Martin の公理からの Lebesgue 可測性に関する帰結

Zero Sharp

2022 年 1 月 10 日

概要

Martin の公理を仮定すると, 連続体濃度未満の個数の零集合の族の和集合はまた零集合となるので, それのメモ.

記法を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} m(E) &= E \subset \mathbf{R}^d \text{ の Lebesgue 測度.} && (1)\\ \mathcal{B} &= \text{両端点が有理数の開直方体の集合} && (2)\\ &= \left\{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d) \subset \mathbf{R}^d \;\middle|\; a_i < b_i \text{ for } i = 1, \ldots, d\right\} && (3)\\ \mathcal{C} &= \mathcal{B} \text{ の有限個の要素の和集合となっている集合の族} && (4) \end{aligned}$$

$\mathcal{B}$ は $\mathbf{R}$ の可算な基底となることに注意する.

定義 1. 次の言明を $\mathsf{MA}(\kappa)$ と書く: $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ が空でない c.c.c. をもつ半順序であって, $\mathcal{D}$ が $\mathbb{P}$ の高々 κ 個の稠密部分集合であるとすると, $\mathbb{P}$ のフィルター G であって条件 $\forall D \in \mathcal{D}\ G \cap D \neq \emptyset$ をみたすものが存在する. Martin の公理 MA とは, 言明 $\forall \kappa < 2^{\aleph_0}\ \mathsf{MA}(\kappa)$ のことである.

$\mathsf{MA}(\aleph_0)$ は成立し $\mathsf{MA}(2^{\aleph_0})$ は成立しないことは定理として証明できるので, MA は明確な矛盾を含まないギリギリの公理である. また, 連続体仮説 CH が成立しているときは MA は明確に成り立つので, MA が意味をなすのは CH が成立しないことを仮定しているときである. 大雑把にいうと, MA は $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$ を満たす基数 κ がある意味で $\aleph_0$ と同じ振る舞いをすることを主張する公理である. $\mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC} + \mathsf{MA} + \neg\mathsf{CH})$ が知られているため, MA からの帰結は ZFC と無矛盾となる.

定理 2. $\mathrm{MA}(\kappa)$ が成立していると仮定する. κ 未満の順序数 α に対して, M_α を $\mathbf{R}^d$ の部分集合で Lebesgue 測度がゼロであるようなものとする. このとき, $\bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ は Lebesgue 可測でその測度はゼロである.

Proof. $\epsilon > 0$ を任意に固定する. 開集合 U であって, $m(U) \leq \epsilon$ かつ各 M_α に対して $U \supset M_\alpha$ を満たすものを見つければ良い. 半順序 $\mathbb{P}$ を

$$\mathbb{P} = \{p \subset \mathbf{R} \mid p \text{ は開集合} \wedge m(p) < \epsilon\}$$

とし, 順序は $p \supset q \Leftrightarrow p \leq q$ とする.

G を $\mathbb{P}$ のフィルターとする. このとき, $m\left(\bigcup G\right) \leq \epsilon$ となることを示す. $p, q \in G$ とすると, 共通の拡大 $r \in G$ が存在する. また, $r \leq p \cup q$ なので, $p \cup q \in G$, すなわち $m(p \cup q) < \epsilon$ となる. 帰納法によって $p_1, \ldots, p_n \in G$ であれば $m(p_1 \cup \cdots \cup p_n) < \epsilon$ もわかる. また, G の任意の可算部分集合 A に対して $m\left(\bigcup A\right) \leq \epsilon$ となることもわかる. したがって, G のある可算部分集合 A に対して $\bigcup A = \bigcup G$ となることを示せば目的を達成したことになるので, それを示す. $A = G \cap \mathcal{B}$ とする. $\bigcup A \subset \bigcup G$ は明らかなので逆向きの包含を示す. $p \in G$, $x \in p$ をそれぞれ任意にとる. このとき, ある $q \in \mathcal{B}$ が存在して $x \in q$ かつ $q \subset p$ となり, G がフィルターであることから $q \in G$ となる. したがって, 任意の $x \in \bigcup G$ に対して, ある $q \in G \cap \mathcal{B}$ が存在して $x \in q$ となることが示されたので, $\bigcup A \supset \bigcup G$ となる.

