西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第四节
PID参数整定&根轨迹校正

主要内容

- PID控制器参数的整定

- 基于根轨迹的超前校正

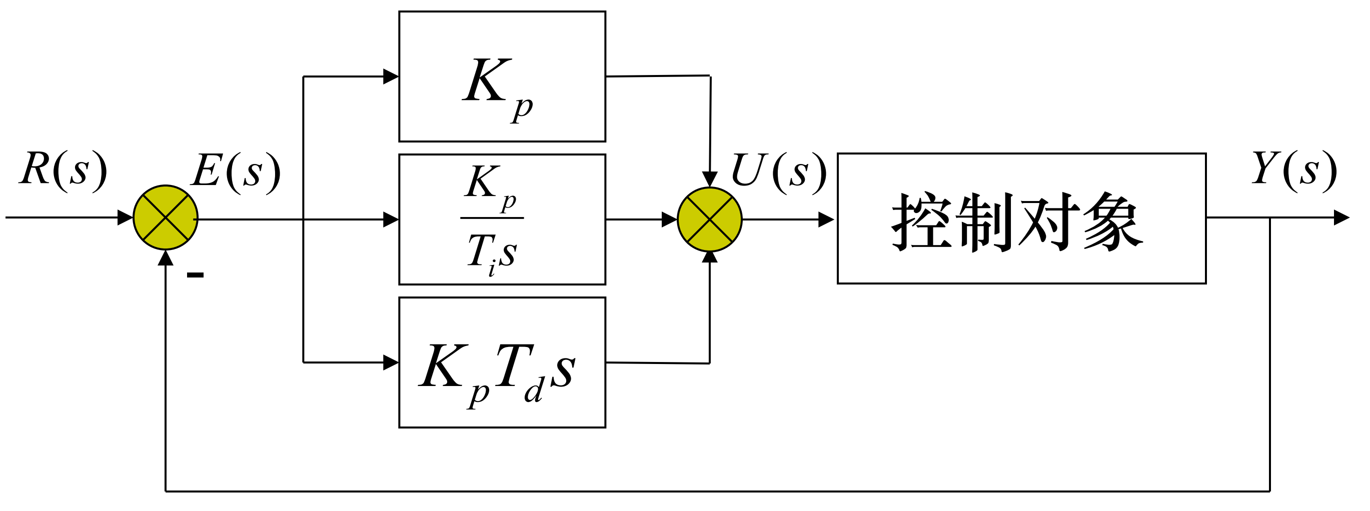
- 基于根轨迹的滞后校正

PID控制器参数整定

- PID控制器的传递函数

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

- PID控制器的结构



PID控制器参数整定

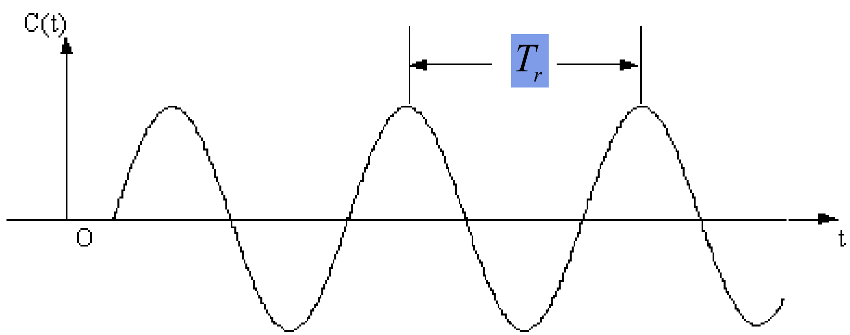
- PID控制器参数与时域性能指标间的关系

参数名称	上升时间	超调量	调整时间	稳态误差
$K_p \uparrow$	减小	增大	微小变化	减小
$K_i(1/T_i)\uparrow$	减小	增大	增大	消除
$K_d(T_d)\uparrow$	微小变化	减小	减小	与$K_p\uparrow$有关

- PID控制器参数选择的次序：①比例系数；②积分系数；③微分系数。

Ziegler-Nichols整定法则

- 临界比例度法（1942年提出）
  - **切除PID控制器中的积分与微分作用，取较小的比例增益K_p值，并投入闭环运行；**
  - **将K_p由小变大，对于每一K_p值，均以小幅度的阶跃信号为输入，直至产生等幅振荡；**



Ziegler-Nichols整定法则

- 临界比例度法
  - **设等幅振荡的振荡周期为T_r、比例增益K_{pr}，那么可根据下表选择PID参数。**

控制器	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{pr}$		
PI	$0.45K_{pr}$	$0.83T_r$	
PID	$0.6K_{pr}$	$0.5T_r$	$0.12T_r$

Ziegler-Nichols整定法则

- 例1：设被控对象的传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(s+5)}$
- 使用PID控制器进行串联校正，试确定其参数Kp，Ti，Td。

$$\Phi_1(s)=\frac{K_p}{s(s+1)(s+5)+K_p}$$

- 解：加入比例环节后，闭环传递函数为
- 根据劳斯阵列可知，当 $K_{pr}=30$ 时，闭环系统有一对共轭虚根 $s_{12}=\pm\sqrt{5}j$，那么对应的振荡周期为 $T_r=\dfrac{2\pi}{\sqrt{5}}\approx 2.81$
- 那么对于比例控制，$K_p=15,\Phi_1(s)=\dfrac{15}{s^3+6s^2+5s+15}$

Ziegler-Nichols整定法则

- 对于PI控制，

$$K_p = 0.45K_{pr} = 13.5, T_i = 0.83T_r = 2.33$$

$$\Phi_2(s) = \frac{31.46s + 13.5}{2.33s^4 + 13.98s^3 + 11.65s^2 + 31.46s + 13.5}$$

