



## 第四章 根轨迹法



# 第一节 根轨迹的基本概念

## 1. 根轨迹定义

**开环**系统传递函数的某一个**参数**变化时，**闭环**系统特征方程的**根**在复平面上变化的**轨迹**。

例：

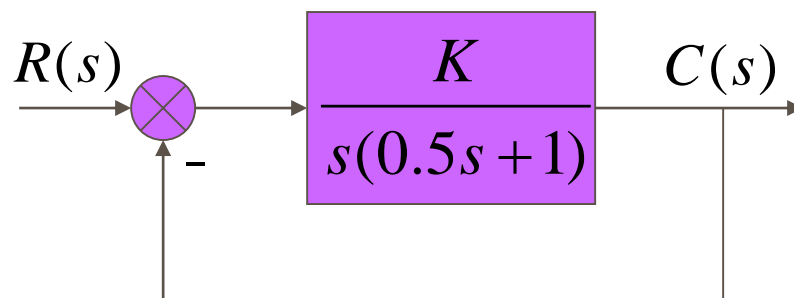
开环传递函数：

$$G_k(s) = \frac{K}{s(0.5s + 1)}$$

闭环传递函数：  $\Phi(s) = \frac{2K}{s^2 + 2s + 2K}$

特征方程：  $s^2 + 2s + 2K = 0$

特征根：  $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 2K}$



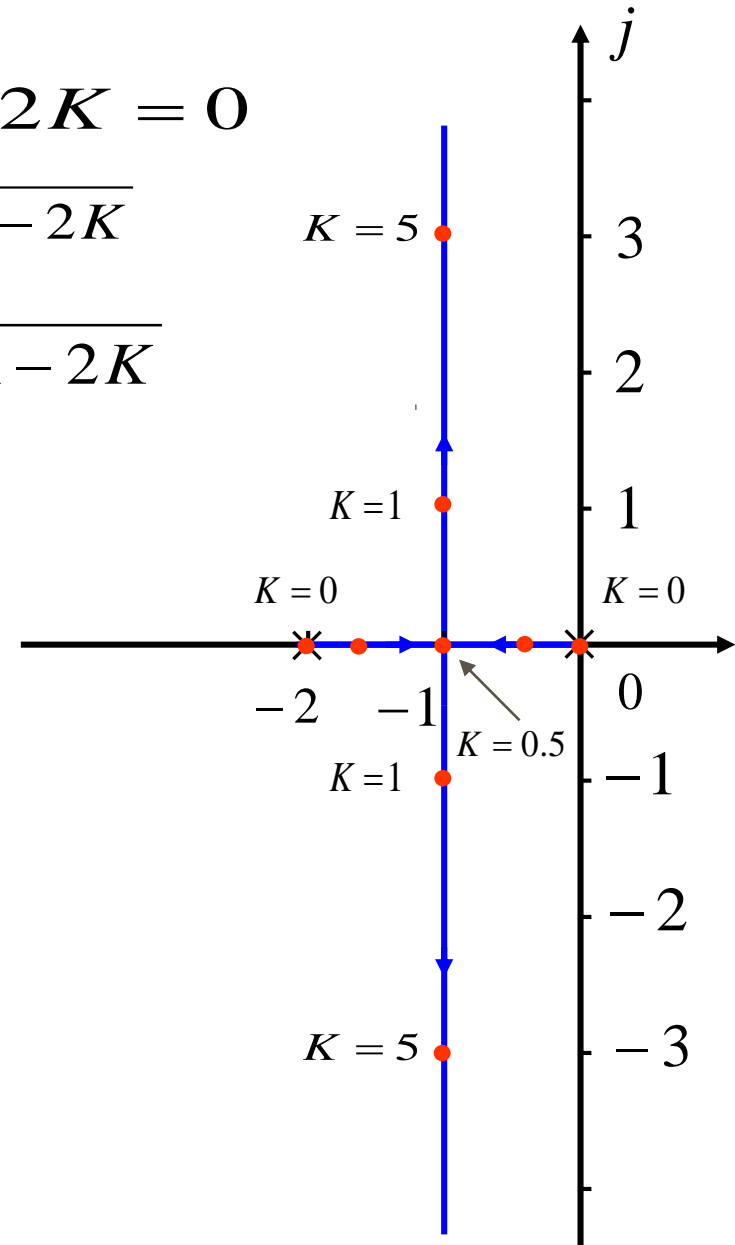


Characteristic equation:  $s^2 + 2s + 2K = 0$

Characteristic roots:  $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 2K}$

[Discussion]:  $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 2K}$

- ① if  $K=0$ ,  $s_1=0$ ,  $s_2=-2$
- ② if  $K=0.32$ ,  $s_1=-0.4$ ,  $s_2=-1.6$
- ③ if  $K=0.5$ ,  $s_1=-1$ ,  $s_2=-1$
- ④ if  $K=1$ ,  $s_1=-1+j$ ,  $s_2=-1-j$
- ⑤ if  $K=5$ ,  $s_1=-1+3j$ ,  $s_2=-1-3j$
- ⑥ if  $K=\infty$ ,  $s_1=-1+\infty j$ ,  $s_2=-1-\infty j$





根轨迹图直观全面地描述了参数 $K$ 对闭环特征根分布的影响。可据此分析系统性能。

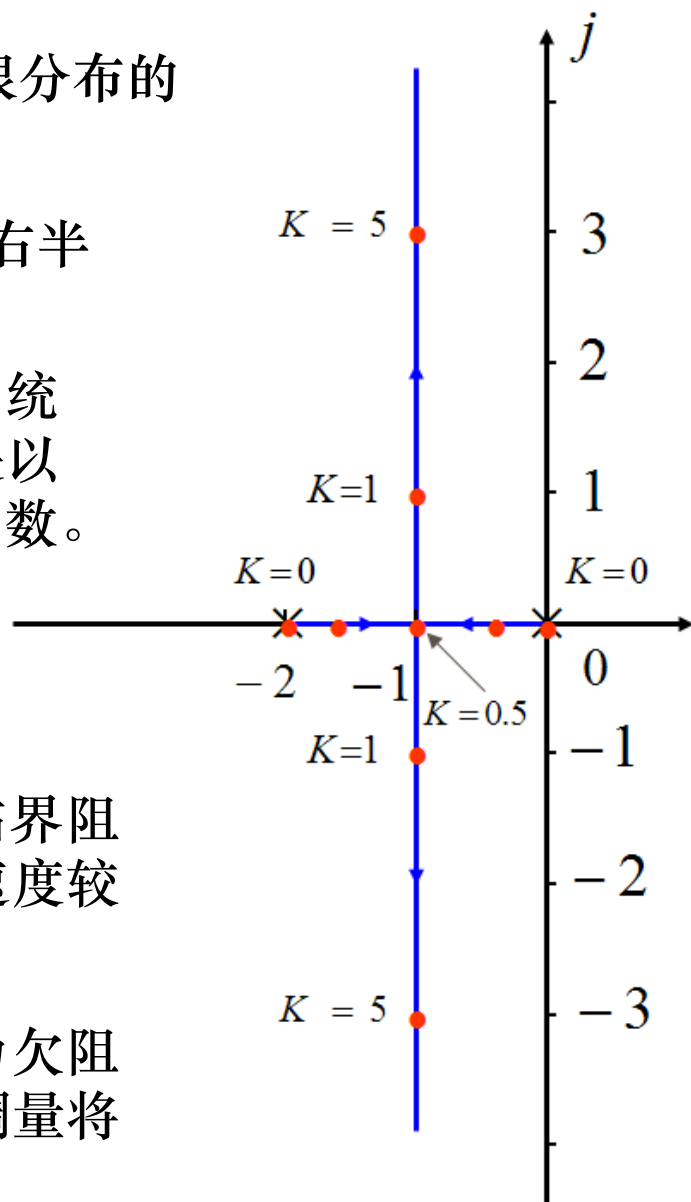
**稳定性:** 当 $K$ 从 $0 \rightarrow \infty$ 时根轨迹不会越过虚轴进入右半 $s$ 平面，因此该系统当 $K > 0$ 都是稳定的。