$\mathbb{P}$ が c.c.c. を満たすことを背理法で示す. $\{p_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ が $\mathbb{P}$ の反鎖であるとする. 各々の p_α に対して $m(p_\alpha) < \epsilon$ なので, ある $\delta > 0$ が存在して, $X = \{\alpha < \kappa \mid m(p_\alpha) \leq \epsilon - 3\delta\}$ が不可算となる. このとき, 補題 3 から各々の $\alpha \in X$ に対して, ある $C_\alpha \in \mathcal{C}$ が存在して $m(C_\alpha \Delta p_\alpha) < \delta$ となる. $\alpha, \beta \in X$ かつ $\alpha \neq \beta$ であれば $p_\alpha \perp p_\beta$ なので $m(p_\alpha \cup p_\beta) \geq \epsilon$ となる. 一方で $m(p_\alpha \cap p_\beta) \leq \epsilon - 3\delta$ なので $m(p_\alpha \Delta p_\beta) = m(p_\alpha \cup p_\beta) - m(p_\alpha \cap p_\beta) \geq 3\delta$ となる.

$m(C_\alpha \Delta p_\alpha) \leq \delta$ かつ $m(C_\beta \Delta p_\beta) \leq \delta$ より $m(C_\alpha \Delta C_\beta) \geq \delta$ となり，したがって $C_\alpha \neq C_\beta$ となる．(説明 4 参照.) これは $\mathcal{C}$ が可算集合であることに矛盾．

$\alpha < \kappa$ に対し，$D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} \mid p \supset M_\alpha\}$ とする．D_α が稠密であることを示す．$p \in \mathbb{P}$ とする．M_α は零集合なので，ある開集合 $U \supset M_\alpha$ が存在して $m(U) < \epsilon - m(p)$ となる．このとき，$m(p \cup U) \leq m(p) + m(U) < m(p) + \epsilon - m(p) = \epsilon$ となる．よって $p \cup U \in D_\alpha$ かつ $p \cup U \leq p$ なので D_α は稠密である．

$\mathsf{MA}(\kappa)$ を仮定しているので，各 D_α と交わるフィルター G が存在する．このとき，各 $\alpha < \kappa$ に対して $M_\alpha \subset \bigcup G$ であり $m\left(\bigcup G\right) \leq \epsilon$ となる． □

系 3. Martin の公理を仮定すると，連続体濃度未満の個数の零集合の族の和集合はまた零集合となる．すなわち，$\mathsf{Con(ZFC)} \to \mathsf{Con(ZFC+}$ 連続体濃度未満の個数の零集合の族の和集合はまた零集合$)$.

補題 4. $E \subset \mathbf{R}^d$ を有限な値の Lebesgue 可測集合とする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して $C \in \mathcal{C}$ が存在して $m(C \Delta E) \leq \epsilon$ となる．

Proof. $A = m(E)$ とおく．ある $\mathcal{B}$ の可算個の列 $\{B_n\}$ が存在して $\bigcup_{n=1}^\infty B_n \supset E$ かつ $\sum_{n=1}^\infty |B_n| = A$ となるときは明らかなのでそうでないときを考える．

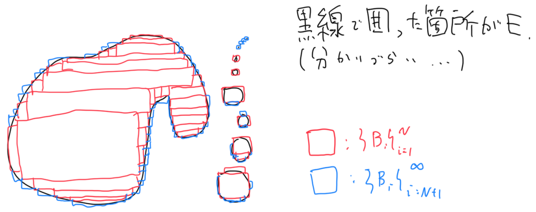
$\epsilon > 0$ とする．E は Lebesgue 可測なので，ある $\mathcal{B}$ の可算個の列 $\{B_n\}$ が存在して $\bigcup_{n=1}^\infty B_n \supset E$ かつ $\sum_{n=1}^\infty |B_n| = A + \dfrac{2}{3}\epsilon$ となる．また，N を十分大きく取れば $A + \dfrac{1}{3}\epsilon < \sum_{n=1}^N |B_n|$ となる．$C = \bigcup_{n=1}^N B_n$ とする．このとき，

$$m(C \Delta E) = m(C \setminus E) + m(E \setminus C)$$

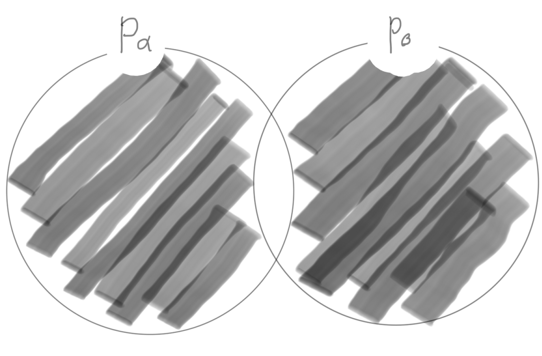
ここで，$C \setminus E$ とは C の中から E からはみ出している部分なので，高々 $\dfrac{2}{3}\epsilon$ である．また，$E \setminus C$ とは C で覆えていない E の部分なので，高々 $\bigcup_{n=N+1}^\infty |B_n| \leq \dfrac{2}{3}\epsilon - \dfrac{1}{3}\epsilon = \dfrac{1}{3}\epsilon$ となる．よって

$$m(C \Delta E) = m(C \setminus E) + m(E \setminus C) \leq \frac{2}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon = \epsilon$$

