 & y_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 & 0 & y_3 \end{bmatrix}. \quad (45.7)$$

Отсюда

$$[\alpha] = [B]^{-1}[\varphi]. \quad (45.8)$$

Используя с помощью зависимости (45.8) вектор  $[\alpha]$  из выражения (45.2), получаем искомую связь между  $[U]$  и  $[\varphi]$

$$[U] = [C][\varphi], \quad (45.9)$$

где

$$[C] = [A1][B]^{-1}. \quad (45.10)$$

В скалярной форме зависимость (45.9) перепишем в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2F} \left[ (y_{13}(x - x_3) - x_{13}(y - y_3)) u_1 + \right. \\ &\quad + (y_{23}(x - x_3) - x_{23}(y - y_3)) u_2 + \\ &\quad \left. + (-y_{13}(x - x_2) + x_{13}(y - y_3)) u_3 \right]; \\ v &= \frac{1}{2F} \left[ (y_{13}(x - x_3) - x_{13}(y - y_3)) v_1 + \right. \\ &\quad + (y_{23}(x - x_3) - x_{23}(y - y_3)) v_2 + \\ &\quad \left. + (-y_{13}(x - x_2) + x_{13}(y - y_3)) v_3 \right], \end{aligned} \right\} \quad (45.11)$$

где  $2F = x_{13}y_{23} - x_{23}y_{13}$  — удвоенная площадь треугольника;

$$x_{ij} = x_i - x_j; \quad y_{ij} = y_i - y_j. \quad (45.12)$$

Полученные выражения для компонентов перемещения могут быть использованы при определении компонентов деформаций

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2F} (y_{13}u_1 + y_{23}u_2 - y_{13}u_3); \\ e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2F} (-x_{13}v_1 - x_{23}v_2 + x_{13}v_3); \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2F} (-x_{13}u_1 - x_{23}u_2 + \\ &\quad + x_{13}v_2 + y_{13}v_1 + y_{23}v_3 - y_{13}u_3). \end{aligned} \right\} \quad (45.13)$$

или в матричной форме

$$\{e\} = [D] \{q\}, \quad (45.14)$$

где

$$\{e\} = \{e_{ij}\}_{12}, \quad (45.15)$$

$$[D] = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} y_{11} & 0 & y_{12} & 0 & -y_{21} & 0 \\ 0 & -x_{22} & 0 & -x_{12} & 0 & x_{21} \\ -x_{12} & y_{21} & -x_{21} & y_{12} & x_{12} & -y_{21} \end{bmatrix}. \quad (45.16)$$

В матричной форме закон Гука для ортотропного материала может быть записан в виде

$$\{\sigma\} = [E_e] \{e\}. \quad (45.17)$$

Здесь

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{ij}\}_{12}; \quad [E_e] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} & \frac{E_1\nu_2}{1-\nu_1\nu_2} & 0 \\ \frac{E_2\nu_1}{1-\nu_1\nu_2} & \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (45.18)$$

$E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, \theta$  — параметры, характеризующие упругие свойства ортотропного материала.

Исключая тензор с помимо зависимости (45.14) вектор  $\{e\}$  из правой части выражения (45.17), получаем формулу, позволяющую определить напряженное состояние элемента по известным значениям его узловых перемещений

$$\{\sigma\} = [E_{el}] \{q\}, \quad (45.19)$$

где

$$[E_{el}] = [E_e] [D]. \quad (45.20)$$

В методе конечных элементов матрицу  $[E_e]$  обычно называют матрицей напряжений. Выпишем значение этой матрицы

$$[E_e] = \frac{E_e}{2F(1-\nu_1\nu_2)} \times$$

$$x \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ u_{11} & -\nu_1 u_{12} & u_{21} & -\nu_2 u_{23} & u_{31} & \nu_2 u_{33} \\ v_{11} & \frac{\nu_1}{1-\nu_1\nu_2} u_{12} & v_{21} & \frac{\nu_2}{1-\nu_1\nu_2} u_{23} & v_{31} & \frac{\nu_2}{1-\nu_1\nu_2} u_{33} \\ -\nu_1 u_{12} & u_{11} & -\nu_2 u_{23} & u_{21} & u_{31} & -\nu_2 u_{33} \end{bmatrix}, \quad (45.21)$$

где

$$u_i = \frac{\theta}{L_i} (1 - \nu_i v_i). \quad (45.22)$$

Переходим теперь непосредственно к получению матрицы жесткости  $[K]$ . Для ее определения можно воспользоваться формулой (36.8).

В случае треугольного элемента принятые нами зависимости (45.1) для компонентов перемещения приводят к тому, что элементы матриц  $[D]$  и  $[E_e]$ , стоящих под знаком интеграла в правой части выражения (36.8), не содержат переменных координат  $x, y$ . Поэтому выражение (36.8) можно упростить и привести к виду

$$[K] = [D]^T [E_e] h F, \quad (45.23)$$

где  $h$  — толщина элемента.

Непосредственно из формулы (45.23) получаем окончательное выражение (45.24) для матрицы жесткости треугольного элемента изготовленного из ортотропного материала (см. с. 224—225).

#### 45.2. Треугольный элемент с шестью узловыми точками

Для дальнейшего повышения точности расчетов с помощью плоских треугольных элементов необходимо, чтобы был задан линейный закон изменения компонентов напряжения в пределах элемента, т. е. использованы для перемещений и в полиномы 2-й степени. Это приводит к увеличению числа обобщенных координат, подлежащих определению. Для их нахождения требуется либо задание дополнительной информации о значениях производных компонентов перемещения в узловых точках элемента, либо задание значений компонентов перемещений в по-

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	Сумма
$R_{11}$	$\frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1 v_2} x_1 x_2 x_3$			
$R_{12}$	$(x_1 + v_2) x_1 x_2 x_3$	$\frac{v_2}{v_1} x_1^2 + v_2^2 x_3^2$		
$R_{13}$	$x_1 x_2 x_3 +$ $+ v_2 x_1 x_3$	$v_2 x_1 x_3 +$ $+ v_2 x_1 x_3$	$v_2^2 + v_2^2 x_3^2$	
$R_{21}$	$\frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1 v_2} x_1 x_2 x_3$	$v_1 x_1 x_2 +$ $+ v_1 x_1 x_3$	$(x_1 + v_1) x_1 x_2$	
$R_{22}$	$x_1 x_2 x_3 +$ $+ v_1 x_1 x_3$	$v_1 x_1 x_2 +$ $+ v_1 x_1 x_3$	$v_1^2 x_1 x_3 +$ $+ v_1^2 x_3^2$	
$R_{23}$	$v_1 x_1 x_3 +$ $+ v_1 x_1 x_3$	$\frac{v_1}{v_2} x_1 x_2 +$ $+ v_1 x_1 x_3$	$x_1 x_2 x_3 + v_1 x_1 x_2$	$v_1^2 + v_1^2 x_3^2$
$R_{31}$	$x_1 x_2 x_3 +$ $+ v_2 x_1 x_3$	$v_2 x_1 x_2 +$ $+ v_2 x_1 x_3$	$v_2 x_1 x_3 +$ $+ v_2 x_1 x_3$	$v_2^2 x_3^2$
$R_{32}$	$v_2 x_1 x_3 +$ $+ v_2 x_1 x_3$	$\frac{v_2}{v_1} x_1 x_2 +$ $+ v_2 x_1 x_3$	$x_1 x_2 x_3 + v_2 x_1 x_2$	$v_2^2 + v_2^2 x_3^2$
$R_{33}$	$x_1 x_2 x_3 +$ $+ v_2 x_1 x_3$	$v_2 x_1 x_2 +$ $+ v_2 x_1 x_3$	$v_2^2 x_3^2$	

$$\text{где } \Delta = x_1 x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3.$$

$$x_{ij} = x_i - x_j$$

которых дополнительных узловых точках по контуру конечного элемента. Последний способ более естествен и поэтому получил самое распространение.

Рассмотрим треугольный элемент, в котором кроме трех узлов в вершинах введены еще три дополнительные узловые точки в середине каждой из его сторон (рис. 68). При этом элемент будет обладать 12 степенями свободы, что позволяет задать выражения компонентов перемещения в виде следующих полиномов:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2 x + \\ &+ a_3 y + a_4 x^2 + \\ &+ a_5 xy + a_6 y^2; \\ v(x, y) &= a_7 + a_8 x + \\ &+ a_9 y + a_{10} x^2 + \\ &+ a_{11} xy + a_{12} y^2. \end{aligned} \quad (45.25)$$

Рис. 68. Треугольный плоский элемент с шестью узловыми точками.

Выражения (45.25) удовлетворяют всем критериям сходимости, о которых говорилось в § 43.

В частности, поскольку изменение  $u$  и  $v$  вдоль любой из сторон определяется квадратичной параболой, коэффициенты которой одновременно определяются через значения  $u$  и  $v$  в трех узлах,

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$R_{11}$				
$R_{12}$				
$R_{13}$				
$R_{21}$				
$R_{22}$				
$R_{23}$				
$R_{31}$				
$R_{32}$				
$R_{33}$				

$$a_1 = \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v} - v_1 v_2); \quad \bar{v} = \text{среднее значение}$$

точек; непрерывность перемещений на общей границе соседних элементов автоматически обеспечена.

Напомним, что при решении плоской задачи теории упругости, для которой порядок дифференциального уравнения  $2m = 2$ , достаточно обеспечить линь непрерывность самим функций для перемещений по всему объему тела, включая стороны смежных элементов.

Используя выражения (45.25), можно получить аналогичную матричной форме (45.6) зависимость вида

$$\{q\} = [\bar{B}]^{-1} \{u\}, \quad (45.26)$$

отсюда

$$\{u\} = [\bar{B}]^{-1} \{q\}. \quad (45.27)$$

Внося параметры  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 12$ ) из выражения (45.27) в формулы (45.25), сможем представить компоненты перемещения в форме (45.9). Далее получаем компоненты деформации и напряжения, а затем уже записываем формулу (36.8) для определения матрицы жесткости. Члены, стоящие под знаком интеграла, допускают интегрирование в замкнутом виде, однако удобнее вычислять коэффициенты матрицы жесткости с помощью ЭВМ путем численного интегрирования [85].

В целом применение треугольных элементов с шестью узловыми точками требует для выполнения расчетов более мощных ЭВМ,

так как программы становятся более дамками. При этом нет оснований утверждать, что использование этих элементов в расчетах эффективнее, чем использование элементов с тремя узлами, но при одинаких областях за большее число конечных элементов.

#### § 46. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

С ЛИНЕЙНЫМ ЗАКОНОМ ИЗМЕНЕНИЯ -

КОМПОНЕНТОВ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ВДОЛЬ КОНТУРА

Простейшие выражения для компонентов перемещения прямоугольного элемента (рис. 69), удовлетворяющие условиям сходимости МКЭ, могут быть написаны в виде (см. § 34)

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy; \quad v = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy. \quad (46.1)$$

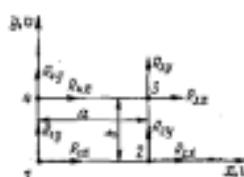


Рис. 69. К определению матрицы жесткости прямоугольного элемента заложенного закона для решения задачи теории упругости.

Воспользуемся этим выражением для определения узловых перемещений

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 + a_4x_1y_1; \\ u_2 &= a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 + a_4x_1y_1; \\ u_3 &= a_5 + a_6x_1 + a_7y_1 + a_8x_1y_1; \\ u_4 &= a_5 + a_6x_1 + a_7y_1 + a_8x_1y_1. \end{aligned} \right\} \quad (46.2)$$

Из решения системы (46.2) можно выразить неизвестные параметры  $a_i$  через узловые перемещения. Исключая в уравнениях (46.2) с помощью найденных зависимостей параметры  $a_i$ , получим

$$\left. \begin{aligned} u &= \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)u_1 + \frac{x}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right)u_2 + \\ &\quad + \frac{x}{a}\frac{y}{b}u_3 + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\frac{y}{b}u_4; \\ v &= \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)v_1 + \frac{x}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right)v_2 + \\ &\quad + \frac{x}{a}\frac{y}{b}v_3 + \left(1 - \frac{x}{a}\right)\frac{y}{b}v_4. \end{aligned} \right\} \quad (46.3)$$

Из непосредственного рассмотрения выражений (46.3) можно заключить, что компоненты и на вдоль любой кромки прямоугольного контура изменяются по линейному закону, который однозначно определяется перемещениями узловых точек рассматриваемой кромки. При этом тождественно выполняются изматические условиястыкования смежных элементов.

Используя зависимости Коши к найденные выше выражения для компонентов перемещений (46.3), определяем компоненты деформаций

$$\left. \begin{aligned} \{e\} &= \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{a} \times \\ & \quad \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \quad \begin{pmatrix} -1 - \frac{x}{a} & 1 - \frac{x}{a} & \eta & -\eta \\ -1 - \frac{y}{b} & -1 + \frac{y}{b} & 0 & 0 \\ -\eta & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (46.4)$$

т.е.

$$E = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{b}; \quad m = \frac{\theta}{b},$$

или в матричной форме

$$\{e\} = [D]\{q\}. \quad (46.5)$$

Подстановка выражений (46.4) в зависимости закона Гука для стотротного материала позволяет определить связь между компонентами изложенной  $\{e\}$  и узловыми перемещениями  $\{q\}$

$$\{e\} = [E_0]\{q\}, \quad (46.6)$$

которая в развернутой форме имеет вид зависимости (25.17) из [67, с. 174].

Располагая значениями матриц  $[D]$  и  $[E_0]$ , с помощью зависимости (36.6) можем определить значение матрицы жесткости  $[K]$ , а следовательно, записать в окончательной форме связи

между узловыми усилами [9] и узловыми перемещениями [9] (см. зависимость (26.18) из 187, с. 175].

В определенных условиях математизаций в отдельных сущностях пластин можно ожидать появление зон упругомеханических деформаций<sup>1</sup>. Эти зоны чаще всего возникают в районах концентрации напряжений (возле вырезов, резких изменений геометрических и жесткостных параметров отдельных связей и т. п.).

#### § 47. ОЦЕНКА СТЕПЕНИ „СОВЕРШЕННОСТИ“ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ

Для получения точного решения в задачах механики симметрии сред требуется удовлетворение условий равновесия и сплошности в рассматриваемой области.

При использовании МКЭ, когда область разбивается на совокупность конечных элементов, взаимодействующих между собой лишь в узловых точках, эта требование эквивалентно выполнению следующих шести условий:

- 1) удовлетворение уравнением равновесия по объему каждого из конечных элементов;
- 2) удовлетворение условием сплошности по объему каждого конечного элемента (непрерывность искомой функции и ее первых частных производных до  $m - 1$ -го порядка включительно);
- 3) удовлетворение уравнениям равновесия в узловых точках;
- 4) удовлетворение условиями сплошности в узловых точках;
- 5) удовлетворение сплошным граничным условиям по границамстыковок смежных элементов, что эквивалентно непрерывности производных искомой функции от  $m$ -го до  $2m - 1$ -го порядков ( $2m$  — порядок дифференциального уравнения для определения искомой функции);
- 6) удовлетворение кинематическим граничным условиям по границамстыковок смежных элементов, что эквивалентно требованию непрерывности самой функции и ее первых производных до  $m - 1$ -го порядка включительно.

Одновременное выполнение всех шести требований приводит к получению точного решения рассматриваемой задачи.

<sup>1</sup> Использование МКЭ для решения упругомеханических задач проверено даже в работах: R. H. Gallagher, J. Padé et al., P. R. Billaard, Stress Analysis in Bent Complex Shapes, — AIAA Journal, May, 1962, p. 790—797; J. H. Argutis, S. Kelsay, W. H. Katz et al., Matrix Methods of Structural Analysis, A. Pogols of Recent Developments, — Proc. 14th Meeting of Structures and Materials Panel, AGARD, 1962.

См. также по этому вопросу работы: Б. М. Айронс [2]; Дж. Аргутис [3]; О. Энгельхардт [4]; Б. А. Постникова, И. Я. Харкури [5]; Н. А. Постников, В. С. Кедяман, И. Н. Чекановская. Решение системи матричной задачи теории упругости в упругомеханической области. — В сб.: Справочник Механика корабля. Л., «Судостроение», 1971, вып. 161, с. 95—100; Е. Н. Савко, А. П. Горичев. Решение двумерных краевых задач методом конечного элемента. — «Чел. зд. Горьковского ун-та. Сер. Математика», 1970, вып. 108, с. 49—57.

При выводе общей формулы (36.6) для матрицы жесткости использовалась простейшая формулировка принципа всеобщих перемещений (6.2), при которой требуется предварительное выполнение условий сплошности в рассматриваемой области, т. е. условий непрерывности во всей области  $\bar{V}$  искомой функции и ее частных производных до  $m - 1$ -го порядка включительно. Это влечет за собой необходимость удовлетворения требований, содержащихся в п. 2, 4, 5.

При использовании МКЭ в форме метода вершинения п. 2 и 4 выполняются автоматически, о выполнении же п. 6 следует побеспокоиться при выборе аппроксимирующих функций для компонент перемещения.

