交渉集合

Zero Sharp

2021 年 6 月 17 日

概要

協力ゲーム理論における交渉集合についてのメモ.

1 交渉集合を定義する

$$\mathcal{T}_{kl}(N) = \mathcal{T}_{kl} = \{S \subseteq N \setminus \{l\} \mid k \in S\}$$

定義 1.1. (N, v) を TU ゲーム, $x \in X(N, v)$, $k, l \in N$ かつ $k \neq l$ とする. x における k の l に対する**異議 (objection)** とは, 組 (P, y) であって以下の条件を満たすものとする.

$$P \in \mathcal{T}_{kl} \text{ かつ } y \in \mathbf{R}^P \tag{1}$$
$$\text{任意の } i \in P \text{ に対して } y_i \geq x_i \text{ かつ } y_k > x_k \tag{2}$$
$$y(P) \leq v(P) \tag{3}$$

もし $P \ni k$ かつ $P \not\ni l$ なる提携 P と, P で実行可能かつ利得ベクトル $y \in \mathbf{R}^P$ であって, P の各々のメンバーは y が x に比べて損はしないかつ k は得をするというものがあれば, k は l に対して x から抜けるという脅しができる. それが k の l に対する異議 (P, y) である.

定義 1.2. (P, y) を x における k の l に対する異議とする. (P, y) に対する**逆異議 (counterbjection)** とは, 組 (Q, z) であって以下の条件を満たすものとする.

$$Q \in \mathcal{T}_{lk} \text{ かつ } z \in \mathbf{R}^Q \tag{4}$$
$$\text{任意の } i \in Q \text{ に対して } z_i \geq x_i \tag{5}$$
$$\text{任意の } i \in P \cap Q \text{ に対して } z_i \geq y_i \tag{6}$$
$$z(Q) \leq v(Q) \tag{7}$$

k が l に対して異議 (P, y) を唱えたとする. このとき, 上記のような組 (Q, z) を提示できれば, l を除いた P のメンバーは (P, y) によって x から抜ける動機はなくなる.

定義 1.3. (N, v) を TU ゲームとする. 利得ベクトル $x \in X(N, v)$ が**安定 (stable)** であるとは, x における各々の異議に対して逆意義が存在することをいう. **準交渉集合 (prebargaining set)**$\mathcal{PM}(N, v)$ とは, $X(N, v)$ の安定な要素の集合とする. また, **交渉集合 (bargaining set)**$\mathcal{M}(N, v)$ をつぎで定義する.

$$\mathcal{M}(N, v) = I(N, v) \cap \mathcal{PM}(N, v)$$

2 交渉集合の基本的な性質

$x \in \mathcal{C}(N, v)$ とする. このとき, 任意の $k \in N$ は異議を持たない, すなわち

$$\mathcal{C}(N, V) \subseteq \mathcal{PM}(N, v)$$

である．

例 2.1. $N=\{1,2,3,4,5,6\}$ とし，つぎのゲーム (N,v) を考える．

$$v(S)=\begin{cases}3 & S=N\\ 2 & |S\cap\{1,2,3\}|=1 \text{ かつ } |S\cap\{4,5,6\}|=2\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

$(2/3,2/3,2/3,1/3,1/3,1/3)\in\mathcal{C}(N,v)$ なので $\mathcal{C}(N,v)\neq\emptyset$ である．また，$x=(1,1,1,0,0,0)\in X(N,v)\setminus\mathcal{C}(N,v)$ であり，$x\in\mathcal{PM}(N,v)$ である．すなわち，$\mathcal{C}(N,v)\neq\emptyset$ であったとしても，$\mathcal{PM}(N,v)$ は $\mathcal{C}(N,v)$ より真に大きくなりうる．

ここで，$x\in\mathcal{PM}(N,v)$ というのはつぎのように検証できる: 異議 (P,y) における P の候補としては $|P\cap\{1,2,3\}|=1$ かつ $|P\cap\{4,5,6\}|=2$ を満たすものに限られる．ここでは $P=\{1,4,5\}$ とする．(3) をみたすベクトル $y\in\mathbf{R}^P$ は $y=(1+t_1,t_4,t_5)$ の形になる．ここで，$t_1,t_4,t_5\geq 0$ かつ $t_1+t_4+t_5=1$ である．このとき，各々の k,l の組に対して以下のように逆異議が取れる．

$$\begin{cases}Q=\{2,4,5\}, z=(1,t_4,t_5) & k=1,l=2\\ Q=\{2,4,6\}, z=(1,t_4,0) & k=1,l=6\\ Q=\{2,5,6\}, z=(1,t_5,0) & k=4,l=2\\ Q=\{2,5,6\}, z=(1,t_5,0) & k=4,l=6\end{cases}$$