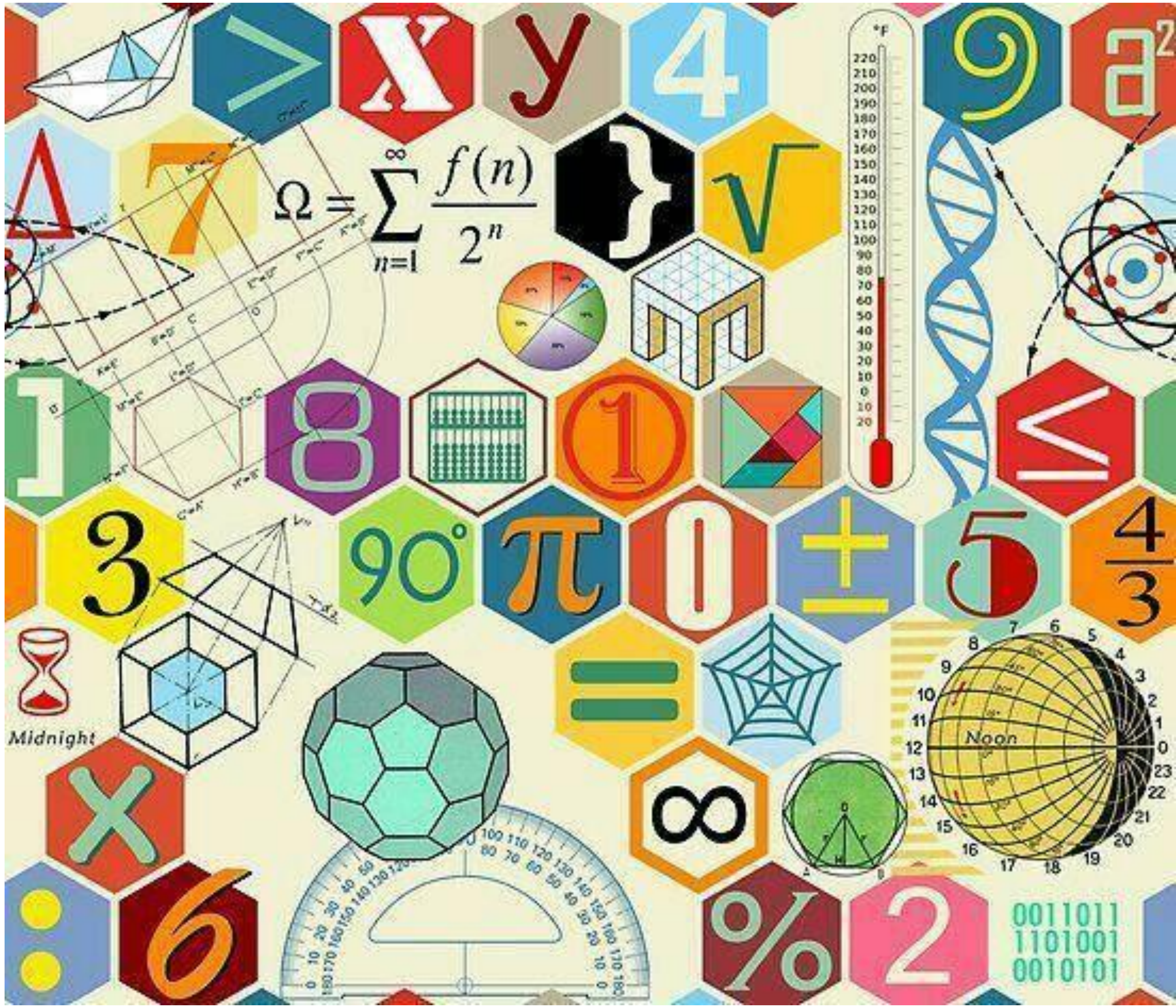
UNESA
Universitas Negeri Surabaya

S1 SAINS DATA

Matematika Diskrit

Himpunan



Oleh
Pengampu Mata Kuliah
Matematika Diskrit

Outline

1. Himpunan
2. Relasi
3. Fungsi

Himpunan

Definisi

- **Himpunan (set):** Kumpulan objek (unik) yang tidak memperhatikan urutan anggota.
- **Elemen atau anggota:** Objek di dalam himpunan.

