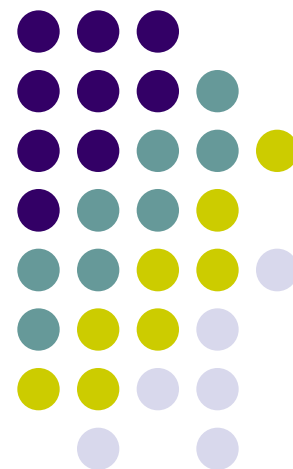


线性离散控制系统分析

任志刚





内容提纲

- 线性离散控制系统的基本概念
- z 变换与 z 反变换
- 差分方程与脉冲传递函数
- 采样控制系统的稳定性
- 采样控制系统的稳态误差与动态性能
- 离散控制系统的校正





线性离散控制系统的基本概念

- 数字控制器具有诸多优点，在许多场合逐步取代了模拟控制器：
 - 控制规律易于通过软件编程改变，可实现复杂算法
 - 数字信号：有效抑制噪声
 - 一机多用，经济性好
- 数字控制器接收、处理和传送的是数字信号，具有独特特性，不宜直接采用针对连续控制系统的方法进行分析和设计。
- z 变换：连续系统的理论和方法 → 离散系统





线性离散控制系统的基本概念

□ 信号的分类

- 模拟（连续）信号：时间与幅值均连续
- 离散信号：时间上离散，幅值连续
- 数字信号：时间与幅值均离散

□ 采样：模拟信号 → 离散（脉冲）信号

□ 量化：用一组数码逼近幅值，离散信号 → 数字信号

□ 控制系统的分类

- 连续控制系统：模拟信号
 - 采样控制系统：连续信号 + 离散信号
 - 数字控制系统：包含数字信号
- } 离散控制系统

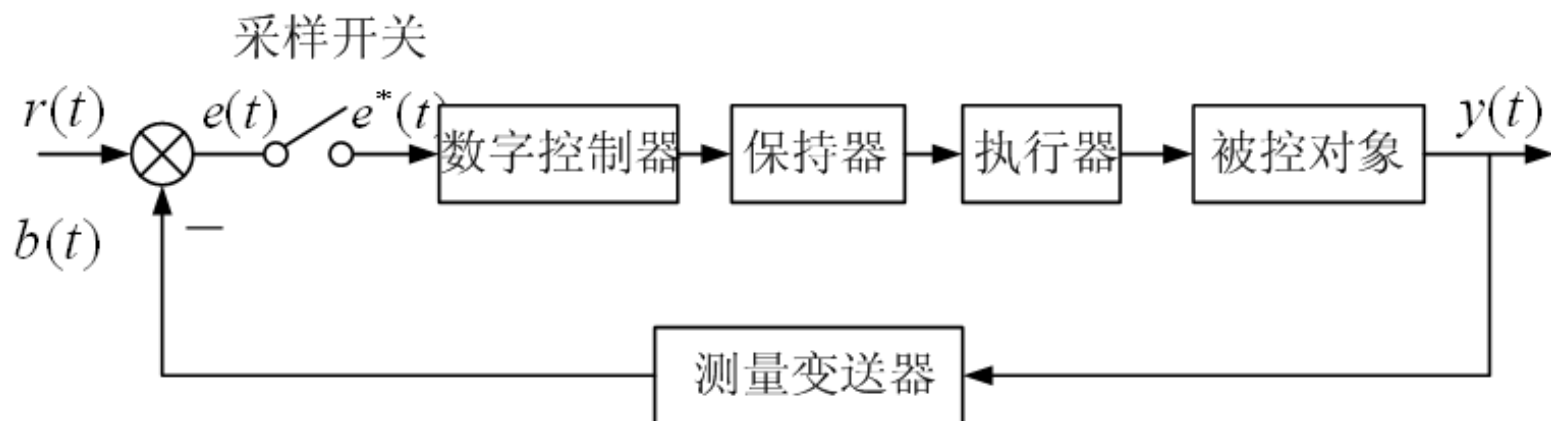
□ 理想采样 + 忽略量化误差：数字控制系统 → 采样控制系统，相应的分析与校正方法在理论上统一



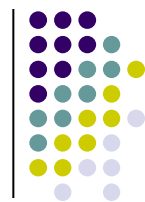


线性离散控制系统的基本概念

- 采样控制系统的组成：采样器、数字（脉冲）控制器、保持器、执行器、被控对象和测量变送器

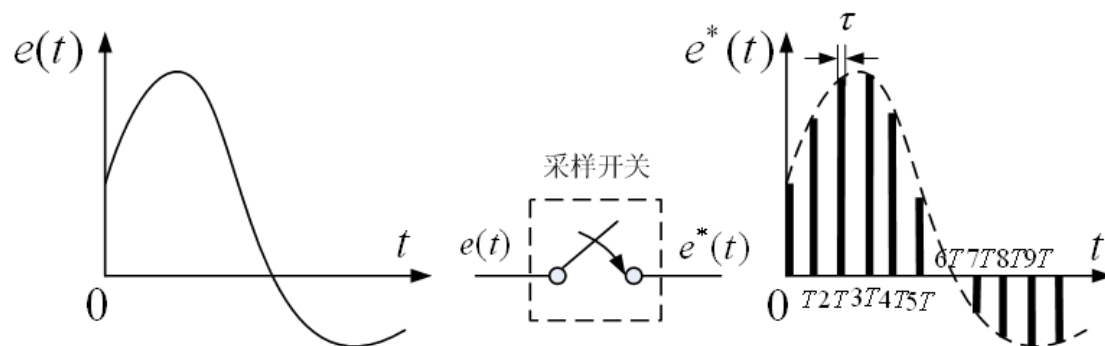


采样控制系统方块图



信号的采样

- 将连续信号 $e(t)$ 转化为脉冲序列 $e^*(t)$



采样周期: T

脉冲宽度: τ

采样过程示意图

- 当 $\tau \ll T$ 时, 采样器 \rightarrow 理想采样器 $e^*(t) = e(kT), k = 0, 1, 2, \dots$

$$e^*(t) = e(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \delta(t - kT), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- 物理本质: 采用单位理想脉冲序列 $\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$ 调制 $e(t)$



采样信号的频谱分析

□ 单位理想脉冲序列的傅里叶级数

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_s t}, \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T} \text{ 为采样角频率}$$

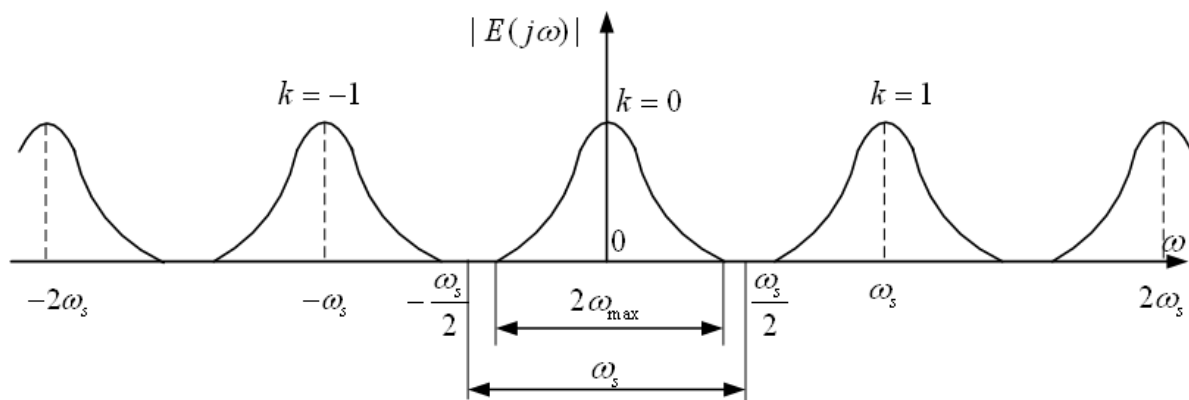
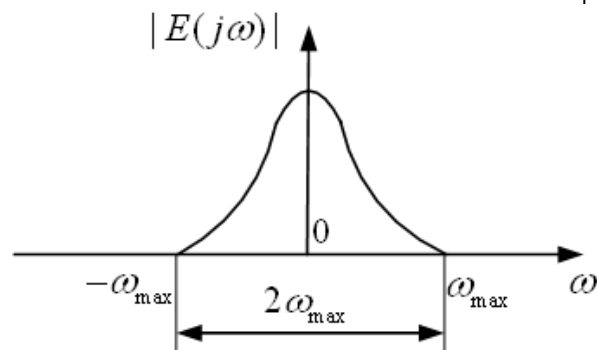
$$\square \quad e^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(t) e^{jk\omega_s t} \rightarrow E^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(s + jk\omega_s) \rightarrow E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E[j(\omega + k\omega_s)]$$

