3.5 Stability of Linear Control Systems

线性控制系统的稳定性

美国的塔科马海峡大桥 (Tacoma Narrows Bridge)

1940年11月7日上午在风的作用下坍塌的美国华盛顿州**塔科马海峡大桥**

一、稳定的基本概念和线性系统稳定的充要条件

❑ 稳定的基本概念：

设系统处于某一起始的平衡状态。在外作用的影响下，离开了该平衡状态。当外作用消失[illegible]经过足够长的时间它能回复到原来的起始平衡状态，则称这[illegible]的系统为稳定的系统 。否则为不稳定的系统。

定义1：对于线性定常系统，在任何一组初始条件下，若输入$x(t)=0$，当$t\to\infty$时，系统的输出及其各阶导数为零，即

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{t\to\infty} y'(t)=\ldots=\lim_{t\to\infty} y^{(n-1)}(t)=0$$

则称该系统为渐近稳定的。

定义2：对于线性定常系统在零初始条件下，加入一个有界的输入，总引起一个有界的输出，则称该系统为有界输入——有界输出稳定系统。即当 $y(0)=y'(0)=\ldots=y^{(n-1)}(0)=0$ 时，

如果 $\underset{0\le t<\infty}{|x(t)|}\le K_1<\infty$ 则 $\underset{0\le t<\infty}{|y(t)|}\le K_2<\infty$

设系统或元件的微分方程为：

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0y(t)=b_mx^{(m)}(t)+b_{m-1}x^{(m-1)}(t)+\ldots+b_0x(t)$$

式中：$x(t)$—输入，$y(t)$—输出　$a_i,(i=0\sim n-1);b_j,j=0\sim m)$ 为常系数。将上式求拉氏变化，得(**初始值不全为零**)

$$(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+a_0)Y(s)=(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1s+b_0)X(s)$$

+系数取决于初始条件的多项式

$$Y(s)=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+a_0}X(s)+\frac{\text{系数取决于初始条件的 多项式}}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+a_0}$$

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)$$

上式右边**第一项为零状态解**，对应与由输入引起的响应过程。

第二项为零输入解，对应于由初始状态引起的响应过程。

前面讨论的当外作用消失后，如果经过足够长的时间它能回复到原来的起始平衡状态可看作第二项经过足够长的时间变为零。

$$Y_2(s)=\frac{\text{系数取决于初始条件的 多项式}}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+a_0}=\frac{\text{系数取决于初始条件的 多项式}}{\prod_{j=1}^{n_1}(s+p_j)\prod_{k=1}^{n_2}(s^2+2\zeta_k\omega_k+\omega_k^2)}$$

$$=\sum_{j=1}^{n_1}\frac{a_j}{s+p_j}+\sum_{k=1}^{n_2}\frac{b_k(s+\zeta_k\omega_k)+c_k\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^{\ 2}}}{s^2+2\zeta_k\omega_k s+\omega_k^2}$$

时域表达式为:

$$y_2(t)=\sum_{j=1}^{n_1}a_j\boxed{e^{-p_jt}}+\sum_{k=1}^{n_2}b_k\boxed{e^{-\zeta_k\omega_kt}}\cos\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}\,t+\sum_{k=1}^{n_2}c_k\boxed{e^{-\zeta_k\omega_kt}}\sin\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}\,t$$

- 线性定常系统渐近稳定的充要条件:

系统特征方程的根全为负实数或具有负实部的共轭复根。或者说，特征方程的根应全部位于s平面的左半开平面。

对有界输入—有界输出稳定系统可看作当输入有界(如阶跃输入)时，第一项在足够长的时间内输出有界并趋于有限值。

$$Y_1(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}X(s)=\Phi(s)X(s)$$

$$\Phi(s)=\frac{k_g\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n_1}(s+p_j)\prod_{k=1}^{n_2}(s^2+2\zeta_k\omega_k s+\omega_k^2)}\qquad n_1+2n_2=n，\ m\le n$$