- Notasi $a \in A$
  - a adalah elemen dari himpunan A
- Notasi $a \notin A$
  - a bukan elemen dari himpunan A

Penyajian Himpunan

Metode Roster (dengan daftar)

- Himpunan semua huruf vokal
  - $V = \{a, e, i, o, u\}$
- Himpunan bilangan ganjil positif kurang dari 10
  - $O = \{1,3,5,7,9\}$
- Himpunan billangan bulat kurang dari 50
  - $Q = \{\dots, -3, -2, -1,0,1,2, \dots, 49\}$
  - Tanda ellipsis “…” digunakan jika pola dari elemen-elemen sudah jelas

Penyajian Himpunan

Notasi Set Builder

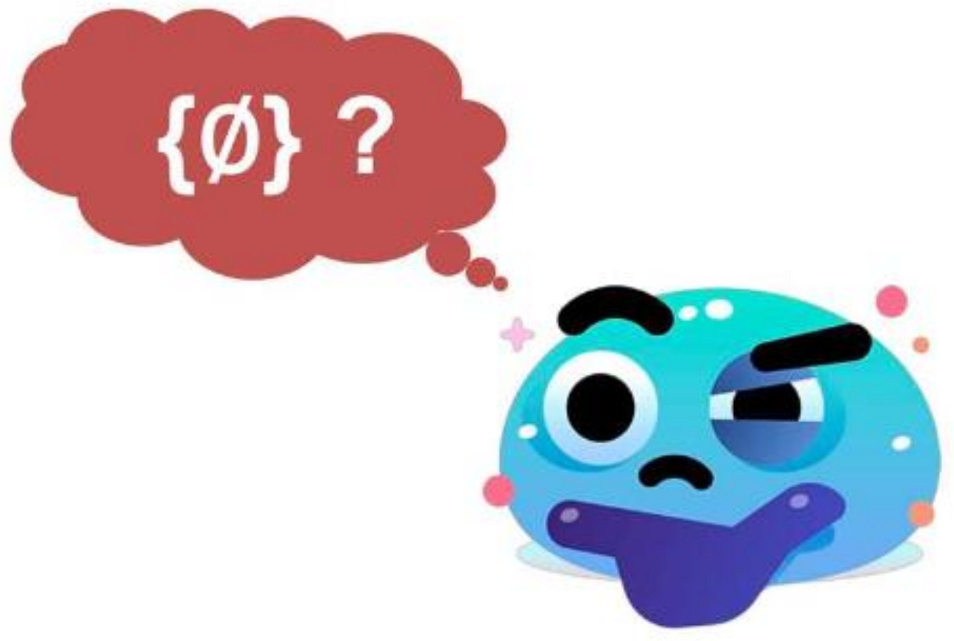
- Menyatakan **kriteria** yang harus dipenuhhi setiap anggota himpunan
  - Contoh: $O = \{x | x \text{ adalah bilangan bulat ganjil positif kurang dari } 10\}$
- Menggunakan predikat: $H = \{x | P(x)\}$
  - Contoh: $S = \{x | Prime(x)\}$

Himpunan Bilangan

- $\mathbb{N}$ = Natural numbers
- $\mathbb{Z}$ = Integers
- $\mathbb{Z}^+$ = Positive integers
- $\mathbb{R}$ = Real numbers
- $\mathbb{R}^+$ = Positive real numbers
- $\mathbb{C}$ = Complex numbers
- $\mathbb{Q}$ = Rational number

Himpunan Kosong

- **Himpunan kosong (empty set):** sebuah himpunan yang tidak mempunyai elemen.
- Sebuah himpunan kosong dinyatakan dengan ∅ atau {}.



Kesamaan Himpunan

S1 SAINS DATA

- Himpunan A dan B sama jika dan hanya jika mereka mempunyai elemen yang sama.

A = B jika dan hanya jika $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

- Contoh:
  - Diketahui $A = \{1,2,3\}, B = \{1,3,2\}, C = \{1,1,3,2,3\}, D = \{1,2,4\}$.
    $A = B = C$, tapi $A \neq D$

Himpunan Bagian

S1 SAINS DATA

- Notasi: $A \subseteq B$
- Definisi:

$$\boxed{A \subseteq B \text{ } jika\ dan\ hanya\ jika\ \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)}$$

- Contoh:
  - $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$
  - $S \subseteq S$ (sebuah himpunan S adalah himpunan bagian dari dirinya sendiri)
  - $\emptyset \subseteq S$ (Himpunan kosong adalah himpunan bagian dari himpunan S)
  - $\{1,2,3\} \nsubseteq \{1,3,4,5\}$
  - Himpunan bilangan bulat ganjil positif ⊆ himpunan bilangan bulat positif

  - Apakah $0 \subseteq \emptyset$?
  - Apakah $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Teorema