□ 以 ω_s 为周期的无穷多个原信号频谱的叠加，幅值衰减到原来的 $1/T$ 。

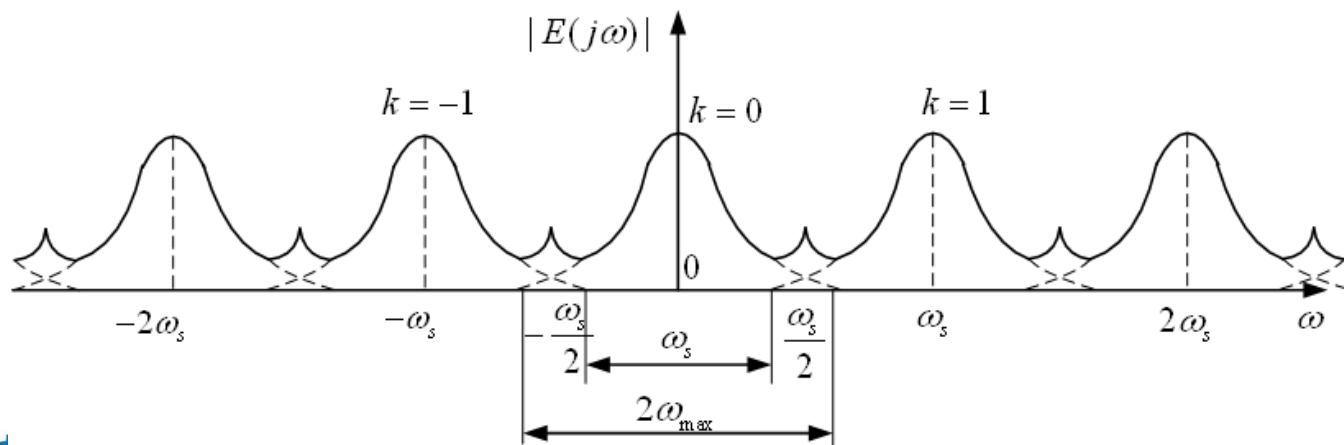


采样信号的频谱分析

□ 假设 $E(j\omega)$ 带宽有限，最大频率为 ω_{\max}



$$\omega_s > 2\omega_{\max}$$



$$\omega_s < 2\omega_{\max}$$



香农采样定理

- 若被采样的连续信号的频谱具有有限带宽，且频谱的最高角频率为 ω_{\max} ，则只要采样角频率满足 $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$ ，通过理想低通滤波器，由采样得到的离散信号可以不失真地恢复为原连续信号。
- 采样定理给出了选取采样频率下限的指导原则，对于采样频率的上限，要依据易实现性和抗干扰性来统一确定。
- 对于一般连续信号，带宽有限难以满足，且 ω_{\max} 难以确定，因此很少通过直接设计理想低通滤波器恢复原信号。





信号的恢复

□ 被控对象需要连续信号，从采样信号中恢复出原来的连续信号的过程，称为信号的复现。

□ 信号恢复的依据

➤ 根据信号的定值外推理论设计保持器

➤
$$e_k(kT + \Delta t) = e(kT) + e'(kT)\Delta t + \frac{e''(kT)}{2!} \Delta t^2 + \dots, \Delta t \in [0, T)$$

➤ 保留项数越多，复现的信号越准确，但会因相位滞后影响稳定性

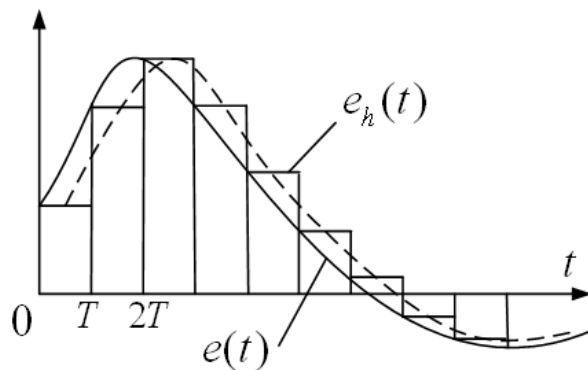
➤ 通常只采用第一项或前两项，分别对应零阶保持器和一阶保持器



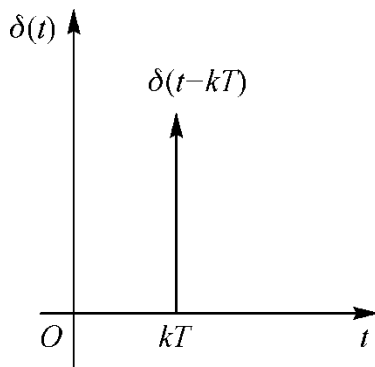


零阶保持器

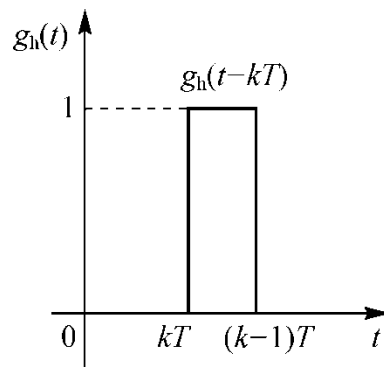
- 工程实践中最常用的一种保持器，它把采样时刻 kT 的采样值恒定不变地保持到下一个采样时刻 $(k+1)T$ 。



- 对于理想单位脉冲输入，输出为 $g(t) = 1(t) - 1(t - T)$



(a)



(b)



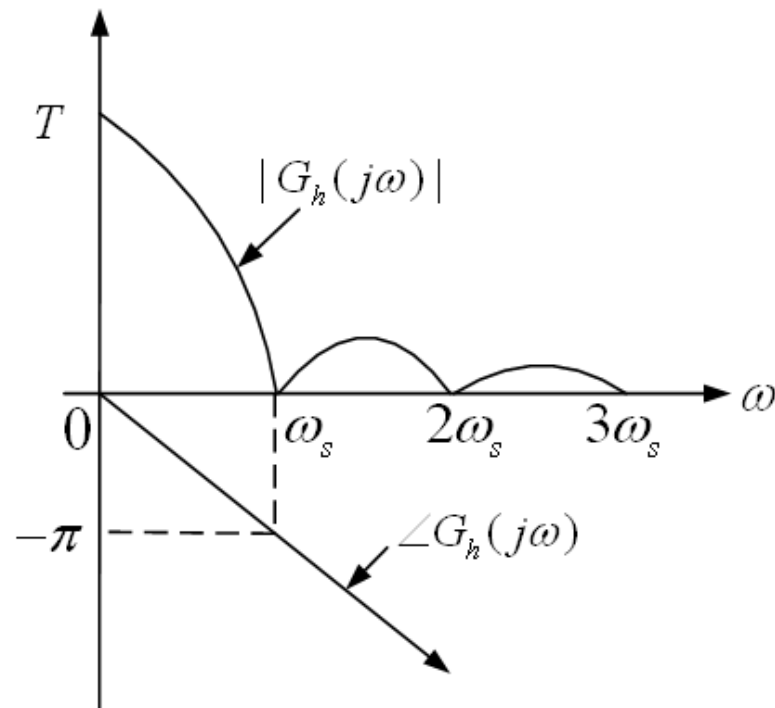


零阶保持器

□ 传递函数: $G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$

□ 频率特性: $G_h(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\frac{\omega T}{2}} = \frac{2\pi}{\omega_s} \frac{\sin(\frac{\pi\omega}{\omega_s})}{\frac{\pi\omega}{\omega_s}} e^{-j\frac{j\pi\omega}{\omega_s}}$

- 幅值随频率增加而减小, 低通滤波特性; 除主频分量外, 允许部分高频分量通过。
- 容易实现, 滞后相角小。



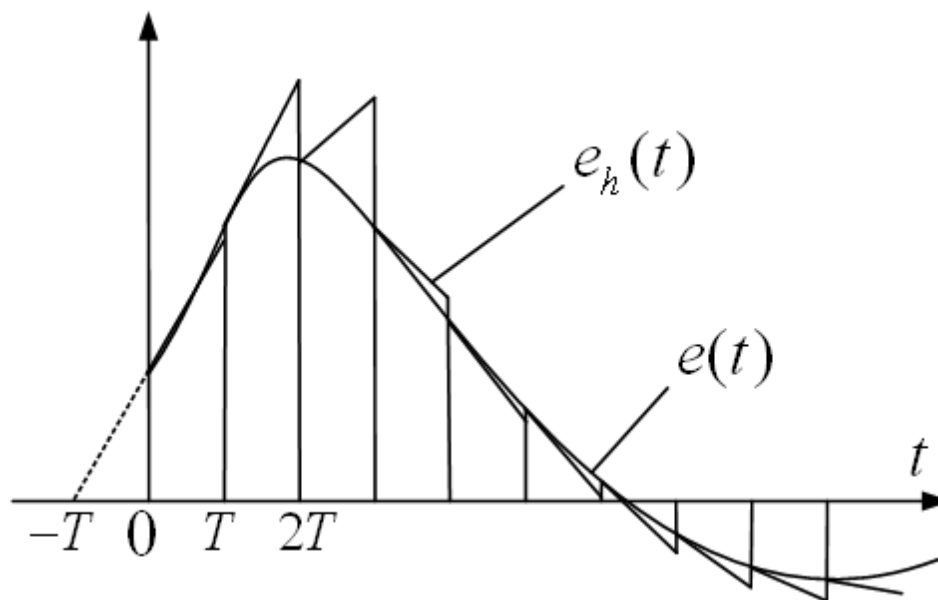


一阶保持器

- 基于前两个时刻的采样值，按照线性外推规律保持脉冲序列

$$e(kT + \Delta t) = e(kT) + \frac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T} \Delta t, \quad \Delta t \in [0, T)$$

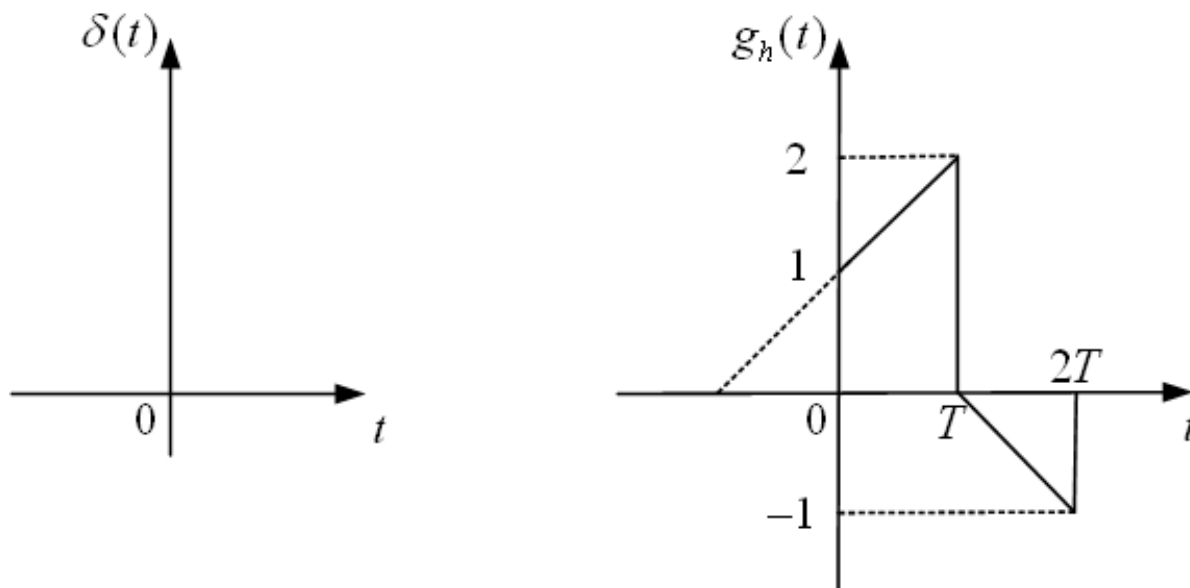
- 一阶保持器的输出波形





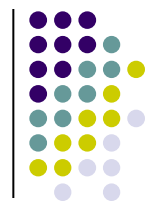
一阶保持器

□ 对于理想单位脉冲，输出响应为



□ 时域表达式

$$g(t) = 1 + \frac{1}{T}t - 2 \cdot 1(t-T) - \frac{2}{T}(t-T) \cdot 1(t-T) + 1(t-2T) + \frac{1}{T}(t-2T) \cdot 1(t-2T)$$



