Projeto

GA x ICC x IPC

Súmula do trabalho

Objetivo

r p

- Dados dois objetos no espaço (nesse caso, reta ou plano), verificar se há **colisão** (intersecção) entre eles. Assim, temos três possibilidades: colisão entre dois planos, colisão entre uma reta e um plano e, finalmente, colisão entre duas retas. Para este algoritmo, deverá ser implementado um algoritmo recursivo de **escalonamento** (também chamada de Eliminação Gaussiana).

Entrada

- O programa primeiro lerá um ***char*** representando o objeto a ser lido. Usa-se **r** para indicar uma reta, e **p** para indicar um plano.
- Um plano é expresso por uma equação geral do tipo $ax+by+cz+d=0$. A entrada fornecerá, logo abaixo do *char*, deste modo, os **coeficientes** a, b, c e d da equação. Para o caso da reta, serão usadas **duas** equações de plano, uma em cada linha *(nota: a reta pode ser vista como a intersecção de dois planos concorrentes)*.
- Os coeficientes são separados por um espaço. Cada coeficiente é expresso por um **par de inteiros** (separados por espaço), convenciona-se que o primeiro elemento do par é o numerador e o segundo elemento é o denominador.

Súmula do trabalho

Saída

- Se houver colisão, imprime ‘**sim**’. Se não houver colisão, imprime ‘**nao**’. Ambas as respostas deverão estar em letra minúscula (lowercase), sem acentos e aspas, como pedido.
- Em seguida, deverá imprimir a **matriz escalonada**, sem simplificações, cujas entradas são **números racionais** (representados em forma de fração). No caso especial de um número ser inteiro, omite-se a divisão pelo denominador (que é o número 1).

(exemplificação da entrada e saída no slide a seguir)

Requisitos

- **Alocar dinamicamente** matrizes na resolução do problema (veja primeira linha da entrada)
- Implementar uma **struct** para manipular os números racionais, tanto os fornecidos pelo entrada como os exigidos pela matriz de saída.
- Para todo caso-teste, é obrigatório a implementação do *algoritmo de escalonamento*, sob sua forma **recursiva**.
- É importante **indentar** corretamente e **comentar** aspectos importantes da execução do seu programa.

Exemplo (ideia geral)

Suponha que seja dada a seguinte entrada:

Nro Eq. Nro Coef.	**3 4**
Reta	**r**
	0 1 2 1 0 1 0 1
	2 1 0 1 0 1 0 1
Plano	**p**
	3 1 -1 1 0 1 3 1

Exemplo (ideia geral)

Analisemos o que significa esta linha, por exemplo.

0 1 2 1 0 1 0 1

3 4
r
0 1 2 1 0 1 0 1
2 1 0 1 0 1 0 1
p
3 1 -1 1 0 1 3 1

Exemplo (ideia geral)

a	b	c	d
0/1	2/1	0/1	0/1

3 4
r
0 1 2 1 0 1 0 1
2 1 0 1 0 1 0 1
p
3 1 -1 1 0 1 3 1

Os coeficientes da primeira equação do sistema são:

a = 0/1 (isto é, 0)
b = 2/1 (isto é, 2)
c = 0/1 (isto é, 0)
d = 0/1 (isto é, 0)

OBS: Os valores dos inteiros fornecidos são pequenos, estão entre **-10** e **+10**

Exemplo (ideia geral)

a	b	c	d
0/1	2/1	0/1	0/1

3 4
r
0 1 2 1 0 1 0 1
2 1 0 1 0 1 0 1
p
3 1 -1 1 0 1 3 1

Temos que a 1ª equação do sistema representa, portanto,

$$\boxed{2y = 0}$$

Exemplo (ideia geral)

a	b	c	d
2/1	0/1	0/1	0/1

$$\boxed{2y = 0}$$

r
0 1 2 1 0 1 0 1
2 1 0 1 0 1 0 1
p
3 1 -1 1 0 1 3 1

Exemplo (ideia geral)

a	b	c	d
~~2~~/1	~~0~~/1	~~0~~/1	~~0~~/1

Sistema S1

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$$

r
0 1 2 1 0 1 0 1
2 1 0 1 0 1 0 1
p
3 1 -1 1 0 1 3 1

Exemplo (ideia geral)

Sistema S1

$$\begin{cases} \boxed{2y = 0} \\ \boxed{2x = 0} \end{cases}$$

r
0 1 2 1 0 1 0 1
2 1 0 1 0 1 0 1
p
3 1 -1 1 0 1 3 1

Temos que, desse modo, a reta é a intersecção entre os planos $2y=0$ e $2x=0$.