S1 SAINS DATA

- Untuk sebarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:
  a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri ($A \subseteq A$).
  b) Himpunan kosong adalah himpunan bagian dari A ($\emptyset \subseteq A$).
  c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

Himpunan Bagian Sejati (Proper Subset)

S1 SAINS DATA

- **Notasi:** $A \subset B$
- **Definisi:**
  Himpunan A merupakan himpunan bagian sejati dari B jika dan hanya jika A adalah himpunan bagian dari B, tetapi $A \neq B$.

$$A \subset B \textit{ jika dan hanya jika } \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$

"ada sebuah elemen x di B yang bukan elemen himpunan A"

- Contoh:
  - $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$
  - $\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$
  - $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$
  - $\{1,2,3\} \not\subset \{1,2,3\}$

Kardinalitas Himpunan

Himpunan Berhingga (Finite Set)

- Misal S adalah sebuah himpunan:
  - Jika ada tepat n elemen berbeda di S, di mana n adalah bilangan bulat tak negative, maka himpunan S berhingga (finite). Selain itu, maka disebut himpunan tak berhingga (infinite set).
  - n adalah kardinalitas dari himpunan S, dinotasikan dengan |S|.

- Contoh:
  - $A = \{m \in N | m < 10 \; dan \; m \; ganjil\}. |A| = 5.$
  - $B = \{n | n \; adalah \; huruf \; alfabet\}. |B| = 26.$
  - $|\emptyset| = 0$
  - $|\{\emptyset\}| = 1$
  - $\left|\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\right| = \cdots$
  - $\left|\left\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\right\}\right| = \cdots$

Himpunan Kuasa

- Power set dari himpunan S, $\mathcal{P}(S)$ merupakan himpunan yang anggotanya adalah semua himpunan bagian dari S.
- Contoh
  - $\mathcal{P}(\{0,1,2\}) = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$
  - $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
  - $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

- Teorema:
  - Jika himpunan S mempunyai n elemen, anggota $\mathcal{P}(S)$ mempunyai sebanyak 2^n elemen, atau $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$

Truth Sets of Quantifiers

- Diberikan predikat P dan domain D, truth sset dari P adalah himpunan elemen di domain yang membuat P(x) bernilai benar.

$$\{x \in D | P(x)\}$$

- Contoh:
  - $P(x)$: "|x|=1", domain x adalah bilangan bulat
  - Truth set dari P(x) adalah {-1,1}

  - Tentukan truth set dari Q(x) dan R(x), Dimana domain x adalah bilangan bulat dan Q(x):"$x^2 = 2$" dan R(x):"|x|=x"

Gabungan (Union)

- Definisi
  - Gabungan dari himpunan A dan B, dinyatakan dengan $A \cup B$, adalah sebuah himpunan yang elemnnya merupakan anggota dari A atau B, atau keduanya.

$$\boxed{A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}}$$

- Contoh:
  - $\{1,2,3\} \cup \{3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$

Irisan (Intersection)

- Definisi
  - Irisan dari himpunan A dan B, dinyatakan dengan $A \cap B$, adalah sebuah himpunan yang elemnnya merupakan anggota dari A dan B.

$$\boxed{A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}}$$

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (disjoint) jika irisannya adalah himpunan kosong, $A \cap B = \emptyset$.

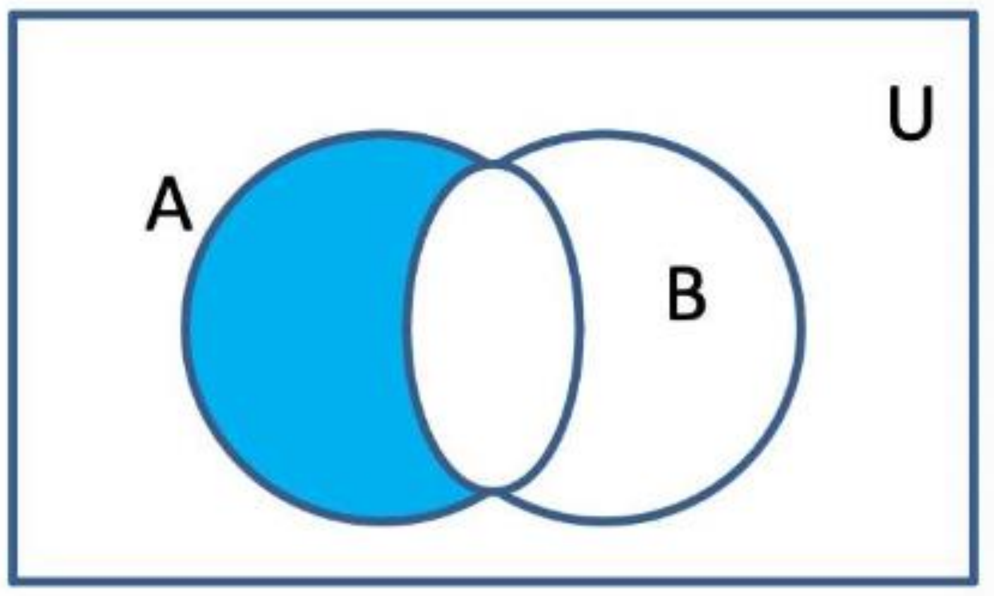
- Contoh:
  - $\{1,3,5\} \cap \{1,2,3\} = \{1,3\}$
  - $\{1,3\}$ dan $\{2,4\}$ disjoint karena $\{1,3\} \cap \{2,4\} = \emptyset$