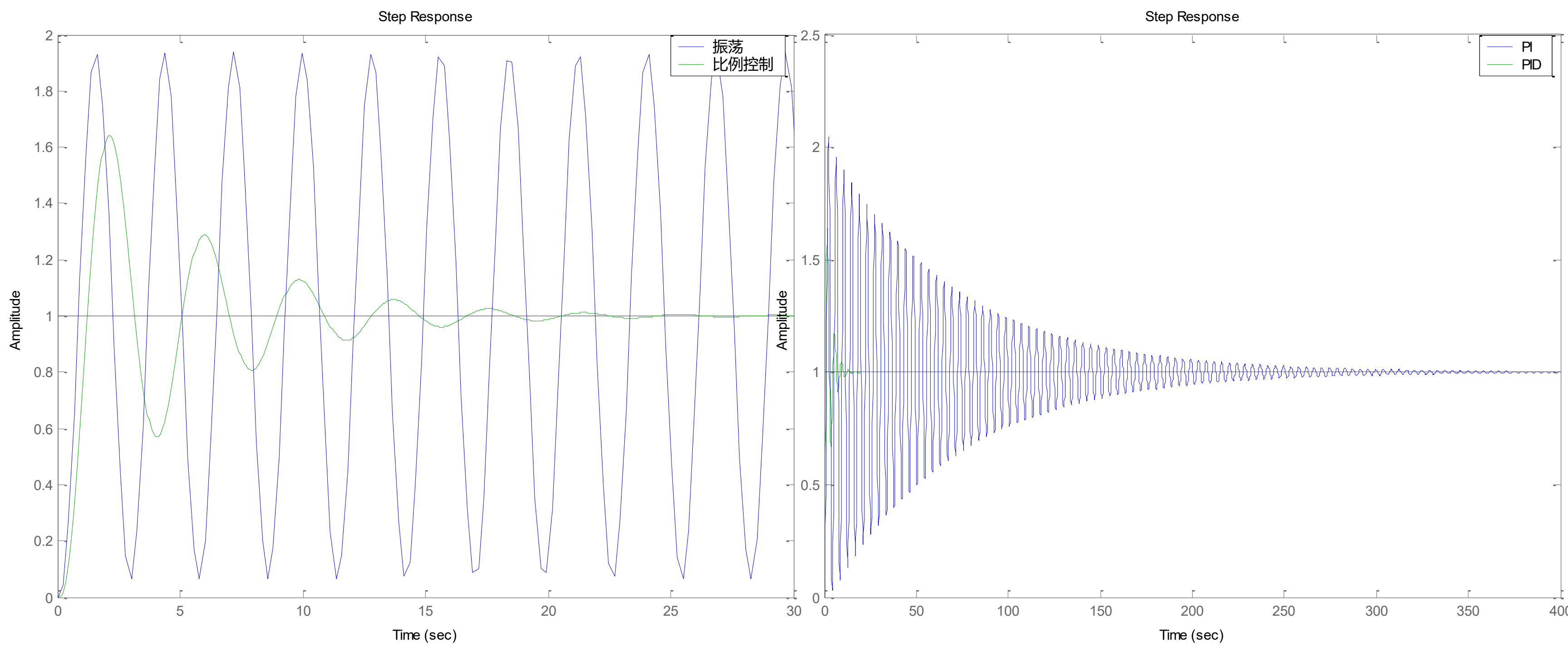
- 对于PID控制，

$$K_p = 0.6K_{pr} = 18, T_i = 0.5T_r = 1.405, T_d = 0.12T_r = 0.337$$

$$\Phi_3(s) = \frac{8.53s^2 + 25.29s + 18}{1.41s^4 + 8.43s^3 + 15.55s^2 + 25.29s + 18}$$

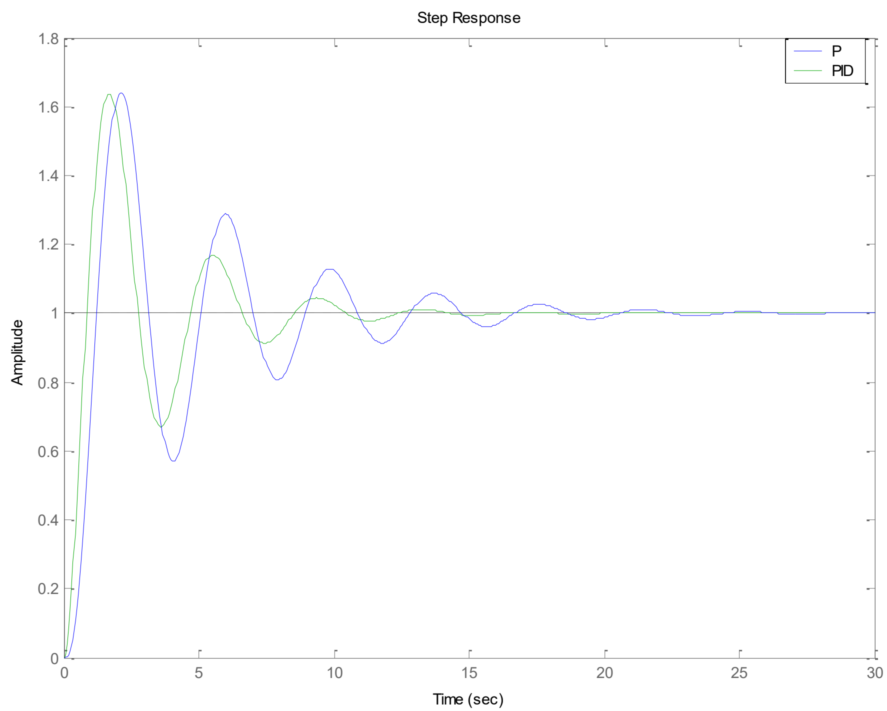
Ziegler-Nichols整定法则

- 阶跃响应曲线



Ziegler-Nichols整定法则

- 阶跃响应曲线



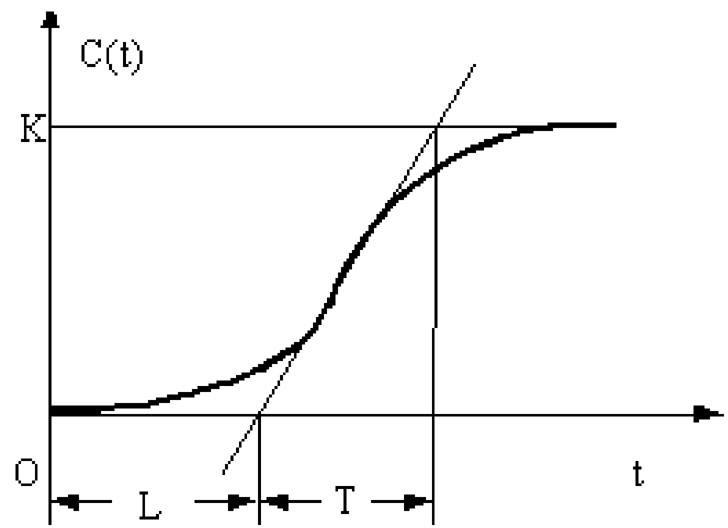
Ziegler-Nichols整定法则

- 临界比例度法的局限性

  - 不一定能直接获得理想的控制器参数，还需微调；
  - 实际的控制对象可能不允许出现等幅振荡，或者无法产生正常操作范围内的等幅振荡。

Ziegler-Nichols整定法则

- 响应曲线法
  - 给控制对象施加一控制信号（通常为阶跃信号），获得其S型响应曲线；
  - 通过响应曲线的转折点作一切线，获得控制对象广义近似模型的参数L和T；