Далее, уравнения равновесия узловых точек образуют в МКЭ систему уравнений для определения основных неизвестных, и, следовательно, п. 3 тождественно выполняется.

Предварительное выполнение п. 1 и 5 не является обязательным: непрерывность и их выполнение асимптотически уменьшается при увеличении числа конечных элементов.

Например, при использовании матрицы жесткости для треугольного элемента с тремя узловыми точками в форме (45.24) нарушаются лишь сплошные условия стыковки смежных элементов (п. 5): при переходе из одного элемента в другой через линию разреза компоненты напряжения теряют разрывы. Невыполнение этого условия и является основным источником неточности решения плоской задачи с помощью МКЭ при исследовании исходной конструкции совокупностью треугольных конечных элементов с тремя узловыми точками. Величина этой неточности может быть снижена путем увеличения размеров конечных элементов.

При использовании же в МКЭ матрицы жесткости для треугольного элемента с шестью узловыми точками и матрицы жесткости для прямоугольного элемента нарушаются уравнения равновесия и сплошные условия стыковки смежных элементов (п. 1 и 5).

Небезынтересно знать, к какой схеме (сверху или снизу) приводят применение той или иной матрицы жесткости. При ответе на этот вопрос нужно исходить из следующего:

а) нарушение сплошных условий при соблюдении кинематических построек ведет к «умехстечению» рассматриваемой упругой системы, а следовательно, к меньшим расчетным значениям перемещений, компонентам деформаций и напряжений по сравнению с точными их значениями. В результате получаем сценку снизу;

б) нарушение кинематических условий может привести как к «умехстечению» упругой системы, так и, наоборот, к ее «ослаблению». При этом полученное по МКЭ приближенное решение в одном случае может дать сценку снизу, а в другом — сверху.

Несколько по вышеуказанному можно утверждать, что использование приведенных в настоящем параграфе матриц жесткости всегда приводит к приближенному решению, дающему сценку

смущ., поскольку при использовании этих матриц жесткости все условия сплошности выполняются строго; нарушенными оказываются лишь уравнения равенства по объему конечного элемента и по линиям стыковки элементов.

#### § 48. МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ ТЕТРАЗДРА:

Рассмотрим тетраэдр, который наиболее широко используется в МКЭ при идеализации объемных тел.

В § 34 показано, что в рассматриваемом случае (трехмерная задача при  $2m = 2$ ) в качестве простейших аппроксимирующих функций для компонентов перемещения по объему тетраэдра можно принять следующие полиномы:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4z; \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6x + \alpha_7y + \alpha_8z; \\ w &= \alpha_9 + \alpha_{10}x + \alpha_{11}y + \alpha_{12}z, \end{aligned} \quad | \quad (48.1)$$

или в матричной форме

$$[U] = [A][\alpha], \quad (48.2)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix}. \quad (48.3)$$

За основные неизвестные принимаются узловые значения перемещений (рис. 70)

$$[\varphi] = [\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5 \varphi_6 \varphi_7 \dots \varphi_n].$$

В направлениях каждого узлового перемещения к элементу будут приложены со стороны соседних элементов реактивные усилия взаимодействия

$$[R] = [R_{11} R_{12} R_{13} R_{14} R_{15} R_{16} R_{21} \dots R_{46}].$$

Дальнейшей нашей задачей будет установление связи

$$[R] = [K][\varphi], \quad (48.4)$$

где  $[K]$  — искомая матрица жесткости конечного элемента.

<sup>1</sup> Матрица жесткости для тетраэдра в предположении постоянства компонент деформации по объему конечного элемента была получена в статье R. H. Gallagher, J. Radtig, R. P. Bifilarad. Stress Analysis in Heated Complex Shapes. J. Applied Sci., 1962, № 29, р. 700–707.

Следует заметить, что в последнее время наблюдается отказ от использования простых элементов в форме тетраэдра с четырьмя узловыми точками в пользу элементов с более сложным законом распределения деформаций и элементов сплошной формы.

Вектор  $[U]$  можно выразить через  $[\varphi]$ . Для этого, используя полиномы (48.1), запишем выражения для компонентов перемещения узловых точек

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 + \alpha_2x_1 + \alpha_3y_1 + \alpha_4z_1; \\ v_1 &= \alpha_5 + \alpha_6x_1 + \alpha_7y_1 + \alpha_8z_1; \\ w_1 &= \alpha_9 + \alpha_{10}x_1 + \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}z_1, \end{aligned} \quad | \quad (48.5)$$

или

$$[\varphi] = [B][\alpha]. \quad (48.6)$$

Матрицу  $[B]$  можно легко вычислить из непосредственного

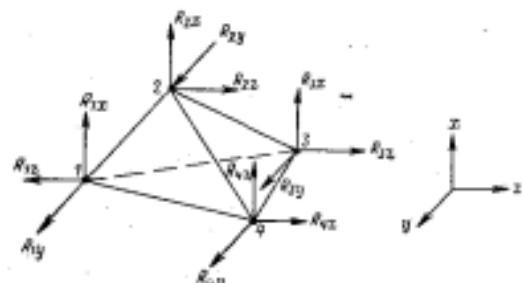


Рис. 70. К определению матрицы жесткости тетраэдра для решения объемной задачи теории упругости.

рассмотренных выражений (48.5). Из зависимости (48.6) получаем

$$[\alpha] = [B]^{-1}[\varphi]. \quad (48.7)$$

Используя с помощью (48.7) из зависимости (48.2) вектор  $[\alpha]$ , получаем

$$[U] = [C][\varphi]. \quad (48.8)$$

Дифференцируя компоненты перемещения, можем получить выражения для компонентов деформаций

$$[e] = [D][\varphi]. \quad (48.9)$$

где

$$[e] = [e_{11} e_{12} e_{13} e_{14} e_{15} e_{16}]. \quad (48.10)$$

В случае тетраэдра принятые нами выражения для компонентов перемещения приводят к тому, что элементы матрицы  $[D]$

оказываются постоянными величинами. Поэтому выражение (48.8) можно упростить и привести к виду

$$[K] = [D]^T [E_a] [D] V, \quad (48.11)$$

где  $V$  — объем тетраэдра, а матрица  $[E_a]$  для изотропного тела имеет вид

$$[E_a] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}; \quad (48.12)$$

Симметрично

$$\lambda = \frac{\nu}{1-\nu}; \quad \mu = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}. \quad (48.13)$$

Матрицу жесткости тетраэдра (48.11) не имеет смысла записывать в развернутом виде. Все необходимые вычисления матрицы  $[K]$  целесообразно оформить в виде отдельной подпрограммы, подключив ее к основной программе расчета рассматриваемой конструкции с помощью ЭВМ.

При получении матрицы (48.11) исходным было предложение о линейном характере изменения компонентов перемещений по объему тетраэдра. Тогда, выражение (48.11) I, что приводило к тождественному выполнению условий связности в объеме упругого тела. Из уравнений равновесия не выполняются линейные граничные условия по поверхностям контакта граней смежных тетраэдров: имеются разрывы первого рода в значениях компонентов напряжений при переходе через плоскость мысленного разреза смежных тетраэдров.

Вышесказанное позволяет заключить, что использование матрицы жесткости (48.11) приводит к созданию модели, обладающей большой «жесткостью» по сравнению с «жесткостью» реального тела. Найденные при этом значения компонентов напряжения меньше их истинных значений.

В заключение заметим, что в работах [87, 152] содержатся информации о матрицах жесткости для некоторых других типов конечных объемных элементов.

## § 49. МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ПЛАСТИНЫ ПРИ ИЗГИБЕ<sup>1</sup>

### 49.1. Нессимметричная матрица жесткости

Основные гипотезы теории изгиба пластин используются и при выводе зависимостей метода конечных элементов. Поэтому точность МКЭ должна оцениваться путем сопоставления числовых результатов, полученных при его использовании, с тем, что дает классическая теория изгиба пластин, основанная на кинематической гипотезе прямых нормалей.

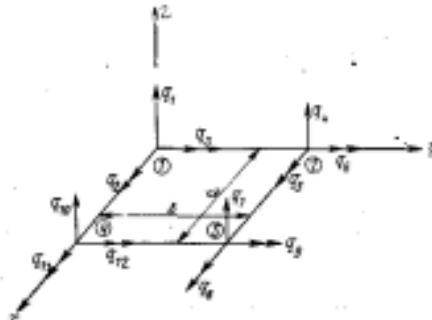


Рис. 71. К определению матрицы жесткости конечного элемента пластины при изгибе.

В дальнейшем будем полагать, что прогибы пластин  $w$  ( $x, y$ ) малы по сравнению с ее толщиной, а следовательно, не зависит от перемещений точек средней поверхности пластины  $w_s(x, y)$  и  $w_0(x, y)$  и полностью определяют напряженное состояние, возникающее при ее изгибе. Матрицу жесткости для изгиба пластины вычислим при этом независимо от напряженного состояния в средней поверхности, что существенно упрощает решение задачи.

При расчете пластин на изгиб по МКЭ наибольшее распространение получили простейшие конечные элементы: прямоугольный и треугольный. Мы ограничимся выводом матрицы жесткости для прямоугольного элемента, изображенного на рис. 71.

<sup>1</sup> См. О. Зеленский [43]; В. А. Постков, И. Я. Харкури [87]; Л. А. Розкин [106, 105]; К. Н. Невеев [143]; R. N. Gelfgat [103]; Д. Д. Ольян [1]. Треугольные конечные элементы для расчета изгибаемых пластин при постоянных в линейно распределенных изгибющих моментах [98, т. 1, с. 80—100].

В каждой узловой точке находят по трем обобщенным перемещениям: перемещение в направлении оси  $Ox$  и два угла поворота соответственно вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$ .

Тогда положение средней поверхности прямоугольного элемента пластины приближенно определяем 12 обобщенными узловыми координатами (по три координаты на каждый узел). Следовательно, упругую поверхность элемента пластины можно аппроксимировать некоторым степенным полиномом, содержащим 12 неизвестных параметров

$$\begin{aligned} w(x, y) = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \\ & + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 yx^2 + \alpha_{10} y^3 + \\ & + \alpha_{11} x^2y + \alpha_{12} xy^2, \end{aligned} \quad (49.1)$$

или

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{12} \alpha_i \varphi_i(x, y), \quad (49.2)$$

Заметим, что полином (49.1) удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению изгиба жестких пластин

$$\nabla^4 w(x, y) = 0. \quad (49.3)$$

При  $x = \text{const}$  или  $y = \text{const}$  перемещение  $w(x, y)$  становится параболой третьей степени вида

$$\bar{w} = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 x + \bar{\alpha}_3 x^2 + \bar{\alpha}_4 x^3.$$

Каждый такой полином, определяющий прогиб линии стыка двух смежных элементов между двумя соседними узловыми точками, однозначно находим через значение прогибов в их первых производных в направлении линии стыка и узловых двух узловых точках. Но так как узловые перемещения выбираются в дальнейшем в качестве основных неизвестных в общей системе координат и являются обобщениями для элементов, примыкающих к данному узлу, любые две соседние кромки двух смежных элементов получают одинаковые прогибы.

Отсюда следует, что использование выражения (49.1) для прогиба  $w(x, y)$  конечного элемента обеспечивает непрерывность перемещений в любой точке пластины. К сожалению, не выполняется непрерывность углов поворота вдоль линий стыковки элементов.

Таким образом, условия § 34, обеспечивающие получение равномерной сходимости решения по МКЭ с точным результатом, не выполняются. Этого казалось бы вполне достаточно, чтобы отвергнуть принятное выражение (49.1) для упругой поверхности

элемента пластины. Однако имеется доказательство сходимости решения<sup>1</sup> по МКЭ при использовании матрицы жесткости, полученной на основе выражения (49.1).

Выражение (49.1) можно придать следующий вид:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{12} q_i \varphi_i(x, y), \quad (49.4)$$

где  $q_i$  — узловые перемещения конечного элемента в соответствии с их нумерацией на рис. 71, т. е.

$$\begin{aligned} q_1 = w(0, 0); \quad q_2 = \frac{\partial w}{\partial y}(0, 0); \\ q_3 = -\frac{\partial w}{\partial x}(0, 0), \dots, q_{12} = -\frac{\partial w}{\partial x}(4, 0); \end{aligned} \quad (49.5)$$

$\varphi_i(x, y)$  — так называемые функции Эрмита, обладающие следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \varphi_1(0, 0) = 1; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(0, 0) = 0; \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(0, 0) = 0; \dots; \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, 0) = 0; \\ \varphi_2(0, 0) = 0; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(0, 0) = 1; \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(0, 0) = 0; \dots; \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, 0) = 0; \\ \dots \\ \varphi_{12}(0, 0) = 0; \quad \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial y}(0, 0) = 0; \\ \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x}(0, 0) = 0; \dots; \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x}(x, 0) = -1. \end{aligned} \quad (49.6)$$

Выражение для каждой  $k$ -й функции Эрмита  $\varphi_k(x, y)$  можно искать в форме (49.1)

$$\varphi_k(x, y) = \sum_{i=1}^{12} \alpha_{ki} \varphi_i(x, y). \quad (49.7)$$

Подставляя выражение (49.7) условиям (49.6), получаем необходимую систему уравнений для определения  $\alpha_{ki}$ , в следующем, функции  $\varphi_k(x, y)$ .

<sup>1</sup> F. X. Boggs, R. L. Fox, L. A. Schmit. The Generation of Interpolating Functions, Consistent Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulas, Proc. First Conf. on Matrix Methods in Struct. Mechanics, AFFDL TR-60-80, Nov., 1966.

Приведем окончательные выражения для  $\beta_k(x, y)$ :

$$\begin{aligned}\beta_1(\xi, \eta) &= 1 - 3\xi^2 - \xi\eta - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 3\xi\eta^2 + \\&\quad + 2\eta^3 - 2\xi^2\eta - 2\xi\eta^2 + 3\xi^2\eta; \\ \beta_2(\xi, \eta) &= b(\eta - \xi\eta - 2\eta^2 + 2\xi\eta^2 + \eta^3 - \xi\eta^3); \\ \beta_3(\xi, \eta) &= a(-\xi + \xi\eta + 2\xi^2 - 2\xi^2\eta - \xi^3 + \xi^2\eta); \\ \beta_4(\xi, \eta) &= 3\xi^2 + \xi\eta - 2\eta^2 - 3\xi\eta^2 - 3\xi^2\eta + \\&\quad + 2\xi\eta^2 + 2\xi^2\eta; \\ \beta_5(\xi, \eta) &= b(-\eta^3 + \eta^2 + \xi\eta^2 - \xi\eta^3); \\ \beta_6(\xi, \eta) &= a(-\xi\eta + 2\xi^2\eta - \xi^2\eta); \\ \beta_7(\xi, \eta) &= -\xi\eta + \xi^2\eta + 3\xi\eta^2 - 2\xi^2\eta - 2\xi\eta^3; \\ \beta_8(\xi, \eta) &= b(-\xi\eta + \xi^2\eta); \\ \beta_9(\xi, \eta) &= a(\xi^2\eta - \xi^3\eta); \\ \beta_{10}(\xi, \eta) &= 3\xi^2 + (\eta - 2\xi^2 - 3\xi\eta^2 + 2\xi^2\eta + \\&\quad + 2\xi\eta^2 - 3\xi^2\eta); \\ \beta_{11}(\xi, \eta) &= b(\xi\eta - 2\xi\eta^2 + \xi\eta^3); \\ \beta_{12}(\xi, \eta) &= a(\xi^2 - \xi^3 - \xi^2\eta + \xi^3\eta),\end{aligned}\quad (49.8)$$

где

$$\xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad (49.9)$$

В рассматриваемом случае при определении  $[K]$ , по-видимому, проще исходить из общего выражения для потенциальной энергии элемента пластины.

Для жестких изотропных пластин, загруженных поперечной нагрузкой, можем ограничиться наложением лишь потенциальной энергии изгиба

$$V_{\text{изг}} = \frac{D}{2} \int \int \left[ \left( \nabla^2 w(x, y) \right)^2 + 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right] dx dy, \quad (49.10)$$

где  $D = \frac{Eh}{12(1-\nu^2)}$ ;  $h$  — толщина пластины.

Если воспользоваться для  $w(x, y)$  выражением (49.6), то правую часть выражения (49.10) можно представить в виде

$$V_{\text{изг}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=12} \sum_{l=1}^{l=12} k_{kl} q_l q_k, \quad (49.11)$$

где

$$k_{kl} = D \int \int \left[ \nabla^2 \beta_l \nabla^2 \beta_k + 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial \beta_l}{\partial x} \frac{\partial \beta_k}{\partial x} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial \beta_l}{\partial x^2} \frac{\partial \beta_k}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \beta_l}{\partial y^2} \frac{\partial \beta_k}{\partial x^2} \right] \right]. \quad (49.12)$$

Коэффициенты  $k_{kl}$  являются элементами искомой матрицы жесткости элемента пластины. Окончательные значения коэффициентов, подсчитанные по формуле (49.12), приведены в [87, с. 242—243].