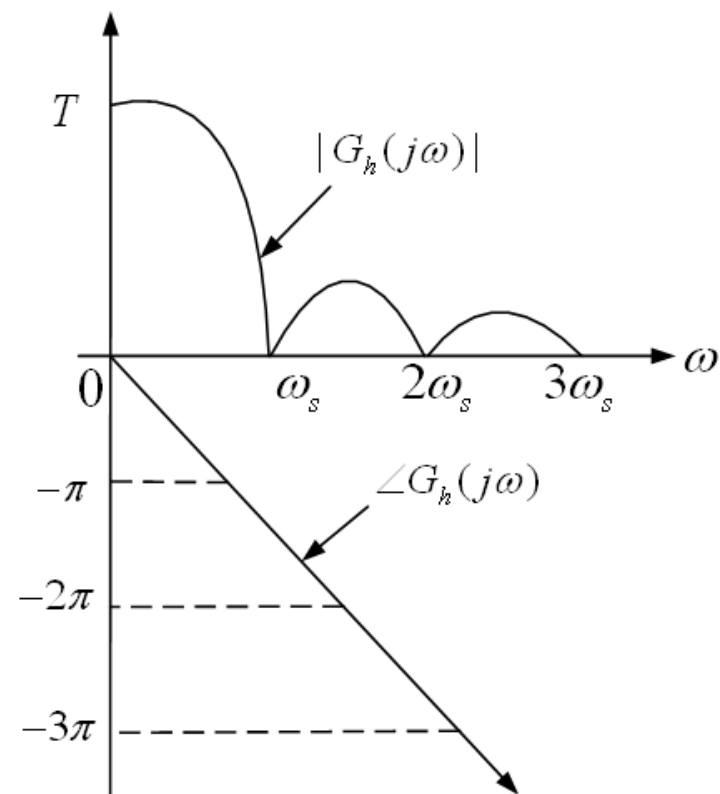
一阶保持器

□ 传递函数
$$G_h(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{Ts^2} - \frac{2}{s}e^{-Ts} - \frac{1}{Ts^2}e^{-Ts} + \frac{1}{s}e^{-2Ts} + \frac{1}{Ts^2}e^{-2Ts}$$
$$= T(1+Ts)\left(\frac{1-e^{-Ts}}{Ts}\right)^2$$

□ 频率特性

$$G_h(j\omega) = T\sqrt{1+(T\omega)^2} \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2 e^{-j(\omega T - \arctan \omega T)}$$

滞后相位大于零阶保持器





z变换

- z变换是从拉氏变换引申出来的一种变换方法，是研究线性离散系统的重要数学工具。

- 采样信号 $e^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)\delta(t - kT)$ ，对其进行拉式变换可得

$$E^*(s) = L[e^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)e^{-kTs}$$

引入新变量 $z = e^{Ts}$ ，关于z的函数

$$E(z) = E^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT)z^{-k}$$

$E(z)$ 称为离散信号 $e^*(t)$ 的z变换，记为 $E(z) = Z[e^*(t)]$

- 将关于s的超越函数转化为关于z的幂级数或有理分式形式；只关注采样时刻的信号值 $e(kT)$ ，而 $e(kT)$ 由 $e(t)$ 决定，因此 $E(z)$ 也可看作 $e(t)$ 的z变换： $E(z) = Z[e^*(t)] = Z[e(t)]$





z变换方法

- 级数求和法：根据z变换的定义，只要知道连续信号 $e(t)$ 的采样值，就可获得z变换的级数展开式，将其尽可能写成闭式形式

$$E(z) = e(0) + e(T)z^{-1} + e(2T)z^{-2} + \cdots + e(kT)z^{-k} + \cdots$$

- 例：求单位阶跃函数 $1(t)$ 的z变换

解：根据定义

$$E(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-k} + \cdots$$

上式为一等比级数，若 $|z^{-1}| < 1$ ，该级数收敛，可得

$$E(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$





z变换方法

□ 例：求函数 $x(t) = e^{-at}$ ($a > 0$) 的z变换

解：根据定义

$$E(z) = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + \cdots + e^{-kaT} z^{-k} + \cdots$$

若 $|e^{-aT} z^{-1}| < 1$ 上式可写为

$$E(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$





z变换方法

- 部分分式法：将连续时间函数 $e(t)$ 的拉氏变换 $E(s)$ 写成部分分式之和的形式

$$E(s) = \frac{A_1}{s + p_1} + \frac{A_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s + p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s + p_i}$$

由拉氏反变换得到原连续时间函数 $e(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{-p_i t}$

对每部分求z变换后再求和

$$E(z) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i z}{z - e^{-p_i T}}$$

- 例：求 $E(s) = \frac{a}{s(s+a)}$ 的z变换

解： $E(s) = \frac{a}{s(s+a)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$ ，通过拉氏反变换，得 $e(t) = 1(t) - e^{-at}$

那么 $E(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} = \frac{z(1-e^{-aT})}{z^2 - (1-e^{-aT})z + e^{-aT}}$





z变换方法

□ 例：求正弦函数 $\sin \omega t$ 的z变换

解： $\sin \omega t$ 的拉氏变换为 $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ ，将其分解为部分分式之和形式，得

$$L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = -\frac{1}{2j(s + j\omega)} + \frac{1}{2j(s - j\omega)}$$

利用拉氏反变换，可得 $\frac{1}{s \pm j\omega}$ 对应的时间函数为 $e^{-(\pm j\omega)t}$

利用指数函数的z变换公式，可得

$$Z[\sin \omega t] = -\frac{-z}{2j(z - e^{-j\omega T})} + \frac{z}{2j(z - e^{j\omega T})} = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - (2 \cos \omega T)z + 1}$$





z变换的基本性质

- 线性定理: $Z[a_1 e_1(t) \pm a_2 e_2(t)] = a_1 E_1(z) \pm a_2 E_2(z)$, a_1 、 a_2 均为常数
- 实位移定理: $Z[e(t - kT)] = z^{-k} E(z)$ (延迟定理)
 $Z[e(t + kT)] = z^k [E(z) - \sum_{n=0}^{k-1} e(nT) z^{-n}]$ (超前定理)
- 复位移定理: $Z[e^{\pm at} e(t)] = E(e^{\mp aT} z)$
- 初值定理: $e(0) = \lim_{t \rightarrow 0} e(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} E(z)$
- 终值定理: $e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) E(z)$, 要求 $(z - 1) E(z)$ 的极点均位于单位圆内





z反变换

- z变换的逆运算，即由 $E(z) \rightarrow e^*(t)$ ，记为 $e^*(t) = Z^{-1}[E(z)]$
- 长除法（幂级数法）：用 $E(z)$ 的分子除以分母，求出关于 z 的降幂排列的级数展开式，根据系数得到脉冲序列 $e^*(t)$

□ 例：若 $E(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-3)}$ ，求 $e^*(t)$

解：整理可得 $E(z) = \frac{10z}{z^2 - 4z + 3}$ ，利用长除法，得

$$E(z) = 0z^0 + 10z^{-1} + 40z^{-2} + 130z^{-3} + 400z^{-4} + \dots$$

根据系数关系，可知

$$e^*(t) = 10\delta(t-T) + 40\delta(t-2T) + 130\delta(t-3T) + 400\delta(t-4T) + \dots$$





z反变换

- 部分分式法（查表法）：首先将 $E(z)$ 分解为部分分式之和的形式，然后查表获得各分式的反变换，合成获得最终的反变换

$$E(z) = zE'(z) = z \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{z - z_i}, \quad A_i = [(z - z_i)E'(z)]|_{z=z_i}$$

$$e^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n Z^{-1} \left(\frac{A_i z}{z - z_i} \right) \right] \delta(t - kT)$$

- 例：求 $E(z) = \frac{(1 - e^{-2T})z}{(z - 1)(z - e^{-2T})}$ 的反变换

解：

$$E(z) = z \left(\frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z - e^{-2T}} \right), \quad \text{对应的时间函数可能为 } e(t) = (1 - e^{-2t}) \cdot 1(t)$$

那么
$$e^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-2t}) \delta(t - kT)$$





差分方程

- 对于线性定常离散控制系统，某一时刻的输出 $y(k)$ 不仅与当前时刻的输入 $x(k)$ 有关，而且与过去时刻的输入 $x(k-1)$, $x(k-2)$, ..., 以及过去时刻的输出 $y(k-1)$, $y(k-2)$, ... 有关，可以表示为

$$y(k) = -\sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{j=0}^m b_j r(k-j)$$

其中, a_i, b_j 均为常数。该方程称为线性定常差分方程。

- 后向差分与前向差分
- 在连续系统中，采用微分方程描述输出输入关系；而在离散系统中，输入输出均为离散时间函数，不能采用时间的微商描述系统行为。





差分方程

- 差分方程的求解：迭代法、z变换法
- 迭代法：已知差分方程、输入序列，以及输出序列的初值，根据递推关系，逐步得出输出序列。
- 例：已知 $y(k) = 2x(k) + 5y(k-1) - 6y(k-2)$ ，输入 $x(k) = 1, (k \geq 0)$ 且 $y(0) = 0, y(1) = 1$ ，求输出序列 $y(k), k = 0, 1, 2, \dots$ 。
解：根据初始条件和递推关系，得

$$y(0) = 0, y(1) = 1$$

$$y(2) = 2r(2) + 5y(1) - 6y(0) = 7$$

$$y(3) = 2r(3) + 5y(2) - 6y(1) = 31$$

$$y(4) = 2r(4) + 5y(3) - 6y(2) = 115$$

.....