  - 控制对象可近似为带延迟的一阶系统 $G_0(s)=\dfrac{K}{Ts+1}e^{-Ls}$

Ziegler-Nichols整定法则

- 响应曲线法
  - **可根据下表选择PID参数：**

控制器	K_p	T_i	T_d
P	T/L		
PI	$0.9T/L$	$3.3L$	
PID	$1.2T/L$	$2.0L$	$0.5L$

  - **特点：适合于存在明显纯滞后的自衡对象，且其阶跃响应曲线可用“一阶+纯滞后”来近似。**

根轨迹校正简介

- 当通过调节控制系统本身参数无法全面满足性能指标要求时，需要提供校正环节，按需改变系统性能；

- 若对稳态误差和频域指标有要求，则可以采用频域法，基于**Bode**图对原系统进行超前/滞后校正；

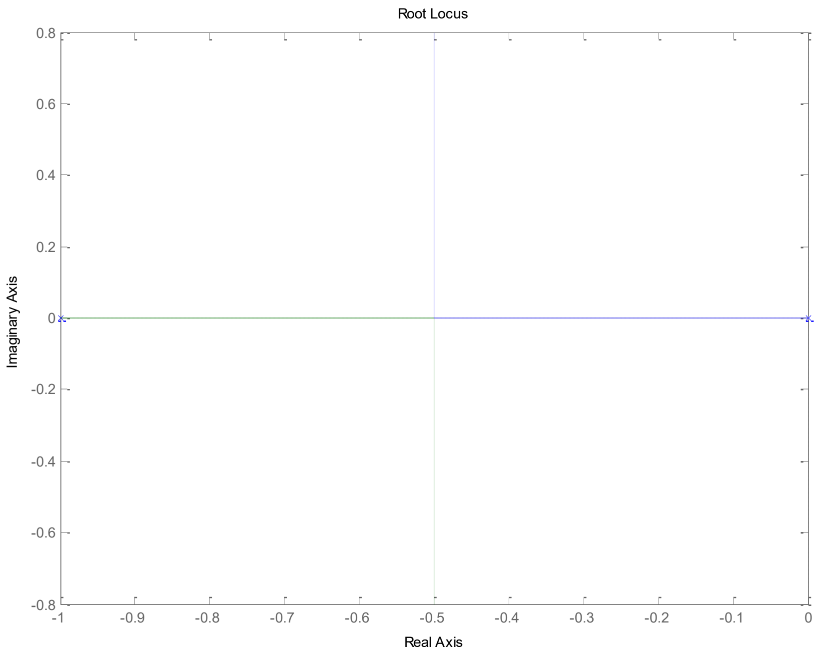
- 若对稳态误差和时域指标有要求，如何处理？

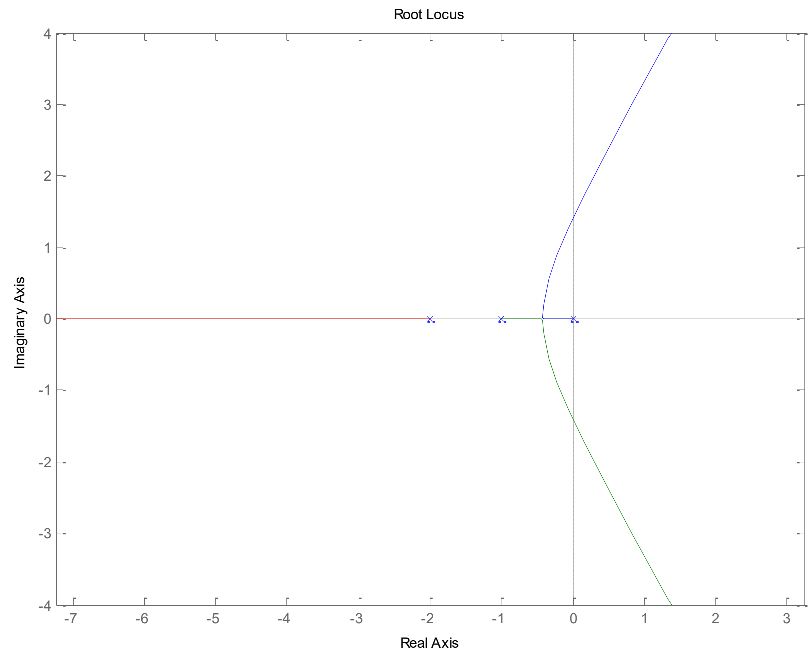
  时域指标 → 频域指标 → **Bode**图校正

  另寻它法！

根轨迹校正简介

- 时域指标 $\delta\%, t_s$ → 闭环主导极点位于期望的位置
- 根轨迹理论 → 在开环传递函数中增加零极点可以改变根轨迹的走势 → 影响主导极点的位置



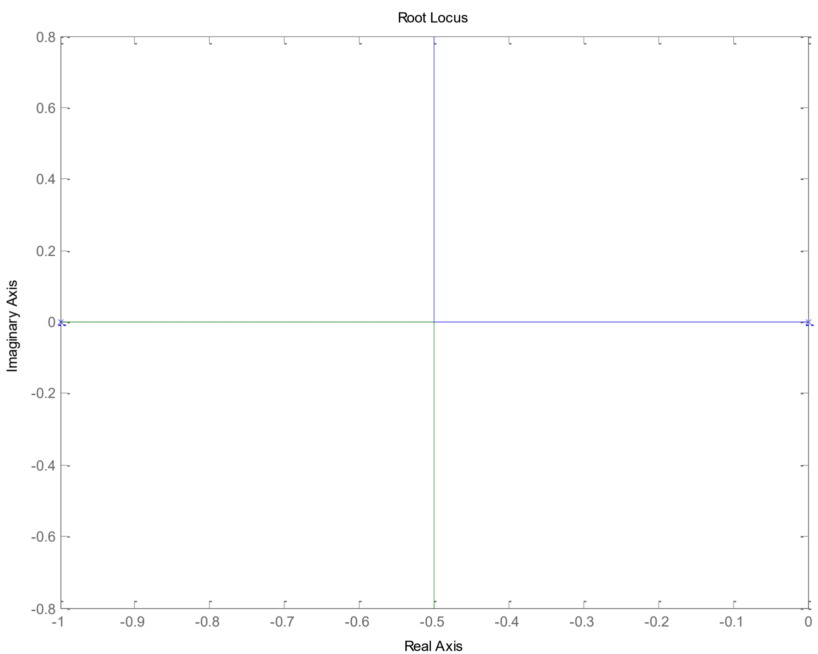


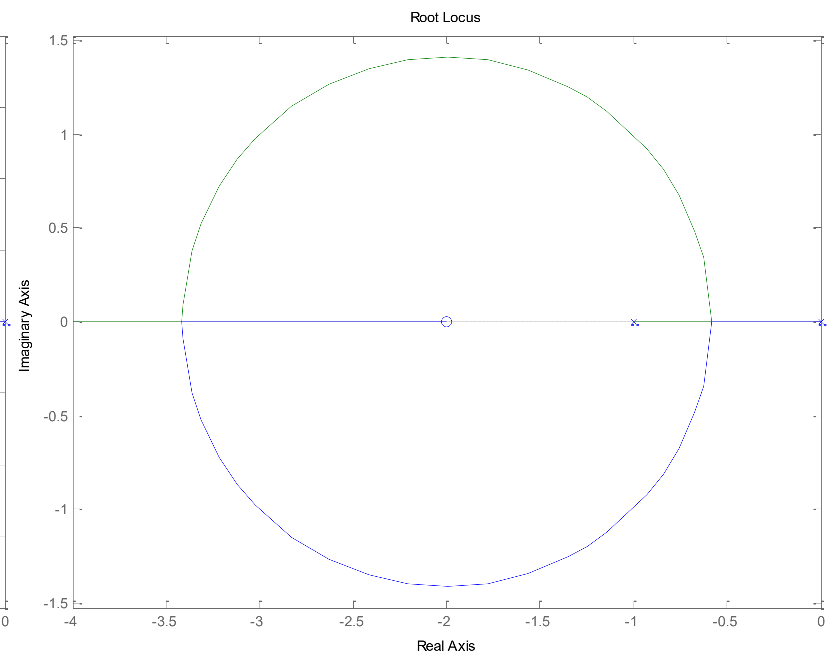
$$G_k(s) = \frac{k_g}{s(s+1)}$$

$$G_k(s) = \frac{k_g}{s(s+1)(s+2)}$$

根轨迹校正简介

- 时域指标 $\delta\%, t_s$ → 闭环主导极点位于期望的位置
- 根轨迹理论 → 在开环传递函数中增加零极点可以改变根轨迹的走势 → 影响主导极点的位置