## 49.2. Матрица напряжений

Компоненты напряжения от изгиба в элементе пластины определяются из основания известных зависимостей из теории изгиба пластины

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{12}{b^2} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix}. \quad (49.13)$$

Если далее учесть связь единичных моментов с перемещением (предполагаем материал пластины изотропным)

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ M_{xy} &= -\frac{Eh^3}{6(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (49.14)$$

то зависимость (49.13) перепишем в виде

$$[\sigma] = [E_w] [\mathbf{x}], \quad (49.15)$$

где

$$[E_w] = \frac{Eh}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad (49.16)$$

Компоненты вектора  $[\mathbf{x}]$  определяем дифференцированием функции прогиба элемента пластины  $w(x, y)$ . В результате можно установить связь между  $[\mathbf{x}]$  и вектором узловых перемещений элемента  $[q]$

$$[\mathbf{x}] = [D] [q], \quad (49.17)$$

	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha_4^{ip}$	0	$-\frac{2y}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2y}{3}$	$\frac{2}{3}$	$0$	$-\frac{2y}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$0$
$\alpha_5^{ip}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$0$	$\frac{2}{3}$	$0$	$-\frac{2}{3}$	$0$	$-\frac{2}{3}$
$\alpha_6^{ip}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$0$	$\frac{2}{3}$	$0$	$-\frac{2}{3}$	$0$	$-\frac{2}{3}$
$\alpha_7^{ip}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$0$	$\frac{2}{3}$	$0$	$-\frac{2}{3}$	$0$	$-\frac{2}{3}$
$\alpha_8^{ip}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$0$	$\frac{2}{3}$	$0$	$-\frac{2}{3}$	$0$	$-\frac{2}{3}$
$\alpha_9^{ip}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$0$	$\frac{2}{3}$	$0$	$-\frac{2}{3}$	$0$	$-\frac{2}{3}$
$\alpha_{10}^{ip}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$0$	$\frac{2}{3}$	$0$	$-\frac{2}{3}$	$0$	$-\frac{2}{3}$
$\alpha_{11}^{ip}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$0$	$\frac{2}{3}$	$0$	$-\frac{2}{3}$	$0$	$-\frac{2}{3}$
$\alpha_{12}^{ip}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$0$	$\frac{2}{3}$	$0$	$-\frac{2}{3}$	$0$	$-\frac{2}{3}$

$$\text{TRM } A = \frac{E_2}{4\sqrt{1 - q^2}}, \quad \lambda = 1 - q$$

С учетом зависимости (49.17) из выражения (49.16) получим матричную зависимость для определения компонентов напряжений

$$|\phi\rangle = |E_0\rangle |\psi\rangle, \quad (47.18)$$

FILE

$$E_{\text{ex}} := [E_{\text{ex}}] \cdot [D] \quad \text{... (49, 19)}$$

#### — MATERIALS AND METHODS

В общем виде выражение (49.13) для матрицы напряжения  $[E_e]$  весьма громоздко.

Заметим, что нормальные напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  вдоль сторон сплошного контура конечного элемента изменяются по линейному закону, касательные напряжения  $\tau_{xy}$  — по закону квадратичной параболы. При достаточно малом размере элемента для оценки напряженного состояния можно пользоваться формулой (9.20), которая определяет средневзвешенные значения для компонентов напряжения, определенные как среднее арифметическое от соответствующих значений узловых компонентов напряжения.

§ 59. СОВМЕСТНАЯ МАТРИЦА ЖЕСТИКОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ПЛАСТИНЫ ПРИ НАГРЕНЬ

Выше при выводе матрицы жесткости использовалось выражение для прогиба Формулы (49.4), (49.8), которое не приводит к удовлетворению условия непрерывности углов поворота по линиям контакта между смежными конечными элементами.

Используя функции Эрмита (34.19) одномерного элемента, легко выполнить для правоугольного элемента пластины, изображенного на рис. 71, выражение упругой поверхности в форме (49.6), которое удовлетворяло бы условиям непрерывности функций  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  и  $\psi_3$  в зоне линии стыковки рассматриваемого элемента со смежными.

Входящие в формулу (49.4) функции Эрмита конструируются по правилу построения координатных функций для двумерных областей, т. е. приписываются в виде произведения определенных одномерных функций Эрмита (34.19) соответственно по направлениям  $x$  и  $y$ . Напомним в окончательном виде функции Эрмита для прямоугольного элемента пластины

$$\begin{aligned}
 S_1(E, \eta) &= S_1(E) S_1(\eta); & S_{11}(E, \eta) &= S_3(E) S_3(\eta); \\
 S_2(E, \eta) &= S_1(E) S_2(\eta); & S_3(E, \eta) &= S_3(E) S_4(\eta); \\
 S_3(E, \eta) &= -S_1(E) S_3(\eta); & S_4(E, \eta) &= -S_3(E) S_5(\eta); \\
 S_4(E, \eta) &= S_1(E) S_5(\eta); & S_{12}(E, \eta) &= S_3(E) S_2(\eta); \\
 S_5(E, \eta) &= S_1(E) S_4(\eta); & S_{13}(E, \eta) &= S_3(E) S_3(\eta); \\
 S_6(E, \eta) &= -S_1(E) S_5(\eta); & S_{14}(E, \eta) &= -S_3(E) S_5(\eta).
 \end{aligned} \tag{50.1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1(\xi) &= 1 - 3\xi^4 + 2\xi^2; & \mathcal{B}_1(\eta) &= 1 - 3\eta^4 + 2\eta^2; \\ \mathcal{B}_2(\xi) &= \alpha_5^2(1 - \xi)^4; & \mathcal{B}_2(\eta) &= b_5(1 - \eta)^2; \\ \mathcal{B}_3(\xi) &= \xi^4(3 - 2\xi); & \mathcal{B}_3(\eta) &= \eta^4(3 - 2\eta); \\ \mathcal{B}_4(\xi) &= -\alpha_5^2(1 - \xi); & \mathcal{B}_4(\eta) &= -b_5^2(1 - \eta); \end{aligned} \quad (50.2)$$

$$\xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{x}{b}.$$

Внося выражение (50.2) для функций Эрмита в формулу (49.12), можем получить значения элементов матрицы жесткости (87, с. 248).

Следует, однако, заметить, что выражение для упругой поверхности, получаемое при использовании формулы (50.2) для функций Эрмита, не удовлетворяет второму условию сходимости (см. § 43). В самом деле, в выражении для смешанной производной  $\frac{\partial w}{\partial x \partial y}$  отсутствует постоянное слагаемое. Создавшееся положение можно исправить, если расширить число степеней свободы для элемента, включив в число узловых неизвестных величину  $\left(\frac{\partial w}{\partial x \partial y}\right)$ . При этом выражение для упругой поверхности элемента запишем так:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^3 q_i \mathcal{B}_i(\xi) \mathcal{B}_1(\eta) + d_1 \mathcal{B}_1(\xi) \mathcal{B}_2(\eta) + \\ + d_2 \mathcal{B}_2(\xi) \mathcal{B}_1(\eta) + d_3 \mathcal{B}_1(\xi) \mathcal{B}_3(\eta) + d_4 \mathcal{B}_3(\xi) \mathcal{B}_1(\eta), \quad (50.3)$$

$$d_i = \left( \frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a_i, y=b_j} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (50.4)$$

— дополнительные неизвестные узловые координаты.

В заключение отметим, что последние годы опубликован ряд работ,<sup>1</sup> в которых метод конечных элементов с большим успехом используется при анализе напряженного состояния тонких оболочек произвольной формы. Применение МКЭ в теории оболочек проникает значительно сильнее, чем при решении

<sup>1</sup> В. Ж. Мелози [146]; Р. У. Стивенс [132, 133]; Л. А. Шмакт, Ф. К. Баглер, Р. Л. Фокс. Рисунок конструкций при концепции проблем с использованием дискретных элементов пластин и оболочек. — «Ракетная техника и космонавтика», 1968, № 3, с. 17—29; Э. И. Мелози [67]; Г. Р. Кернер, М. Д. Лэйдберг, М. Д. Олсон [48]; М. Д. Олсон. Треугольный конечный элемент высокой точности для цилиндрической оболочки. — «Ракетная техника и космонавтика», 1970, № 3, с. 231—233; С. В. Каля, З. Е. Венсан и др. — Решение тонких оболочек на основе метода конечных элементов [98, т. 1, с. 151].

самых сложных проблем плоской задачи теории упругости или изгиба пластин.

Оболочка может быть идеализирована совокупностью конечных элементов самых разнообразных форм при различных предположениях в отношении напряженного состояния.

Простейшим типом конечного элемента, который может быть использован в процедуре идеализации произвольной оболочки, является треугольный оболочечный элемент с постоянными напряжениями в его средней поверхности и линейным законом изменения кривизны при деформации оболочки.

## § 51. УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ СИСТЕМ<sup>1</sup>

Выше были рассмотрены вопросы использования МКЭ для определения напряженного состояния в стержнях, балках, пластинах, оболочках и объемных телах произвольной формы.

В настоящем параграфе будут наложены вопросы использования МКЭ для исследования устойчивости стержневых систем из пластин.

### 51.1. Устойчивость стержней

Запишем выражение для потенциальной энергии при изгибе прямолинейного элемента стержня с учетом влияния осевой сжимающей силы  $T$ :

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^L |v'(x)|^2 dx - \frac{ET}{2} \int_0^L |v''(x)|^2 dx. \quad (51.1)$$

Внося в формулу (51.1) выражение для упругой линии из формулы (44.2), получаем

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 (k_{ij} - t_{ij}) q_i q_j, \quad (51.2)$$

где

$$k_{ij} = EI \int_0^L \mathcal{B}'_i(x) \mathcal{B}'_j(x) dx \quad (51.3)$$

— элементы матрицы жесткости  $[K]$  конечного элемента стержня при его работе на изгиб (см. формулу (44.7));

$$t_{ij} = T \int_0^L \mathcal{B}'_i(x) \mathcal{B}_j(x) dx \quad (51.4)$$

<sup>1</sup> О. Зелкевич [43, с. 439—459]; В. А. Постнов, Н. Я. Харлук и др. [67, с. 104—107, 258—267]; Л. Б. Ракитинский [152, с. 264—265].

— элементы новой матрицы  $[T_g]$

$$[T_g] = \begin{bmatrix} \frac{6}{36} & \text{Симметрично} \\ \frac{1}{10} & \frac{2a}{15} & \dots \\ \frac{5}{36} & \frac{1}{10} & \frac{6}{36} \\ \frac{3a}{36} & \frac{3a}{36} & \frac{2a}{15} \\ \frac{1}{10} & \frac{a}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2a}{15} \\ \frac{3a}{30} & \frac{3a}{30} & \frac{1}{10} & \frac{15}{15} \end{bmatrix}. \quad (51.5)$$

Этой матрицей учитывается изменение геометрии системы, вызванное прогибом элемента. Поэтому  $[T_g]$  часто называют матрицей геометрических жесткостей.

Введя далее в рассмотрение вектор узловых перемещений элемента стержня  $\{q\} = [q_1 q_2 q_3 q_4]^T$  и учитывая содержание матрицы жесткости  $[K]$  и матрицы геометрических жесткостей  $[T_g]$ , выражение (51.2) для потенциальной энергии элемента стержня можно переписать в следующей компактной форме:

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^T (K - T_g) \{q\}. \quad (51.6)$$

Отсюда связь между узловыми усилиями элемента стержня  $[R]$  и его узловыми перемещениями  $\{q\}$  запишем в виде

$$[R] = [K - T_g] \{q\}. \quad (51.7)$$

Заметим, что как в векторе узловых перемещений, так и в векторе узловых усилий нумерации отдельных элементов и их положительные направления соответствуют приведенным на рис. 43.

Введя в рассмотрение вектор узловых перемещений всей конструкции в общей системе координат  $\{\bar{q}\}$ , с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в § 39, для рассматриваемого случая получаем

$$[\bar{R}] = [\bar{T}_g] \{\bar{q}\} = 0, \quad (51.8)$$

где

$$[\bar{T}_g] = [H]^T [-T_{el}] [H]. \quad (51.9)$$

— матрица геометрических жесткостей всей конструкции в общей системе координат;  $[-T_{el}]$  — квазидиагональная матрица, элементами которой являются матрицы геометрических жесткостей конечных элементов конструкции в общей системе координат.

Если вместо сжимающей силы  $T_i$  для  $i$ -го конечного элемента ввести величину

$$T_i = t_s t_i, \quad (51.10)$$

где

$$t_i = \frac{T_i}{t_s} \quad (51.11)$$

( $t_s$  — некоторая величина, имеющая размерность силы), то уравнению (51.8) можно придать вид

$$[\bar{K} - t_s \bar{T}_g] \{\bar{q}\} = 0. \quad (51.12)$$

Правильная плюс основной определитель системы уравнений (51.12), получаем искомое уравнение устойчивости конструкции

$$[\bar{K} - t_s \bar{T}_g] = 0. \quad (51.13)$$

Для определения корней уравнения (51.13) можно воспользоваться методом, изложенным в § 20.

Матрица жесткости  $[\bar{K}]$  в сочетании с матрицей геометрических жесткостей  $[\bar{T}_g]$  позволяет решать проблему продольно-поперечного изгиба для стержневых систем. В этом случае основное уравнение равновесия конструкции записем в виде

$$[\bar{K} - \bar{T}_g] \{\bar{q}\} = [\bar{P}], \quad (51.14)$$

где  $[\bar{P}]$  — вектор узловых внешних поперечных усилий стержневой конструкции в общей системе координат.

Решение задачи сложного изгиба стержневых систем представляет для практики значительный интерес, так как при продольно-поперечном нагружении напряжения и перемещения могут превышать допускаемые значения раньше, чем происходит потеря устойчивости по Эйлеру.

## 51.2. Устойчивость плавотин

Классическая проблема устойчивости плавотин математически весьма сложна. Ее аналитическое решение возможно лишь при определенных геометриях, условиях закрепления и загрузке внешними усилиями рассматриваемой плавотин. Метод конечных элементов позволяет преодолеть все эти трудности.

Пусть в рассматриваемой плавотин под действием заданных внешних усилий, действующих в ее срединной плоскости, возникает изогнутое сечение, характеризуемое компонентами напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ . В дальнейшем сжимающие напряжения в задачах устойчивости будем считать положительными.

Для определения компонент напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  могут быть использованы аналитические методы решения плоской задачи теории упругости либо метод конечных элементов (изложенный для этой задачи в § 46), если использование аналитических методов затруднительно.

При некоторой величине внешних сжимающих усилий первоначальное плоское напряженно-деформированное состояние плавотин неустойчиво, при этом оказывается возможным существование смежного искривленного равновесного состояния плавотин.

Представим пластиину в виде совокупности прямоугольных конечных элементов, соединенных между собой в узловых точках.

Полная потенциальная энергия элемента складывается из энергии изгиба (49.10) и потенциальной энергии срединной поверхности [112, с. 293]

$$V = V_{\text{изг}} + V_{\text{ср, пов.}} \quad (51.15)$$

После подстановки  $w(x, y)$  в форме (49.4) в формулу (51.15) находим

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^n (k_{ij} - t_{ij}) q_i q_j \quad (51.16)$$

где  $k_{ij}$  являются элементами матрицы жесткости [см. (49.12)];

$$t_{ij} = h \int_0^h \left[ \left( \sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + T_{xy} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \right]. \quad (51.17)$$

Коэффициенты  $t_{ij}$  образуют матрицу геометрических жесткостей прямоугольного элемента пластины

$$[T_p] = [t_{ij}], \quad (51.18)$$

Обобщенные узловые силы квадратичного элемента пластины определяем на основании очевидной зависимости

$$[R] = [K - T_p] [q]. \quad (51.19)$$

Нумерация и положительные направления узловых узловых и перемещений соответствуют содержанию рис. 71.

Переходя далее от местной системы координат к общей для пластины в целом, составляя систему уравнений равновесия узловых точек и принимая во внимание, что суммарная узловая реакция в каждом узле равна нулю, получаем в матричной форме следующее уравнение:

$$[\bar{K} - \bar{T}_p] [q] = 0. \quad (51.20)$$

Условие существования искаемых равновесных состояний пластины на основании уравнения (51.20) записываем в виде

$$[\bar{K} - \bar{T}_p] = 0. \quad (51.21)$$

Обычно действие силы, действующие на пластиину, изменяются пропорционально одному параметру, который обозначим через  $\sigma_x$ .

Для плоской пластины ее докритическое напряженное состояние определяем с помощью зависимостей линейной теории упругости. При этом компоненты напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $T_{xy}$  можно представить так:

$$\sigma_x = \sigma_0 \varphi_1(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_0 \varphi_2(x, y); \quad T_{xy} = \sigma_0 \varphi_3(x, y). \quad (51.22)$$

Зависимости (51.22) позволяют переписать уравнение (51.21) в следующем виде:

$$[\bar{K} - \sigma_0 \bar{T}_p] = 0, \quad (51.23)$$

что приводит к существенному упрощению задачи устойчивости, так как новая матрица  $(\bar{T}_p)$  в уравнении (51.23) уже не содержит неизвестных амплитуд никаких критических сил.