**稳态性能:** 开环系统在原点有一个极点，所以系统属于 I 型系统，根轨迹上的 $K$ 值就是以该点为闭环极点时系统的速度误差系数。

**动态性能:** 当 $0 < K < 0.5$ 时闭环极点位于实轴上，系统为过阻尼系统，单位阶跃响应为非周期过程；

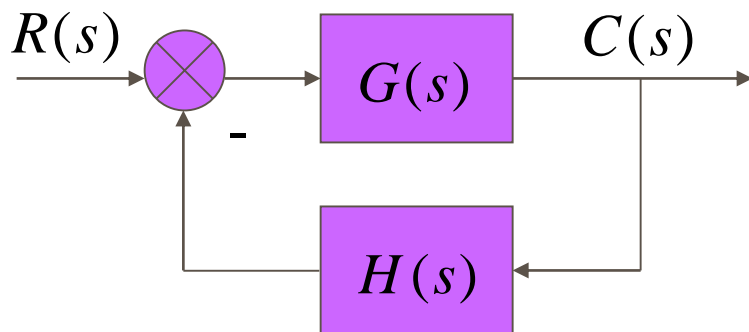
当 $K = 0.5$ 时闭环两个实极点重合，系统为临界阻尼系统，单位阶跃响应为非周期过程；但响应速度较过阻尼情况为快；

当 $K > 0.5$ 时闭环极点为共轭复极点，系统为欠阻尼系统，单位阶跃响应为阻尼振荡过程，且超调量将随 $K$ 值的增大而增大，但调节时间不变。



## 2. 根轨迹方程

对如下结构图的系统：



闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + G_k(s)}$$

令闭环传递函数的分母为零，  
得闭环系统的特征方程

$$1 + G_k(s) = 0$$

若用开环传递函数来讨论，则满足  $G_k(s) = -1$  的点就是闭环系统特征方程的根。也就是说满足  $G_k(s) = -1$  的  $s$  值必定是根轨迹上的点，故称  $G_k(s) = -1$  为根轨迹方程。若令

$$G_k(s) = K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

则

$$K_g \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = -1 \quad \text{为根轨迹方程。}$$

$K_g$  为根轨迹增益

由于 $G_k(s)$ 是复数，上式可写成： $|G_k(s)| \angle G_k(s) = -1$

$$\text{或 } K_g \frac{\prod_{i=1}^m |(s + z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(s + p_j)|} = 1$$

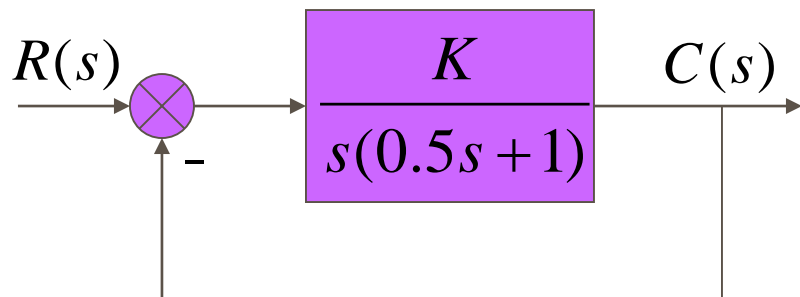
$$\angle \sum_{i=1}^m (s + z_i) - \angle \sum_{j=1}^n (s + p_j) = \pm(2k + 1)\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

上述两式分别称为满足根轨迹方程的幅值条件和相角条件。

其中相角条件是零点到根轨迹上的某点的向量的相角之和减去极点到根轨迹上的某点的向量的相角之和等于180度的奇数倍，因此也称满足上述条件的根轨迹为**180度等相角根轨迹**。

根据上述两个条件，可以完全确定 $s$ 平面上的根轨迹和根轨迹上对应的 $K_g$ 值。应当指出，**相角条件是确定 $s$ 平面上的根轨迹的充分必要条件**。这就是说，绘制根轨迹时，只需要使用相角条件；而当需要确定根轨迹上各点的 $K_g$ 值时，才使用幅值条件。

例：如图所示二阶系统，

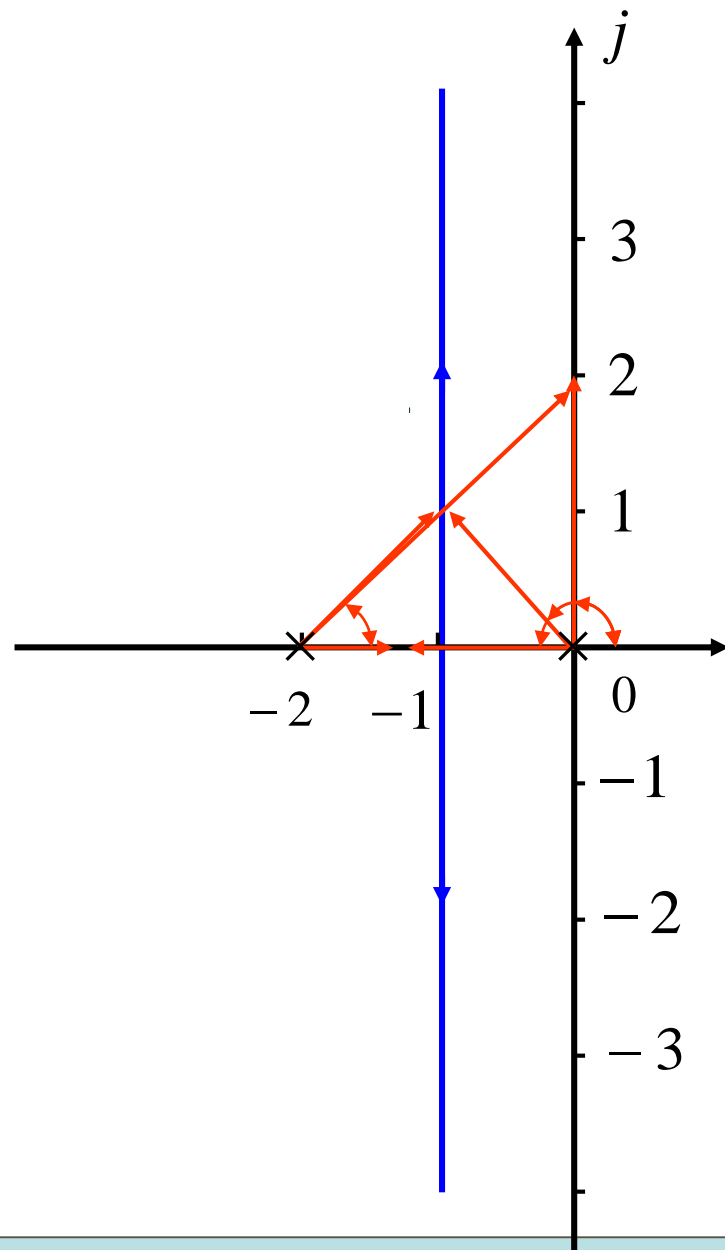


闭环传递函数：  $\Phi(s) = \frac{2K}{s^2 + 2s + 2K}$

特征方程为：  $s^2 + 2s + 2K = 0$

特征根为：  $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 2K}$

采用试探法可以确定根轨迹上的点。





## 第二节 根轨迹绘制的基本准则



用解析法或试探法绘制根轨迹很烦琐。下面讨论的内容通过研究根轨迹和开环零极点的关系，根轨迹的特殊点，渐近线和其他性质将有助于减少绘图工作量，能够较迅速地画出根轨迹的大致形状和变化趋势。以下的讨论是针对参数  $K_g$  的180度根轨迹的性质。