$$G_k(s)=\frac{k_g}{s(s+1)}$$

$$G_k(s)=\frac{k_g(s+2)}{s(s+1)}$$

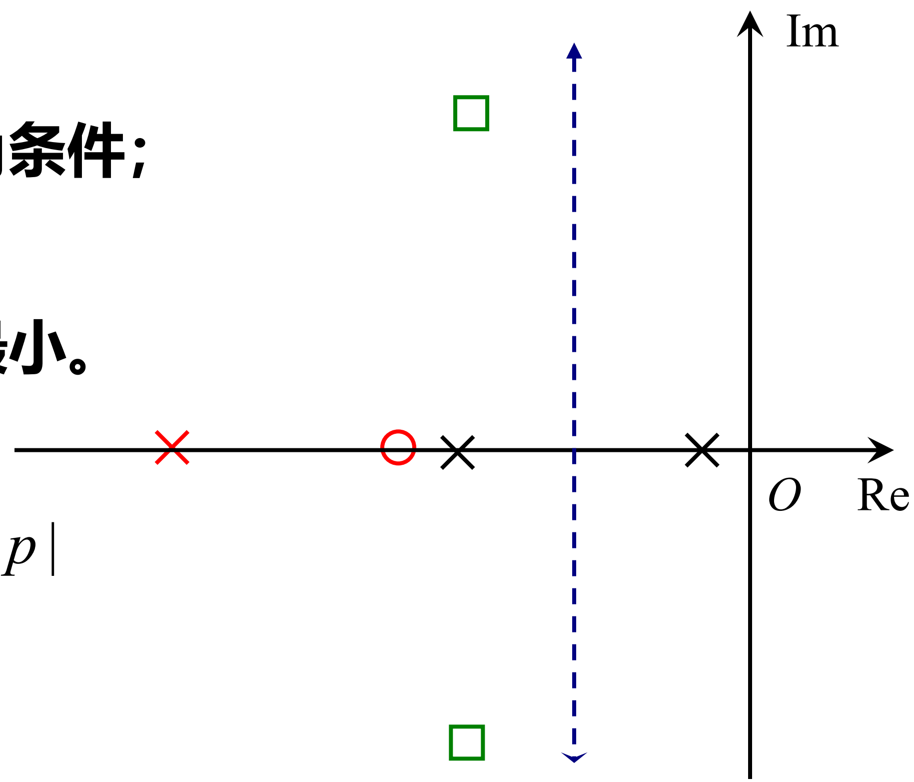
根轨迹校正简介

- 时域指标 $\delta\%, t_s$ → 闭环主导极点位于期望的位置
- 根轨迹理论 → 在开环传递函数中增加零极点可以改变根轨迹的走势 → 影响主导极点的位置
- 根轨迹校正的基本思想
- 主要内容
  - 超前校正
  - 滞后校正
  - 超前-滞后校正

超前校正

- **主要思想**
  - **通过增加超前环节** $G_c(s)=\dfrac{s+z}{s+p}, |z|<|p|$ **补偿相角，使得期望的闭环主导极点位于校正后系统的根轨迹上。**
- **主要原则**
  - **期望的闭环极点满足相角条件；**
  - **满足主导性；**
  - **引起的开环增益下降量最小。**

$$G_c(s)=\left|\frac{z}{p}\right|\cdot\frac{s/z+1}{s/p+1}, |z|<|p|$$



超前校正-方法1

- 主要方法 $\begin{cases}\text{一般方法}\\ \text{图解法}\end{cases}$；确定z和p的方法不同。

- 方法1：主要步骤
  - **列出系统性能指标，确定期望的闭环主导极点A；**

$$\left.\begin{aligned}\delta\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\% = e^{-\pi ctg\beta}\times 100\% \\ t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n},(\Delta = 5\%)\end{aligned}\right\} \Rightarrow s_{12} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$$

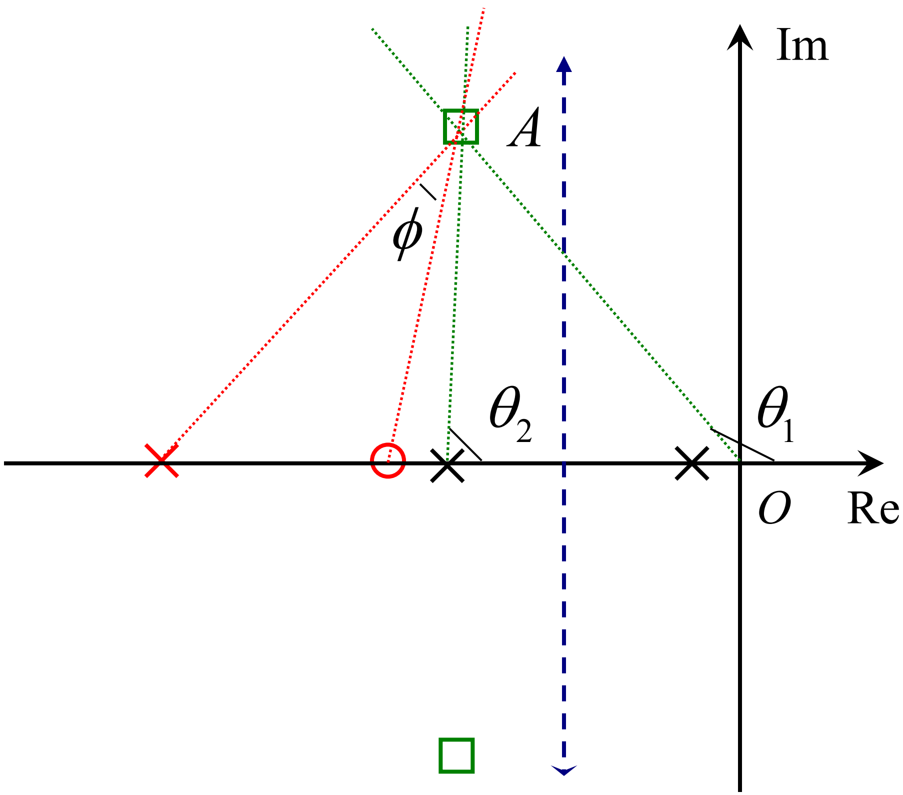
  - **画出原系统的根轨迹，检查点A是否位于该根轨迹上；**
  - **若需要设计校正环节，确定根轨迹通过点A所需要补偿的相角 ϕ ；**

$$\angle(G_c G) = \angle G_c + \angle G = (2k+1)\pi$$

$$\phi = \angle G_c = (2k+1)\pi - \angle G$$

超前校正-方法1

- 方法1：主要步骤
  - **在点A下方实轴处（或前两个实极点的左侧）添加超前环节的实零点（-z）；**
  - **根据需补偿的相角 ϕ，确定超前环节的实极点；**
  - **根据幅值条件，计算点A处的根轨迹增益，进而计算稳态误差系数；**
  - **验证是否达到要求的性能指标，若没有，则重新设计。**

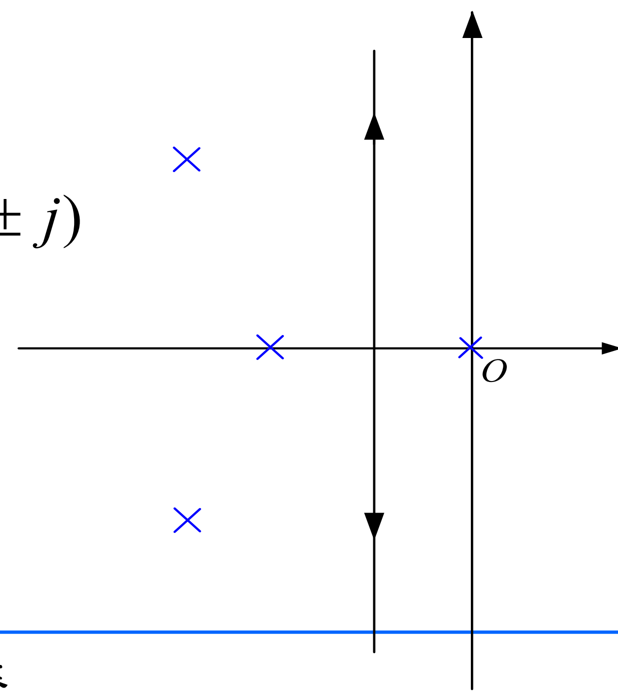


超前校正-方法1

- 例1：单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G_k(s)=\dfrac{k_r}{s(s+2)}$ 现要求（1）：阶跃响应的超调量 $\delta\%\le 20\%$；（2）阶跃响应的调整时间 $t_s(\Delta=5\%)\le 1s$。试设计校正环节。
- 解：（1）

$$\delta\%=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\%\le 20\%,\text{得}\zeta\ge 0.46,\text{取}\zeta=\sqrt{2}/2\approx 0.707$$

- 由 $t_s=\dfrac{3}{\zeta\omega_n}\le 1,\zeta=0.7,\text{可取}\omega_n=5$，
- 得期望闭环主导极点 $A_{12}=3.54(-1\pm j)$
- （2）校正前的根轨迹如右图，
- 点A12不可能位于该根轨迹上，
- 确定需要校正。



超前校正-方法1

- （3）点A1在原系统中的相角为

$$\angle G_k(A_1) = -\angle A_1 - \angle(A_1+2) = -135^\circ - 113.48^\circ = -248.48^\circ$$