Операцию отыскания корней  $\sigma_0$  из уравнения (51.23) можно заметно упростить, если прибегнуть к приему, изложенному в § 20.

## § 52. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

### 52.1. Уравнения движения

До сих пор предполагалось, что механические свойства материала конструкции (свойства среды), внешние нагрузки и определяемые параметры не зависят от времени. Покажем, что распространение конечно-элементной концепции на задачи, параметры которых зависят от времени, не представляет особых трудностей.

Движение любого тела во времени обусловлено наличием приложенных к нему внешних нагрузок, сил инерции и сил внутреннего или анионного трения. В общем случае силы трения связаны линейной зависимостью с перемещениями и скоростью перемещений тела. Однако, для упрощения выкладок при получении уравнений движения ограничим учетом только линейного сопротивления вязкого типа.

Тогда уравнения движения можно записать в форме уравнений статического равновесия, если распределенные внешние силы  $p(x, y, z, t)$  заменить эквивалентом

$$Q(x, y, z, t) = p(x, y, z, t) - \mu \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} - p \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2}, \quad (52.1)$$

где  $\mu$  — коэффициент вязкого сопротивления.

Конечно-элементная дискретизация уравнений статики пластины обсуждалась в § 32 и 39, и при задачкой для каждого квадратичного элемента аппроксимирующей функции

$$u = \sum_{k=1}^{k=n} \beta_k(x, y, z) q_k \quad (52.2)$$

было получено основное матричное уравнение равновесия в общей системе координат

$$[\bar{K}] [\bar{q}] + [\bar{P}] = 0. \quad (52.3)$$

Вектор внешних узловых усилий  $\{\bar{P}\}$  определяли с помощью зависимостей (52.18) и (52.23):

$$\{P\} = \{P^{(1)} | P^{(2)} | \dots | P^{(M)}\}; \quad (52.4)$$

$$\{\bar{P}\} = [H]^T \{P\}. \quad (52.5)$$

Отдельные же элементы вектора внешних узловых нагрузок  $\{P\}^{(i)}$  для конечного элемента находятся по формуле

$$P_k^{(i)} = - \int_V p(x, y, z) \beta_k(x, y, z) dx dy dz. \quad (52.6)$$

Заменив теперь нагрузку  $p(x, y, z)$  величиной  $Q(x, y, z, t)$  и производя в формуле (52.6) необходимые преобразования, получаем

$$\begin{aligned} Q_k^{(i)} = & - \int_V \rho \beta_k dV + \int_V \mu \beta_{\perp} \beta_{\perp} \beta_k dV [\dot{q}]^{(i)} + \\ & + \int_V \rho \beta_{\perp} \beta_{\perp} \beta_k dV [\ddot{q}]^{(i)}. \end{aligned} \quad (52.7)$$

Тогда вектор эквивалентных узловых усилий  $\{Q\}^{(i)}$ , соответствующий действию на  $i$ -й элемент распределенной нагрузки  $Q(x, y, z, t)$ , определим зависимостью

$$\{Q\}^{(i)} = \{P\}^{(i)} + [C]^{(i)} [\dot{q}]^{(i)} + [M]^{(i)} [\ddot{q}]^{(i)}, \quad (52.8)$$

где  $[C]^{(i)}$  и  $[M]^{(i)}$  — соответственно матрица сопротивления и матрица масс элемента. Элементы этих квадратных матриц вычисляем по формулам

$$c_{jk}^{(i)} = \left[ \int_V \mu \beta_j \beta_k dV \right],$$

$$m_{jk}^{(i)} = \left[ \int_V \rho \beta_j \beta_k dV \right]. \quad (52.9)$$

С учетом результата (52.8) и зависимостей (52.4) и (52.5) из уравнения (52.3) получаем следующее матричное дифференциальное уравнение:

$$[\bar{M}] [\ddot{q}] + [\bar{C}] [\dot{q}] + [\bar{K}] [\vec{q}] + [\bar{P}] = 0. \quad (52.10)$$

Матрицу масс  $[\bar{M}]$  и матрицу сопротивления  $[\bar{C}]$  составляем из подматрик  $[M]^{(i)}$  и  $[C]^{(i)}$  по правилу построения матрицы  $[\bar{M}]$  из  $[K]^{(i)}$ .

Уравнение (52.10) и есть искомое уравнение движения.

## 52.2. Матрицы масс и сна сопротивления кромочного элемента

Если предположить, что при вычислении элементов  $c_{jk}$  и  $m_{jk}$  по формулам (52.9) значения  $\mu$  и  $\rho$  в объеме кромочного элемента можно заменить некоторыми их средними значениями, то упомянутые формулы упростятся и примут следующий вид:

$$c_{jk}^{(i)} = \mu \int_V \beta_j \beta_k dV; \quad m_{jk}^{(i)} = \rho \int_V \beta_j \beta_k dV. \quad (52.11)$$

Используя приближенные формулы (52.11), подсчитаем значения матриц масс и матриц сна сопротивления для двух простейших конечных элементов.

1. **Балочный элемент** с линией массой  $\rho F$  совершает поперечные движения  $\omega(x, t)$ . Здесь  $F$  — площадь поперечного сечения элемента.

Подставляя выражения (34.19) для функций Эрмита во вторую формулу (52.11), получим окончательно следующее выражение для матрицы масс стержневого элемента при учете его поперечных движений, при этом нумерация узловых перемещений произведена в соответствии с рис. 43.

1	2	3	4
$\frac{13}{35}$	$\frac{11}{210} a^4$	$\frac{9}{70}$	$-\frac{13}{320} a^4$
	$\frac{1}{105} a^4$	$\frac{13}{420} a^4$	$-\frac{1}{140} a^4$
		$\frac{13}{35}$	$-\frac{11}{210} a^4$
Симметрия		$\frac{1}{355} a^4$	

$$[M] = \rho a F$$

2. **Прямоугольный элемент** пластин размером  $a \times b$  совершает поперечные движения  $\omega(x, y)$ .

Внося выражения (49.6) для функций Эрнита во вторую формулу (52.1), получаем следующую формулу для определения элемента матрицы масс конечного элемента пластины:

$$m_{jk} = \rho h \int \int \vartheta_j(x, y) \vartheta_k(x, y) dx dy, \quad (52.12)$$

где  $h$  — толщина элемента пластины.

В окончательном виде матрица масс прямоугольного элемента пластины приведена в [87, с. 268].

Из сравнения первой и второй формул (52.11) следует, что для получения матриц сопротивления достаточно в полученных выше выражениях для матриц масс вместо  $\rho$  писать коэффициент сопротивления  $\mu$ .

### 52.3. Свободные колебания упругих систем

При рассмотрении свободных колебаний без сопротивления

$$[\ddot{P}(t)] = 0; \quad [\ddot{C}] = 0; \quad [\ddot{\varphi}(t)] = [\dot{\varphi}] \sin \lambda t, \quad (52.13)$$

и уравнение (52.10) принимает вид

$$[\ddot{K} - \lambda^2 M] [\dot{\varphi}] = 0. \quad (52.14)$$

Приравнивая определятель системы линейных алгебраических уравнений (52.14) нулю, получаем уравнение для частот свободных колебаний

$$|\ddot{K} - \lambda^2 M| = 0. \quad (52.15)$$

Для определения  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ) из уравнения (52.15) может быть рекомендован прием, изложенный в § 20.

### 52.4. Неостационарные задачи и методы решения уравнений движения

В общем виде система уравнений при использовании МКЭ для решения нестационарных задач имеет вид уравнения (52.10).

Для линейных задач некоторые матрицы этого уравнения зависят от исходных узловых неизвестных.

Уравнением (52.10) при заданных начальных условиях

$$[\dot{\varphi}(t=0)] = [\dot{\varphi}_0], \quad \text{и } [\ddot{\varphi}(t=0)] = [\ddot{\varphi}_0]$$

описывается задача Коши.

Существует два основных подхода к решению таких задач<sup>1</sup>:

<sup>1</sup> Несколько формально подходит к использованию того или иного метода. Каждый метод имеет свои сильные и слабые стороны, которые в определенной степени обуславливают его рабочий диапазон.

Метод главных координат. Он используется в том случае, если заранее известно, что ожидаемое решение может быть описано линейной комбинацией гармоник, отвечающих нескольким различным частотам системы. Это будет тогда, когда высшие гармоники в разложении  $[\dot{P}(t)]$  мало влияют на поведение упругой системы.

Мы не останавливаемся на изложении этого метода, полагая, что читатель знаком с ним из курса теоретической механики. Необходимо лишь подчеркнуть, что использование метода главных координат требует предварительного определения частот и форм свободных колебаний рассматриваемой упругой системы.

Шаговый метод по времени. Существует несколько вариантов шаговой процедуры интегрирования уравнений движения (52.10) по времени, отличающихся друг от друга формой ковечно-разностного представления функций  $[\dot{\varphi}]$  и  $[\ddot{\varphi}]$ .

В частности, широко используется одноступенчатая процедура Вильсона [111]. Под одноступенчатой понимается такая процедура, которая обеспечивает определение всех характеристик движения системы для  $t = t_1 + \Delta t$  по их значениям при  $t = t_1$ .

Метод Вильсона, который налагается ниже, основан на некоторых взаимосвязях, существующих между отдельными параметрами движения системы в различные моменты времени ( $t$  и  $t + \Delta t$ ). Выведем эти соотношения.

Согласно формуле Тейлора

$$[\dot{\varphi}]_{t+\Delta t} = [\dot{\varphi}]_t + \tau [\ddot{\varphi}]_t + \frac{\tau^2}{2} [\ddot{\varphi}]_t + O(\tau^3)$$

$$[\ddot{\varphi}]_{t+\Delta t} = [\ddot{\varphi}]_t + \tau [\dot{\ddot{\varphi}}]_t + O(\tau^2).$$

Используя из этих соотношений  $[\dot{\varphi}]_t$ , получаем

$$[\dot{\varphi}]_{t+\Delta t} = [\dot{\varphi}]_t + \frac{\tau}{2} ([\ddot{\varphi}]_t + [\ddot{\varphi}]_{t+\Delta t}) + O(\tau^3). \quad (52.16)$$

Зависимость (52.16) показывает, что с погрешностью порядка  $0(\tau^2)$  скорость движения в интервале времени  $(t, t + \Delta t)$  изменяется линейно.

упругой пластины с однородными граничными условиями, отличными от условий свободного смещения из-за жесткого защемления краев. Было бы, при этом можно воспользоваться методами из численных методов — методом конечных разностей, методом Рунге, методом конвекции. Однако используемые именно этих методов для определения изящества задачи может оказаться трудно. Более эффективны для данных целей будут альтернативные методы, разработанные В. В. Болотином для решения задач с собственным числом в временных областях. См. В. В. Болотин. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. — ПММ, 1960, № 5, с. 831—842; В. В. Болотин. Двойственный краевой эффект при упругих колебаниях пластин. — Инженерный сборник, 1961, с. 3—34.

Второе, необходимое для метода Вильсона, соотношение можно получить, если воспользоваться следующими очевидными разложениями:

$$|\varphi|_{t+\tau} = |\varphi|_t + \tau |\dot{\varphi}|_t + \frac{\tau^2}{2} |\ddot{\varphi}|_t + \frac{\tau^3}{6} |\dddot{\varphi}|_t + O(\tau^4); \quad (52.17)$$

$$|\dot{\varphi}|_{t+\tau} = |\dot{\varphi}|_t + \tau |\ddot{\varphi}|_t + \frac{\tau^2}{2} |\dddot{\varphi}|_t + O(\tau^3). \quad (52.18)$$

Изъяная из разложения (52.18) с помощью зависимости (52.16) величину  $|\dot{\varphi}|_{t+\tau}$ , а затем используя получившееся при этом выражение для исключения в разложении (52.17) члена  $|\dot{\varphi}|_t$ , получаем второе соотношение

$$|\varphi|_{t+\tau} = |\varphi|_t + \tau |\dot{\varphi}|_t + \frac{\tau^2}{6} (2 |\ddot{\varphi}|_t + |\ddot{\varphi}|_{t+\tau}) + O(\tau^3). \quad (52.19)$$

Разрешим соотношения (52.16) и (52.19) относительно  $|\dot{\varphi}|_{t+\tau}$  и  $|\ddot{\varphi}|_{t+\tau}$ , получим

$$|\dot{\varphi}|_{t+\tau} = \frac{3}{\tau} (|\varphi|_{t+\tau} - |\varphi|_t) - 2 |\dot{\varphi}|_t - \frac{5}{2} |\ddot{\varphi}|_t + O(\tau^2); \quad (52.20)$$

$$|\ddot{\varphi}|_{t+\tau} = \frac{6}{\tau^2} (|\varphi|_{t+\tau} - |\varphi|_t) - \frac{6}{\tau} |\dot{\varphi}|_t - 2 |\ddot{\varphi}|_t + O(\tau^3). \quad (52.21)$$

Введя полученные выражения для  $|\dot{\varphi}|_{t+\tau}$  и  $|\ddot{\varphi}|_{t+\tau}$  в уравнение движения (52.10), выпасенное для  $t + \tau$ , получаем

$$[\bar{S}] |\ddot{\varphi}|_{t+\tau} = [\bar{R}]_{t+\tau} + O(\tau^3), \quad (52.22)$$

где

$$[\bar{S}] = [\bar{R}] + \frac{3}{\tau} [\bar{C}] + \frac{6}{\tau^2} [\bar{M}], \quad (52.23)$$

$$\begin{aligned} [\bar{R}]_{t+\tau} &= [\bar{P}]_{t+\tau} + [\bar{M}] \left( 2 \bar{q} + \frac{6}{\tau} \bar{q} + \frac{6}{\tau^2} \bar{q} \right)_t + \\ &+ [\bar{C}] \left( \frac{3}{2} \bar{q} + 2 \bar{q} + \frac{3}{\tau} \bar{q} \right)_t. \end{aligned} \quad (52.24)$$

Из уравнения (52.22) и соотношений (52.20) и (52.21) с погрешностью порядка  $O(\tau^3)$  определяем значения  $|\ddot{\varphi}|_{t+\tau}$ ,  $|\dot{\varphi}|_{t+\tau}$  и  $|\varphi|_{t+\tau}$ .

Уравнение (52.22) очень просто в использовании и позволяет определить значения искомых функций на каждом шаге по времени через уже известные их значения в предыдущем шаге. При этом не требуется решать каких-либо систем алгебраических уравнений. Такие расчетные схемы называются явными.

Как правило, явные схемы являются условно устойчивыми. Условие устойчивости вычислительного процесса накладывает жесткие ограничения на выбор шага по времени. Шаги по времени получаются очень малыми. Поэтому с помощью явных схем практически можно производить расчеты достаточно быстро протекающих процессов. При расчетах же длительных нестационарных процессов, если не принять какие-либо специальные меры для повышения устойчивости явных схем, более эффективными оказываются лежевые схемы. Неживые схемы приводят к необходимости решения на каждом временном шаге системы алгебраических уравнений. При этом объем вычислений на каждом шаге возрастает по сравнению с явными схемами. Но за счет увеличения шага по времени можно получить значительно экономию в объеме вычислений.

В методе Вильсона, который следует отнести к явным схемам, повышение устойчивости численного алгоритма достигается введением на промежуточных этапах расчета измененного интервала времени  $\tau$ , определяемого по формуле

$$\tau = k \Delta t,$$

где  $\Delta t$  — шаг по времени;  $k$  — числовой коэффициент, значение которого на основании расчетной практики рекомендуется выбирать в пределах 1,85–1,5.

Располагая значениями параметров движения при  $t$  и  $t + \tau$  нетрудно определить значения  $|\dot{\varphi}|$ ,  $|\ddot{\varphi}|$  и  $|\dddot{\varphi}|$  для момента времени  $t + \Delta t$ .

В самом деле, с погрешностью порядка  $O(\tau^3)$  допустимо предположение о линейности изменения  $|\dot{\varphi}|$  в интервале  $[t, t + \Delta t]$ : отсюда

$$|\ddot{\varphi}|_{t+\Delta t} = \left( 1 - \frac{1}{k} \right) |\ddot{\varphi}|_t + \frac{1}{k} |\ddot{\varphi}|_{t+\tau}. \quad (52.25)$$

Скорость и перемещения при  $t + \Delta t$  находим непосредственно по зависимостям (52.16) и (52.19).

$$|\dot{\varphi}|_{t+\Delta t} = |\dot{\varphi}|_t + \frac{\Delta t}{2} (|\ddot{\varphi}|_t + |\ddot{\varphi}|_{t+\tau});$$

$$|\varphi|_{t+\Delta t} = |\varphi|_t + \Delta t |\dot{\varphi}|_t + \frac{\Delta t^2}{6} (2 |\ddot{\varphi}|_t + |\ddot{\varphi}|_{t+\tau}). \quad (52.26)$$

Заметим, что требуемые на первом шаге значения  $|\dot{\varphi}|$ ,  $|\ddot{\varphi}|$  и  $|\varphi|$  при  $t = 0$  получаются из совместного рассмотрения начальных условий системы и уравнения ее движения (52.10), написанного для  $t = 0$ .