Selisi (Difference)

- Definisi
  - Selisih/difference dari himpunan A dan B, dinyatakan dengan $A - B$, adalah sebuah himpunan yang elemnnya merupakan anggota dari A, tetapi bukan anggota B.

$$\boxed{A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}}$$

- Contoh:
  - $\{1,3,5\} - \{1,2,3\} = \{5\}$
  - $\{1,2,3\} - \{1,3,5\} = \cdots$

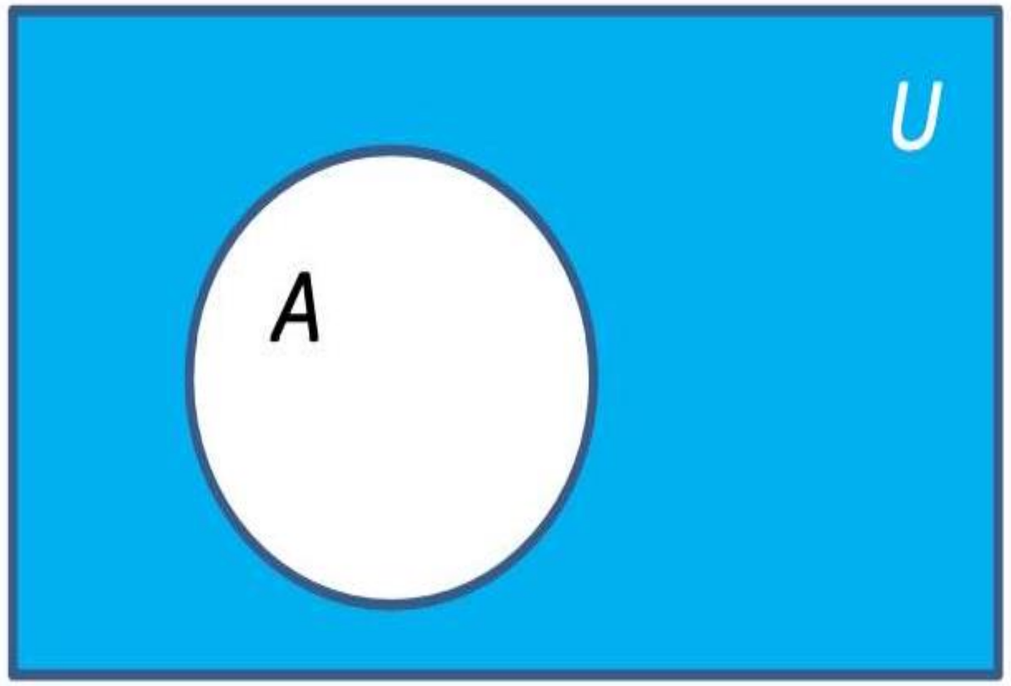


Komplemen (Complemen)

- Definisi:
  - komplemen dari A relatif terhadap U, dinyatakan dengan $\bar{\boldsymbol{A}}$ dan $\boldsymbol{A^C}$, adalah himpunan yang elemennya berasal dari himpunan universal, tetapi bukan anggota A.