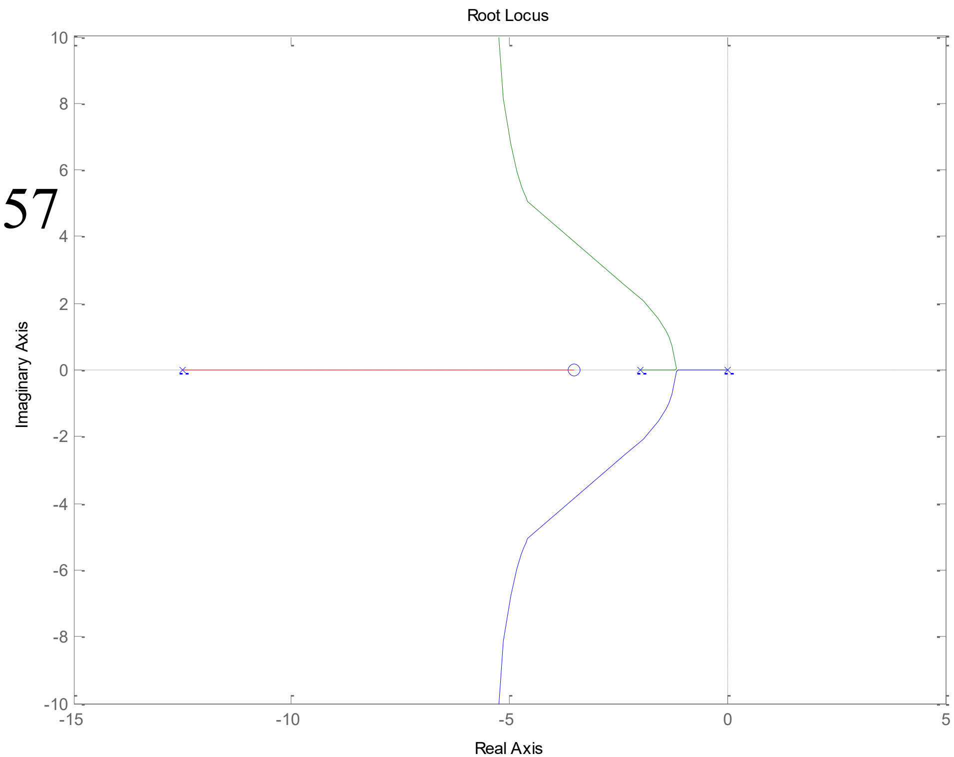
- 为使A1位于校正后的根轨迹上，要求校正环节提供的相角补偿量 $\phi = \angle G_c(A_1) = -180^\circ - (-248.48^\circ) = 68.48^\circ$
- （4）根据方案1，不妨设-z = -3.54，那么 $\angle(A_1+z) = 90^\circ$，则要求$\angle(A_1+p) = \angle(A_1+z) - \phi = 21.52^\circ$，可以求得-p = -12.50。那么校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{s+3.53}{s+12.50}$$

- （5）校正后系统的开环传递函数为 $G(s) = \dfrac{k_r(s+3.53)}{s(s+2)(s+12.50)}$

超前校正-方法1

- 校正后系统的根轨迹为：



- 根据幅值条件

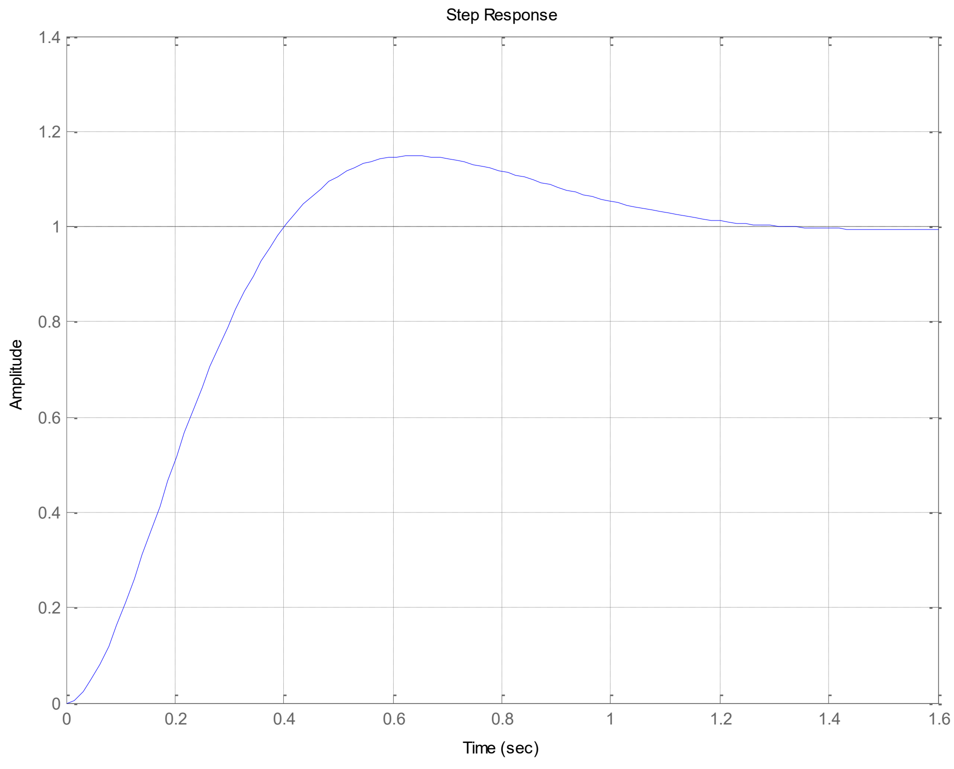
$$k_r = \frac{|A_1| \cdot |A_1 + 2| \cdot |A_1 + 12.50|}{|A_1 + 3.53|} = 52.57$$