Хотя точность метода Вильсона определяется величиной шага  $\Delta t$ , его числовая устойчивость сильно зависит от признакового значения коэффициента  $k$ . К сожалению, на сегодня мы не располагаем возможностью дать более строгие рекомендации по выбору значений этого коэффициента.

Если коэффициент  $k$  назначен удачно и метод обладает хорошей числовой устойчивостью, то погрешность расчета будет в первую очередь зависеть от отношения  $\Delta t/T$ , где  $T$  — период основной гармонической составляющей приемлемого возбуждения системы.

В методах со слабой числовой устойчивостью при выборе  $\Delta t$  приходится ориентироваться на периоды, соответствующие высшим частотам свободных колебаний системы. Это приводит кному уменьшению длины шага  $\Delta t$ , а следовательно, и к увеличению трудоемкости расчета и дополнительной потери его точности.

В заключение отметим, что часто с целью избежания известных трудностей решения задач статического деформирования механических систем с большими числами степеней свободы (неустойчивость вычислений, либо чрезмерное время счета), решение статической задачи поддается исследованию движений изучаемой системы вблизи ее статического равновесия.<sup>1</sup>

При этом уравнения статического равновесия системы дополняются инерционными и демпфирующими членами и приводят к виду уравнения (52.10).

Если выбранные матрицы изерционных членов  $[\bar{M}]$  и демпфирующих членов  $[\bar{C}]$  положительно определены, то независимо от начальных условий движение системы будут иметь характер затухающих колебаний около положения статического равновесия либо линимитационного движения, асимптотически приближающего систему также в положение равновесия.

При этом возникает вопрос выбора таких значений матриц  $[\bar{M}]$  и  $[\bar{C}]$ , которые приводили бы к устойчивому числовому алгоритму при минимальных затратах машинного времени. Рекомендации по выбору «оптимальных» значений упомянутых матриц содержатся в работах О. М. Палия.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Принцип был предложен В. И. Федосеевым в статье [118]. См. также его книгу [119, с. 166–172]. В настоящие времена термин В. И. Федосеева широко используется под названием «метод динамических координат» или «метод динамической равновесии».

<sup>2</sup> См. [79] и статью «Об эффективных итерационных методах решения линейных колебательных уравнений статистико-деформируемых механических систем», — В сб. «Проблемы статической механики жесткого тела», Л., Судостроение, 1973, с. 157–165.

## § 58. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. ПРОГРАММА ДЛЯ ЭВМ

В настоящее время в разных странах разработано большое число программ расчета инженерных конструкций на ЭВМ с использованием МКЭ. Эти программы являются автоматическими в том смысле, что инженер должен только описать идеализированную конструкцию и действующую на эту конструкцию внешнюю загрузку. Все же необходимые для ведения полного расчета программы уже имеются в библиотеке системы и приводятся в действие в зависимости последовательности автоматизации. Такие программы принято называть универсальными.

Ниже дается краткое содержание одной из первых отечественных универсальных программ, разработанной Ю. К. Вильямпэлем и И. Я. Хархурином [22]. Некоторые зарубежные программы упомянуты в § 54.

### 58.1. Основные этапы алгоритма

Универсальные алгоритмы для расчета конструкций произвольного вида сводятся к последовательности матричных операций, после выполнения которых немедленно определяются внутренние усилия.

Несмотря на простоту структуры матриц исходной информации, их составление достаточно трудоемко. Кроме того, размеры этих матриц, таковы, что трудно разместить их в оперативной памяти машины. Перемножение этих матриц в процессе формирования матрицы жесткости требуют большого количества машинного времени.

Основой изложенной ниже программы [22] является метод конечных элементов в варианте метода перемещений. Как уже отмечалось, расчет произвольной конструкции по МКЭ можно разделить на следующие основные этапы:

- разбиение конструкции на конечные элементы;
- получение матрицы жесткости для элементов, составляющих конструкцию;
- формирование общей матрицы жесткости для всей конструкции и матрицы грузовых членов;
- решение системы уравнений для определения осадочных величин;
- определение внутренних усилий (напряжений).

Рассмотрим, как выполняются перечисленные этапы по данному алгоритму.

## 63.2 Разбиение конструкции на конечные элементы

Тип элементов и их количество зависят от вида конструкции, от требуемой точности результата, от вида внешней нагрузки и от ограничений, связанных с объемом памяти ЭВМ.

Нагрузка предполагается приложенной в узлах, и поэтому в случае распределенной нагрузки для более точного ее моделирования иногда желательно ввести дополнительные узлы.

Сама операция разбиения конструкции на совокупность конечных элементов является одной из наиболее трудоемких. Но уже сегодня имеются программы, позволяющие автоматизировать этот процесс для стержневых, пластинчатых и объемных конструкций.<sup>3</sup>

## 63.3. Матрица жесткости

Расчеты по МКЭ различных конструкций отличаются принципиально друг от друга только включаемой матрицей жесткости (МЖ) и матрицей перехода от обобщенных перемещений к внутренним усилиям (МУ). Поэтому программа построена таким образом, что основная ее часть остается независимой; меняются лишь стандартные подпрограммы для построения МЖ и МУ. Составлена специальная библиотека стандартных подпрограмм вычисления МЖ в МУ. Подпрограммам в порядке их включения присваиваются номера 1, 2, 3 и т. д.

Для решения той или иной задачи из специального каталога выбираются нужные МЖ и МУ, к их номера указываются в исходных данных. Машине автоматически включает указанные стандартные подпрограммы в состав основной программы.

## 63.4. Описание топологии конструкции для формирования общей матрицы жесткости

Одной из важнейших проблем при расчете конструкций, решаемых по методу конечных элементов на ЭВМ, является задача автоматического формирования в машине коэффициентов системы алгебраических уравнений для всей конструкции. Без решения этой задачи немыслимо решение задачи МКЭ с помощью ЭВМ.

Действительно, идеализированная схема конструкции состоит из большого числа конечных элементов, соединенных в узлах связи. Число неизвестных в узле в зависимости от класса решаемой задачи равно от одного до шести или более. Поэтому

общее число линейных уравнений становится достаточно большим (от нескольких сотен до нескольких тысяч).

При этом число коэффициентов общей системы уравнений в зависимости от ширины ленты оказывается порядка  $10^3 - 10^7$ .

Отсюда ясно, что формирование общей матрицы жесткости должно быть автоматизировано. При этом весьма существен способ автоматизации, так как от него зависит вид, сложность и объем исходной информации, а также затраты машинного времени, т. е. все те условия, которые являются основными критериями эффективности использования ЭВМ.

В общем случае формирования системы уравнений необходимо знать топологическую схему конструкции и краевые условия, геометрические и физические параметры элементов (размеры, жесткости и т. п.), вид, интенсивность и места приложения внешних сил.

Взаимная связь элементов и краевые условия задаются специальной матрицей индексов [T]. Она имеет размеры  $M \times r$ , где  $M$  — количество элементов конструкции, а  $r$  — количество обобщенных перемещений для одного элемента.

Матрица индексов [T] состоит из строк, а каждая  $i$ -я строка задает отображение обобщенных координат  $i$ -го элемента в множество обобщенных координат конструкции:

$$[T] = [t_{ij}] \quad (i = 1, 2, 3, \dots, M); \quad (j = 1, 2, 3, \dots, r),$$

где

$$\begin{aligned} &1, 2, 3 \dots, r \\ &[t_{ij}] = [t_{1j} \ t_{2j} \ t_{3j} \dots \ t_{rj}], \end{aligned}$$

где 1, 2, 3, ...,  $r$  — номера узловых перемещений отдельного элемента в собственной нумерации, а  $t_{ij}$  — номера узловых перемещений конструкции, совпадающие по направлению с перемещениями отдельного элемента.

Построение матрицы индексов [T] производится с учетом нумерации узловых перемещений для отдельного элемента в общей и местной системах координат.

В библиотеке матриц жесткости и усилий для всех типов элементов, которые включены в программу, приведен порядок нумерации узловых перемещений. Этого порядка нужно строго придерживаться при составлении матрицы индексов [T].

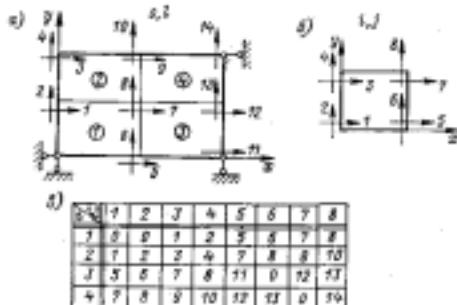
Построение матрицы индексов начинается с того, что из библиотеки выбирается нужный элемент, далее производится нумерация основных неизвестных конструкции в общей системе координат в элементах конструкции.

На нумерацию неизвестных следует обратить особое внимание. Она должна быть такой, чтобы получаемая система уравнений имела ленточную структуру. Это условие является обязательным и при правильной нумерации неизвестных всегда оказывается выполненным. Ширина ленты также существенным образом зависит от порядка нумерации.

<sup>3</sup> См. Х. А. Кажель, Г. К. Заде и др. в т. 4 к. Автоматическое построение сеток в двух- и трехмерных системах областей [98, т. 2, с. 21—34]; I. Suhara, T. Fukuda. Automatic Mesh Generation for Finite Element Analysis [148, с. 607—621].

Составление матрицы индексов рассмотрим на примере работы балки-стенки, работающей в условиях плоского напряженного состояния (рис. 72). Следует отметить, что приведенная балка-стенка дана только для иллюстрации составления матрицы индексов. Поэтому количество элементов взято относительно небольшим и является недостаточным для получения удовлетворительных результатов.

Каждая строка матрицы индексов (см. рис. 72) показывает для  $i$ -го элемента, какие неизвестные из общей системы прило-



Рассмотрим подробнее все этапы получения коэффициента общей матрицы жесткости на примере формирования элемента  $k_{1,1}$  общей матрицы жесткости для балки-стаки.

Как видно из рис. 72, для формирования этого коэффициента надо просуммировать четыре различных коэффициента, найденных из матрицы жесткости для конечных элементов

$$k_{1,1} = k_{1,1}^{(1)} + k_{1,1}^{(2)} + k_{1,1}^{(3)} + k_{1,1}^{(4)},$$

где цифры сверху указывают номер элемента, из матрицы жесткости которого берутся соответствующие коэффициенты. При этом индексы имеют следующие значения:

$$\begin{cases} s = 7; & \ell^{(1)} = 7; & \ell^{(2)} = 5; & \ell^{(3)} = 3; & \ell^{(4)} = 1; \\ t = 7; & \mu^{(1)} = 7; & \mu^{(2)} = 5; & \mu^{(3)} = 3; & \mu^{(4)} = 1. \end{cases}$$

Перебирая таким образом все строки матрицы индексов (см. рис. 72, а), машина формирует всю систему уравнений. Следует заметить, что эти коэффициенты получаются не последовательно один за другим и даже не сразу в одной строке общей матрицы жесткости. Здесь все зависит от числовой последовательности в матрице индексов. Так, проанализировав первую строку матрицы индексов (см. рис. 72, а), машина сформирует частично коэффициенты общей матрицы жесткости:  $k_{1,1}$ ;  $k_{1,2}$ ;  $k_{1,3}$ ;  $k_{1,4}$ ;  $k_{1,5}$ ;  $k_{1,6}$ ;  $k_{1,7}$ ;  $k_{1,8}$  и полностью коэффициенты  $k_{1,9}$  и  $k_{1,10}$ .

### 53.6. О порядке нумерации узлов для получения ленты минимальной ширины

При решении задач по МКЭ структура общей матрицы жесткости существенным образом зависит от порядка нумерации и обхода узлов конструкции, а также от порядка нумерации

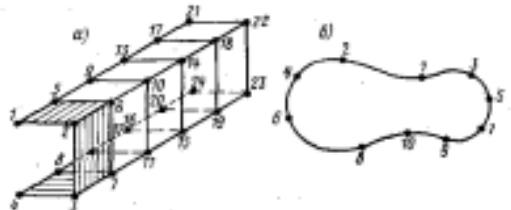


Рис. 72. Примеры нумерации узловых точек для получения ленточной матрицы минимальной ширины.

неизвестных внутри одного элемента. Важнейшей особенностью МКЭ является то, что при правильной нумерации узлов система уравнений имеет ленточную структуру. При этом элементы, рас-

положенные вне ленты, постоянно остаются нулевыми и в оперативной памяти машины не присутствуют.

Ширина ленты может быть различной в зависимости от порядка обхода узлов конструкции. Чем меньше ширина ленты, тем удобнее для решения система (меньше требуется машинного времени, выше точность решения, меньше исходной информации и т. п.).

Рекомендуется придерживаться следующих положений:

для конструкций с регулярной сеткой обход узлов следует производить вдоль меньшего размера конструкции (рис. 73, а); для конструкций, имеющих замкнутый контур, обход узлов и их нумерацию нужно производить симметрично относительно некоторого начального узла (рис. 73, б).

в любом другом случае надо стремиться, чтобы разность между соседними номерами узлов была наименьшей.

### 53.7. Формирование эквивалентных узловых усилений от внешних нагрузок

Проблема формирования узловых усилий от внешних нагрузок (правой части системы уравнений для определения основных неизвестных) просто решается в случае узловой передачи внешних нагрузок. Распределенные же нагрузки заменяются совокупностью сосредоточенных. При этом возникает потребность, для умножения которой приходится разбивать конструкцию на более мелкие элементы, что приводит к увеличению числа основных неизвестных.

Матрица индексов позволяет решить задачу автоматического формирования правых частей основной системы уравнений при действии на каждый элемент произвольной нагрузки. При этом вместо матрицы жесткости для элемента в виде двухмерного массива выдается в рассмотрение вектор реакций от внешних нагрузок в виде одномерного массива с числом элементов в нем, равным числу обобщенных переменных для каждого элемента. Номер столбца матрицы индексов указывает, какой элемент должен быть взят из вектора реакции от нагрузок, а содержимое этого же столбца для рассматриваемого элемента указывает, куда его заслать.

### 53.8. Вычисление узловых усилий

После решения системы уравнений могут быть найдены обобщенные узловые неизвестные, которые связаны с внутренними узловыми усилиями в общем случае следующим соотношением:

$$[R]^{(1)} = [K]^{(1)} [q]^{(1)}. \quad (53.1)$$

В случае двухмерных и объемных элементов с помощью матрицы

напряжения желательно сразу получать напряжения в конечных элементах пластины, оболочек или в объемных телах.

Определение напряжений легко выполняется с помощью матрицы индексов. Элементы матрицы индексов указывают, какие перемещения нужно выбрать из общего вектора узловых неизвестных, затем эти перемещения необходимо перемножить на соответствующую матрицу усилий для элемента.

## § 84. МЕТОД СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЕТАХ ПРОЧНОСТИ СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Применение МКЭ к расчетам прочности судна, рассматриваемого как пространственная пластинчато-стержневая система, затрачивает большие трудозатраты. Получение достаточной точности в этом случае требует представления конструкции в виде большого числа коконических элементов. При этом необходимо одновременно обрабатывать большие объемы информации, что оказывается затруднительным даже при использовании самых совершенных ЭВМ. Весьма серьезным недостатком реализации МКЭ являются значительные затраты ручного труда при подготовке исходных данных.

Все это требует расчленения конструкции на отдельные части (узлы, части шпангоутовых рам, перекрытий, борта, и т. п.), называемые подструктурами, каждая из которых в свою очередь состоит из базисных конечных элементов. Напряженное состояние подструктуры описывается системой уравнений, сформулированной из уравнений равновесия, входящих в подструктуру базисных элементов. Каждая из подструктур рассматривается отдельно при закреплении обобщих границ. Путем обобщения закрепленных границ и установления равновесия всей конструкции как совокупности подструктур определяются граничные перемещения.

Естественно, что система уравнений, выражающая условия равновесия границ, содержит значительно меньшее число неизвестных по сравнению с системой уравнений метода конечных элементов.

Далее, каждая из подструктур рассчитывается при заданной нагрузке и найденных перемещениях на границе. Это может быть выполнено без особых затруднений, так как подструктуры имеют относительно небольшие размеры.

Зарубежный и отечественный опыт использования программных комплексов NASTRAN<sup>1</sup>, SESAM—69 [129, 156], ASKA [98, т. 2, с. 36–66], КАСКАД [68, 91, 92, 95] для расчета инженерных конструкций по методу суперэлементов доказывает воз-

можность оптимальной последовательности вычислительных операций при сведение до минимума емкости используемой машинной памяти.

Процедем алгоритм метода суперэлементов. Пусть рассчитываемая конструкция разделена на несколько частей-подструктур, каждая из которых в свою очередь состоит из базисных конечных элементов.

Условия равновесия подструктуры выражаются системой алгебраических уравнений

$$[\bar{K}] [\bar{q}] = [\bar{P}], \quad (54.1)$$

где  $[\bar{K}]$  — общая матрица жесткости подструктуры;  $[\bar{q}]$  — вектор узловых перемещений;  $[\bar{P}]$  — вектор узловых усилий, действующих на подструктуру.