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{U} - \boldsymbol{A}$$
$$\bar{\boldsymbol{A}} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}\}$$

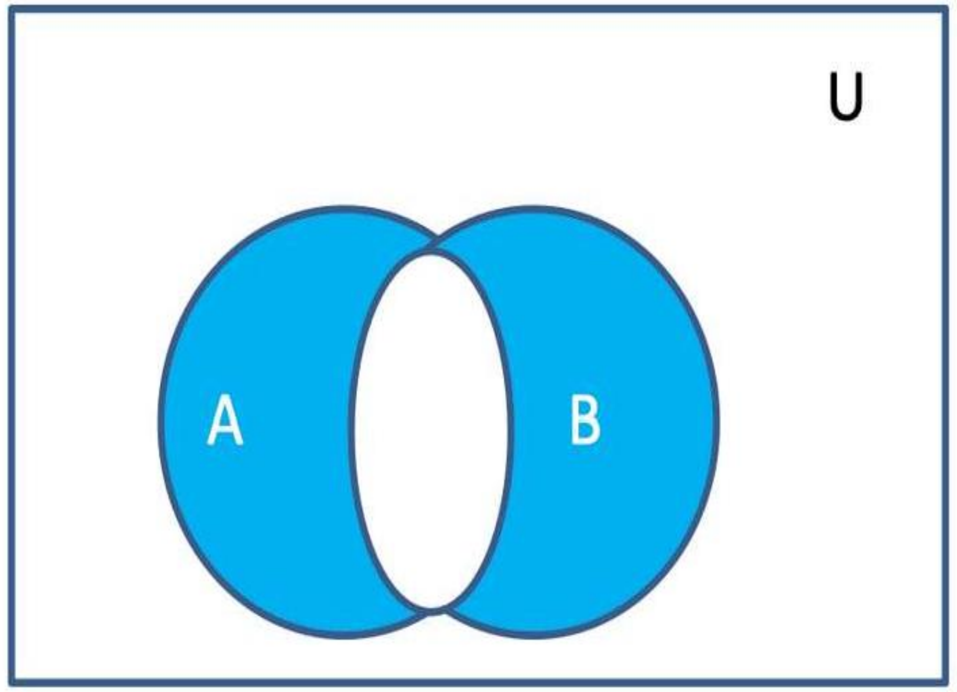
- Contoh:
  - Misal U adalah himpunan bilangan bulat positif
  - $A = \{x \in Z + \mid x > 10\}$
  - $U - A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$



Symmetric Difference

- Definisi:
  - Symmetric Difference A dan B, dinotasikan dengan $A \oplus B$, adalah $(A - B) \cup (B - A)$.

- Contoh:
  - $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
  - $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{4,5,6, 7,8\}$
  - $A \oplus B = \cdots$



Generalized Unions and Intersections

- Misal $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah himpunan
- Secara umum, gabungan dari himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

- Secara umum, irisan dari himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

Set Identities

Identity Law	$A \cup \emptyset = A,\ A \cap U = A$
Domination Laws	$A \cup U = U,\ A \cap \emptyset = \emptyset$
Idempotent Laws	$A \cup A = A,\ A \cap A = A$
Complementation Laws	$(A^C)^C = A$
Complement Laws	$A \cup A^C = U\ ,\ A \cap A^C = \emptyset$
Commulative Laws	$A \cup B = B \cap A,\ A \cap B = B \cap A$
Associative Laws	$(A \cup B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cup (B \cap C)$
Distributive Laws	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
De Morgan's Laws	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
Absorption Laws	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$

Latihan 1

Let $A = \{1,2,3,4,5\}$ and $B = \{0,3,6\}$. Find

a) $A \cup B$

b) $A - B$

c) $A \cap B$

d) $B - A$

Latihan 1

Let $A = \{a, b, c, d, e\}$ and $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

a) $A \cup B$

b) $A - B$

c) $A \cap B$

d) $B - A$

Latihan 1

Let $U = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, e\}$, $C = \{b, c, e\}$

a) $A \cup B \cup C$
b) $(A \cap B \cap C)^C$
c) $(A - B) - C$
d) $A - (B - C)$

Latihan 2

Untuk $k = 1,2,3, \ldots, himpunan\ A_k$ didefinisikan sebagai $\{k, k+1, k+2, k+3, \ldots\}$. Tentukan :

$$\bigcup_{k=1}^{10000} A_k$$

Dan

$$\bigcap_{k=1}^{10000} A_k$$

Latihan 2

$A_k = \{k, k+1, k+2, k+3, \dots\}.$
$A_{k+1} = \{k+1, k+2, k+3, k+4, \dots\}.$
$A_{k+2} = \{k+2, k+3, k+4, k+5 \dots\}.$
…
$A_{10000} = \{10000, 10001, 10002, 10003, \dots\}.$

Kita dapatkan bahwa $A_{k+1} \subseteq A_k$, sehingga:

$A_k \cup A_{k+1} = A_k$, dan $A_{k+2} = A_{k+1}$, dst…
$A_k \cup A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup A_{k+3} \cup \cdots = A_k$

$$\bigcup_{k=1}^{10000} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_{10000} = A_1$$

Relasi dan Fungsi

Ordered n-tuples

- Terkadang, urutan elemen di dalam sebuah kumpulan data bisa jadi sangat penting. Oleh karena itu, kita butuh struktur lain (selain himpunan) yang mampu merepresentasikan hal ini.