- 速度误差系数

$$k_v = k_r \cdot \frac{3.53}{2 \times 12.50} = 7.42$$

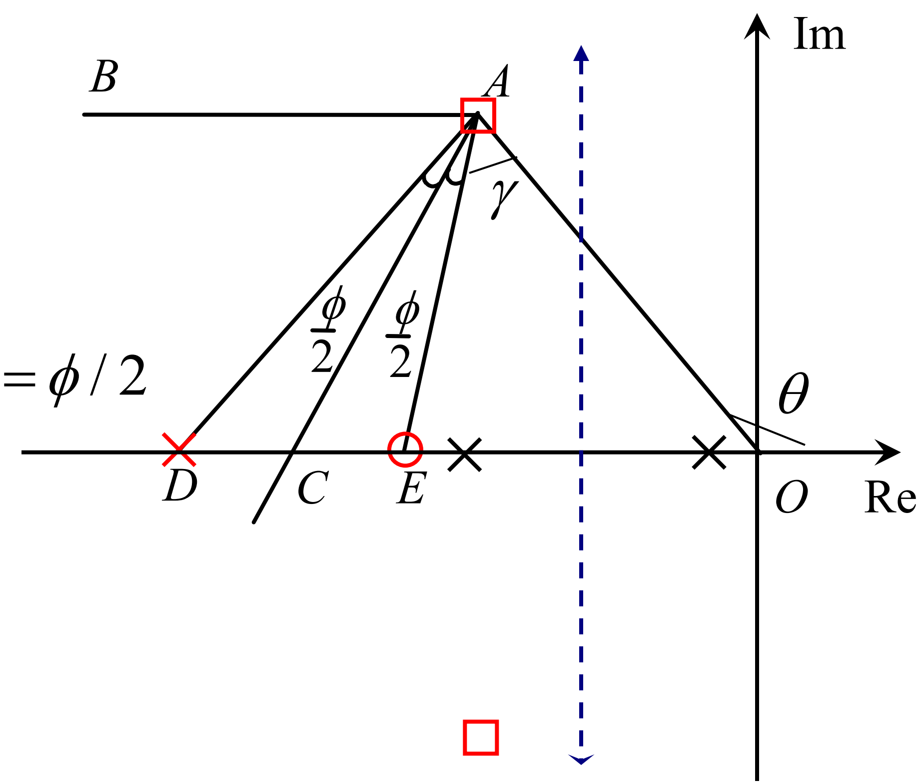
超前校正-方法1

- 校正后系统的阶跃响应



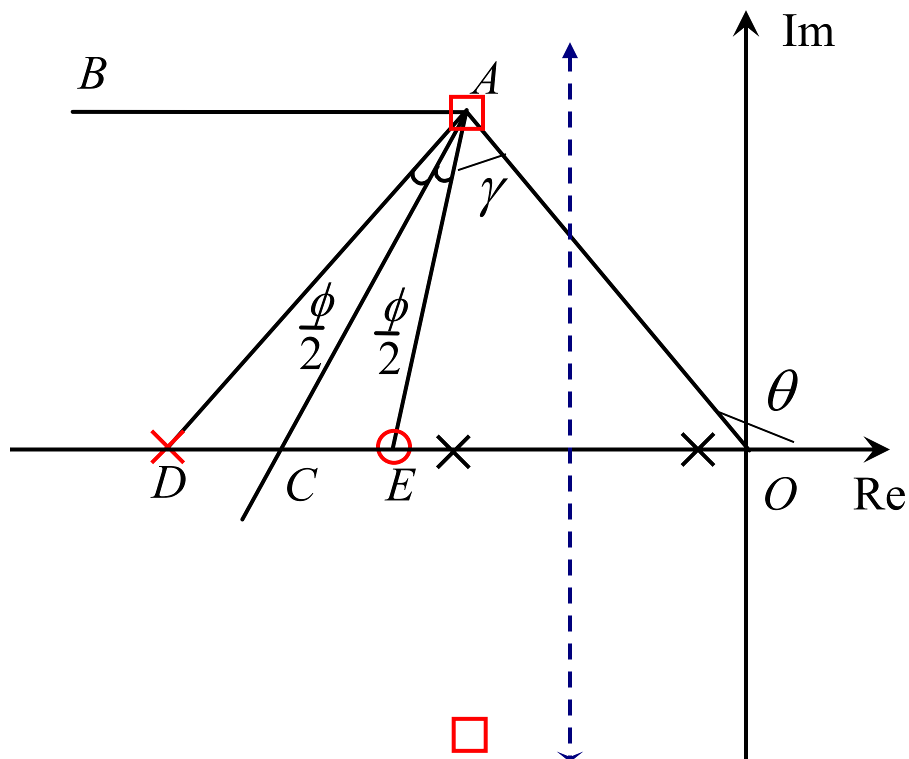
超前校正-方法2

- 方法2：主要步骤
  - **与方法1相比，仅在确定补偿角 ϕ 后，校正环节零极点的确定方法不同。**
  - **过点A作水平线AB；**
  - **作 $\angle BAO$ 的角平分线AC；**
  - **在AC两边作 $\angle DAC = \angle EAC = \phi / 2$**
  - **AD、AE与负实轴的交点**
  - **则为-p、-z。**



超前校正-方法2

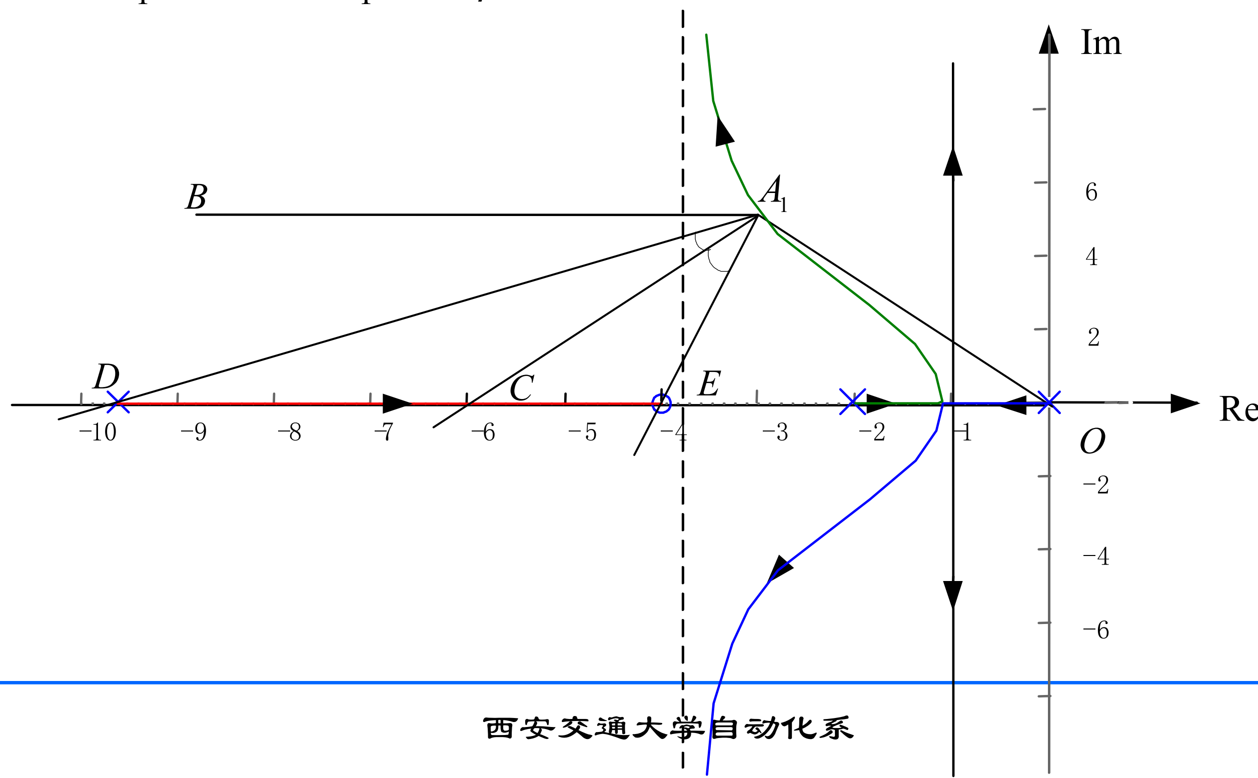
- 根据方法2所获校正环节引起的开环增益下降量最小！
- 为什么？
- $|\frac{z}{p}|=f(\gamma)$，仅需证明当
- $\gamma=0.5(\theta-\phi)$时，$f(\gamma)$取最大！



超前校正-方法2

- 重做例1。
- 解：（1）已求得 $A_{12}=3.54(-1\pm j)$，$\angle A_1=135^\circ$，$\phi=68.48^\circ$
- （2）画水平线A1B，作角平分线A1C，再作