差分方程

□ z 变换法:

- 对差分方程两端取 z 变换, 得到以 z 为变量的代数方程, 然后求出代数方程的解 $Y(z)$, 最后对 $Y(z)$ 取 z 反变换, 从而求得输出序列 $y(k)$ 。
- z 变换的实位移定理
- 与利用拉氏变换求解微分方程的过程相似

□ 例: 已知 $y(0) = 0, y(1) = 1$, 求解 $y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 0$

解: 对方程取 z 变换, 得 $z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) - 3zY(z) + 3zy(0) + 2Y(z) = 0$

整理得 $(z^2 - 3z + 2)Y(z) = y(0)z^2 + (y(1) - 3y(0))z$

$$(z^2 - 3z + 2)Y(z) = z \quad Y(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

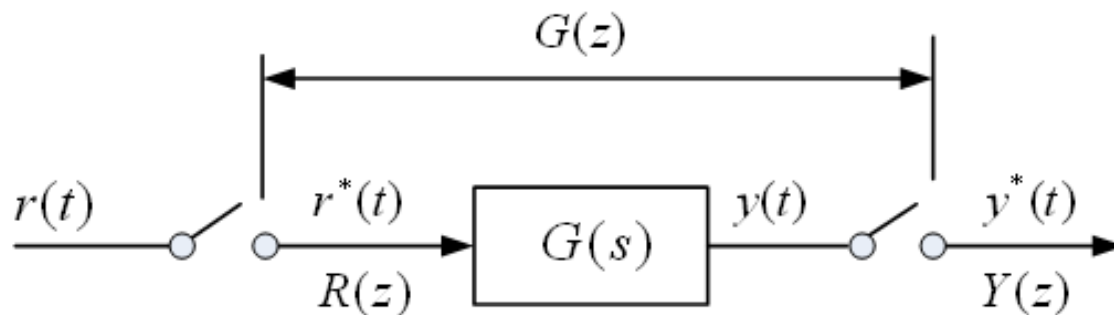
对 $Y(z)$ 取 z 反变换, 得 $y(k) = -1 + 2^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$





脉冲传递函数

- 定义：对于线性离散控制系统，在零初始条件下，系统离散输出信号的 z 变换与离散输入信号的 z 变换之比。



$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} y(nT)z^{-n}}{\sum_{n=0}^{\infty} r(nT)z^{-n}}$$

- 零初始条件：在 $t < 0$ 时刻，输入、输出序列的各采样值均为0





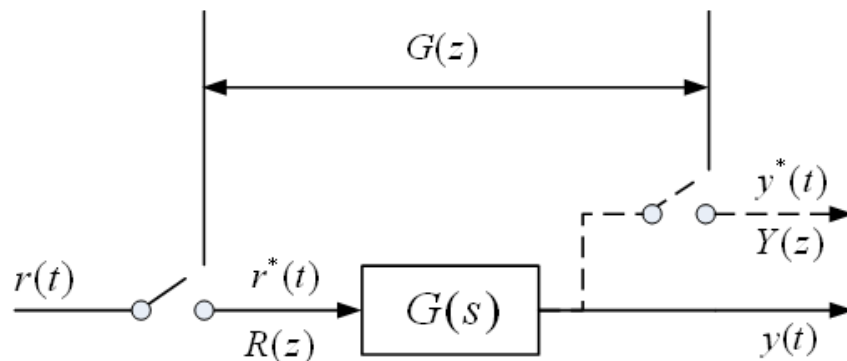
脉冲传递函数

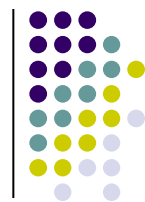
□ 性质

- 只与系统自身的结构、参数有关，与输入信号无关
- 与系统的差分方程有直接关系
- 一般是关于复变量 z 的有理分式
- 与线性连续控制系统的传递函数相对应

□ 对于输出是连续信号的情况，可在系统输出端虚设一理想采样开关（与输入采样开关同步、周期相同）

$y^*(t)$ 仅表明 $y(t)$ 在采样时刻的离散值



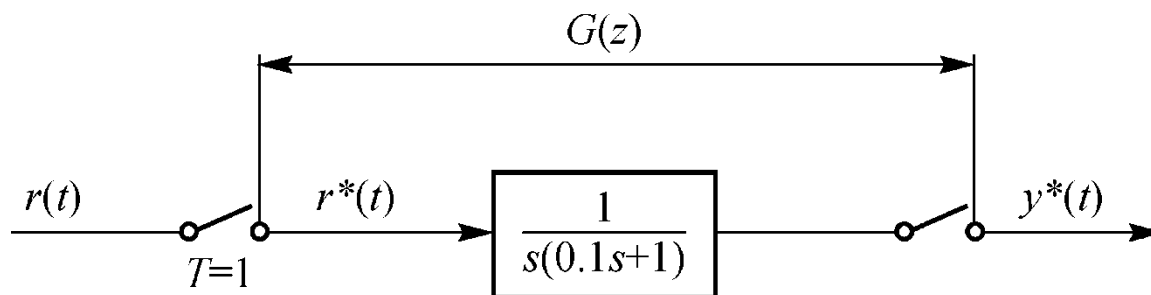


脉冲传递函数

- 脉冲传递函数 $G(z)$ 等于理想单位脉冲响应 $g(t)$ 的 z 变换, 等于传递函数 $G(s)$ 的拉氏反变换的 z 变换

$$\left. \begin{array}{l} Y(z) = G(z)R(z) \\ r(t) = \delta(t) \Rightarrow R(z) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow G(z) = Y(z) = Z[g(t)] = Z\{L^{-1}[G(s)]\}$$

- 例: 已知采样控制系统的结构图如下, 求脉冲传递函数



解:

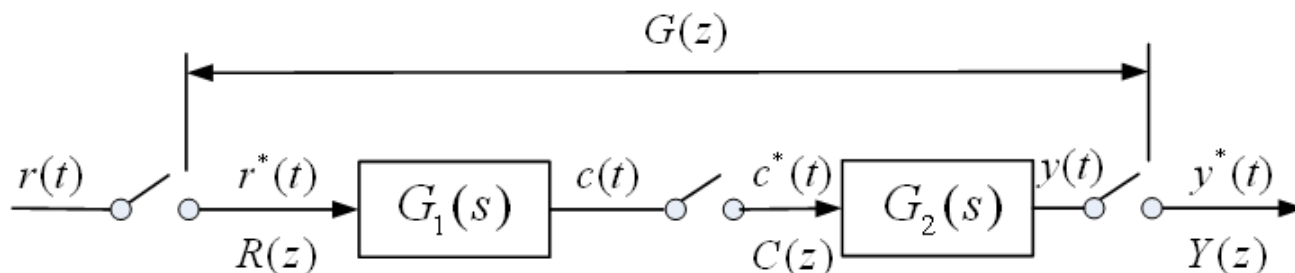
$$G(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+10} \quad G(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-10T}} = \frac{z(1-e^{-10T})}{(z-1)(z-e^{-10T})}$$





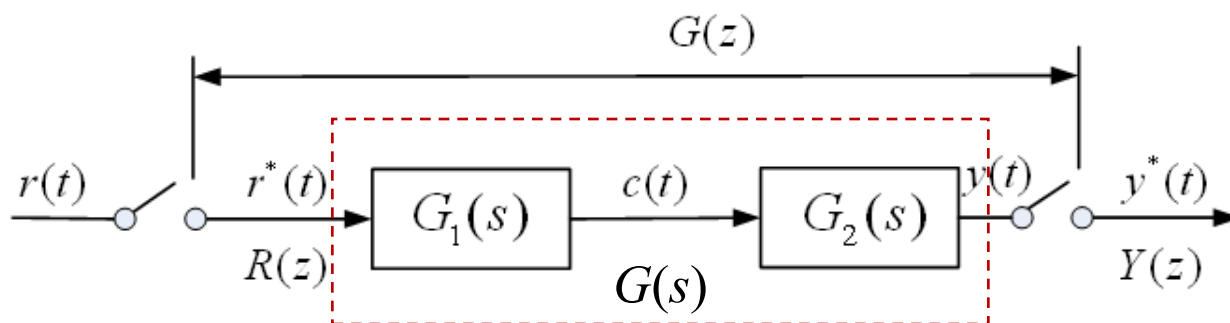
开环采样系统的脉冲传递函数

□ 串联环节间有采样开关



$$C(z) = G_1(z)R(z) \quad Y(z) = G_2(z)C(z) \quad G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = G_1(z)G_2(z)$$

□ 串联环节间无采样开关



$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = Z[G(s)] = Z[G_1(s)G_2(s)] = G_1G_2(z)$$





开环采样系统的脉冲传递函数

□ z 变换无串联性, $G_1(z)G_2(z) \neq G_1G_2(z)$; 当开环系统具有多个串联环节时, 其脉冲传递函数与采样开关的数量和位置有关。

□ 例: 已知 $G_1(s) = b/s$, $G_2(s) = a/(s+a)$, 输入 $r(t) = 1(t)$, 对于两环节间有无采样开关两种情况, 求脉冲传递函数和输出的 z 变换。