При соответствующем разделении перемещений подструктуры на внутренние и граничные к матричное уравнение (54.1) можно представить в блочном виде

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{ii} & \bar{K}_{il} \\ \bar{K}_{li} & \bar{K}_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_i \\ \bar{q}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_i \\ \bar{P}_l \end{bmatrix}, \quad (54.2)$$

Исключая из зависимости (54.2) вектор внутренних перемещений подструктуры, можно получить

$$[\bar{K}_{ii} - \bar{K}_{il}\bar{K}_{ll}^{-1}\bar{K}_{li}] [\bar{q}_i] = [\bar{P}_i - \bar{K}_{il}\bar{K}_{ll}^{-1}\bar{P}_l], \quad (54.3)$$

или

$$[\bar{K}^*] [\bar{q}_i] = [\bar{P}^*], \quad (54.4)$$

где

$$[\bar{K}^*] = [\bar{K}_{ii} - \bar{K}_{il}\bar{K}_{ll}^{-1}\bar{K}_{li}] \quad (54.5)$$

— матрица граничных жесткостей подструктуры;

$$[\bar{P}^*] = [\bar{P}_i + \bar{K}_{il}\bar{K}_{ll}^{-1}\bar{P}_l] \quad (54.6)$$

— вектор граничных узловых усилий подструктуры.

Подструктуру, для которой определены матрицы  $[\bar{K}^*]$  и  $[\bar{P}^*]$ , будем называть суперэлементом, являющимся как бы математической моделью взаимодействия рассматриваемой подструктуры со смежными подструктурами конструкции. В такой постановке из суперэлементов, как из базисных конечных элементов, можно сформировать подструктуру высшего уровня, а затем, исключив внутренне для этой подструктуры перемещения, получить суперэлемент.

Процесс объединения матрицы жесткостей в векторах узловых усилий суперэлементов высшего уровня в матрицу жесткости и вектор узловых усилий суперэлемента высшего уровня может быть произведен несколько раз до тех пор, пока не будет сфор-

<sup>1</sup> Краткое описание программы NASTRAN применительно к расчету инженерных конструкций приведено в статье C. W. M. Согласно к The NASTRAN Program for Structural Analysis [148, с. 361–373].

мирована полностью рассчитываемая конструкция. Система уравнений равновесия всей конструкции в этом случае будет иметь небольшое число неизвестных, равное числу граничных перемещений суперэлементов предыдущего уровня.

Если найдены граничные перемещения для суперэлемента некоторого уровня, его внутренние перемещения определяются из уравнения (54.2) по следующей зависимости:

$$[\bar{\psi}_i] = [\bar{K}_{ii}^{-1}] [\bar{\rho}_i] - [\bar{K}_{ij}] K_{jj} [\bar{\psi}_j]. \quad (54.2)$$

После отыскания полного вектора перемещений для всех суперэлементов первого уровня с помощью обычной процедуры МКЭ вычисляются компоненты напряженного состояния базисных элементов.

### § 55. ВОПРОСЫ СХОДИМОСТИ И ТОЧНОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ\*

Погрешность в результатах расчета при использовании метода конечных элементов складывается, главным образом, из погрешности самого метода, который заменяет тело, обладающее бесконечным числом степеней свободы, моделью с конечным числом степеней свободы (погрешность дискретизации). Погрешности округлением чисел при выполнении вычислительных операций на ЭВМ.

Погрешность дискретизации зависит от следующих факторов: выбора предлагаемого закона изменения перемещений или напряжений и узловых неизвестных;

точности приведения внешней нагрузки к узловым усилиям; размера конечного элемента.

Ошибка округления всегда возрастает при увеличении числа конечных элементов. Это связано, во-первых, с тем, что увеличение числа элементов приводит к разному возрастанию числа арифметических операций, а во-вторых, с уменьшением размера конечного элемента доля деформационных составляющих в значениях обобщенных перемещений уменьшается по отношению к той их части, которая связана с движением элемента как абсолютно твердого тела.

На рис. 74 приведены кривые ошибок дискретизации *A*, *B* и кривые ошибок округления *C*, *D*. При этом отчет ошибок

округления производится непосредственно от кривых *A* и *B*. Таким образом, кривые *C* и *D* определяют значения суммарных ошибок при использовании метода конечных элементов.

Кривая *A* соответствует использованию матрицы жесткости, обеспечивающей сходимость решения по МКЭ с точным решением теории упругости. Кривая *B* связана с использованием в МКЭ матрицы жесткости, которая не обеспечивает сходимость решения с точным. Кривые *C* и *D* соответствуют случаю, когда ошибки дискретизации и округления имеют один и тот же знак; в противном случае имеем кривые *C'* и *D'*.

Непосредственно из рис. 74 видим, что не всегда следует стремиться к разбиению тела на максимальное возможное число конечных элементов, так как минимальная суммарная погрешность оказывается при  $M^* < M_{\max}$  ( $M_{\max}$  — максимальное число конечных элементов, при котором еще хватает мощности используемой ЭВМ).

### 55.1. Ошибки дискретизации

Можно показать, что использование для решения задач, описываемых уравнением 2-го порядка, метода конечных элементов на базе интерполяционных полиномов степени  $p$  для описания поведения искомой функции внутри конечного элемента, приводит к относительной ошибке

$$\left(\frac{a}{l}\right)^{(p+1)-m}, \quad (55.1)$$

где  $a$  — характерный размер конечного элемента;  $l$  — то же для конструкции.

В самом деле, пусть внутри элемента искомая функция аппроксимируется полиномом  $p$ -й степени. Тогда, согласно формуле Тейлора, решение МКЭ аппроксимирует истинное решение с относительной ошибкой  $\left(\frac{a}{l}\right)^{p+1}$ . Для задач, описываемых дифференциальными уравнениями 2-го порядка, выражение для энергии включает производные 4-го порядка. Эти производные аппроксимируются уже с погрешностью  $\left(\frac{a}{l}\right)^{p+1-m}$ , и если далее учесть, что в общее выражение энергии входит квадраты произ-

\* В параграфе изложены лишь самые простейшие санкции сходимости в задачах МКЭ. Более полное изложение этих вопросов содержится в работах: Е. Р. Гиль [36]; Е. Я. А. Ольве [14]; Т. Н. Н. Риза, Р. Tong [19]; Н. Г. Гаспаридзе [15]; У. Уильямс, Н. Тикуде [18]; А. Л. Зеликов, М. З. Гиль [16]; М. З. Гиль [17]; И. Фрид. Общедоступность конечных элементов определяется, полученным из краевого сетки. — «Методы решения в конструировании». 1972, № 2, с. 152—154; И. Фрид. Ошибки аппроксимации границ и внутренних линий аппроксимации методом конечных элементов. — «Применение методов...» (Пер. с англ.), 1973, № 4, с. 290—295; В. Г. Корнилов [32].

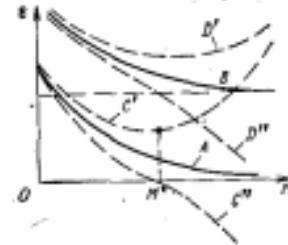


Рис. 74. Кривые, показывающие ошибки дискретизации и округления в МКЭ с ростом числа конечных элементов.

водных, то относительная ошибка в определении элементов, а следовательно, и самого решения будет равна  $\left(\frac{a}{l}\right)^{1/(p+1-\alpha)}$ .

Таким образом, путем достаточно умножения размера элемента теоретически можно было бы получать любую требуемую точность решения.

### Б6.2. Ошибки округления

Остановимся более детально на ошибках округления. Ошибки округления при решении системы линейных алгебраических уравнений

$$|\bar{K}| |\bar{q}| = |\bar{P}| \quad (55.2)$$

возникают из-за усечения или округления исходных данных для матрицы  $|\bar{K}|$  и вектора  $|\bar{P}|$ , а также из-за накопления погрешностей в ходе самого процесса решения.

При точном решении систем уравнений (55.2) число операций умножения равно  $\frac{n^2}{3}$  (где  $n$  — число уравнений системы), и очень сложно оценить эффект влияния такого большого числа округлений.

Исследования по этому вопросу показали, что для получения решения системы (55.2) с точностью до  $t$  десятичных знаков при использовании метода Гаусса необходимо элементы в матрицах  $|K|$  и  $|\bar{P}|$  задавать с точностью до  $t + r$  десятичных знаков, где

$$r = \lg_{10} \pi. \quad (55.3)$$

Заметим, что указанная граница является верхней; она соответствует самому невыгодному случаю наличия округлений на результат. При статистическом накоплении ошибок в формуле (55.3) вместо  $\pi$  можно ввести  $\sqrt{\pi}$  [120, с. 82].

$$r = \lg_{10} \sqrt{\pi}. \quad (55.4)$$

### Б6.3. Устойчивость решения системы линейных алгебраических уравнений

Одной из самых серьезных непрятностей, которая может встретиться при решении систем алгебраических уравнений, является неустойчивость решения, состоящая в том, что малые изменения элементов матриц  $|\bar{K}|$  и  $|\bar{P}|$  вызывают значительные изменения в величинах неизвестных. При этом матрица  $|\bar{K}|$  называется плохо обусловленной, а обратная матрица  $|\bar{K}|^{-1}$  — неустойчивой. Очень важно уметь оценить обусловленность матрицы.

В качестве меры обусловленности матрицы можно принять отношение ее основного определителя  $|K|$  к наибольшему его элементу  $K_{\max}^{max}$  в стекке, равной порядку определителя

$$\frac{|K|}{K_{\max}^{max}}. \quad (55.5)$$

Чем больше это отношение, тем лучше обусловлена матрица. Использование такого способа оценки обусловленности матрицы требует вычисления значения определителя системы, что в общем случае является весьма трудоемкой операцией.

Значительно удобнее оценку обусловленности матрицы  $|\bar{K}|$  производить с помощью спектрального числа обусловленности  $c_s(\bar{K})$ . Тем более, что непосредственно через  $c_s(\bar{K})$  находится относительная погрешность решения системы уравнений (55.2)

$$\delta = \frac{10s}{1+1} = 10^{-s} c_s(\bar{K}), \quad (55.6)$$

где  $s$  — число десятичных значащих цифр, которыми оперирует вычислительная машина.

Спектральное число обусловленности  $c_s(\bar{K})$  выражается отношением

$$c_s(\bar{K}) = \frac{\lambda_{\min}^k}{\lambda_{\max}^k}, \quad (55.7)$$

где  $\lambda_{\min}^k$  и  $\lambda_{\max}^k$  — соответственно минимальное и максимальное собственные числа матрицы  $|\bar{K}|$ , определяемые из уравнения

$$|\bar{K} - \lambda E| = 0. \quad (55.8)$$

Ввиду известных трудностей вычисления собственных чисел для матриц высокого порядка вместо точного определения  $c_s(\bar{K})$  по формуле (55.7) часто ограничиваются нахождением предела изменения  $c_s(\bar{K})$

$$\frac{\lambda_{\max}^k}{\lambda_{\min}^k P} \leq c_s \leq \frac{\lambda_{\max}^k P}{\lambda_{\min}^k}, \quad (55.9)$$

где  $\lambda_{\max}^k$  — максимальное собственное число матрицы  $|\bar{K}|$  по всем конечным элементам;  $\lambda_{\max}^m$ ,  $\lambda_{\min}^m$  — максимальное и минимальное собственные числа матрицы  $|\bar{K}|$  по всем конечным элементам;  $\lambda_1$  — изысканное собственное число рассматриваемой конструкции.

При использовании МКЭ в расчетах конкретных задач все величины, входящие в условие (55.9), легко определяются.

При равномерной сетке элементов спектральное число обусловленности  $c_0$  можно выразить формулой

$$c_0 \approx C \left( \frac{\pi}{T} \right)^{-2m}, \quad (55.10)$$

где  $C$  — некоторое число, зависящее от степени интерполирующих функций внутри конечного элемента.

При этом суммарная относительная ошибка определяется по формуле

$$\delta_0 = \left( \frac{\pi}{T} \right)^{2(m+1-n)} + 10^{-n} c \left( \frac{\pi}{T} \right)^{-2n}. \quad (55.11)$$

Из рассмотрения этой формулы можно сделать вывод, что задачи более высокого порядка (например, изгиб пластины,  $m=2$ ) оказываются более чувствительными к погрешности округления, чем задачи линейного порядка (плоская задача,  $m=1$ ). Далее, уменьшение размера конечного элемента приводит, с одной стороны, к уменьшению погрешности дискретизации (55.1), а с другой стороны, к возрастанию погрешности округления (55.6). Поэтому при практических расчетах следует выбрать такой размер конечных элементов, который приводил бы к допустимой погрешности округления. Получаемую при этом ошибку дискретизации можно уменьшить с помощью использования элементов с большим числом степеней свободы, для которых степень  $p$  интерполяционного полинома будет выше.

## Глава VI

### ПОНИЖЕНИЕ МЕРНОСТИ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ

Для решения многомерных краевых задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, можно воспользоваться, в частности, вариационными методами, методом сеток и методом конечных элементов, которые были изложены в предыдущих главах.

Однако в отдельных случаях может оказаться более целесообразным с помощью специальных методов понизить мерность исходной краевой задачи и вместо дифференциальных уравнений в частных производных (или соответствующего условия стационарности функционала от функции нескольких переменных) получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений (или условие стационарности функционала от функции одной переменной), описывающих уже одномерную краевую задачу.

Решение одномерных задач не вызывает особых затруднений и может быть получено с помощью методов, рассмотренных в гл. III.

Ограничим изложением лишь двух методов понижения мерности исходных краевых задач — метода Канторовича и метода Блазова.

#### § 56. МЕТОД КАНТОРОВИЧА

Этот метод, предложенный в 1933 г.<sup>1</sup> акад. Л. В. Канторовичем, представляет собой развитие метода Ритца для функционалов от функций нескольких переменных. Он состоит в следующем.

Пусть имеем вариационную задачу, которая сводится к определению, например, лекаскойстей функции  $w(x, y)$  двух переменных из условия стационарности некоторого функционала  $\mathcal{E}[w(x, y)]$ .

В отличие от метода Ритца в методе Канторовича в качестве коэффициентов разложения искомой функции  $w(x, y)$  по координатным базисным функциям берутся не известные константы, а неизвестные функции от некоторой одной переменной. Например, для двумерной области, изображенной на рис. 75,



Рис. 75. Вид двумерной области при исследовании метода Л. В. Канторовича.

функция  $w(x, y)$  представляется в форме

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{N_1} q_k(x, y) f_k(x), \quad (56.1)$$

или, в частности,

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{N_1} q_k(y) f_k(x), \quad (56.1')$$

Функции  $q_k(x, y)$  принимаются заранее так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям на контуре  $S$ , за исключением, может быть, прямых  $x=a$  и  $x=b$ .

Вместо выражения (56.1) в функционал  $\mathcal{E}[w(x, y)]$  выполнения операций интегрирования по  $y$ , приходим к задаче определения неизвестных функций:  $f_k(x)$  ( $k=1, 2, 3, \dots, N$ ) из условия стационарности уже нового упрощенного функционала

$$\mathcal{E}[f_1(x), f_2(x), \dots, f_N].$$

<sup>1</sup> Л. В. Канторович [45]. Более подробное изложение метода имеется в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [46, гл. IV, § 3].

Таким образом, краевая задача относительно функции  $w(x, y)$  двух переменных заменяется краевой задачей относительно неизвестных функций  $f_k(x)$  одной переменной.

Границные условия для функций  $f_k(x)$  вытекают из граничных условий для функции  $w(x, y)$  на сторонах контура  $x = a$  и  $x = b$ .

Решая эту последнюю одномерную краевую задачу с помощью методов, изложенных в гл. II, мы получаем значения функций  $f_k(x)$ , а следовательно, и приближенное выражение для  $w(x, y)$ .

Повним сказанное выше на частном примере.

Пример. Требуется определить с помощью метода Канторовича приближенное выражение для прогиба жесткой прямоугольной изотропной пластины, нагруженной поперечной единичной интенсивностью  $q(x, y)$ . Границные условия на кромках пластины

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x=0, x=a, w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \\ \text{при } y=0, y=b, w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{array} \right\} \quad (56.2)$$

Решение. Если воспользоваться для решения принципом возможных перемещений, то задача сводится к определению минимума следующего функционала:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = V - U = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \nabla^2 w \right)^2 + 2(1-v) \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right] dx dy - \int_0^a \int_0^b q(x, y) w(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (56.3)$$

Выберем прогиб пластины в виде

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{N_1} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (56.4)$$

При таком выборе функции прогиба мы удовлетворим всем граничным условиям пластины на кромках  $y = \text{const}$ .