Exemplo (ideia geral)

Fazendo o mesmo para o plano (...) :

Sistema S1	**r**
$2y = 0$	**0 1 2 1 0 1 0 1**
$2x = 0$	**2 1 0 1 0 1 0 1**
Sistema S2	**p**
$3x-y+3=0$	**3 1 -1 1 0 1 3 1**

Exemplo (ideia geral)

Analisemos a solução do sistema **S1∩S2**, que será dado pela matriz:

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	0	2	0	0
2ªeq	2	0	0	0
3ªeq	3	-1	0	3

Reta (Sistema S1)

S1	a	b	c	d
1ªeq	0	2	0	0
2ªeq	2	0	0	0

Plano (Sistema S2)

S2	a	b	c	d
1ªeq	3	-1	0	3

OBS: para este exemplo em particular, os denominadores foram omitidos para facilitar o entendimento, estando subentendido o denominador 1

Exemplo (ideia geral)

Façamos o escalonamento, importante para verificar se há colisão.

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	0	2	0	0
2ªeq	2	0	0	0
3ªeq	3	-1	0	3

Vamos batizar esse algoritmo de escalonamento como “o jogo do **Encontre o Absurdo”.** Entenda:

Exemplo (ideia geral)

1ª coluna de M

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	0	2	0	0
2ªeq	2	0	0	0
3ªeq	3	-1	0	3

Matriz M atual

Procedimento simplificado:

- Para a **1ª coluna** da matriz *M*, escolhe a primeira equação (de cima pra baixo) tal que $a \neq 0$.

Exemplo (ideia geral)

Procedimento simplificado:

- Não posso escolher a 1ªeq, pois $a_1 = 0$.

1ª coluna de M

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	0	2	0	0
2ªeq	2	0	0	0
3ªeq	3	-1	0	3

Matriz M atual

Exemplo (ideia geral)

Procedimento simplificado:

- Como $a_2 = 2 \neq 0$, selecionamos a 2ªeq como a **nova 1ªeq**.

1ª coluna de M

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	0	2	0	0
2ªeq	2	0	0	0
3ªeq	3	-1	0	3

Matriz M atual

Exemplo (ideia geral)

Procedimento simplificado:

- Realizo o *swap()* entre as equações, para arbitrar que sempre a **primeira equação** do sistema será a equação do **pivô** *(definido a seguir)*

1ª coluna de M

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	0	2	0	0
2ªeq	2	0	0	0
3ªeq	3	-1	0	3

Matriz M atual

Exemplo (ideia geral)

Procedimento simplificado:

- A troca é feita.

1ª coluna de M

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	2	0	0	0
2ªeq	0	2	0	0
3ªeq	3	-1	0	3

Matriz M atual

Exemplo (ideia geral)

1ª coluna de M

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	2	0	0	0
2ªeq	0	2	0	0
3ªeq	3	-1	0	3

Matriz M atual

Procedimento simplificado:

- Vamos definir como *p* (**pivô**) o 1º coeficiente da 1ªeq já trocada, no nosso caso temos que:

$p = 2$

A 1ªeq deve ser sempre a **equação do pivô**, por isso a troca de linhas pode ser necessária.

Exemplo (ideia geral)

1ª coluna de M

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	2	0	0	0
2ªeq	0	2	0	0
3ªeq	3	-1	0	3

p = 2

Matriz M atual

Procedimento simplificado:

- seja a matriz M = (x^{ij})
- Para as linhas $1 < i \leq 3$.

$\text{linha}_i \mathrel{-}= \text{linha}_1 * (x_{i1} / p)$

(*i.e.* cada linha será subtraída da primeira linha (a equação do pivô) multiplicada por um fator, que no nosso caso será o coeficiente _a_ da linha atual dividida pelo pivô)

Exemplo (ideia geral)

1ª coluna de M

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	2	0	0	0
2ªeq	0	2	0	0
3ªeq	3	-1	0	3

Matriz M atual

p = 2

Procedimento simplificado:

- Para a 2ªeq = (0, 2, 0, 0), temos que x_{21}= 0 (o primeiro elemento).
- Assim:

  2ªeq = (0, 2, 0, 0) - (2, 0, 0, 0)*(0/2)
  2ªeq = (0, 2, 0, 0) - (0, 0, 0, 0)
  2ªeq = (0, 2, 0, 0)

- Logo, a 2ª equação permanece a mesma.

Exemplo (ideia geral)

1ª coluna de M

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	2	0	0	0
2ªeq	0	2	0	0
3ªeq	3	-1	0	3

p = 2

Matriz M atual

Procedimento simplificado:

- Para a 3ªeq = (3, -1, 0, 3), temos que x_{31}= 3 (o primeiro elemento).
- Assim:

  3ªeq = (3, -1, 0, 3) - (2, 0, 0, 0)*(3/2)
  3ªeq = (3, -1, 0, 3) - (3, 0, 0, 0)
  3ªeq = (0, -1, 0, 3)

- Note que zeramos x_{31} acima, nossa intenção.