## 1. 根轨迹的连续性：

闭环系统特征方程的某些系数是增益  $K_g$  的函数。当  $K_g$  从0到无穷变化时，这些系数是连续变化的。故特征方程的根是连续变化的，即根轨迹曲线是连续曲线。

## 2. 根轨迹的对称性：

一般物理系统特征方程的系数是实数，其根必为实根或共轭复根。即位于复平面的实轴上或对称于实轴。

### 3. 根轨迹的支数:

n阶特征方程有n个根。当  $K_g$  从0到无穷大变化时, n个根在复平面内连续变化组成n支根轨迹。即根轨迹的**支数等于系统阶数**。

### 4. 根轨迹的起点和终点:

根轨迹方程为:

$$\frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = -\frac{1}{K_g}$$

$K_g = 0$  时为起点,  $K_g = \infty$  时为终点。

当  $K_g = 0$  时, 只有  $s = -p_j (j = 1 \sim n)$  时, 上式才能成立。而  $-p_j$  是开环传递函数的极点, 所以**根轨迹起始于开环极点**。n阶系统有n个开环极点, 分别是n支根轨迹的起点。



当  $K_g = \infty$  时，①  $s = -z_i (i = 1 \sim m)$ ，上式成立。 $-z_i$  是开环传递函数有限值的零点，有  $m$  个。故  **$n$  阶系统有  $m$  支根轨迹的终点在  $m$  个有限零点处**。② 若  $n > m$ ，那么剩余的  $n - m$  个终点在哪里呢？在无穷远处。由根轨迹方程知：当  $s \rightarrow \infty$  时

$$\text{根轨迹方程右边} = \lim_{K_g \rightarrow \infty} -\frac{1}{K_g} = 0$$

$$\text{根轨迹方程左边} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n-m} (s + p_j)} = 0$$

**我们称系统有  $n - m$  个无限远零点。有限值零点加无穷远零点的个数等于极点数。**

那么， $n - m$  支根轨迹是如何趋于无限远呢？



## 5. 根轨迹的渐近线:

若开环零点数 $m$ 小于开环极点数 $n$ ，则当系统的开环增益 $K_g \rightarrow \infty$ 时趋向无穷远处的根轨迹共有 $n-m$ 条。这 $n-m$ 条根轨迹趋向无穷远的方位可由渐近线决定。

由根轨迹方程可得:

$$\frac{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}{\prod_{i=1}^m (s + z_i)} = -K_g$$
$$\frac{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}{\prod_{i=1}^m (s + z_i)} = \frac{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0} = -K_g$$

式中  $a_{n-1} = \sum_{j=1}^n p_j$  ,  $b_{m-1} = \sum_{i=1}^m z_i$

$$s^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})s^{n-m-1} + \dots = -K_g$$

Considering only the first two terms of this expansion, we have

$$s^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})s^{n-m-1} = -K_g$$

$$s^{n-m} \left(1 + \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{s}\right) = -K_g$$

operate n- m times evolution on both sides

$$s \left(1 + \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{s}\right)^{\frac{1}{n-m}} = (-K_g)^{\frac{1}{n-m}}$$

using Binomial Theorem

$$(1+x)^K = 1 + Kx + \frac{K(K-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{K(K-1)\dots(K-I+1)}{I!}x^I + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

When  $x \ll 1$ ,  $(1+x)^K \approx 1+Kx$ , set  $x = \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{s}$ ,  $K = \frac{1}{n-m}$

$$s(1 + \frac{1}{n-m} \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{s}) = (-K_g)^{\frac{1}{n-m}}$$

$$s = x + jy$$

$$s + \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n-m} = (-K_g)^{\frac{1}{n-m}}$$

$$-1 = \cos(2k+1)\pi + j \sin(2k+1)\pi$$

If  $s = x + jy$ , with  $-1 = \cos(2k+1)\pi + j \sin(2k+1)\pi$ , and according to De Moivre Algebraic Theorem  $(\cos \theta + j \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + j \sin(n\theta)$ , last equation can be written as,

$$x + jy + \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n-m} = K_g^{\frac{1}{n-m}} \left[ \cos \frac{(2k+1)\pi}{n-m} + j \sin \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \right]$$



$$x + \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n - m} = K_g^{\frac{1}{n-m}} \cos \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

$$y = K_g^{\frac{1}{n-m}} \sin \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

$$\frac{y}{x + \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n - m}} = \operatorname{tg} \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

$$y = \operatorname{tg} \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \left( x + \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n-m} \right) = \operatorname{tg} \left( \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \right) (x + \sigma)$$

$\theta$

$$-\sigma = -\frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n - m} = -\frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} = \frac{\sum_{j=1}^n -p_j - \sum_{i=1}^m -z_i}{n - m}$$

?



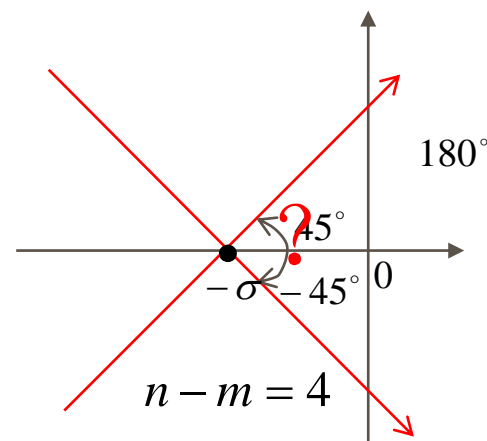
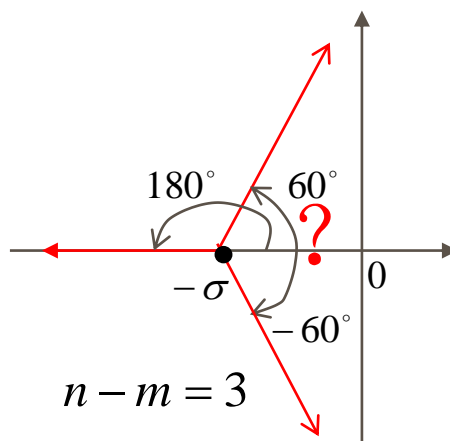
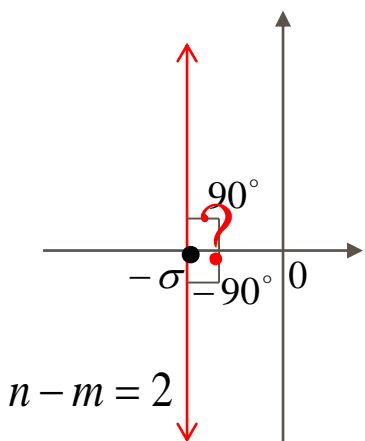
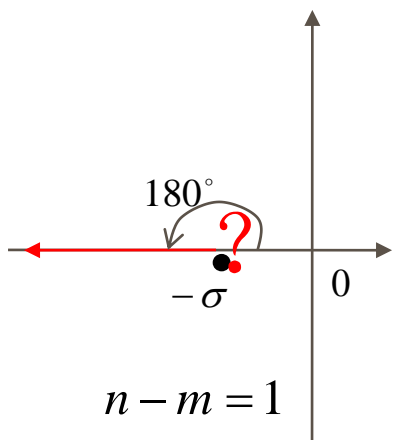
$$y = tg \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \left( x + \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n-m} \right) = tg \frac{(2k+1)\pi}{n-m} (x + \sigma)$$

$$-\sigma = -\frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n-m} = -\frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{\sum_{j=1}^n -p_j - \sum_{i=1}^m -z_i}{n-m}$$