解: 输入的 z 变换 $R(z) = \frac{z}{z-1}$, 当有采样开关时:

$$G_1(z) = Z\left[\frac{b}{s}\right] = \frac{bz}{z-1}$$

$$G_2(z) = Z\left[\frac{a}{s+a}\right] = \frac{az}{z-e^{-aT}}$$

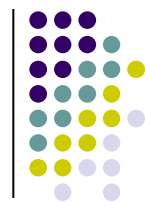
$$G(z) = G_1(z)G_2(z) = \frac{abz^2}{(z-1)(z-e^{-aT})} \quad Y(z) = G(z)R(z) = \frac{abz^3}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$$

当无采样开关时:

$$G(z) = G_1G_2(z) = Z\left[\frac{ab}{s(s+a)}\right] = \frac{bz(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

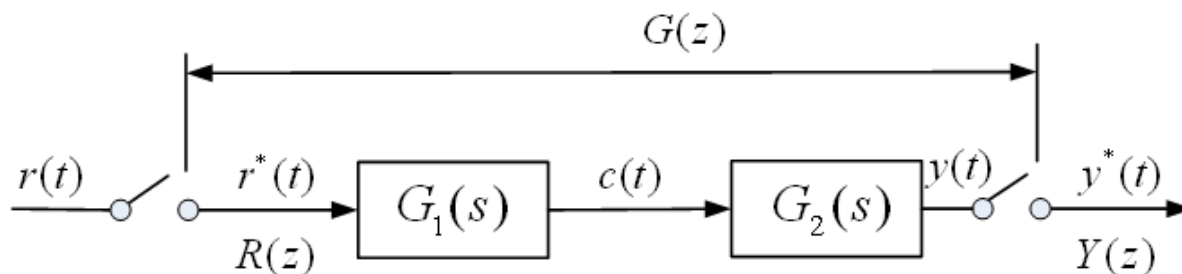
$$Y(z) = G(z)R(z) = \frac{bz^2(1-e^{-aT})}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$$





开环采样系统的脉冲传递函数

□ 具有零阶保持器的开环脉冲传递函数



$$G_1(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

$$G(z) = Z[G_1(s)G_2(s)] = Z\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_2(s)\right]$$

线性定理:

$$G(z) = Z\left[\frac{1}{s} G_2(s)\right] - Z\left[e^{-Ts} \frac{1}{s} G_2(s)\right]$$

位移定理:

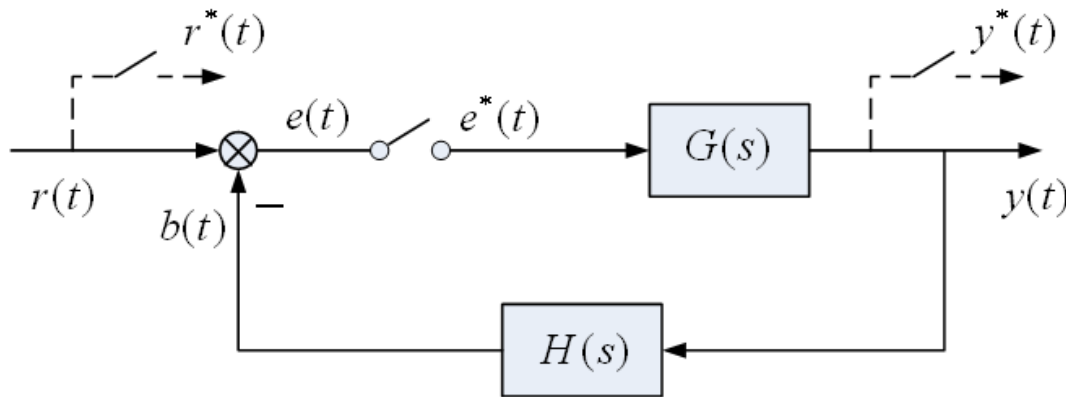
$$G(z) = Z\left[\frac{1}{s} G_2(s)\right] - z^{-1} Z\left[\frac{1}{s} G_2(s)\right] = (1 - z^{-1}) Z\left[\frac{1}{s} G_2(s)\right]$$





闭环采样系统的脉冲传递函数

□ 具有负反馈的线性离散系统



$$E(s) = R(s) - B(s) \quad B(s) = H(s)Y(s) \quad Y(s) = G(s)E^*(s)$$

$$E^*(s) = R^*(s) - [H(s)G(s)E^*(s)]^* = R^*(s) - HG^*(s)E^*(s)$$

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + HG^*(s)} \quad Y^*(s) = [G(s)E^*(s)]^* = G^*(s)E^*(s) = \frac{G^*(s)R^*(s)}{1 + HG^*(s)}$$





闭环采样系统的脉冲传递函数

□ 对 $E^*(s), Y^*(s)$ 取z变换

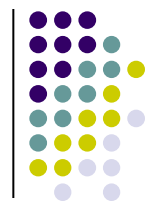
$$\Theta_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + HG(z)} \quad \Theta(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + HG(z)}$$

□ 闭环采样系统的特征方程

$$D(z) = 1 + HG(z) = 0$$

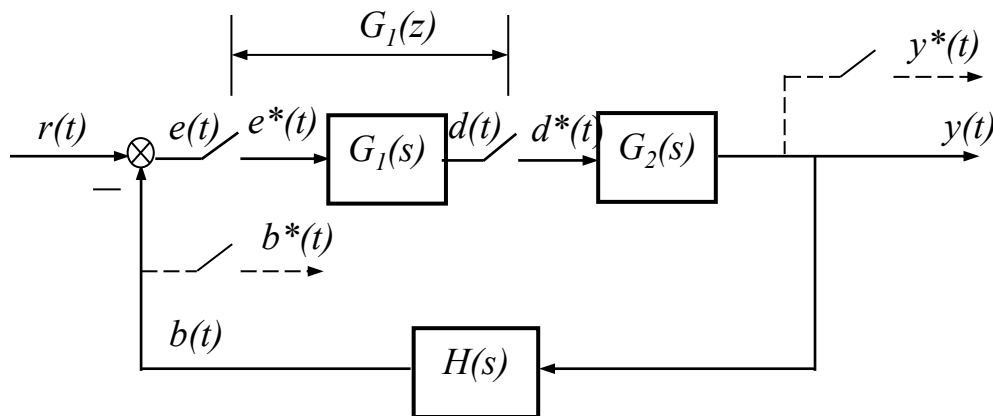
□ 开环离散系统的脉冲传递函数 $HG(z)$





闭环采样系统的脉冲传递函数

□ 具有数字校正装置的闭环离散系统



$$Y(s) = G_2(s)D^*(s) \quad D(s) = G_1(s)E^*(s) \quad Y(s) = G_2(s)G_1^*(s)E^*(s)$$

$$D^*(s) = G_1^*(s)E^*(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s) = R(s) - H(s)G_2(s)G_1^*(s)E^*(s)$$

$$E^*(s) = R^*(s) - HG_2^*(s)G_1^*(s)E^*(s) \quad E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + G_1^*(s)HG_2^*(s)}$$

$$Y^*(s) = G_2^*(s)G_1^*(s)E^*(s) = \frac{G_2^*(s)G_1^*(s)R^*(s)}{1 + G_1^*(s)HG_2^*(s)} \quad \Theta(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z)HG_2(z)}$$

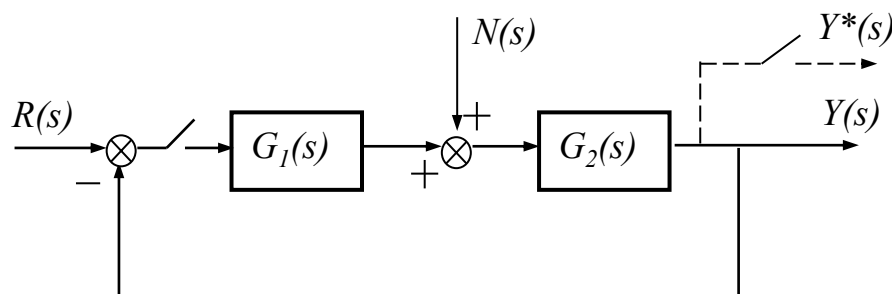




闭环采样系统的脉冲传递函数

□ 具有扰动的闭环离散系统

- 除给定输入信号外，在系统的连续信号部分具有扰动信号输入；
- 扰动对输出量的影响是衡量系统性能的一个重要指标。



$$Y(z) = \frac{G_2 N(z)}{1 + G_1 G_2(z)}$$

- 连续的输入信号直接进入连续环节 $G_2(s)$ ，只能求出输出信号的 z 变换表达式，而求不出脉冲传递函数。





闭环采样系统的脉冲传递函数

- 在连续系统中，闭环传递函数与相应的开环传递函数之间具有确定的关系，可用一种典型的结构图来描述。
- 在离散系统中，由于采样开关在系统中的位置不同，既含有连续传递关系，又含有离散传递关系，没有唯一的典型结构。
- 不能根据对应连续系统的闭环传递函数直接求 z 变换而得到。
- 对于某些系统，无法得出脉冲传递函数，只能得出输出的 z 变换。





闭环采样系统的脉冲传递函数

□ 简单求法

- 将离散系统按连续系统考虑，得到闭环输出 $Y(s)$ 的表达式；
- 对 $Y(s)$ 的表达式进行采样离散化：在采样器隔开的地方加 “*” ；
- 将 $[Y^*(s)]$ 写成 $Y(z)$ ；
- 若输入的 z 变换能够单独表达出来，得到闭环脉冲传递函数。





差分方程与脉冲传递函数的关系

- 两者都是描述离散控制系统的数学模型，它们之间的关系类似于连续系统中微分方程和传递函数之间的关系；
- 通过z变换可以从差分方程得出脉冲传递函数，也可以从脉冲传递函数得出差分方程。

➤ 若差分方程为
$$y(k) = -\sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{j=0}^m b_j r(k-j)$$

在零初始条件下，对上式进行z变换，并利用实位移定理，可得

$$Y(z) = -\sum_{i=1}^n a_i z^{-i} Y(z) + \sum_{j=0}^m b_j z^{-j} R(z)$$

整理得

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}}$$



采样控制系统的稳定性



□ 脉冲传递函数的一般形式为

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{M(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{j=0}^n a_j z^j} = \frac{b_m}{a_n} \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)}$$

