Kunen Excercise III.1.13

Zero Sharp

2022 年 1 月 10 日

概要

Set Theory (Kunen) Excercise III.1.13 の解答を与えます.
記法は本文参照.

定理 1. $\mathfrak{b}$ is regular and $\mathrm{cf}(\mathfrak{d}) \geq \mathfrak{b}$.

Proof. $\mathcal{B} \subset \omega^\omega$ が unbounded family となる最も小さいサイズのものとする. $\kappa = \mathrm{cf}(\mathfrak{b})$ とし, 各 $\alpha < \kappa$ に対して $|B_\alpha| < \mathfrak{b}$ となる B_α を用いて $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha<\kappa} B_\alpha$ と表せられているとする. $|B_\alpha| < \mathfrak{b}$ であることと $\mathfrak{b}$ の最小性から, 各 α に対してある $g \in \omega^\omega$ が存在して任意の $f \in B_\alpha$ に対して $f \not\leq^* g$ となる. そのような g の中から g_α を一つ選ぶ. すると, $G = \{g_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ は unbounded family となる. ($\mathcal{B}$ は unbounded family なので, 任意の $g \in \omega^\omega$ に対して, ある $f \in \mathcal{B}$ が存在して $f \leq^* g$ となる. ここで, そのような $f \in \mathcal{B}$ は, ある $\alpha < \kappa$ に対して $f \in B_\alpha$ となる. このとき, $f \leq^* g_\alpha$ なので, $\leq^*$ の推移性から $g_\alpha \not\leq^* g$ となる.) ここで, $\kappa < \mathfrak{b}$ を仮定すると, $|G| < \mathfrak{b}$ となり $\mathfrak{b}$ の最小性に矛盾する.

$\mathrm{cf}(\mathfrak{d}) \geq \mathfrak{b}$ も同様である. $\kappa = \mathrm{cf}(\mathfrak{d})$ として同じように G を取れば, G は dominating family となる. $\square$