这是与实轴交点为  $-\sigma$ ，斜率为  $tg \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$  的直线方程。也就是渐近线方程。渐近线与实轴的夹角(称为渐近线的倾斜角)为

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$



[例4-2]系统开环传递函数为： $G_k(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+5)}$ ，试确定根轨迹支数，起点和终点。若终点在无穷远处，求渐近线与实轴的交点和倾角。

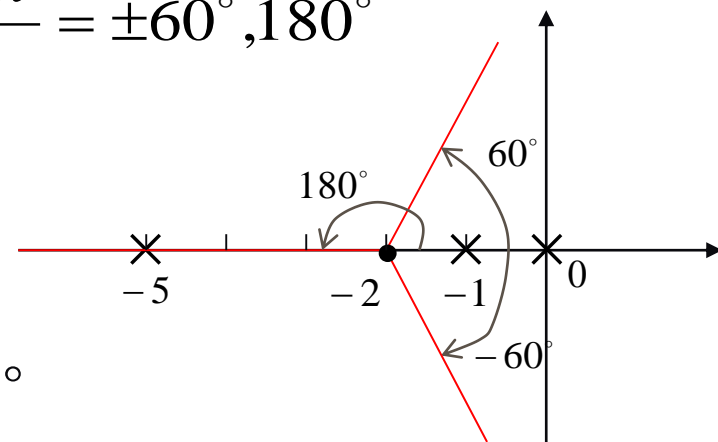
[解]：根轨迹支数：3支。

起点和终点： $p_1 = 0, -p_2 = -1, -p_3 = -5$ ，无有限值零点，所以三支根轨迹都趋向无穷远。

渐近线与实轴的交点： $-\sigma = \frac{\sum -p_i - \sum -z_i}{n-m} = \frac{-1-5}{3-0} = -2$

渐近线与实轴的倾角： $\theta = \pm \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \pm 60^\circ, 180^\circ$

零极点分布和渐近线（红线）  
如图所示。



规定：相角逆时针为正，顺时针为负。



## 6. 实轴上的根轨迹：

实轴上具有根轨迹的区间是：**其右方开环系统的零点数和极点数的总和为奇数。**

[证明]：例如在实轴上有两个开环极点 $-p_1$ 、 $-p_2$ ，复平面上有一对共轭极点 $-p_3$ 、 $-p_4$ 和一对共轭零点 $-z_1$ 、 $-z_2$ 。

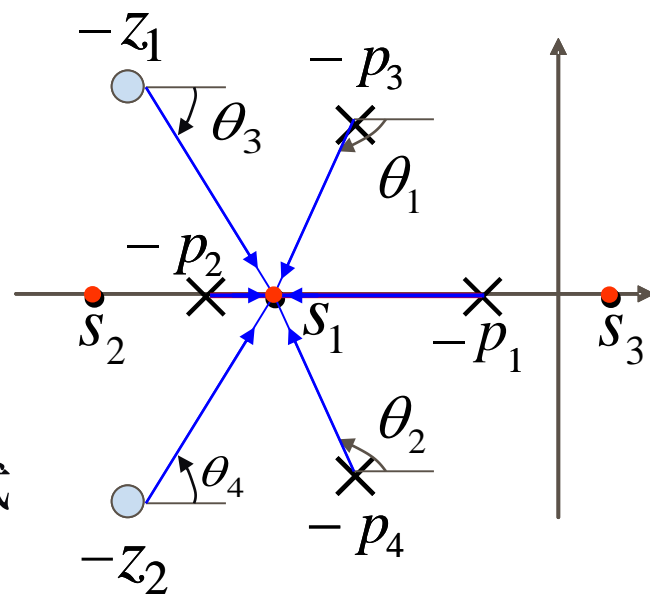
先看试验点 $s_1$ 点：

- ① 成对出现的共轭极点 $-p_3$ 、 $-p_4$ 对实轴上任意试探点构成的两个向量的相角之和为 $0^\circ$ ；
- ② 成对出现的共轭零点 $-z_1$ 、 $-z_2$ 对实轴上任意试探点构成的两个向量的相角之和为 $0^\circ$ ；
- ③ 试探点左边的极点 $p_2$ 对试探点构成的向量的相角为 $0^\circ$ ；
- ④ 试探点右边的极点 $p_1$ 对试探点构成的向量的相角为 $180^\circ$ ；

所以 $s_1$ 点满足根轨迹相角条件，于是 $[-p_2, -p_1]$ 为实轴上的根轨迹。

再看 $s_2$ 点：不满足根轨迹相角条件，所以不是根轨迹上的点。

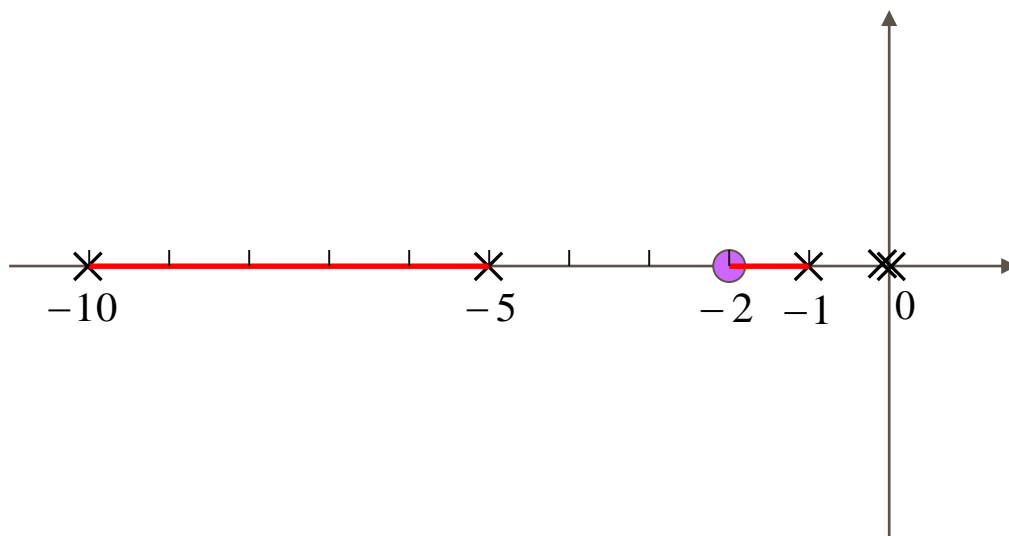
同样 $s_3$ 点：也不是根轨迹上的点。





[例4-3] 设系统的开环传递函数为： $G_k(s) = \frac{K_g(s+2)}{s^2(s+1)(s+5)(s+10)}$   
试求实轴上的根轨迹。