Ordered n-tuple: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

- Ordered n-tuple $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dan $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ dikatakan sama jika dan hanya jika $a_m = b_m$ untuk $m = 1,2, \dots, n$.
- 2-tuple disebut sebagai ‘pasangan terurut’ atau ‘ordered pair’.

Cartesian Product

S1 SAINS DATA

- Misal A dan B adalah himpunana. Cartesian product dari A dan B, dinotasikan dengan $A \times B$, adalah himpunan semua pasangan terurut (a,b), di mana $a \in A$ dan $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

- Contoh:
  - $C = \{1,2,3\}, D = \{y, z\}$
    - $C \times D = \{(1, y), (1, z), (2, y), (2, z), (3, y), (3, z)\}$
    - $D \times C = \cdots$
  - $A = \{0,1\}, B = \{1,2\}, C = \{0,1,2\}$
    - $A \times B \times C = \cdots$

Cartesian Product dari banyak himpunan

S1 SAINS DATA

- Cartesian product dari himpunan $A_1, A_2, \dots, A_n$ adalah ordered n-tuples $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dengan aturan:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i \text{untuk } i = 1,2,..,n\}$$

Relasi

- Definisi:
- Misalkan A dan B adalah himpunan. Sebuah relasi R dari himpunan A ke himpunan B adalah subset dari $A \times B$. Diberikan pasangan terurut (x,y) di $A \times B$, x berelasi y dengan relasi R, ditulis xRy, jika dan hanya jika $(x, y) \in R$.
- Himpunan A disebut Domain, sedangkan B disebut kodomain.

- Contoh:
  - Ordered pairs dari relasi R:"lebih kecil dari" dalam himpunan A={0,1,2,3} adalah

$$R = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,3)\}$$

Relasi

- Contoh:

Let $A = \{1, 2\}$ and $B = \{1, 2, 3\}$ and define a relation R from A to B as follows: Given any $(x, y) \in A \times B$,

$$(x, y) \in R \quad \text{means that} \quad \frac{x - y}{2} \text{ is an integer.}$$

a. State explicitly which ordered pairs are in $A \times B$ and which are in R.

b. Is $1\ R\ 3$? Is $2\ R\ 3$? Is $2\ R\ 2$?

c. What are the domain and co-domain of R?

Relasi

S1 SAINS DATA

- Solusi:

a. $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$. To determine explicitly the composition of R, examine each ordered pair in $A \times B$ to see whether its elements satisfy the defining condition for R.

$$(1, 1) \in R \text{ because } \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0, \text{ which is an integer.}$$

$$(1, 2) \notin R \text{ because } \frac{1-2}{2} = \frac{-1}{2}, \text{ which is not an integer.}$$

$$(1, 3) \in R \text{ because } \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1, \text{ which is an integer.}$$

$$(2, 1) \notin R \text{ because } \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}, \text{ which is not an integer.}$$

$$(2, 2) \in R \text{ because } \frac{2-2}{2} = \frac{0}{2} = 0, \text{ which is an integer.}$$

$$(2, 3) \notin R \text{ because } \frac{2-3}{2} = \frac{-1}{2}, \text{ which is not an integer.}$$

Thus

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2)\}$$

Relasi

- Solusi:

b. Yes, $1\ R\ 3$ because $(1, 3) \in R$.
No, $2 \not R\ 3$ because $(2, 3) \notin R$.
Yes, $2\ R\ 2$ because $(2, 2) \in R$.

c. The domain of R is $\{1, 2\}$ and the co-domain is $\{1, 2, 3\}$.

Fungsi

S1 SAINS DATA

Definisi:

- Misalkan A dan B adalah himpunan. Sebuah fungsi F dari himpunan A ke himpunan B adalah sebuah relasi dengan domain A dan kodomain B yang memenuhi dua sifat berikut:
  1. Untuk setiap elemen x di A, ada sebuah elemen tunggal y di B sedemikian sehingga $(x, y) \in F$
  2. Untuk setiap elemen x di A dan y dan z di B,

     Jika $(x, y) \in F$ dan $(x, z) \in F$, maka $y = z$.