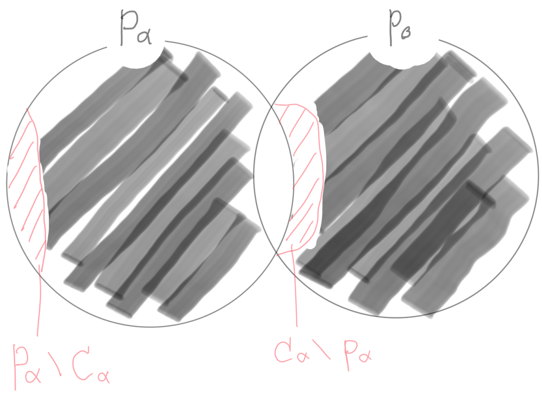
となる． □



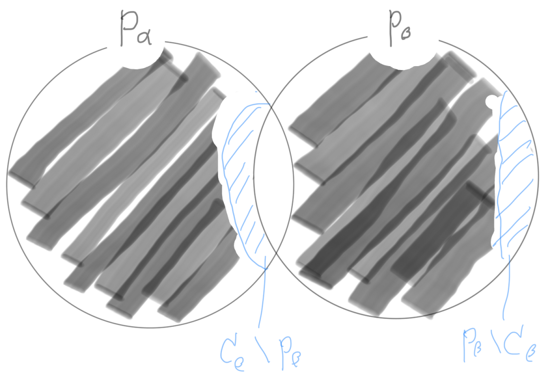
説明 5. $m(C_\alpha \Delta p_\alpha) \leq \delta$ なので p_α と C_α はほぼ同じで，$m(C_\beta \Delta p_\beta) \leq \delta$ なので p_β と C_β もほぼ同じと言える．また，$m(p_\alpha \Delta p_\beta) \geq 3\delta$ ということも分かっている．そこで，下図の p_α と p_β に関するベン図から出発して p_α を C_α に，p_β を C_β に修正することによって C_α と C_β のベン図を得るときに，どういう修正の仕方をすれば $m(C_\alpha \Delta C_\beta)$ の値がミニマムになる，つまり $p_\alpha \Delta p_\beta$ の領域を削りとれるかを考える．



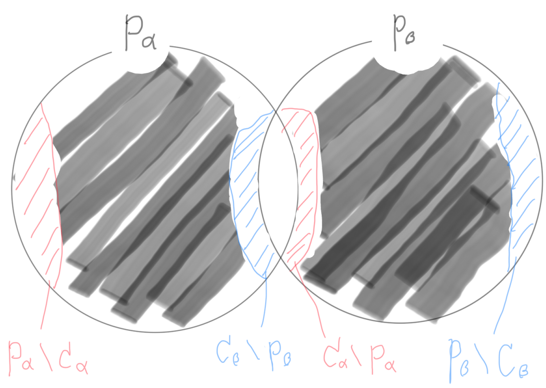
まず p_α を C_α に修正すること，つまり，p_α に $C_\alpha \setminus p_\alpha$ を付け加え，p_α から $p_\alpha \setminus C_\alpha$ を取り除くことを考える．$p_\alpha \Delta p_\beta$ の領域をなるべく削ろうと思ったら，図のように $C_\alpha \setminus p_\alpha$ をそれが $p_\beta \setminus p_\alpha$ の部分集合となるように付け加え，$p_\alpha \setminus C_\alpha$ をそれが $p_\alpha \setminus p_\beta$ の部分集合となるように取り除けば良い．



同様に，p_β を C_β に修正するときも図のようにすれば良い．



したがって，$m(C_\alpha \Delta C_\beta)$ の値がミニマムになるような修正の仕方は図のように $C_\alpha \setminus p_\alpha$ を取り除き，$p_\alpha \setminus C_\alpha$ を付け加え，$C_\beta \setminus p_\beta$ を取り除き，$p_\beta \setminus C_\beta$ を付け加えれば良い．



以上より

$$
\begin{aligned}
m(C_\alpha \Delta C_\beta) &\geq m(p_\alpha \Delta p_\beta) - m(C_\alpha \setminus p_\alpha) - m(p_\alpha \setminus C_\alpha) \\
&\quad - m(C_\beta \setminus p_\beta) - m(p_\beta \setminus C_\beta) \\
&= m(p_\alpha \Delta p_\beta) - m(C_\alpha \Delta p_\alpha) - m(C_\beta \Delta p_\beta) \\
&\geq 3\delta - \delta - \delta \\
&= \delta
\end{aligned}
$$