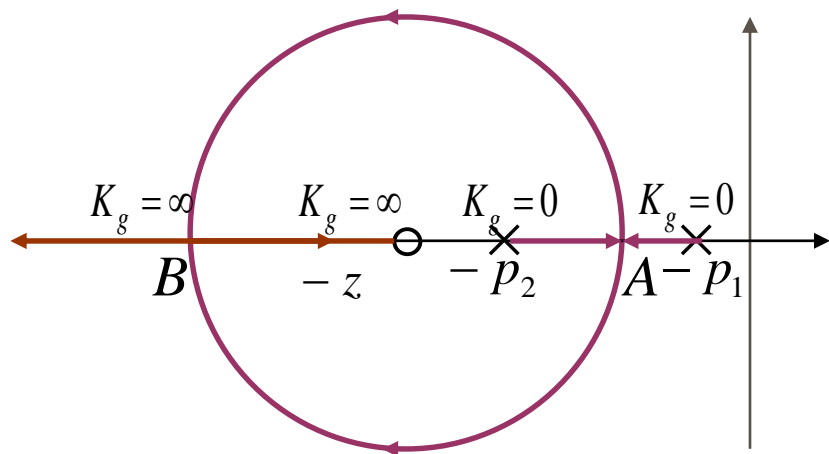
[解]：零极点分布如下：



红线所示为实轴上根轨迹，为： $[-10, -5]$ 和 $[-2, -1]$ 。注意在原点有两个极点，双重极点用“ $\times$ ”表示。

## 7. 根轨迹的会合点和分离点：

若干根轨迹在复平面上某一点相遇后又分开，称该点为分离点或会合点。



一般说来，若实轴上两相邻开环极点之间有根轨迹，则这两相邻极点之间必有分离点；

如果实轴上相邻开环零点（其中一个可为无穷远零点）之间有根轨迹，则这相邻零点之间必有会合点。

如果实轴上根轨迹在开环零点与开环极点之间，则它们之间可能既无分离点也无会合点，也可能既有分离点也有会合点。



[分离角]: 在分离点或会合点上, 根轨迹进入分离 (会合) 点的切线方向和离开分离点 (会合) 的切线方向之间的夹角称为分离角  $\theta_d$ 。  $\theta_d$  与相分离的根轨迹的支数  $k$  有关:  $\theta_d = \frac{\pi}{k}$ 。

[分离点和会合点的求法]:

① 重根法:

根轨迹在实轴上的分离点或会合点表示这些点是闭环特征方程的重根点。

设系统开环传递函数为: 
$$G_k(s) = K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = K_g \frac{N(s)}{D(s)}$$

因闭环特征方程为：  $G_k(s) = -1$

即  $F(s) = D(s) + K_g N(s) = 0$

设  $K_g = K_{gd}$  时，特征方程有重根  $\sigma_d$ ，则必同时满足

$$F(\sigma_d) = 0 \quad \text{和} \quad F'(\sigma_d) = 0$$

由此得：

$$\begin{cases} D(\sigma_d) + K_{gd} N(\sigma_d) = 0 \\ D'(\sigma_d) + K_{gd} N'(\sigma_d) = 0 \end{cases} \quad \text{即：} \begin{cases} N'(s)D(s) - N(s)D'(s) = 0 \\ K_{gd} = -\frac{D(s)}{N(s)} \Big|_{s=\sigma_d} \end{cases}$$

注意：由上式可求得的点是分离点和会合点必要条件，还需求出这些点对应的增益，若增益为大于零的实数，则所求出的点为分离会合点。



## ② 极值法：

若以 $K_g$ 为纵坐标，以实轴为横坐标，在根轨迹的分离点和会合点上， $K_g$ 具有极值。

$$K_g = -\frac{D(s)}{N(s)}$$

$$\frac{dK_g}{ds} = -\frac{d}{ds} \left[ \frac{D(s)}{N(s)} \right] = -\frac{D'(s)N(s) - N'(s)D(s)}{N^2(s)} = 0$$

即 
$$N'(s)D(s) - N(s)D'(s) = 0$$

### ③ 求分离会合点的另一个公式

设系统开环传递函数为：

$$G_k(s) = K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

因闭环特征方程为：

$$G_k(s) = -1$$

即闭环特征方程为：

$$F(s) = K_g \prod_{i=1}^m (s + z_i) + \prod_{j=1}^n (s + p_j) = 0$$

重根时还满足

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \left[ K_g \prod_{i=1}^m (s + z_i) + \prod_{j=1}^n (s + p_j) \right] = 0$$

$$\prod_{j=1}^n (s + p_j) = -K_g \prod_{i=1}^m (s + z_i) \quad (1)$$

$$\frac{d}{ds} \prod_{j=1}^n (s + p_j) = -K_g \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^m (s + z_i) \quad (2)$$



$$\frac{(2)}{(1)} \quad \frac{\frac{d}{ds} \prod_{j=1}^n (s + p_j)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = \frac{\frac{d}{ds} \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}$$

$$\frac{d \left[ \ln \prod_{j=1}^n (s + p_j) \right]}{ds} = \frac{d \left[ \ln \prod_{i=1}^m (s + z_i) \right]}{ds}$$

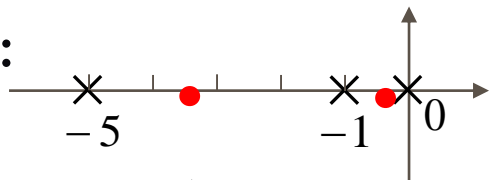
$$\frac{d \left[ \sum_{j=1}^n \ln(s + p_j) \right]}{ds} = \frac{d \left[ \sum_{i=1}^m \ln(s + z_i) \right]}{ds}$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{d \ln(s + p_j)}{ds} = \sum_{i=1}^m \frac{d \ln(s + z_i)}{ds}$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{s + p_j} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{s + z_i}$$

[例4-4]单位反馈系统的开环传递函数为： $G_k(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+5)}$   
试确定实轴上根轨迹的会合点和分离点的位置。

[解]:



实轴上根轨迹区间是： $(-\infty, -5]$ 和 $[-1, 0]$

闭环特征方程为： $1 + G_k(s) = 1 + \frac{K_g}{s(s+1)(s+5)} = 0$

$$K_g = -s(s+1)(s+5) = -(s^3 + 6s^2 + 5s)$$

$$\frac{dK_g}{ds} = -(3s^2 + 12s + 5) = 0$$

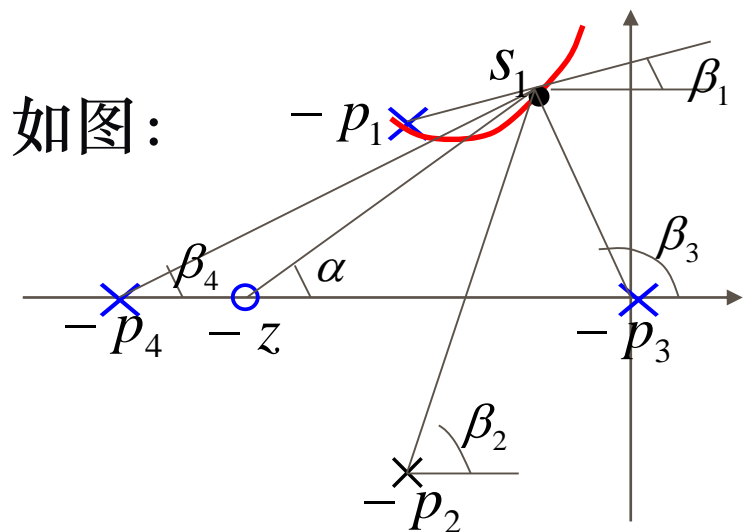
$$s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{\frac{7}{3}} = \begin{cases} -0.4725 & K_g = 1.12845 \\ -3.5275 & K_g = -13.13 \end{cases}$$

显然，分离会合点为-0.4725，而-3.5275不是分离会合点。

**注意：**分离点和会合点也可能出现在复平面上，由于根轨迹对称于实轴，所以，复平面上的分离点和会合点必对称于实轴。

## 8. 根轨迹的出射角和入射角：

当开环零、极点处于复平面上时，根轨迹离开的出发角称为出射角；根轨迹趋于复零点的终止角成为入射角。



图中有四个开环极点，一个开环零点。  
 $-p_1, -p_2$  为共轭极点，现计算

$-p_1$  的出射角。设为  $\theta_{1c}$ 。

在离开  $-p_1$  附近的根轨迹上取一点  $s_1$ ，  
则  $s_1$  点应满足相角条件：

$$\alpha - \angle(s_1 + p_1) - \angle(s_1 + p_2) - \angle(s_1 + p_3) - \angle(s_1 + p_4) =$$

$$\alpha - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \beta_4 = \pm(2k+1)\pi$$