Вносим выражение (56.4) в формулу (56.3) и производим интегрирование по  $y$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \frac{Db}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^{N_1} \left\{ \left[ f_k'(x) - \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2 f_k(x) \right]^2 + \right. \\ \left. + 2(1-v) \left( \frac{k\pi}{b} \right)^2 f_k'(x) f_k''(x) - (f_k'(x))^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{D} q_k(x) f_k(x) \right\} dx. \end{aligned} \quad (56.5)$$

т.е.

$$q_k(x) = \frac{2}{D} \int_0^b q(x, y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy. \quad (56.6)$$

Задача свелась к определению неизвестных функций  $f_k(x)$  в интервале  $0 < x < a$ , обеспечивающих минимум функционала  $\mathcal{E}[f_1(x), f_2(x), \dots, f_{N_1}(x)]$ .

Границные условия для функций  $f_k(x)$  легко можно определить из рассмотрения граничных условий для функций  $w(x, y)$  при  $x = \text{const}$ . Получим

$$\text{при } x=0, x=a: f_k(x) = f'_k(x) = 0. \quad (56.7)$$

Каждую из неизвестных функций  $f_k(x)$  будем искать в виде ряда

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{N_2} A_{ki} \varphi_i(x), \quad (56.8)$$

где  $\varphi_i(x)$  — система линейно независимых функций, удовлетворяющих граничным условиям типа (56.7).

Неизвестные параметры  $A_{ki}$  можно определить с помощью метода Ритца

$$\frac{\partial \mathcal{E}[f_1, f_2, \dots, f_{N_1}]}{\partial A_{ki}} = 0, \quad (56.9)$$

$$(k=1, 2, 3, \dots, N_1); \quad (i=1, 2, 3, \dots, N_2).$$

Вносим в уравнение (56.9) выражение для функционала из формулы (56.5), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров  $A_{ki}$ .

### § 57. МЕТОД ВЛАССОВА

Пусть краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными относительно функции двух переменных описывается дифференциальным уравнением

$$L^{(m)} [w(x, y)] = f(x, y) \in V \quad (57.1)$$

при граничных условиях на контуре

$$R_c [w(x, y)] = g_i(x, y) \text{ на } S. \quad (57.2)$$

Искомую функцию  $w(x, y)$  можно найти в форме (56.1) либо в форме (56.1'). При этом предполагается, что принятые выражения для функции  $w(x, y)$  удовлетворяют всем граничным усло-

<sup>1</sup> Испоганский в настоящем параграфе метод изложен использовался в работах Б. З. Владова. Математические примеры его применения в решении оболочечных конструкций можно найти в книгах Б. З. Владова [194, 251].

заям на контуре  $S$ , за исключением, может быть, прямых  $x = a$  и  $x = b$  (см. рис. 7б).

Подставляем выражение (56.1) в уравнение (57.1). Если выражение (56.1) будет решением, то должно обратиться в тождественное нуль следующее выражение:

$$L^{(2)} \left[ \sum_{k=1}^M q_k(x, y) f_k(x) \right] - f(x, y) = 0. \quad (57.3)$$

Используя свойство тождественного нуля быть ортогональным к любой системе функций, получаем условие

$$\int \left\{ L^{(2)} \left[ \sum_{k=1}^{N_1} q_k(x, y) f_k(x) \right] - f(x, y) \right\} q_i(x, y) dy = 0 \quad (57.4)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, N_1),$$

которое после выполнения всех необходимых операций интегрирования превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $f_k(x)$ . Границные условия для функций  $f_k(x)$  получаются из граничных условий (57.2).

Пример. Применим использование метода Власова на примере, рассмотренном в предыдущем параграфе.

**Решение.** Решение дифференциального уравнения изгиба пластины

$$D \nabla^2 w(x, y) - q(x, y) = 0 \quad (57.5)$$

будем искать в форме (56.4), удовлетворяющей граничным условиям на кромках  $y = \cos \varphi$ .

Для определения функций  $f_i(x)$  воспользуемся условием ортогональности (57.4), которое в рассматриваемом случае переищем так:

$$\int_y^b \left[ D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - q(x, y) \right] \sin \frac{ix\pi}{b} dy = 0 \quad (57.6)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, N_1).$$

Вписав в уравнение (57.6) выражение (56.4) для  $w(x, y)$  и выполнив интегрирование, получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций  $f_i(x)$

$$J_i^W(x) - 2 \left( \frac{ia}{b} \right)^2 f_i'(x) + \left( \frac{ia}{b} \right)^4 f_i(x) = \frac{q_i(x)}{D}, \quad (57.7)$$

где величина  $q_i(x)$  определяется по формуле (56.6).

Каждое из уравнений системы (57.7), дополненное граничными условиями

$$\text{при } x = 0, x = a: f_i(x) = f_i'(x) = 0, \quad (57.8)$$

описывает одномерную краевую задачу. Метод решения одномерных краевых задач рассмотрены в гл. III.

Построим уловить в изложенном выше методе явную обобщенность с методом Бубнова—Галеркина. Отличие состоит лишь в форме задания приближенного выражения для искомой функции нескольких переменных: в методе Бубнова—Галеркина в качестве коэффициентов при координатных функциях берутся неизвестные константы, для определения которых составляется система алгебраических уравнений, а в методе Власова роль коэффициентов уже играют неизвестные функции одной из неизвестных переменных. Эти неизвестные функции определяются из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В заключении главы укажем еще на один весьма эффективный метод понижения мерности исходных краевых задач — метод прямых<sup>2</sup>. В этом методе производные по одной из неизвестных переменных в двухмерных задачах и по двум неизвестным переменным в трехмерных задачах заменяются приближенными разностными выражениями. Использование такой процедуры и обеспечивает замену краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными краевой задачей для обыкновенного дифференциального уравнения (или системы уравнений).

Метод прямых можно рассматривать как частный случай метода сеток, если считать, что шаг сетки по одной из координат беспредельно уменьшается.

<sup>2</sup> Метод прямых был предложен в 1939 г. М. Е. Сабоджевским [109]. Его описание имеется также в работах: С. Т. Михайлова [70, гл. XI]; И. С. Баранова, Н. П. Жукова [9, гл. X]; А. П. Филиппова [121, § 10].

Автоматизация формироавания схемы уравнений НКЭ 250

Надынинская конструкция 166

Нетривиальный подход 358

Матрица жесткости кинетического звена-  
за 181

— — — геометрическая 242

— масс 257

— сил 247

Метод Балтина 349

— Бубнова—Галеркина 43

— квадратичный 29

— Вильсона 249

— Власова 269

— Годурова 116

— Канторовича 267

Метод вспомогательной 127

— конечных элементов 156

— Лейбенса 53

— пакетами квадратов 130

— пакетами Зарембина 94

— Николаева—Райфона 210

— определение собственных чисел в за-  
дачах устойчивости и колебаний 88

— перестановки 191

— поисково-документационный приближенный 207

— прогонка 105

— Райфона 186

— Редда 40

— спиралевидно-струющий 212

— сетками 132

— сил 191

— структурных элементов 260

— Трауба 52

— узловых решений 308

— Федорова 352

— шагового алгоритмов 211

— эпиграфической 249

Метод математической 17

— физическая 14

Модифицированный метод Бубнова—  
Галеркина 65

— — — Николаева—Райфона 210

— Редда 64

Монотонность геометрическая 205

— физическая 205

Формика дисперсионная 106, 263

— скрутчная 104, 264

Потенциал вращающих сил 35

Принцип взаимности переносимый 32

— — — изменений направления за-  
��ок 36

— Деркача 36

— Лагранжа 32

Принципы вариационные 32

— — — модифицированные 62, 67

— — — кинематической теории устойчивости 73

— — — смешанные 69

Программа КАСКАД 200

Использование решения 294

Формула Николаева—Ленниана 120

Фундаментальная 69

— Райфона—Холмстера 72

Эволюционные узловые узлы 201

3. Абовский И. П., Альбрехт И. П. Вариационные принципы теории устойчивости и теории оболочек. Краснодар, 1973.

2. Айролис Б. М. Заметки к ст. «Матрицы жесткости элементов в форме секторов». — «Рассматриваем тела и конструкции», 1970, № 3, с. 271.

3. Альбонц Ф. А., Мерзин Д. Е. Решение кинематической устойчивости задачи вращения краевых элементов. — «Рассматриваем тела и конструкции», 1966, № 30, с. 3—30.

4. Александров А. В. Численные решения линейных дифференциальных уравнений при задании матрицы дифференцирования. — «Труды МИНТИ», 1961, вып. III, с. 253—266.

5. Аргасор Л. С. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц. М., Стройиздат, 1968.

6. Ахмедов Н. Н. Лекции по кардианному исчислению. М., Гостехиздат, 1952.

7. Бабушкин И., Витасек Э., Пратгер М. Численные программы решения дифференциальных уравнений. (Пер. с англ.). М., Мир, 1962.

8. Бахвалов Н. С. Численные методы. М., Наука, 1973.

9. Бордиге Р. С., Жеджон Н. Н. Методы вычислений. Т. II. М., Физматлит, 1959.

10. Бордиге Р. В. Применение метода прогонки для численного решения задач строительной механики. — Изв. АН СССР, МТТ, 1967, № 2, с. 62—66.

11. Блазинки И. И., Машкин А. Л., Пановко Я. Г. Применение математики: предмет, логика, особенности подходов. Кемп. «Наука в драме», 1976.

12. Биргер И. А. Общие алгоритмы решения задач теории устойчивости и колебаний. — В сб.: Успехи механики деформированных сред. М., Наука, 1975, с. 61—73.

13. Болотин К. В. Годдингхарт И. И., Смирнов А. Ф. Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития. М., Стройиздат, 1972.

14. Бубнов И. Г. Ответ о сочинениях проф. С. П. Тимошенко, учеников проф. С. П. Тимошенко. — Сборник научно-технической литературы, СМ, 1913, том. 81, с. 13—36.

15. Бурдаков В. В., Котяков Ю. П. Решение в первоначальном методе вариаций дифференциальных уравнений задачи статистики, содержащих разрывы. — В сб.: Применение численных методов в строительной механике и обработке. Л., «Судостроение», 1976, вып. 239, с. 93—98.

16. Вурман З. И., Лукьянова Е. Т., Тимофеев М. Т. Решение токсикологических задач с использованием методов математических элементов с применением ЭВМ. Калин. Издво Калининского ун-та, 1973.

17. Вайльберт Д. В. Численные методы в теории оболочек и пластинок. —

- «Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин». Изд. «Наука», 1966, с. 205–275.
18. Вайдберг Д. В., Вайдберг Е. Д. Решение задачи пластин. Киев, «Будиздат», 1970.
19. Валитовская Н. В. Устойчивость аэродинамических пластин оболочек вращения при изгибе смесью. — Известия № 4 Всесоюзной школы по теории в частичных дифференциальных уравнениях и пластин. 1–10 октября 1974. Тбилиси. Издатель Тбилисского ун-та, 1975, с. 216–230.
20. Верзильев П. М. Решение и практическое применение метода сеток к расчету пластин. Канд. АН РСФР, № 1, 1959, с. 11, 1952.
21. Власильков В. С. Применение метода конечных элементов в первом приближении к расчету оболочек, складок, коробчатых и миссивских систем. — «Труды ЦИИМСК», 1970, вып. 19.
22. Вилльямс Л. К., Хархурин И. Я. Расчет упругих систем по методу конечных элементов. М.: Гостехиздат, 1960, вып. 1—108.
23. Блазов В. Д. Расчет на прочность неоднородных тел. — «Рациональная механика и космосфера», 1965, № 12, с. 124–132.
24. Блазов В. З. Общая теория оболочек в ее применении в технике. М.—Л.: Гостехиздат, 1949.
25. Блазов В. З. Структура начальных тонкостенных пространственных систем. М.: Гостехиздат, 1949.
26. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Изд. «Наука», 1967.
27. Вольмир А. С. Теория пластин и оболочек. М.: Физматлит, 1966.
28. Воронин И. Н. Метод Рубетса—Гагриана, это развитие и роль в практической математике. — В сб.: Успехи механики деформируемых сред. Изд. «Наука», 1975, с. 61–73.
29. Гавурин М. К. Лекции по методам вычислений. М.: Наука, 1971.
30. Галактион К. З. К вариационным методам решения задач винтовой теории пластины и оболочек. — Изд. Калининского филиала АН СССР, 1966, № 10.
31. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
32. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Физматлит, 1969.
33. Гельфанд И. И., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: Физматлит, 1961.
34. Гельфанд И. И., Локутьевский О. В. Метод кратковременных решений различных уравнений. — В кн. Годунов С. К., Рубенский В. С. Вы��ие в теории различных схем. М.: Физматлит, 1965.
35. Годунов С. К., Рубенский В. С. Введение в теорию разностных схем. Изд. Физматлит, 1962.
36. Городничий А. С. Численные реализации метода конечных элементов. — В сб.: Современные материалы по теории сооружений. Канск, «Кузбассиздат», 1978, вып. XXI, с. 31–42.
37. Гришин В. Н. Применение метода вариационного метода при решении задач методом дискретных элементов. — «Труды ЦАГИ», 1972, вып. 2381.
38. Григор Б. Б. Обобщенные вариационные принципы в методе конечных элементов. — «Рациональная механика и космосфера», 1967, № 7, с. 103–103.
39. Демидович Б. П., Марков И. А. Основы численной математики. Изд. «Наука», 1966.
40. Джигитов С. А. Алгоритм формирования векторов узловых первоначальной подструктуры в определении компоненты напряженного состояния в программах комплекса «КАСКАД-2». — В сб.: Применение числовых методов в строительной механике кораблей. Л.: «Судостроение», 1976, с. 15–18.
41. Жуковский О. К. Метод конечных элементов от изгиба до обобщенности. — Издательство СО РАН, 1970, № 6, с. 90–110.
42. Зеленкова О. Чагат И. Метод конечных элементов в теории струн и в механике сплошных сред. М.: «Наука», 1974.
43. Зинкевич О. Метод конечных элементов и гипербол. (Пер. с англ.). М.: «Мир», 1975.
44. Ильинская А. А. Пластичность. М.—Л.: Гостехиздат, 1947.
45. Канторович Л. В. Основы теории метода решения задачи о механике двойного интегрирования. — Изв. АН СССР, 1933, № 6.
46. Канторович Л. В., Курзлов В. И. Практические методы наивысшего порядка. М.: Гостехиздат, 1949.
47. Калустян С. А., Коротких Ю. Г. О применении метода последовательных приближений в стойкости метода первых параметров упругости. — В сб.: Методы решения задач упругости и пластичности. (Учен. зап. Горьковского ун-та. Сер. «Математика»), 1969, вып. 69, с. 62–66.
48. Каулер Г. Р., Линдберг Г. И., Олсон М. Д. Концепция метода пребудущей формы для расчета погонов оболочек. — «Журнал техники и машиностроения», 1970, № 8, с. 90–95.
49. Козликов В. В., Постолов В. А., Хархурин И. Я. Применение метода конечных элементов для расчета прочности судовых конструкций. — «Судостроение», 1972, № 6, с. 13–18.
50. Козлаков М. Численные методы решения дифференциальных уравнений. (Пер. с англ.). М.: ИЛ, 1963.
51. Коря Г. Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: «Наука», 1970.
52. Коржев В. В. Оценка обобщенности для СХМ метода конечных элементов. — «Труды IV Всесоюзной конференции по числовым методам решения задач теории упругости и пластичности». Новосибирск, Сибирск. отд. АН СССР, 1974, с. 13–26.
53. Корнилов М. С. Нелинейные задачи теории пластин и листовых оболочек и методы их решения. М.: «Наука», 1964.
54. Коротких Я. И., Постолов В. А., Синевер Н. Д. Структурный анализ корабля в теории упругости. Л.: «Судостроение», 1968.
55. Коротких Ю. Г., Рузаков А. И., Садирхан А. И. Аналisis методом конечных элементов задачи динамики сплошных сред. — В сб.: Метод конечных элементов в строительной механике. Горький, 1975, с. 96–107.
56. Куриат Г., Гедльберг Д. Индекс математической физики. Т. I. к 2. Изд. Гостехиздат, 1961.
57. Курдюков А. А. Взаимодействие корабля. Л.: Судостроение, 1961.
58. Курдюков А. А., Постолов В. А. Практические заготовки Гаусса для определения и разделения корней чистого уравнения квасиродственной системы. — В сб.: Структурный анализ корабля. Л.: «Судостроение», 1961, вып. 40, с. 4–14.
59. Куриат В. М., Постолов В. А. Устойчивость при вибрации дисперсионных круговых аэродинамических оболочек, задерживаемых колышевыми ребрами. — В сб.: АН СССР, МТТ, 1972, № 4, с. 123–138.
60. Ландин К. Практические методы практического анализа. М.: Физматлит, 1961.
61. Лебедев Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости. М.: Гостехиздат, 1943.
62. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.
63. Маклевед Е. Н. Математические основы цифрового моделирования вибраций в радиоэлектронных устройствах. Новосибирск, 1972, вып. 2, с. 3–9.
64. Маклевед Е. Н. Цифровое моделирование вибраций и радиовибраций. М.: «Связь», 1976.
65. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. Новосибирск, «Наука», 1973.
66. Масленников А. М. Метод взаимных элементов. — В справочнике по теории упругости (АН Новосибирского ун-та), та. XIV. Под ред. П. М. Бирюса и А. Ф. Рабина. Краснодар, 1973.
67. Меламед З. Ш. Расчет тонких оболочек с использованием конечного элемента конечной краинки. — «Труды МИИТа», М., 1969, вып. 343, с. 64–80.