$$\angle DA_1C=\angle EA_1C=\phi/2=34.24^\circ$$

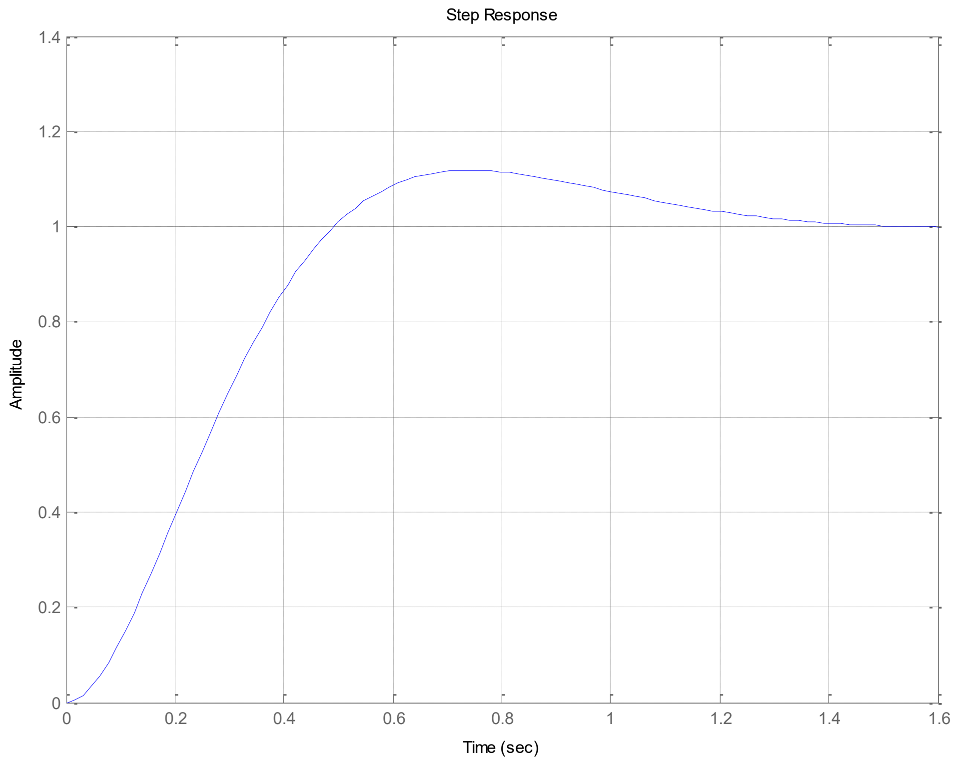


超前校正-方法2

- A1D与负实轴交与(-8.93, 0j)， A1E与负实轴交与(-2.80, 0j)，那么校正环节的传递函数为 $G_c(s)=\dfrac{s+2.80}{s+8.93}$
- （3）校正后系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{k_r(s+2.80)}{s(s+2)(s+8.93)}$
- 根据幅值条件 $k_r=\dfrac{|A_1|\cdot|A_1+2|\cdot|A_1+8.93|}{|A_1+2.80|}=34.39$
- 速度误差系数 $k_v=k_r\cdot\dfrac{2.80}{2\times 8.93}=5.39$

超前校正-方法2

- 校正后系统的阶跃响应



超前校正

- 方法1与方法2的比较
  - **方法1首先明确确定校正环节的零点，不会到达主导极点右侧，并且可以设定特殊零点，方便计算；**
  - **方法2引起的开环增益下降量最小，但校正环节零点可能达到主导极点右侧，可能影响其“主导性”。**

- 在例1中：
  - $$|\frac{z_1}{p_1}| = \frac{3.53}{12.50} = 0.28 < |\frac{z_2}{p_2}| = \frac{2.80}{8.93} = 0.31$$
  - **闭环系统另一极点** $s_{13} = -10.96 < s_{23} = -7.39$

超前校正

- 几点讨论
  - **超前环节能够提供的最大相角超前量是 $\phi_{\max}$ 多少?**
  - **p值不能过大!**
  - **当需要的相角超前量大于 $\phi_{\max}$ 时，如何处理?**

- 多重超前校正
  - $$G_c(s)=\left(\frac{s+z}{s+p}\right)^r, |z|<|p|, r=1,2,\ldots$$

滞后校正

主要思想

- **当期望的主导极点能够位于根轨迹上，而系统的稳态性能不能满足要求时，通过增加开环偶极子 $G_c(s)=\dfrac{s+z}{s+p},|z|>|p|$ 增大开环增益，从而满足稳态指标。**

- **假设校正前开环传递函数为** $G_k(s)=\dfrac{K_r\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s^v\prod_{j=v+1}^{n}(s+p_j)}$
- **开环增益为** $K_q=K_r\dfrac{\prod_{i=1}^{m}|z_i|}{\prod_{j=v+1}^{n}|p_j|}$

- **那么校正后** $G_c(s)G_k(s)=\dfrac{K_r(s+z)\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s^v(s+p)\prod_{j=v+1}^{n}(s+p_j)}$

- **开环增益为** $K_h=K_r\dfrac{|z|\cdot\prod_{i=1}^{m}|z_i|}{|p|\cdot\prod_{j=v+1}^{n}|p_j|}=\dfrac{|z|}{|p|}K_q>K_q$

滞后校正

- 主要原则
  - 尽量不影响主导极点的位置和主导性；
  - 提供足够的开环增益放大倍数。

- 主要步骤
  - 画出校正前系统的根轨迹；
  - 根据系统的动态性能指标，在校正前根轨迹上确定满足指标的主导极点位置；
  - 计算期望主导极点位置上的开环增益，以及误差系数；
  - 比较校正前系统的误差系数和期望的误差系数，确定需由校正环节提供的开环增益放大倍数b；

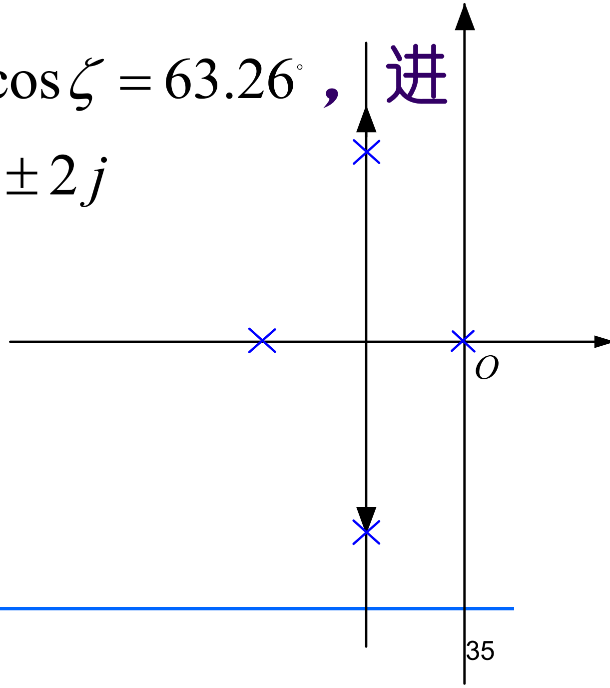
滞后校正

- 主要步骤
  - **确定滞后环节的零点-z和极点-p，使其满足z/p = b，并一般要求** $\angle(A+p)-\angle(A+z)\le 5^{\circ}$
  - **画出校正后系统的根轨迹，调整根轨迹增益，使主导闭环极点接近期望位置；**
  - **计算性能指标，若不满足，则重新设计。**

滞后校正

- 例2：单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G_k(s)=\dfrac{k_r}{s(s+2)}$
  现要求（1）：闭环主导复极点的阻尼系数 $\zeta=0.45$ ；
  （2）系统的速度误差系数为20。试设计校正环节。