当  $s_1 \rightarrow -p_1$  时， $\beta_1$  即为离开根轨迹上  $-p_1$  的出射角， $\beta_1 \rightarrow \theta_{1c}$ ，则：



$$\theta_{1c} = \mp(2k+1)\pi + \alpha - \beta_2 - \beta_3 - \beta_4 = \mp(2k+1)\pi + \sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1c}}^n \beta_i$$

式中： $\beta_i$  为除了 $-p_1$ 以外的开环极点 $-p_i$ 到 $-p_1$ 的矢量的相角； $\alpha_i$  为开环零点 $-z_i$ 到 $-p_1$ 的矢量的相角。

$-p_2$ 的出射角应与 $-p_1$ 的出射角关于实轴对称。

同样，进入复零点 $-z_y$ 的根轨迹入射角 $\theta_{yr}$ 为：

$$\theta_{yr} = \pm(2k+1)\pi - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq yr}}^m \alpha_i + \sum_{i=1}^n \beta_i$$

式中： $\alpha_i$  为除了 $-z_y$ 以外的开环零点 $-z_i$ 到 $-z_y$ 的矢量相角； $\beta_i$  为各开环极点 $-p_i$ 到 $-z_y$ 的矢量相角。

[例4-5] 如图，试确定根轨迹离开复数共轭极点的出射角。

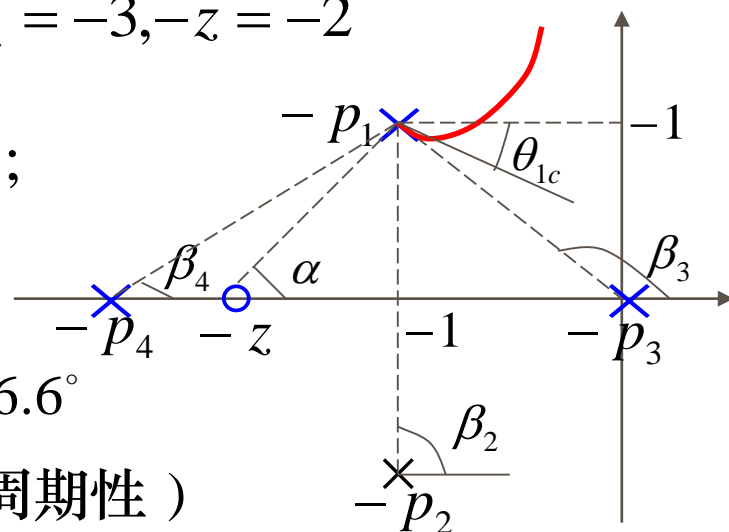
$$-p_1 = -1 + j1, -p_2 = -1 - j1, -p_3 = 0, -p_4 = -3, -z = -2$$

[解]:  $\tan \alpha = 1, \alpha = 45^\circ; \beta_2 = 90^\circ; \beta_3 = 135^\circ;$

$$\tan \beta_4 = 0.5, \beta_4 = 26.6^\circ$$

$$\therefore \theta_{1c} = \mp(2k+1)\pi + 45^\circ - 90^\circ - 135^\circ - 26.6^\circ$$

$$= \mp 2k\pi - 26.6^\circ \rightarrow \theta_{1c} = -26.6^\circ \text{ (考虑到周期性)}$$



根据对称性，可知  $-p_2$  点的出射角为：  $\theta_{2c} = 26.6^\circ$

请根据相角条件自行计算。

[注意]:

❑ 相角要注意符号；逆时针为正，顺时针为负；

❑ 注意矢量的方向。 $-p_2 \rightarrow -p_1, -z \rightarrow -p_1$



## 9. 根轨迹和虚轴的交点：

根轨迹和虚轴相交时，系统处于临界稳定状态。则闭环特征方程至少有一对共轭虚根。这时的增益  $K_{gp}$  为临界根轨迹增益。



交点和  $K_{gp}$  的求法：

- ❑ 在闭环特征方程中令  $s = j\omega$ ，然后使特征方程的实、虚部为零即可求出  $\omega$  和  $K_{gp}$ 。
- ❑ 由劳斯稳定判据求解。



[例4-6]开环传递函数为： $G_k(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+5)}$ ，试求根轨迹与虚轴的交点和  $K_{gp}$ 。

□ 方法一：

闭环系统的特征方程为：

$$F(s) = s(s+1)(s+5) + K_g = s^3 + 6s^2 + 5s + K_g = 0$$

将  $s = j\omega$  代入得： $F(j\omega) = -j\omega^3 - 6\omega^2 + j5\omega + K_{gp} = 0$

$$\therefore \begin{cases} -6\omega^2 + K_{gp} = 0 \\ -\omega^3 + 5\omega = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0, \pm\sqrt{5} \\ K_{gp} = 0, 30 \end{cases}$$

当  $K_{gp} = 0$  时， $\omega = 0$  为根轨迹的起点（开环极点）

当  $K_{gp} = 30$  时， $\omega = \pm\sqrt{5}$ ，即根轨迹与虚轴的交点为  $j\sqrt{5}$ 。

## □ 方法二：

用劳斯稳定判据确定  $\omega, K_{gp}$  的值。

劳斯阵列为：

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & 1 & 5 \\
 s^2 & 6 & K_g \\
 s^1 & \frac{30 - K_g}{6} & 0 \\
 s^0 & K_g & 0
 \end{array}$$

劳斯阵列中某一行全为零时，特征方程可出现共轭虚根。  
劳斯阵列中可能全为零的行有二。

1、令  $30 - K_g = 0$ ，得临界增益为：  $K_{gp} = K_g = 30$

共轭虚根为辅助方程  $6s^2 + K_{gp} = 0$  的根。  $6s^2 + 30 = 0, s_{1,2} = \pm j\sqrt{5}$

2、令  $K_g = 0$ ，得  $s = 0$ （开环极点）。

## 10. 闭环系统极点之和与之积：

开环传递函数为：

$$G_k(s) = K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = K_g \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

式中：  $b_{m-1} = \sum_{i=1}^m z_i, b_0 = \prod_{i=1}^m z_i, a_{n-1} = \sum_{j=1}^n p_j, a_0 = \prod_{j=1}^n p_j$

闭环系统的特征方程为：  $F(s) = 1 + G_k(s) = 0$  ， 即：

$$F(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 + K_g(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0) = 0 \quad (1)$$

设闭环系统的极点为： $-s_1, -s_2, \dots, -s_n$ ， 则

$$F(s) = (s + s_1)(s + s_2)\dots(s + s_n) = s^n + \left(\sum_{i=1}^n s_i\right)s^{n-1} + \dots + \prod_{i=1}^n s_i \quad (2)$$

比较 (1)、(2) 式得：

□ 当  $n-m \geq 2$  时， $a_{n-1} = \sum_{i=1}^n s_i = \sum_{j=1}^n p_j$ ，即：

对于任意的  $K_g$ ，闭环极点之和等于开环极点之和，为常数。  
表明：当  $K_g$  变化时，部分闭环极点在复平面上向右移动（变大），则另一些极点必然向左移动（变小）。

□ 闭环极点之积为：
$$\prod_{i=1}^n s_i = a_0 + K_g b_0 = \prod_{j=1}^n p_j + K_g \prod_{i=1}^m z_i$$