其单位阶跃响应函数为：

$$Y_1(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{a_0}{s}+\sum_{j=1}^{n_1}\frac{a_j}{s+p_j}+\sum_{k=1}^{n_2}\frac{b_k(s+\zeta_k\omega_k)+c_k\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}}{s^2+2\zeta_k\omega_k s+\omega_k^2}$$

$$t\ge 0$$

时域表达式为：

$$c(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{n_1} a_j e^{-p_j t}$$

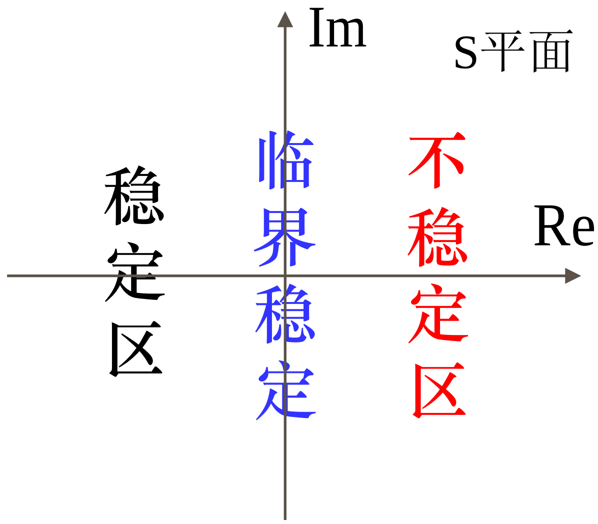
$$+ \sum_{k=1}^{n_2} b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos\sqrt{1-\zeta_k^2}\,\omega_k t + \sum_{k=1}^{n_2} c_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin\sqrt{1-\zeta_k^2}\,\omega_k t$$

定理1：线性定常系统**渐近稳定**的充要条件为系统的全部特征根都位于s左半开平面，即系统的特征方程的根全为负实数或具有负实部的共轭复根。

定理2：线性定常系统为**有界输入——有界输出稳定系统**的充要条件为系统的全部极点都位于s左半开平面。

注意：稳定性是线性定常系统的一个属性，只与系统本身的结构和参数有关，**与输入输出信号无关，与初始条件无关**；只与闭环极点有关，**与零点无关**。

如果特征方程中有一对共轭虚根，它对应于等幅的周期振荡，称为**临界平衡状态**（或**临界稳定状态**）。



- 对于一阶系统，$a_1 s + a_0 = 0, s = -\dfrac{a_0}{a_1}$，只要 a_0, a_1 都大于零，系统是稳定的。

- 对于二阶系统，$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0, s_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$

  只有a_0, a_1, a_2 都大于零，系统才稳定。(负实根或实部为负)

- 对于三阶或以上系统，求根是很烦琐的。于是就有了以下描述的代数稳定性判据。

二、劳思—赫尔维茨稳定性判据

1. 劳思判据

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

- 特征方程的全部系数同号且不缺项，是**必要条件**但非充分条件。
- 系统稳定的**充要条件**为：由特征方程系数组成的劳思阵的第一列为正。

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \\
s^1 & f_1 & & & \\
s^0 & g_1 & & &
\end{array}
$$

劳思阵的前两行由特征方程的系数组成。

第一行为1，3，5，…项系数组成，

第二行为2，4，6，…项系数组成。

以下各项的计算式为：

由该项元素前两行的第一列和后一列构成的行列式取负值再除以上一行第一列元素。

$$
\begin{array}{l|lllll}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots \\
\cdots & & \cdots & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}
$$

$$b_1=\frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}a_{n-2}-a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2=\frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}a_{n-4}-a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3=\frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}a_{n-6}-a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots \\
\vdots & & \cdots & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}
$$

$$c_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_{n-7} - b_4 a_{n-1}}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \qquad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1} \qquad d_3 = \frac{c_1 b_4 - b_1 c_4}{c_1}$$

依次类推。可求得 $e_i, f_i, g_i, \ldots (i = 1,2,\ldots)$

[例]：特征方程为：$a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$，试判断稳定性。

[解]：劳斯阵为：

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & a_3 & a_1 \\
s^2 & a_2 & a_0 \\
s^1 & \dfrac{a_2a_1 - a_3a_0}{a_2} & 0 \\
s^0 & a_0 & 0
\end{array}
$$

稳定的充要条件为：

- a_3, a_2, a_1, a_0 均大于零
- 且$a_1a_2 - a_3a_0 > 0$

劳斯阵列的特殊情况

- 用一个正数去乘或除某整行，不会改变系统的稳定性结论；
- 劳斯阵第一列所有系数均不为零，但也不全为正数，则系统不稳定，在s右半平面上有极点，极点个数等于劳斯阵列第一列系数符号改变的次数。