Notasi:

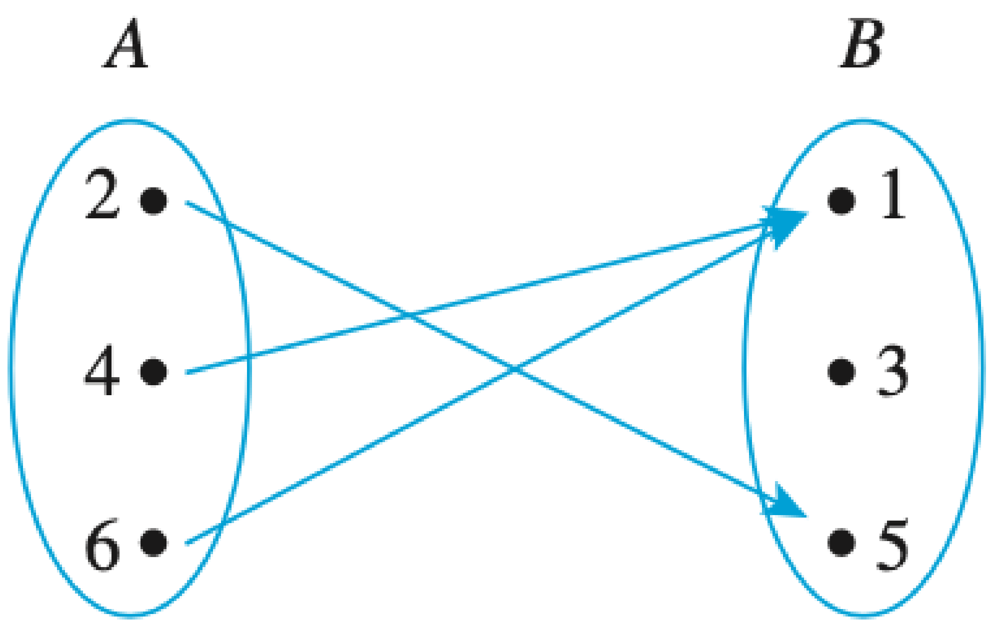
- Jika A dan B adalah himpunan dan F adalah fungsi dari A ke B, maka untuk setiap elemen x di A, elemen unik di B yang berelasi dengan x oleh fungsi F dinotasikan dengan F(x).

Fungsi

Contoh:

- Misalkan A={2,4,6} dan B={1,3,5}. Apakah relasi R, S, T berikut merupakan sebuah fungsi?

  1. $R = \{(2,5)(4,1), (4,3), (6,5)\}$
  2. Untuk setiap $(x, y) \in A \times B$, $(x, y) \in S$ di mana $y = x + 1$.
  3. T didefinisikan dengan diagram panah berikut



Solusi:

1. Bukan fungsi karena tidak memenuhi sifat 2
2. Bukan fungsi karena tidak memenuhi sifat 1
3. Fungsi

Exercises (1)

S1 SAINS DATA

1. Which of the following sets are equal?

   $A = \{a, b, c, d\}$ $\quad B = \{d, e, a, c\}$

   $C = \{d, b, a, c\}$ $\quad D = \{a, a, d, e, c, e\}$

2. **a.** Is $4 = \{4\}$?
   b. How many elements are in the set $\{3, 4, 3, 5\}$?
   c. How many elements are in the set $\{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$?

3. For each integer n, let $T_n = \{n, n^2\}$. How many elements are in each of T_2, T_{-3}, T_1, and T_0? Justify your answers.

4. Let $A = \{c, d, f, g\}$, $B = \{f, j\}$, and $C = \{d, g\}$. Answer each of the following questions. Give reasons for your answers.
   a. Is $B \subseteq A$?
   b. Is $C \subseteq A$?
   c. Is $C \subseteq C$?
   d. Is C a proper subset of A?

5. **a.** Is $3 \in \{1, 2, 3\}$?
   b. Is $1 \subseteq \{1\}$?
   c. Is $\{2\} \in \{1, 2\}$?
   d. Is $\{3\} \in \{1, \{2\}, \{3\}\}$?
   e. Is $1 \in \{1\}$?
   f. Is $\{2\} \subseteq \{1, \{2\}, \{3\}\}$?
   g. Is $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$?
   h. Is $1 \in \{\{1\}, 2\}$?
   i. Is $\{1\} \subseteq \{1, \{2\}\}$?
   j. Is $\{1\} \subseteq \{1\}$?