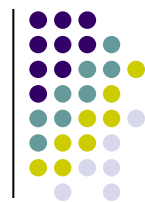
- 系统的稳定性由自身的结构和参数决定，与输入无关。对于单位阶跃输入，

$$Y(z) = \frac{b_m}{a_n} \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)} \cdot \frac{z}{z-1} = c_0 \frac{z}{z-1} + \sum_{j=1}^n \frac{c_j z}{z - p_j}$$

其中， p_j 为闭环脉冲传递函数的极点， $c_0 = \frac{M(1)}{D(1)}$ ， $c_j = \frac{M(p_j)}{(p_j - 1)D'(p_j)}$
取z反变换后，
$$y(kT) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j p_j^k$$

第一项为稳态分量，第二项为动态分量。若要系统稳定，则要求 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n c_j p_j^k = 0$ ，即 $|p_i| < 1, j = 1, 2, \dots, n$





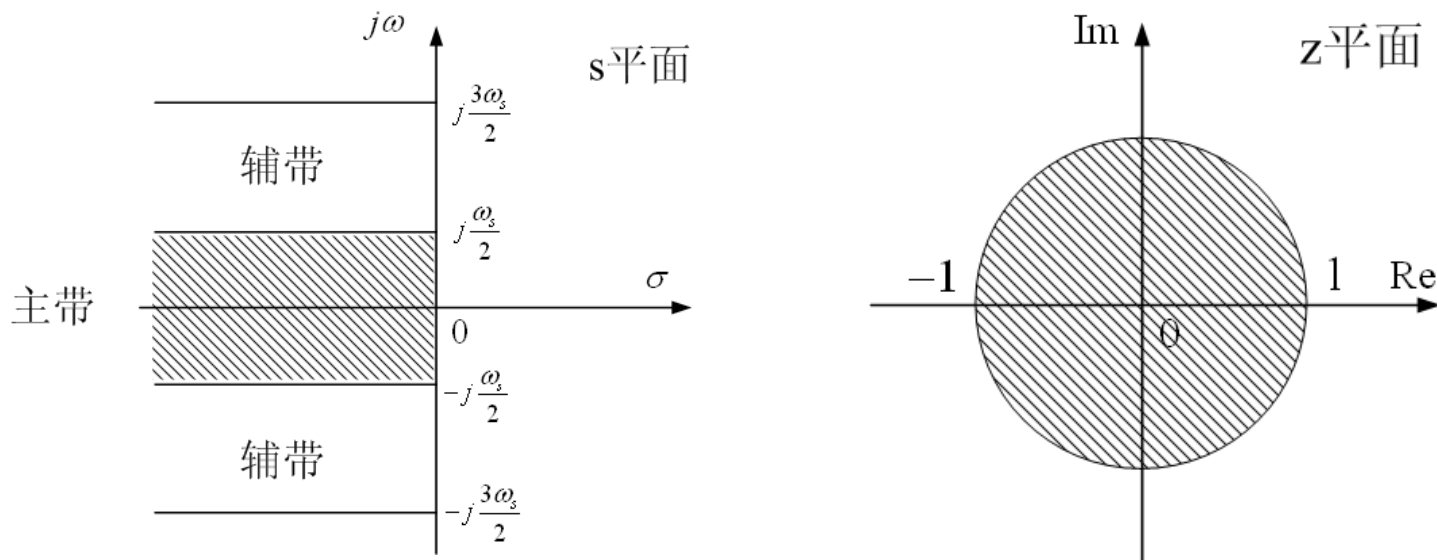
采样控制系统的稳定性

□ s域与z域的映射关系

$z = e^{Ts}$, 令 $s = \sigma + jw$, 得 $z = e^{(\sigma + jw)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{jwT}$, 那么

$$|z| = e^{\sigma T}, \angle z = wT$$

对于s平面虚轴上的点, $|z| = 1, \angle z = wT$
即将s平面上的虚轴映射为z平面上圆心在原点的单位圆, 将s左半平面映射到z平面上圆心在原点的单位圆内。





采样控制系统的稳定性

- 如果一个线性定常离散系统的脉冲响应序列趋于零，则系统是稳定的，否则系统不稳定。
- 由 s 域到 z 域的映射关系及连续系统的稳定判据，可知：
 - s 左半平面映射为 z 平面单位圆内的区域，对应稳定区域；
 - s 右半平面映射为 z 平面单位圆外的区域，对应不稳定区域；
 - s 平面上的虚轴，映射为 z 平面的单位圆周，对应临界稳定情况，属不稳定。
- 线性定常离散系统稳定的充要条件是：系统闭环脉冲传递函数的全部极点均分布在 z 平面上以原点为圆心的单位圆内。



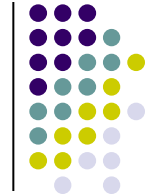


采样控制系统的稳定性判据

- 不能直接套用劳斯判据
- 通过某种变换 $w = f(z)$, 使得
 - z 平面单位圆 $\rightarrow w$ 平面的虚轴
 - z 平面单位圆内部 $\rightarrow w$ 左半平面
 - z 平面单位圆外部 $\rightarrow w$ 右半平面
 - 特征方程 $D(z) \rightarrow D(w)$ 为代数方程
- 双线性变换

$$z = \frac{w+1}{w-1} \qquad w = \frac{z+1}{z-1}$$



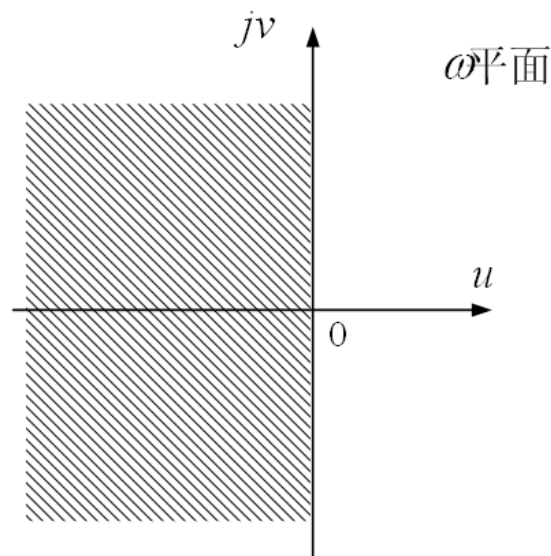
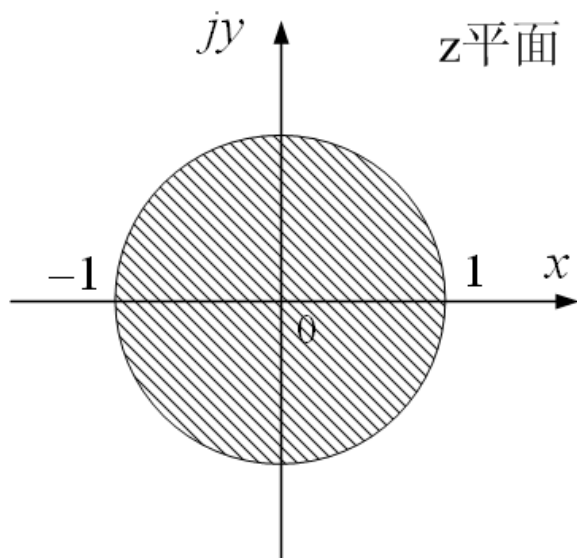


采样控制系统的稳定性判据

□ 设 $z = x + jy$, $\omega = u + jv$, 得 $u + jv = \frac{(x^2 + y^2) - 1}{(x-1)^2 + y^2} - j \frac{2y}{(x-1)^2 + y^2}$
由于 $(x-1)^2 + y^2 \geq 0$, 那么

- $x^2 + y^2 = 1 \rightarrow u = 0$
- $x^2 + y^2 < 1 \rightarrow u < 0$
- $x^2 + y^2 > 1 \rightarrow u > 0$

□

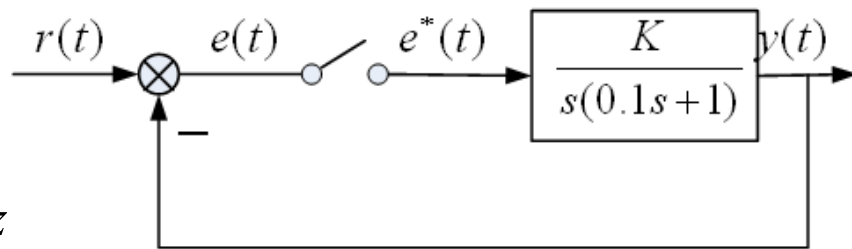




采样控制系统的稳定性判据

- 例：设闭环离散系统结构如下，且采样周期 $T = 0.1\text{s}$ ，求使系统稳定的 K 范围。

解：开环脉冲传递函数



$$G(z) = Z \left[\frac{K}{s(0.1s+1)} \right] = \frac{0.632Kz}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

闭环特征方程为 $1 + G(z) = z^2 + (0.632K - 1.368)z + 0.368 = 0$

令 $z = \frac{\omega + 1}{\omega - 1}$ ，可得 $0.632K\omega^2 + 1.264\omega + 2.736 - 0.632K = 0$

根据劳斯判据可知，若使系统稳定，要求

$$0.632K > 0, 2.736 - 0.632K > 0$$

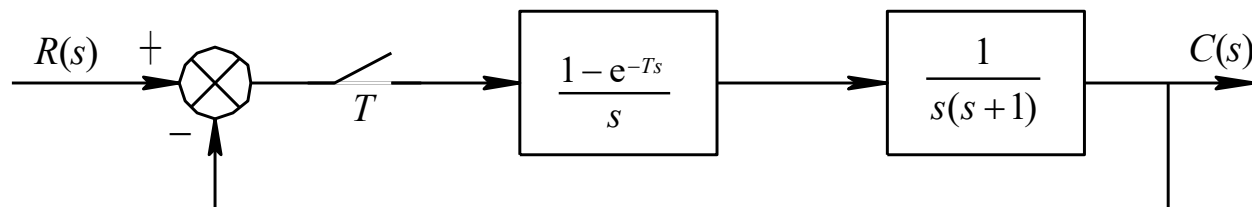
即 $0 < K < 4.33$ ，当 $K = 4.33$ 时，系统临界稳定。