Exemplo (ideia geral)

Procedimento simplificado:

- A nova 3ª equação é então modificada.

1ª coluna de M

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	2	0	0	0
2ªeq	0	2	0	0
3ªeq	0	-1	0	3

Matriz M atual

Exemplo (ideia geral)

1ª coluna de M

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	2	0	0	0
2ªeq	0	2	0	0
3ªeq	0	-1	0	3

Procedimento simplificado:

- Agora um **passo importante**, busca-se alguma equação cujo resultado é absurdo, isto é, **a = b = c = 0, mas d ≠ 0**, (ex: $0x + 0y + 0z = 3 \Rightarrow 0 = 3$) quando isto acontece, imediatamente sabemos que **não há colisão.** Se ao fim do procedimento houver nenhum absurdo, então **existe colisão.**
- Segue normalmente a recursão, até atingir o caso de parada (veremos a seguir).

Exemplo (ideia geral)

Procedimento simplificado:

- Nossa próxima matriz será reduzida da 1ª coluna e da 1ª linha. O algoritmo é feito **recursivamente** para a nova matriz

1ª coluna de M

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	2	0	0	0
2ªeq	0	2	0	0
3ªeq	0	-1	0	3

Matriz M atual

Exemplo (ideia geral)

Procedimento simplificado:

- p = 2 já está na 1ª linha da matriz.

1ª coluna de M

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	2	0	0	0
2ªeq	0	2	0	0
3ªeq	0	-1	0	3

Matriz M atual

Exemplo (ideia geral)

1ª coluna de M

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	2	0	0	0
2ªeq	0	2	0	0
3ªeq	0	-1	0	3

Matriz M atual

Procedimento simplificado:

- Para a linha 2 = (-1, 0, 3), temos que x_{21}= -1 (o primeiro elemento).
- Assim:

  2ªeq = (-1, 0, 3) - (2, 0, 0) * (-1/2)
  2ªeq = (-1, 0, 3) - (-1, 0, 0)
  2ªeq = (0, 0, 3)

- Note que zeramos x_{21} , nossa intenção (familiar?).

Exemplo (ideia geral)

1ª coluna de M

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	2	0	0	0
2ªeq	0	2	0	0
3ªeq	0	0	0	3

Matriz M atual

Procedimento simplificado:

- Temos que a última equação confere um **absurdo**. Logo, **não há colisão** entre os dois objetos, sob nenhuma hipótese**.**
- Seguimos o procedimento até atingir o **caso-base** (caso de parada).
- O caso-base é quando a matriz M se torna uma **matriz linha**, ou quando a 1ª coluna de M é a do **coeficiente c.** *(Por quê?)*

Exemplo (ideia geral)

1ª coluna de M

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	2	0	0	0
2ªeq	0	2	0	0
3ªeq	0	0	0	3

Matriz M atual

Procedimento simplificado:

- Seguimos para outra chamada
- Aqui atingimos o caso de parada. Neste caso **em particular,** ocorreu simultaneamente que M é uma matriz linha cuja 1ª coluna é a do último coeficiente das variáveis (*i.e.* o coeficiente **c**). Note que basta ocorrer apenas uma destas condições para terminar a recursão.

Exemplo (ideia geral)

Procedimento simplificado:

- A matriz já está **escalonada**.
- Como seria a **saída** deste caso?

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	2	0	0	0
2ªeq	0	2	0	0
3ªeq	0	0	0	3

Exemplo (ideia geral)

S1∩S2	a	b	c	d
1ªeq	2	0	0	0
2ªeq	0	2	0	0
3ªeq	0	0	0	3

Procedimento simplificado:

SAÍDA:

```
nao
2	0	0	0
0	2	0	0
0	0	0	3
```

- A matriz deve ser tabulada por um **\t** (tab simples).
- Não há tab após a última coluna.
- Quando o denominador de um número for 1 (é o caso de todos os números deste exemplo), omite-se o denominador.
- Quando a fração não pode ser subentendida, imprime-a na forma **n/d.** (Veja a seguir)

Exemplo de saída possível

Uma saída válida para um caso qualquer poderá ser algo como:

SAÍDA:

sim			
1	-3/2	0	2
0	2/7	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Este seria um caso de colisão entre duas retas. Note que não há absurdos no sistema. Temos que aqui a intersecção ocorre.

Obrigado!

Uma proposta de *Fernando César LB Filho*
Endereço para contato: fernandoclbf@usp.br