当有为零的开环极点：
$$\prod_{i=1}^n s_i = K_g b_0 = K_g \prod_{i=1}^m z_i$$

根据上述10个性质（或准则），可以大致画出根轨迹的形状。为了准确起见，可以用相角条件试探之。



## 根轨迹作图步骤

- 一、标注开环极点和零点，纵横坐标用相同的比例尺；
- 二、实轴上的根轨迹；
- 三、 $n-m$ 条渐近线；
- 四、根轨迹的出射角、入射角；
- 五、根轨迹与虚轴的交点；
- 六、根轨迹的分离点、会合点；

结合根轨迹的连续性、对称性、根轨迹的支数、起始点和终点，闭环极点与闭环极点之和及之积等性质画出根轨迹。



[例]开环传递函数为： $G_k(s) = \frac{K_g}{s[(s+4)^2 + 16]}$ ，画根轨迹。

解：1. 求出开环零极点，即： $p_1 = 0$ ,  $p_{2,3} = -4 \pm 4j$

2. 实轴上的根轨迹： $(-\infty, 0]$

3. 渐近线 
$$-\sigma = \frac{0 - 4 + 4j - 4 - 4j}{3} = -\frac{8}{3} \approx -2.67$$

$$\theta = \frac{(2k+1)180^\circ}{3} = \begin{cases} \pm 60^\circ \\ 180^\circ \end{cases}$$

4. 出射角  $\theta_{1c} = 180^\circ - 90^\circ - 135^\circ = -45^\circ$  ,  $\theta_{2c} = 45^\circ$

5. 求与虚轴的交点，此时特征方程为  $s^3 + 8s^2 + 32s + K_g = 0$

将  $s = j\omega$  代入得： $-j\omega^3 - 8\omega^2 + j32\omega + K_{gp} = 0$

$$-8\omega^2 + K_{gp} = 0 \quad \omega = 0, \quad \omega = \pm 4\sqrt{2} \approx \pm 5.657$$

$$-\omega^3 + 32\omega = 0 \quad K_{gp} = 0, \quad 256$$



## 6. 求分离会合点：由特征方程

$$s^3 + 8s^2 + 32s + K_g = 0$$

$$K_g = -(s^3 + 8s^2 + 32s)$$

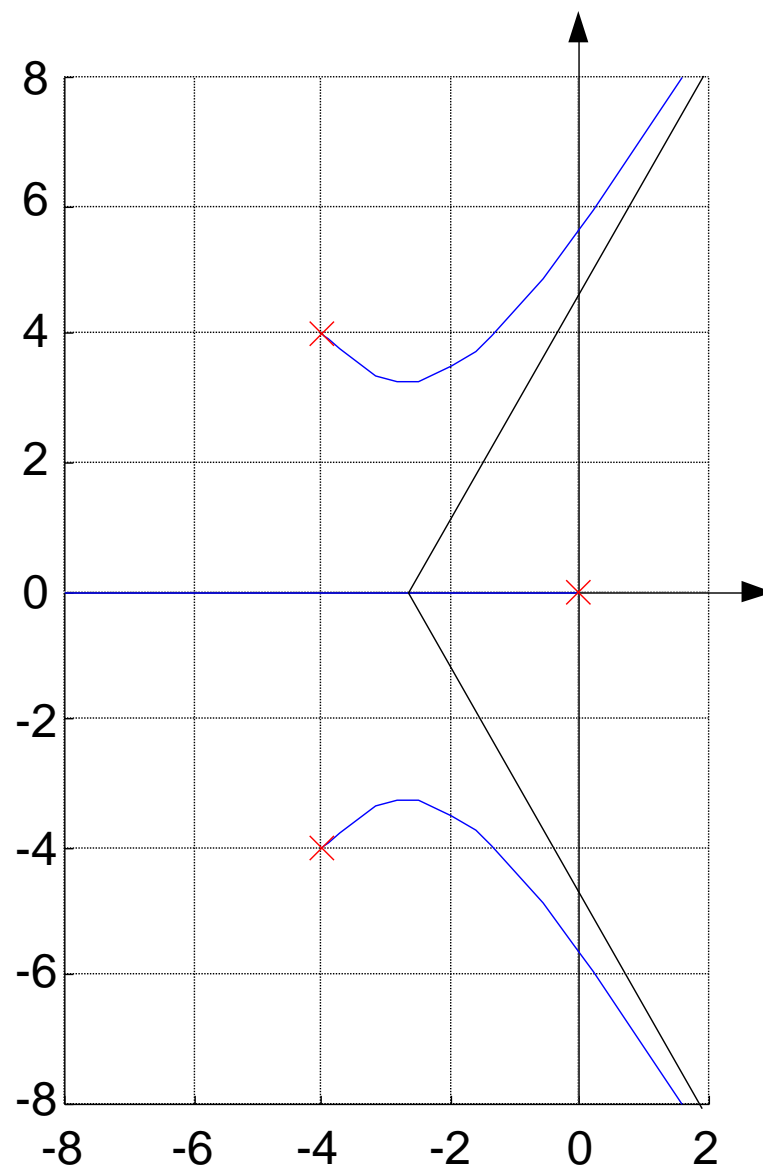
$$\frac{dK_g}{ds} = -(3s^2 + 16s + 32) = 0$$

$$s = \frac{-8 \pm 4\sqrt{2}j}{3} \approx -2.67 \pm 1.89j$$

由图知这两点并不在根轨迹上，  
所以并非分离会合点，这也可

将  $s = \frac{-8 \pm 4\sqrt{2}j}{3}$  代入得

$$K_g = \frac{256}{27}(-5 \pm \sqrt{2}j) \text{ 为复数。}$$





[例]开环传递函数为： $G_k(s) = \frac{K_g}{s[(s+4)^2+1]}$ ，画根轨迹。

解：1. 求出开环零极点，即： $p_1=0$ ,  $p_{2,3}=-4\pm j$

2. 实轴上的根轨迹： $(-\infty, 0]$

3. 渐近线 
$$-\sigma = \frac{0-4+4j-4-4j}{3} = -\frac{8}{3} \approx -2.67$$

$$\theta = \frac{(2k+1)180^\circ}{3} = \begin{cases} \pm 60^\circ \\ 180^\circ \end{cases}$$

4. 出射角  $\theta_{1c} = 180^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \tan^{-1} \frac{1}{4}) = -76^\circ$ ,  $\theta_{2c} = 76^\circ$

5. 求与虚轴的交点，此时特征方程为  $s^3 + 8s^2 + 17s + K_g = 0$

将  $s = j\omega$  代入得： $-j\omega^3 - 8\omega^2 + j17\omega + K_{gp} = 0$

$$-8\omega^2 + K_{gp} = 0 \quad \omega = 0, \quad \omega = \pm\sqrt{17} \approx \pm 4.123$$