采样控制系统的稳定性判据

□ 例：判断下图所示系统在采样周期 $T=1s$, $T=4s$ 时的稳定性。



解：开环脉冲传递函数为

$$\begin{aligned} G(z) &= Z\left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{1}{s(s+1)}\right) = (1 - z^{-1})Z\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right) \\ &= (1 - z^{-1})\left(\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z - e^{-T}}\right) = \frac{T(z - e^{-T}) - (z-1)(z - e^{-T}) + (z-1)^2}{(z-1)(z - e^{-T})} \end{aligned}$$

闭环系统特征方程为

$$z^2 + (T - 2)z + 1 - Te^{-T} = 0$$

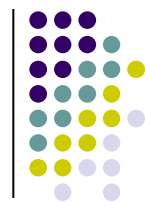




采样控制系统的稳定性判据

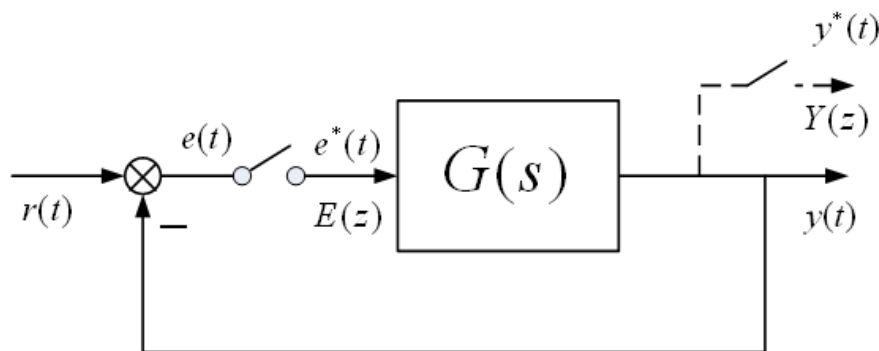
- 当 $T = 1s$ 时, 系统的特征方程为 $z^2 - z + 0.632 = 0$
系统的闭环极点为 $z_{1,2} = 0.5 \pm j0.618$
二者均位于单位圆内, 闭环系统稳定。
- 当 $T = 2s$ 时, 系统的特征方程为 $z^2 + 2z + 0.927 = 0$
系统的闭环极点为 $z_1 = -0.73, z_2 = -1.27$
一极点位于单位圆内, 闭环系统不稳定。
- 闭环系统的稳定性与采样周期 T 有关; T 越大, 稳定性越差。





采样控制系统的稳态误差

- 稳态误差：对于稳定的闭环系统，当采样时刻趋于无穷时，误差脉冲的取值。
- 采样控制系统没有唯一的典型结构，无法给出误差脉冲传递函数的一般计算公式，因此需根据具体的采样系统求稳态误差。
- 对于单位反馈采样控制系统



$$\Theta_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + G(z)}$$

若系统稳定，则 $\Theta_e(z)$ 的所有极点均位于单位圆内。



采样控制系统的稳态误差

□ 根据终值定理

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)R(z)}{1+G(z)}$$

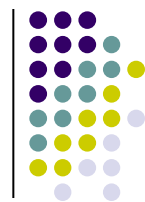
□ 对于单位阶跃输入信号 $r(t) = 1(t)$

$$R(z) = \frac{z}{z-1} \quad e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+G(z)} = \frac{1}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} G(z)} = \frac{1}{K_p}$$

其中, $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1+G(z)]$ 称为采样系统的静态位置误差系数

- 在采样系统中, 把开环传递函数 $G(z)$ 具有 $z=1$ 的极点数 ν 作为划分系统型别的标准, $\nu=0, 1, 2, \dots$ 的系统称为0型、I、II型系统。
- 对于0型系统, K_p 为常数, 因此 $e_{ss} \neq 0$; 对于I、II型系统, $K_p \rightarrow \infty$, 因此 $e_{ss} = 0$ 。





采样控制系统的稳态误差

- 对于单位斜坡输入信号 $r(t) = t$

$$R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z-1)[(1+G(z))]} = \frac{T}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)} = \frac{T}{K_v}$$

其中, $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)$ 称为采样系统的静态速度误差系数。

- 对于0型系统, $K_v = 0$, 因此 $e_{ss} \rightarrow \infty$; 对于I型系统, K_v 为常数, 因此 $e_{ss} \neq 0$; 对于II型系统, $K_v \rightarrow \infty$, 因此 $e_{ss} = 0$





采样控制系统的稳态误差

- 对于单位加速度输入信号 $r(t) = t^2 / 2$

$$R(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2[1+G(z)]} = \frac{T^2}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)} = \frac{T^2}{K_a}$$

其中, $K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)$ 称为采样系统的静态加速度误差系数。

- 对于0、I型系统, $K_a = 0$, 因此 $e_{ss} \rightarrow \infty$; 对于II型系统, K_a 为常数, 因此 $e_{ss} \neq 0$ 。





采样控制系统的稳态误差

单位反馈采样控制系统的稳态误差

系统型别	位置误差 $r(t) = 1(t)$	速度误差 $r(t) = t$	加速度误差 $r(t) = t^2 / 2$
0型	$1 / K_p$	∞	∞
I型	0	T / K_v	∞
II型	0	0	T^2 / K_a

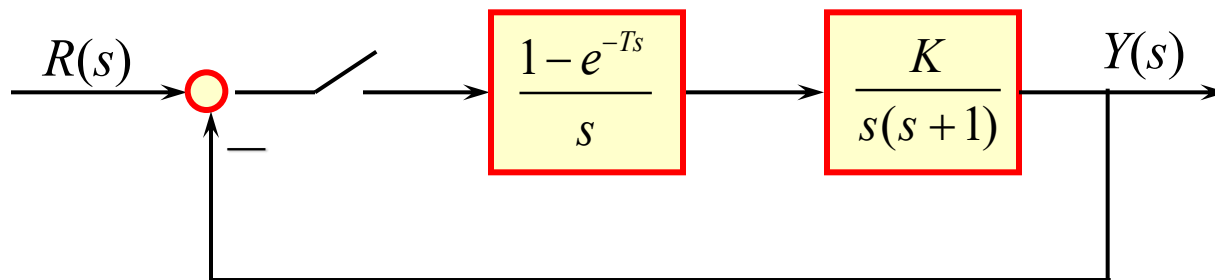
- 仅限于典型的单位反馈采样控制系统；
- 与系统的型别、误差系数、采样周期有关；周期越大，误差越大。





采样控制系统的稳态误差

- 已知系统结构图如下所示, $K=1$ 、 $T=0.1s$ 、 $r(t)=1(t)+t$, 求系统的稳态误差。



解: $G(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] = (1 - z^{-1})\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1 - e^{-T})z}{(z-1)(z - e^{-T})}\right]$
将 $T=0.1$ 代入, 得

$$G(z) = \frac{0.005(z + 0.9)}{(z - 1)(z - 0.905)}$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1 + G(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[1 + \frac{0.005(z + 0.9)}{(z - 1)(z - 0.905)} \right] = \infty$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{0.005(z + 0.9)}{(z - 1)(z - 0.905)} = 0.1$$

$$e(\infty) = \frac{1}{K_p} + \frac{T}{K_v} = 1$$





采样控制系统的动态性能分析

□ 时域分析

- 一般假定输入为单位阶跃函数 $r(t)=1(t)$;
- 通过z变换-反变换求得输出脉冲序列;
- 采用平滑曲线将个离散点连接, 然后用类似于连续系统的方法分析其时域指标: 超调量、调节时间、上升时间等。

□ 例: 某一单位负反馈系统, 开环传递函数为 $G(z) = \frac{1.264z}{z^2 - 1.368z + 0.368}$
采样周期为 $T = 0.1s$ 。求系统指标 t_s 和 σ 的近似值。

解: 闭环传递函数为

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{1.264z}{z^2 - 0.104z + 0.368}$$

对于单位阶跃输入信号, 输出为

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = \frac{1.264z}{z^2 - 0.104z + 0.368} \cdot \frac{z}{z - 1}$$

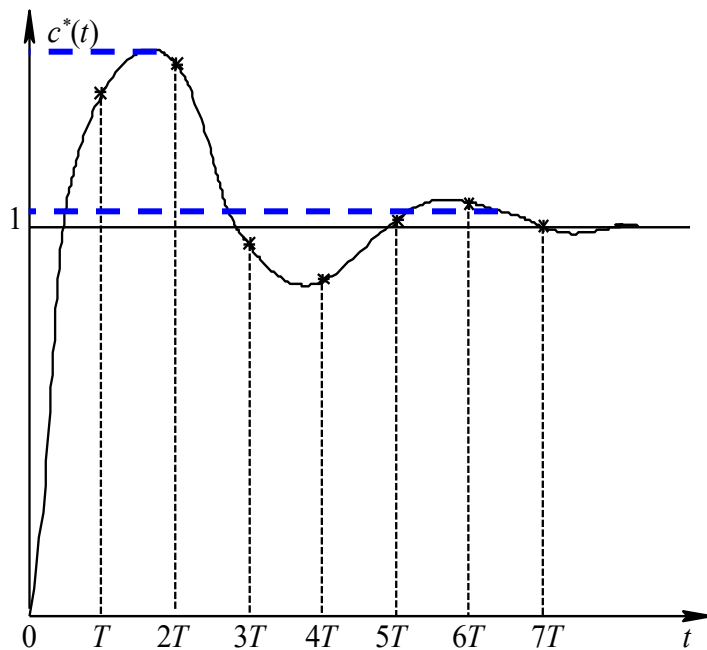




采样控制系统的动态性能分析

对 $Y(z)$ 取 z 反变换, 得 $Y(z)=1.264z^{-1}+1.395z^{-2}+0.943z^{-3}+0.848z^{-4}$
 $+1.004z^{-5}+1.055z^{-6}+1.003z^{-7}+\dots$

$$y^*(t)=1.264\delta(t-T)+1.395\delta(t-2T)+0.943\delta(t-3T)+0.848\delta(t-4T)$$
$$+1.004\delta(t-5T)+1.055\delta(t-6T)+1.003\delta(t-7T)+\dots$$