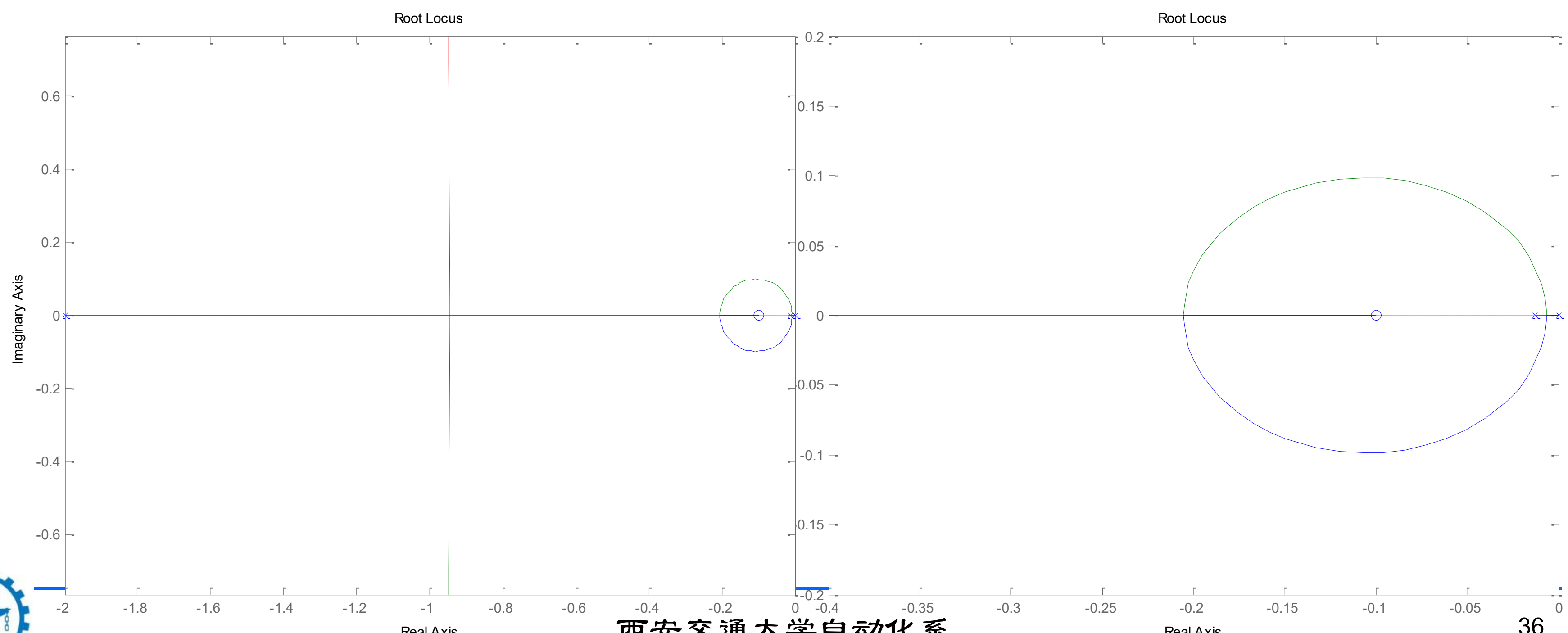
- 解：（1）画出原系统的根轨迹如右图
- （2）已知 $\zeta=0.45$，那么阻尼角 $\beta=\arccos\zeta=63.26^{\circ}$，进一步可得到期望的闭环主导极点 $A_{12}=-1\pm 2j$



- （3）由幅值条件，可求得主导极点
- 处根轨迹增益为 $k_r=(\sqrt{5})^2=5$
- 校正前速度误差系数 $K_v=k_r/2=2.5$

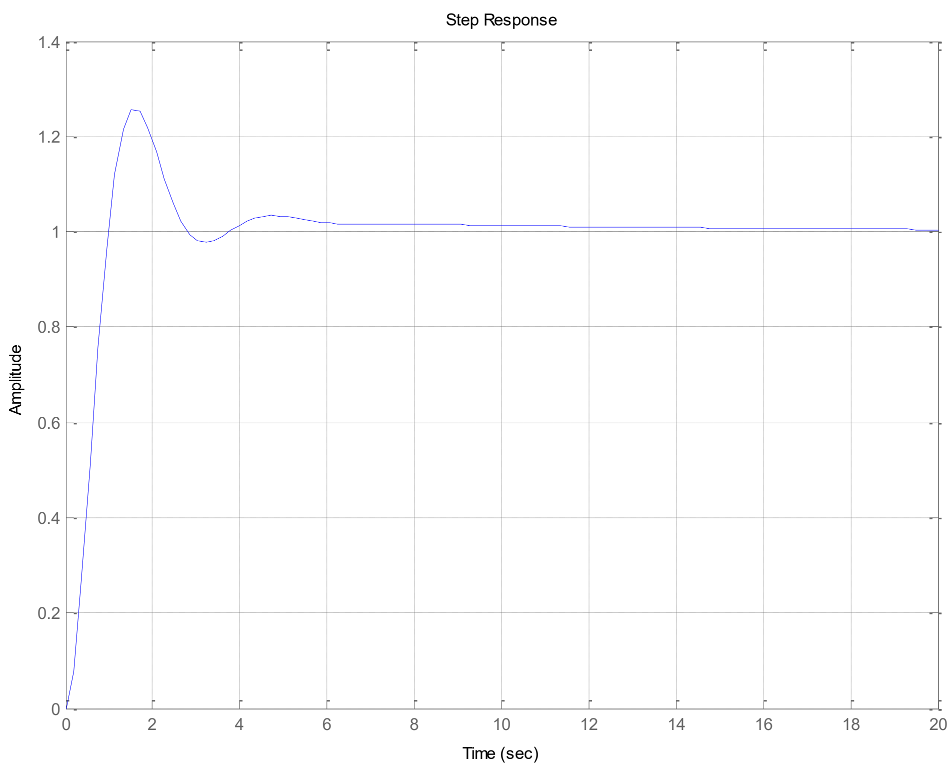
滞后校正

- 那么由滞后环节提供的开环增益放大倍数应为 $|\frac{z}{p}|=\frac{20}{2.5}=8$
- 可取-z = -0.1，-p = -0.1/8 = -0.0125；此时点-z、-p到 A_{12}
- 的向量角度之差约为1°。
- 校正后系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{k_r(s+0.1)}{s(s+2)(s+0.0125)}$



滞后校正

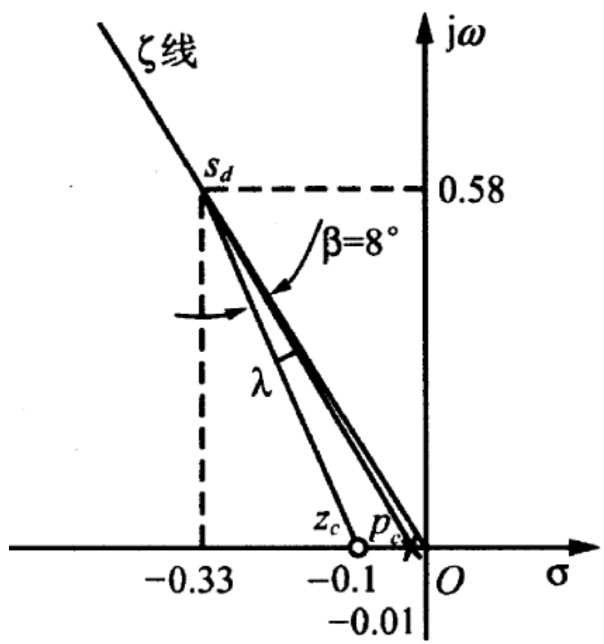
- 可知，当 $k_r \approx 5$ 时，主导极点接近 $A_{12} = -1 \pm 2j$
- 校正后的单位阶跃响应为



滞后校正

- 几点讨论
  - 为什么一定选择靠近原点的偶极子?
  - -p不能过分靠近原点!
  - 有无比较系统的方法确定z&p?

- 图解法



超前-滞后校正

- 当动态性能指标和静态性能指标均不能满足要求时，需采用超前-滞后校正。

$$G_c(s)=\frac{s+z_1}{s+p_1}\times\frac{s+z_2}{s+p_2},|z_1|<|p_1|,|z_2|>|p_2|$$

- 设计原则：
  - **设计超前环节满足动态指标 → 设计滞后环节满足稳态指标**

- 关于根轨迹校正的推荐论文
  - **杨宏基, 葛云龙. 根轨迹串联校正设计的研究. 机床与液压, 1985, 6.**

根轨迹校正与Bode图校正之比较

- 根轨迹校正适用于时域指标，而Bode图校正适用于频域指标；
- 根轨迹校正以闭环主导极点为设计中心，而Bode图校正以相位裕量为设计中心；
- 对开环增益的处理顺序不同
  - **在根轨迹校正中，首先画出根轨迹，确定闭环主导极点，最后计算开环增益，并决定是否需要补偿；在Bode图校正中，首先需要根据稳态性能需求，计算开环增益，然后画Bode图。**
- 滞后-超前校正中，滞后、超前环节的设计顺序不同
  - **根轨迹校正中先设计超前环节，而Bode校正中先设计滞后环节。**