$$-\omega^3 + 17\omega = 0 \quad K_{gp} = 0, \quad 136$$



## 6. 求分离会合点：由特征方程

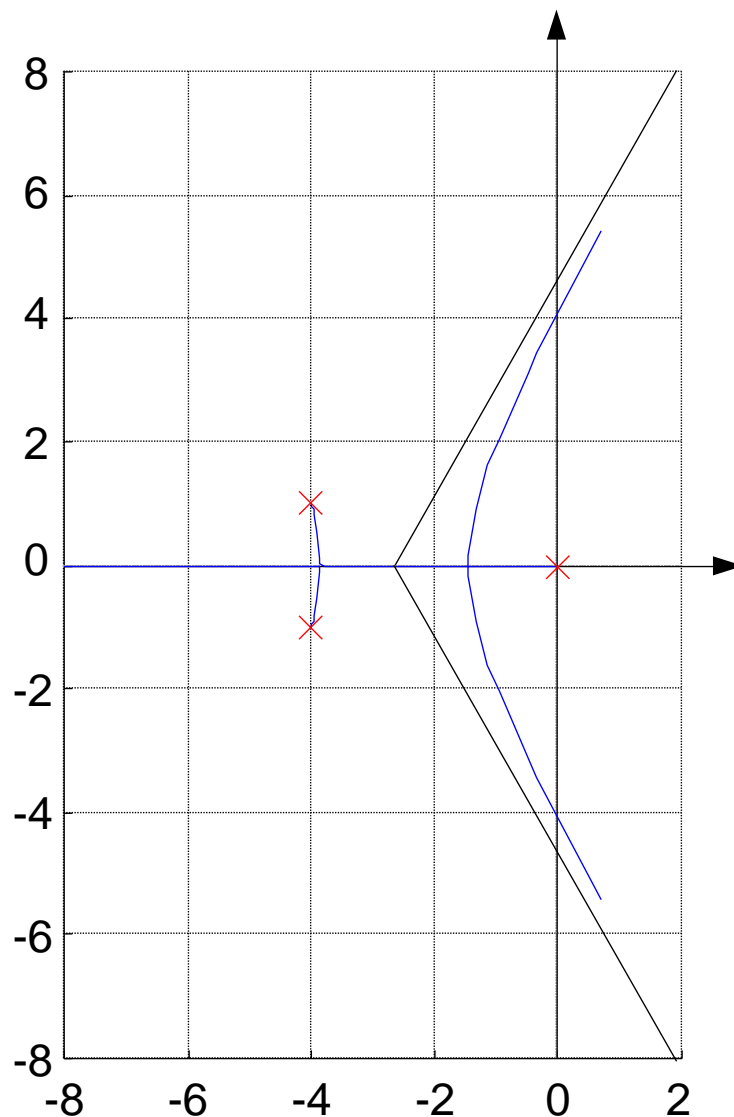
$$s^3 + 8s^2 + 17s + K_g = 0$$

$$K_g = -(s^3 + 8s^2 + 17s)$$

$$\frac{dK_g}{ds} = -(3s^2 + 16s + 17) = 0$$

$$s = \frac{-8 \pm \sqrt{13}}{3} \approx \begin{cases} -1.465 & K_g \approx 10.88 \\ -3.869 & K_g \approx 3.94 \end{cases}$$

由图知这两点都在根轨迹上，  
所以都是分离会合点。





[例]开环传递函数为： $G_k(s) = \frac{K_g}{s[(s+4)^2 + 16/3]}$ ，画根轨迹。

解：1. 求出开环零极点，即： $p_1 = 0$ ,  $p_{2,3} = -4 \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}j$

2. 实轴上的根轨迹： $(-\infty, 0]$

3. 渐近线  $-\sigma = \frac{0-4+4j-4-4j}{3} = -\frac{8}{3} \approx -2.67$

$$\theta = \frac{(2k+1)180^\circ}{3} = \begin{cases} \pm 60^\circ \\ 180^\circ \end{cases}$$

4. 出射角  $\theta_{1c} = 180^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3}) = -60^\circ$        $\theta_{2c} = 60^\circ$

5. 求与虚轴的交点，此时特征方程为  $s^3 + 8s^2 + \frac{64}{3}s + K_g = 0$

将  $s = j\omega$  代入得： $-8\omega^2 + K_{gp} = 0$        $-\omega^3 + \frac{64}{3}\omega = 0$

$$\omega = 0, \quad \omega = \pm \sqrt{\frac{64}{3}} \approx \pm 4.62$$

$$K_{gp} = 0, \quad \frac{512}{3}$$



## 6. 求分离会合点：由特征方程

$$s^3 + 8s^2 + \frac{64}{3}s + K_g = 0$$

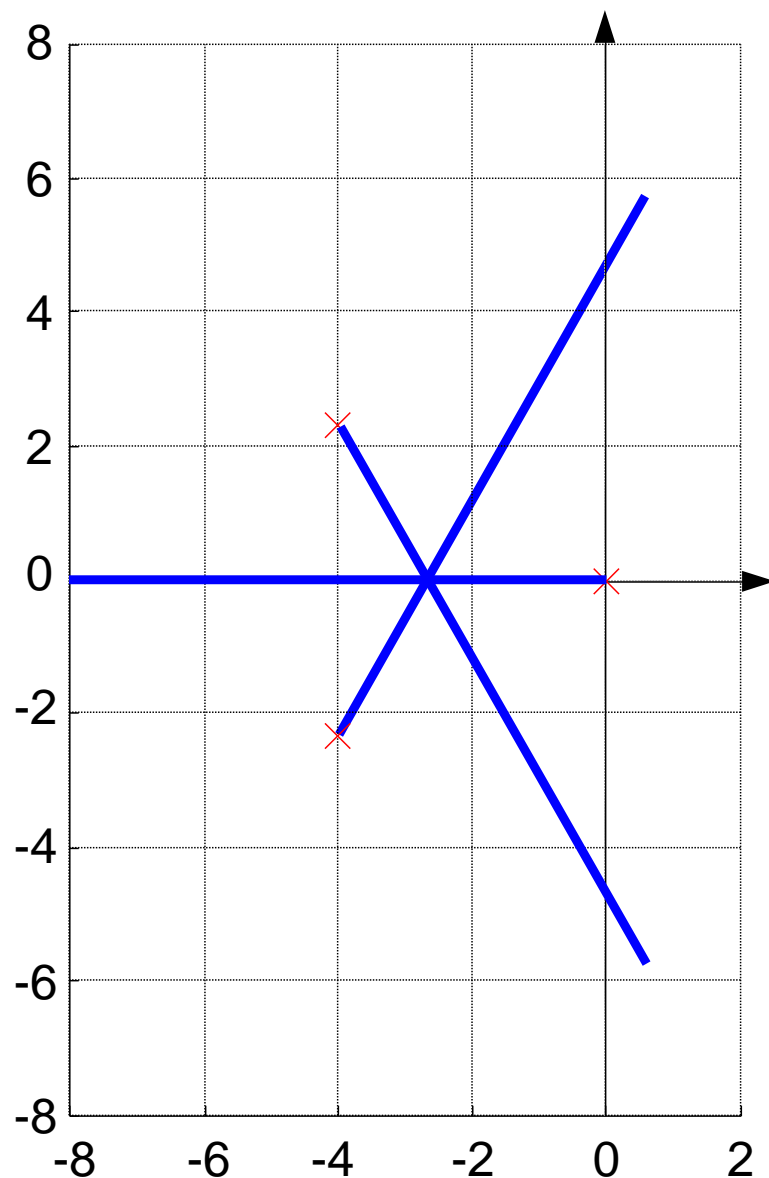
$$K_g = -(s^3 + 8s^2 + \frac{64}{3}s)$$

$$\frac{dK_g}{ds} = -(3s^2 + 16s + \frac{64}{3}) = 0$$

$$s = \frac{-8}{3} \quad K_g \approx 18.96$$

由图知这点在根轨迹上，所以是分离会合点。而且是三重根点。此时分离角为

$$\theta_d = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$





# 小 结

## 需掌握绘制根轨迹的十个准则

- ❑ 根轨迹的连续性和对称性；
- ❑ 根轨迹的支数、起始点和渐进线；
- ❑ 根轨迹实轴上的点和根轨迹的分离点，会合点；
- ❑ 根轨迹的出射角、入射角和虚轴的交点；
- ❑ 闭环极点之积和之和。