88. Метод супер элементов в расчетах прочности судовых конструкций. — Судостроение, 1976, № 11, с. 6—9. Авт.: В. А. Постков, С. А. Дмитриев, Б. К. Епакин, А. А. Родников.
89. Методы расчета стержневых систем, включая к оболочкам с неоднородным ЗВМ. М., Стройиздат, 1976. Авт.: А. В. Александров, Б. И. Ландинов, Н. Н. Шашкин, В. А. Смирнов.
90. Малагас С. Г. Вероятностные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
91. Муктаров Х. Я., Галимов К. З. Нелинейная теория упругости оболочек. Казань, Татарстанец, 1967.
92. Мишанс С. А. Инженерика для аспиранта. [Конспекты курсов.] М., «Издательство Академии наук СССР», 1971.
93. Новиковский В. Теория упругости. М., «Мир», 1975.
94. Новожилов В. В. Основы гипотезной теории упругости. М., Гостехиздат, 1948.
95. Новожилов В. В. Теория упругости. Л., Судостроение, 1958.
96. Новожилов В. В. Теория твердых оболочек. Л., Судостроение, 1962.
97. Оглоблин П. И., Колтухин И. А. Обобщенные к элементам. М., МГУ, 1969.
98. Паллас О. М., Чувиковский В. С. Надежность численных расчетов в строительной механике кораблей. — «Судостроение», 1972, № 10, с. 15—17.
99. Паллас О. М. Метод динамических единичных для численного решения статических задач строительной механики. — В сб.: Прочность судов транспортного флота. [Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова.] Л., 1966, вып. 251, с. 2—3.
100. Паллас О. М. О разрешении путем варьирования ЗВМ в расчетах прочности конструируемой судового корпуса. — В сб.: Проблемы прочности судов. Под ред. В. С. Чувиковского. Л., «Судостроение», 1975, с. 151—181.
101. Рейескин В. О. Аксиомы вариационных построений теории упругости. — Проблемы количественной гидродинамики. [Сборник, посвященный 70-летию со дня рождения академика Н. И. Мусатовского.] М., АН ССР, 1961.
102. Рихтерман Р., Мортон К. Рациональные методы решения краевых задач. [Пер. с англ.] М., «Мир», 1972.
103. Родников А. А. Задачи граничных условий и полуимитационные методы прочности судовстроения в программном комплексе «АКАСЛАД-3». — В сб.: Применение численных методов в строительной механике кораблей. Л., «Судостроение», 1976, с. 27—31.
104. Родин Л. А. Расчет гидротехнических сооружений из ЭВМ. Нетто избранные элементы. М., «Энергия», 1971.
105. Родин Л. А. Основы метода конечных элементов в теории упругости. ЛИИ, 1972.
106. Родин Л. А. Структурные системы как системы конечных элементов. ЛГУ, 1976.
107. Ростовцев Д. М. Расчет столовых рядов с помощью метода перенесенной в матричный формат. ЛИИ, 1976.
108. Ростовцев Д. М. Матричный метод расчета прочности стеклопластичных корпусов судов. ЛИИ, 1974.
109. Слободянский М. Г. Способ краевого вычисления интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости. — ПММ, 1959, т. 3, вып. 1, с. 75—82.
110. Современные методы расчета сложных стальных инженерных систем. [Сборник статей.—Пер. с англ. I. Под ред. А. П. Фельна. Л., «Судостроение», 1961.
111. Стиракис Дж., Хейсаэр В., Раджан В. Оценка методов решения задач строительной механики, назначение которых связано со свойствами материалов и (или) геометрии. — «Ракетные технологии и космонавтика», 1973, № 8, с. 45—55.
112. Строительная механика корабля и теория упругости. Ч. 2. Л., «Судостроение», 1968. Авт.: А. А. Курдюмов, А. З. Локшин, Р. А. Иосифов, В. В. Колзаков.
113. Суслов В. П., Кочанов Ю. П., Святашенко В. Н. Строительная механика кораблей и основы теории упругости. Л., «Судостроение», 1972.
114. Треффер Е. Математическая теория упругости. М., Гостехиздат, 1932.
115. Угодников А. Г., Даугач М. Ч., Степанов А. В. Решение численных методов в строительной механике корабля. Л., «Судостроение», 1976, с. 6—14. Авт.: В. А. Постков, С. А. Дмитриев, Б. К. Епакин, А. А. Родников.
116. Программы прочности судов. Сб. статей под ред. В. С. Чувиковского. Л., «Судостроение», 1976.
117. Проблемы строительной механики кораблей. Сб. статей к 100-летию со дня рождения И. Г. Бубнова. Л., «Судостроение», 1978.
118. Программный комплекс «АКАСЛАД-3» для решения прочности судовых конструкций. — В сб.: Вопросы судостроения. Сер. «Математические методы программирования, эксплуатации ЭВМ». Л., «Судостроение», 1976, вып. 8, с. 78—85. Авт.: В. А. Постков, С. А. Дмитриев, В. К. Епакин, А. А. Родников.
119. Протрусевич Э. А. Вероятностные методы в структурной механике. М., Госиздат, 1948.
120. Райссжан К. Метод конечных разностей как корректный метод количественных измерений. — «Струди ЛИИ», 1972, вып. 83, с. 77—85.
121. Расчет упругих конструкций с использованием ЗВМ. [Пер. с англ.] Под ред. А. П. Фельна. Л., «Судостроение», 1974.
122. Расчет строительных конструкций с применением ЗВМ. Под ред. А. Ф. Смирнова. М., Стройиздат, 1967.
123. Резник Р. А. Решение задач строительной механики на ЭВМ. М., Стройиздат, 1971.
124. Рейескин В. О. Аксиомы вариационных построений теории упругости. — Проблемы количественной гидродинамики. [Сборник, посвященный 70-летию со дня рождения академика Н. И. Мусатовского.] М., АН ССР, 1961.
125. Рихтерман Р., Мортон К. Рациональные методы решения краевых задач. [Пер. с англ.] М., «Мир», 1972.
126. Родников А. А. Задачи граничных условий и полуимитационные методы прочности судовстроения в программном комплексе «АКАСЛАД-3». — В сб.: Применение численных методов в строительной механике кораблей. Л., «Судостроение», 1976, с. 27—31.
127. Родин Л. А. Расчет гидротехнических сооружений из ЭВМ. Нетто избранные элементы. М., «Энергия», 1971.
128. Родин Л. А. Основы метода конечных элементов в теории упругости. ЛИИ, 1972.
129. Ростовцев Д. М. Расчет столовых рядов с помощью метода перенесенной в матричный формат. ЛИИ, 1976.
130. Ростовцев Д. М. Матричный метод расчета прочности стеклопластичных корпусов судов. ЛИИ, 1974.
131. Слободянский М. Г. Способ краевого вычисления интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости. — ПММ, 1959, т. 3, вып. 1, с. 75—82.
132. Современные методы расчета сложных стальных инженерных систем. [Сборник статей.—Пер. с англ. I. Под ред. А. П. Фельна. Л., «Судостроение», 1961.
133. Стиракис Дж., Хейсаэр В., Раджан В. Оценка методов решения задач строительной механики, назначение которых связано со свойствами материалов и (или) геометрии. — «Ракетные технологии и космонавтика», 1973, № 8, с. 45—55.
134. Строительная механика корабля и теория упругости. Ч. 2. Л., «Судостроение», 1968. Авт.: А. А. Курдюмов, А. З. Локшин, Р. А. Иосифов, В. В. Колзаков.
135. Суслов В. П., Кочанов Ю. П., Святашенко В. Н. Строительная механика кораблей и основы теории упругости. Л., «Судостроение», 1972.
136. Треффер Е. Математическая теория упругости. М., Гостехиздат, 1932.
137. Угодников А. Г., Даугач М. Ч., Степанов А. В. Решение численных методов в строительной механике корабля. Л., «Судостроение», 1976, с. 6—14. Авт.: В. А. Постков, С. А. Дмитриев, Б. К. Епакин, А. А. Родников.

- има краинам задачи математики упрощены из ЗВМ. М., Высшая школа, 1970.
116. Уголников А. Г., Коротких Ю. Г. Использование метода разложения на ЭЦВМ физических величин для задач теории пластичности в оболочках. Книн, докторская диссертация, 1971.
  117. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматлит, 1963.
  118. Федоровский В. И. Об одном способе решения квазилинейных задач устойчивости деформируемых систем. — ПММ, 1963, вып. 2, с. 265—274.
  119. Федоровский В. И. Диски зеркал-блоки по спиральным материалам. М., Наука, 1969.
  120. Филин А. П. Методы в структурных системах и некоторые аспекты их использования. ЗИВИЛ, Л., Стройиздат, 1966.
  121. Филин А. П. Проблемы метода минимума потенциального действия. Исследование в механике деформируемого тела. Л., Стройиздат, 1971.
  122. Филин А. П. Современные проблемы исследования ЭЦВМ в механике твердого деформируемого тела. Л., Стройиздат, 1974.
  123. Численные решения задач статики и динамики оболочек с переменными параметрами. Краснодар, научная диссертация, 1976. Асп. Л. М. Гулагаренко, А. Т. Венделенко, Е. И. Бессидова, Н. Д. Панкратова, Т. Н. Погончук, И. Ф. Ладинник.
  124. Чухновский В. С., Палль О. М., Старо В. Б. Обработка судовых измерений. Л., Судостроение, 1966.
  125. Чухновский В. С. Вопросы установления и строительной эксплуатации кораблей. Л., Судостроение, 1971.
  126. Чухновский В. С. Системный подход при анализе прочности и проектировании корабельных конструкций. — В сб. Проблемы прочности судов. Л., Судостроение, 1975, с. 5—70.
  127. Чухновский В. С. Численные методы решения одномерных задач статической механики кораблей. Л., Судостроение, 1976.
  128. Азаги М. М., Mayeur R. G., Smith C. V. Finite Element Galerkin Method Solutions to Selected Elliptic and Parabolic Differential Equations. — «Proc. of the 3rd Conference on Matrix Methods in Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio, 1971.
  129. Araldsen P. O., Røren E. M. Q. The Finite Element Method using Super-elements. The SESAM-60 System. — «Conference on Modern Techniques of Ship Structural Analysis and Design, Univ. of California, Berkeley, Sept., 1976.
  130. Argyris J. H., Matsas G. Potential Flow Analysis by Finite Elements. — «Eng. Archiv., 1972, vol. 40, No. 1.
  131. Berechnung von Flächen- und Raumtragwerken nach der Methode der Finite Elemente. Springer-Verlag Wien—New York, 1973. Reineke V., Kredelhoff J., Lohner F., Zenisek A.
  132. Clough R. W. The Finite Element Method in Structural Mechanics. — «Glenayre Analysis, N. Y., John Wiley, 1965.
  133. Clough R. W., Johnson C. P. Artificial Element Approximation for the Analysis of Thin Shells. — «Intern. J. of Solids Struct., 1968, vol. 4, No. 1.
  134. Courant R. Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration. — «Bull. Amer. Math. Soc., 1943, vol. 49, No. 1, p. 1—23.
  135. Fenner R. T. Finite Element Methods for Engineers. London, The Macmillan Press Ltd., 1975.
  136. Fried I. Discretization and Roundoff Errors in the Finite Analysis of Elliptic Boundary Value Problems and Eigenvalue Problems. Ph. D. Thesis, MIT, Cambridge, May, 1971.
  137. Fuchs G. V., Schrem E. ASKA — A Computer System for Structural Engineers. — «Proc. of the ISD/ISCC Symposium on Finite Element Techniques, Stuttgart, June, 1969.
  138. Gallagher R. H., Yamada Y., Oden J. T. (Eds.). Recent Advances in Matrix Methods of Design. — Univ. of Alabama Press, Huntsville, Alabama, 1971.

139. Gallagher R. H. Finite Element Analysis: Fundamentals. New Jersey, Prentice-Hall, 1973.
140. Grallion P. E., Strome D. R. Analysis of Axisymmetrical Shells by the Direct Stiffness Method. — «J. Am. Inst. Assoc. and Assemb., 1963, vol. 3, No. 1.
141. Green B. E. Generalized variational Principles in the Finite Element Method. — «AIAA Journals, 1969, No. 7.
142. Holand J., Bell K. (Eds.). Finite Element Methods in Stress Analysis. — Tapir-Forlag, Norway, 1970.
143. Hoerner H. H. The Finite Element Method for Engineers. N. Y., John Wiley, 1975.
144. Karafin K. K., Hart B. I. Stability of Plates Using the Finite Element Method. — «J. Eng. Mech. Div. ASCE, 1966, vol. 92, No. 4.
145. MacNeal R. H. (Ed.). The NASTRAN Theoretical Manual. NASA SP-224, Sept., 1970.
146. Melosh R. J. A Flat Triangular Shell Element Stiffness Matrix. — «Proc. Conf. Matrix Struct. Mech., Ohio, 1965.
147. Pauling J. R. Application of Finite Element Computations to some Ship Structural Problems. — «Proc. ISD/ISCC Symp. on Finite Element Techniques, University of Stuttgart, Germany, June, 1969.
148. Oden J. T., Clough R. W., Yamamoto Y. (Eds.). Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design. — «The University of Alabama in Huntsville, Alabama, 1972.
149. Oliveira E. R. A. Theoretical Foundations of the Finite Element Method. — «Int. J. Solids Struct., 1968, vol. 4, p. 929—932.
150. Pian T. H., Tong P. The Convergence of Finite Element Method in Solving Linear Elastic Problems. — «Int. J. Solids Struct., 1967, vol. 3, p. 805—819.
151. Poslunov V. A., Razkin J. N. About one new Method of Ship Strength estimation. — «Reports of Fifth International Ship Structural Congress, Hamburg, 1973.
152. Przemieniecki J. S. Theory of Matrix Structural Analysis. N. Y., McGraw-Hill Book Company, 1968.
153. Reinhardt H. Convergence and Numerical Accuracy with special Reference to Plate Bending. — «Finite Element Method in Struct. Analysis», (Eds.) by J. Holand and K. Bell, Norway, 1970.
154. Ritz W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der Math. Physik. — «Journal F. d. reine u. ang. Maths., 1900, Bd. 123.
155. Reissmann Ch. Das Bendingverfahren für finite Elementbereiche, Teil 1. — «Schriftenreihe Bending», Rostock, 1975, H. 17; 1976, H. 24.
156. Røren E. M. Q. Impact of Finite Element Techniques on Practical Design of Ship Structures. — «Proc. ISD/ISCC Symp. on Finite Element Techniques, Univ. of Stuttgart, Germany, 1969.
157. Sze B. A., Lee G. C. Derivation of the Stiffness Matrix for Plates by Galerkin's Method. — «Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., 1969, vol. 95, No. EM 3.
158. Stiffness and Deflection analysis of Complex Structures. — «Aero. Sci. 23, 1956, p. 805—823. Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., Stapp L. J.
159. Yamamoto Y., Yukuda A. Note on the Convergence of Finite Element Solutions. — «Int. J. Numer. Methods Eng., 1971, vol. 3.
160. Washizu K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity. N. Y., Pergamon, 1975.
161. Whittemore J. (Ed.). The Mathematics of Finite Element and Applications. N. Y., Academic Press, 1973.
162. Zenisek A., Zlámal M. Convergence of a Finite Element Procedure for solving Boundary Value Problems of the Fourth Order. — «Int. J. Numer. Methods Eng., 1976, No. 2.
163. Zlámal M. On the Finite Element Method. — «Mathematics», 1968, No. 12, p. 394—409.

**Валерий Александрович Постнов**

**ЧИСЛЕННЫЕ  
МЕТОДЫ  
РАСЧЕТА  
СУДОВЫХ  
КОНСТРУКЦИЙ**

**Редактор Н. Г. Савченко**

**Технический редактор А. Н. Канакин**

**Художественный редактор В. Т. Денисов**

**Корректоры Л. Г. Ткачукович и А. В. Конькин**

**Художник Б. Н. Остапенко**

**ИБ № 297**

**Сдано в набор 15 февраля 1977 г. № 18734.**

**Подписано в печать 18 мая 1977 г.**

**Формат 59х84/16. Печать офсетная М. З.**

**Бумага офсетная ГОСТ 17077-79. Учебно-научные листы 90/8.**

**Издательство РИ 7337-79.**

**Тираж 2000 экз. Заказ № 1. Цена 91 коп.**

**Издательство «Советиздаттехника».**

**191090, Ленинград, пр. Гражданской, 8.**

**Литография «Литография № 6. Советиздаттехника»  
г. Ленинград. Издательство Наука. Министерство СССР  
по делам культуры. Полиграфия в издательстве  
«Советиздат», Ленинград. С-144, ул. Малая Сергиевка, 18.**