Exercises (2)

S1 SAINS DATA

1. Let $A = \{2, 3, 4\}$ and $B = \{6, 8, 10\}$ and define a relation R from A to B as follows: For every $(x, y) \in A \times B$,

$$(x, y) \in R \quad \text{means that} \quad \frac{y}{x} \text{ is an integer.}$$

a. Is $4\,R\,6$? Is $4\,R\,8$? Is $(3, 8) \in R$? Is $(2, 10) \in R$?
b. Write R as a set of ordered pairs.
c. Write the domain and co-domain of R.
d. Draw an arrow diagram for R.

5. Let $A = \{2, 4\}$ and $B = \{1, 3, 5\}$ and define relations U, V, and W from A to B as follows:
For every $(x, y) \in A \times B$:

$$(x, y) \in U \quad \text{means that} \quad y - x > 2.$$
$$(x, y) \in V \quad \text{means that} \quad y - 1 = \tfrac{x}{2}.$$
$$W = \{(2, 5), (4, 1), (2, 3)\}.$$

a. Draw arrow diagrams for U, V, and W.
b. Indicate whether any of the relations U, V, and W are functions.

UNESA
Universitas Negeri Surabaya
S1 SAINS DATA

Kardinalitas himpunan tak berhingga

Kardinalitas Himpunan

- Himpunan A dikatakan berhingga (finite) apabila A memuat tepat n anggota, dengan $n \in N$

Kardinalitas Himpunan

- Definisi:
  - Himpunan A dan B mempunyai kardinalitas sama ($|A| = |B|$) jika dan hanya jika ada korespodensi satu-satu dari A dan B.

- Jika terdapat fungsi injektif dari himpunan A dan B, kardinalitas himpunan A dikatakan kurang dari atau sama dengan kardinalitas himpunan B, dinyatakan dengan $|A| \leq |B|$.

Countability

- Definisi:
  - Sebuah himpunan S dikatakan Countable apabila:
    - Himpunan berhingga (finite), atau
    - Himpunan mempunyai kardinalitas yang sama dengan himpunan bilangan bulat positif (Z^+).

- Kardinalitas S yang merupakan himpunan countably infinite dinyatakan $\aleph_0$ (aleph null), $|S| = \aleph_0$.
- Jika sebuah himpunan tak berhingga S uncountable, $|S| = c$ ("continuum")

Contoh: Infinite Countable Set

S1 SAINS DATA

- Tunjukkan bahwa himpunan bilangan bulat ganjil positif $A = \{1,3,5,7, \dots\}$ bersifat countable
- Karena himpunan A infinite, harus ditunjukkan fungsi korespondensi satu-satu dari himpunan bilangan bulat positif Z^+ ke A. Dengan kata lain, tunjukkan $|A| = |Z^+| = \aleph_0$.
- Kita ambil fungsi $f = Z^+ \to A$, dengan $f(n) = 2n - 1$. Kemudian, tunjukkan bahwa f bijektif:
  - Injektif: jika $f(n) = f(m)$, maka $2n - 1 = 2m - 1$. Kita dapatkan $n = m$.
  - Surjektif: misalnya t adalah bilangan bulat positif ganjil. Maka, t memiliki selisih 1 dengan sebuah bilangan bulat positif genap $2k$, dengan k adalah bilangan natural. Sehingga $t = 2k - 1 = f(k)$.

Summary: Countability untuk Infinite Sets

- Himpunan tak berhingga S dikatakan countable jika dan hanya jika mempunyai kardinalitas yang sama dengan himpunan Z^+

$$|\boldsymbol{S}| = |\boldsymbol{Z}^+| = \aleph_0$$

- Dengan kata lain...
  - S countable jika dan hanya jika ada fungsi bijeksi (korespondensi satu-satu) dari himpunan Z^+ ke himpunan S.
- Dengan kata lain...
  - S countable jika dan hanya jika kita dapat membentuk barisan dari elemen-elemen yang ada di S.

Teorema

- **Teorema 1**
  - Misalkan A dan B adalah dua himpunan dengan $A \subseteq B$. Apabila B bersifat countable, maka A juga bersifat countable.

- **Teorema 2**
  - Misalkan A dan B adalah dua himpunan dengan $A \subseteq B$. Apabila A bersifat uncountable, maka B juga bersifat uncountable.

- **Teorema 3**
  - Misalkan A dan B adalah dua himpunan. Jika A dan B bersifat countable, maka $A \cup B$ juga bersifat countable

Thank You