由波形曲线可知

$$t_s \approx (6 \sim 7)T = 0.6 \sim 0.7s,$$
$$\sigma = 40\% \sim 50\%$$



采样控制系统的动态性能分析

□ 脉冲传递函数的一般形式为

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{M(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{j=0}^n a_j z^j} = \frac{b_m}{a_n} \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)}$$

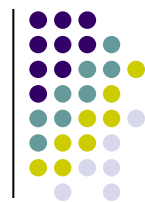
□ 对于单位阶跃输入

$$Y(z) = \frac{b_m}{a_n} \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^n (z - p_j)} \cdot \frac{z}{z-1} = c_0 \frac{z}{z-1} + \sum_{j=1}^n \frac{c_j z}{z - p_j}$$

其中, p_j 为闭环脉冲传递函数的极点, $c_0 = \frac{M(1)}{D(1)}$, $c_j = \frac{M(p_j)}{(p_j - 1)D'(p_j)}$
取z反变换后, 可知

$$y(kT) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j p_j^k$$

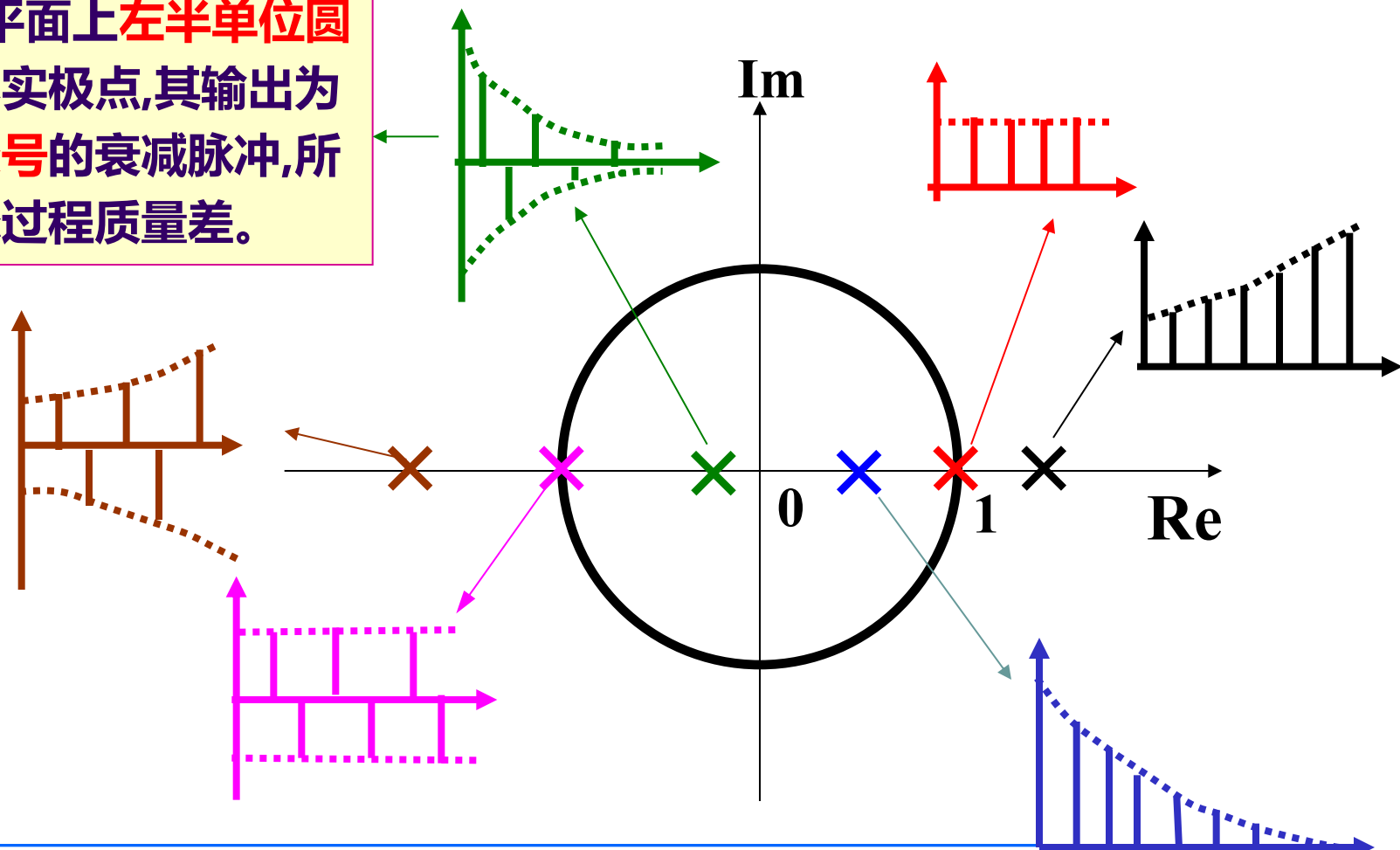




采样控制系统的动态性能分析

□ 闭环实数极点分布与相应的动态响应形式

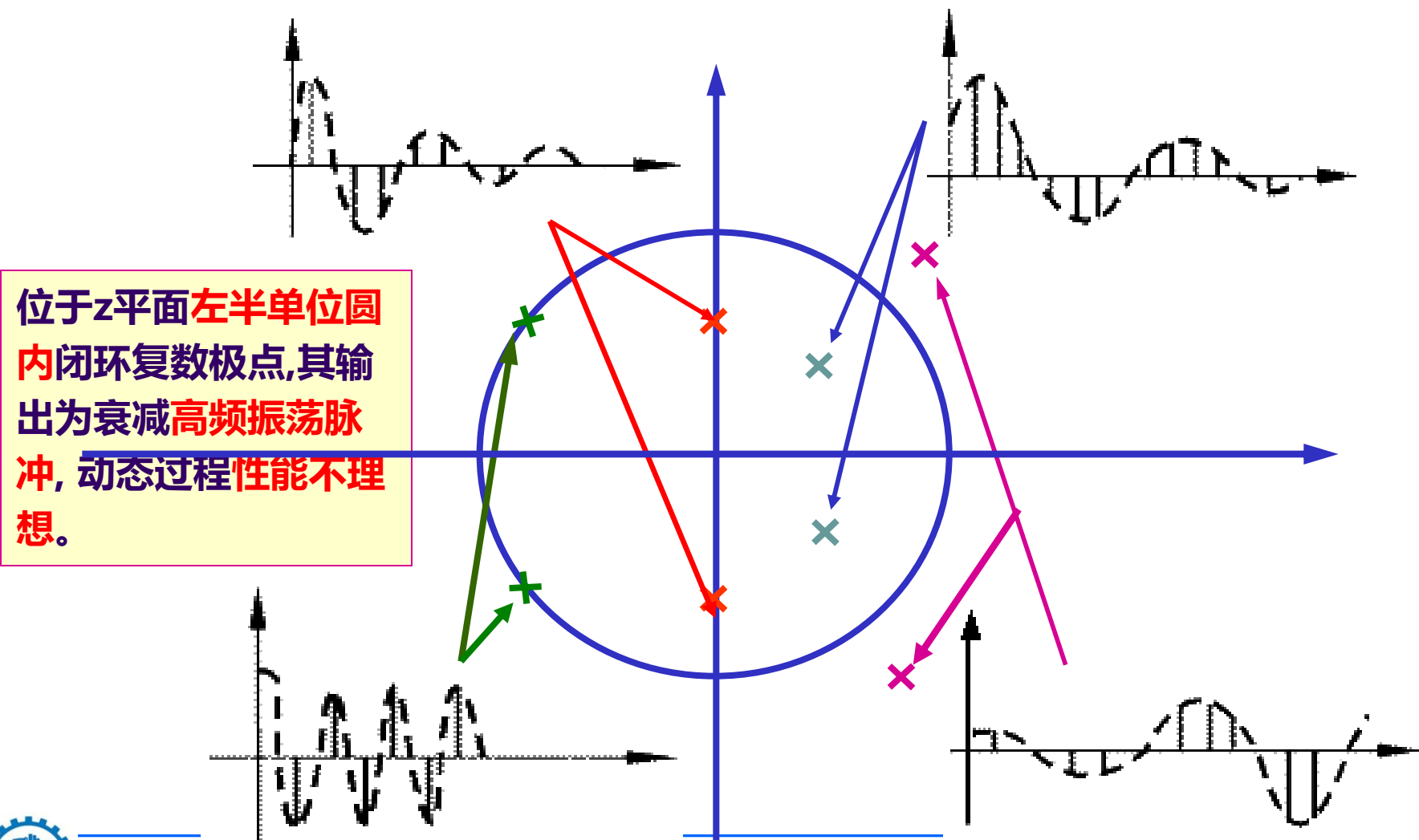
位于 z 平面上**左半单位圆**内闭环实极点,其输出为**交替变号**的衰减脉冲,所以动态过程质量差。





采样控制系统的动态性能分析

□ 闭环复数极点分布与相应的动态响应形式





采样控制系统的动态性能分析

□ 闭环极点与动态响应的关系

- 当闭环极点位于单位圆内时，对应的瞬态分量是收敛的，故系统是稳定的。
- 当闭环极点位于单位圆外时，对应的瞬态分量均不收敛，产生持续等幅脉冲或发散脉冲，故系统不稳定。
- 极点距离 z 平面坐标原点越近，则衰减速度越快；若极点位于单位圆内的正实轴上，对应的瞬态分量按指数函数衰减。
- 单位圆内一对共轭复数极点对应的瞬态分量为衰减的振荡函数。
- 为使离散控制系统具有比较满意的瞬态响应性能，闭环脉冲传递函数的极点最好分布在单位圆内的右半部，并尽量靠近 z 平面的坐标原点。