[例]：系统的特征方程为： $s^5+2s^4+s^3+3s^2+4s+5=0$

s^5	1	1	4
s^4	2	3	5
s^3	-1	3	0
s^2	9	5	0
s^1	1	0	0
s^0	5	0	0

$\Rightarrow$ -1 3 （×2）

$\Rightarrow$ 1 0 0 $\left(\times\frac{9}{32}\right)$

劳斯阵第一列有负数，系统是不稳定的。其符号变化两次，表示有两个极点在s的右半平面。

- 劳思阵某一行第一列系数为零，而其余系数不全为零。

用很小的正数ε代替零的那一项，然后据此计算出劳斯阵列中的其他项。若第一列零(即ε)的项与其上项或下项的符号相反，计作一次符号变化。

[例]: $s^4+2s^3+s^2+2s+1=0$

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 1 & 1 \\
s^3 & 2 & 2 & \\
s^2 & 0 & 1 & \\
s^1 & -\infty & & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}
$$

令 $\varepsilon\to 0^+$ 则 $2-\dfrac{2}{\varepsilon}\to -\infty$ 故第一列不全为正，系统不稳定，s右半平面有两个极点。

- 劳斯阵某行系数全为零的情况。

表明特征方程具有大小相等而位置径向相反的根。至少要下述几种情况之一出现，如：大小相等，符号相反的一对实根，或一对共轭虚根，或对称于虚轴的两对共轭复根。

例如：$\Delta_1 = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = (s^2 - 1)(s^2 + 25)(s + 2)$

$$\Delta_2 = s^4 + 4 = (s - 1 + j)(s - 1 - j)(s + 1 + j)(s + 1 - j)$$

[处理办法]: 可将不为零的最后一行的系数组成辅助方程，将此辅助方程式对s求导所得方程的系数代替全零的行。大小相等，位置径向相反的根可以通过求解辅助方程得到。辅助方程应为偶次数的。

[例]： $s^6+2s^5+8s^4+12s^3+20s^2+16s+16=0$

s^6	1	8	20	16
s^5	2	12	16	0
s^4	2	12	16	0
s^3				
s^2				
s^1				
s^0				

s^6	1	8	20	16
s^5	1	6	8	
s^4	1	6	8	
s^3	1	3		
s^2	3	8		
s^1	$\frac{1}{3}$			
s^0	8			

辅助方程为： $s^4+6s^2+8=0$，

求导得： $4s^3+12s=0$，

或 $s^3+3s=0$，用1，3，0代替全零行即可。

从第一列都大于零可见，好象系统是稳定的。注意此时还要计算大小相等位置径向相反的根再来判稳。由辅助方程求得：

$(s^2+2)(s^2+4)=0$ ， $s_{1,2}=\pm j\sqrt{2}$， $s_{3,4}=\pm j2$

此时系统是临界稳定的。控制工程上认为是不稳定的。

2. 赫尔维茨判据

设系统的特征方程式为： $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$

则系统稳定的充要条件是：$a_n > 0$，且由特征方程系数构成的赫尔维茨行列式的主子行列式全部为正。

赫尔维茨行列式：

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \ldots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 & a_0 \end{vmatrix}_{n \times n}$$

赫尔维茨行列式的构造：主对角线上的各项为特征方程的第二项系数 a_{n-1} 至最后一项系数 a_0，在主对角线以下各行中各项系数下标逐次增加，在主对角线以上各行中各项系数下标逐次减小。当下标大于n或小于0时，行列式中的项取0。

以4阶系统为例使用赫尔维茨判据： $a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$

赫尔维茨行列式为：
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

稳定的充要条件是：

1、$a_4 > 0$

2、$\Delta_1 = a_3 > 0$，$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_4 a_1 > 0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_4 = \Delta > 0$$

赫尔维茨判据的另一种形式:

系统稳定的充要条件[林纳特-威伯特(Lienard-Chipard)定理]:

若 1、$a_i > 0(i = n \sim 0)$,

2、$\Delta_j > 0(j = 1,3,5,\ldots)$ 或 $\Delta_j > 0(j = 2,4,6,\ldots)$ ，则系统稳定。

式中，Δ_j 为赫尔维茨主子行列式。采用这种形式的判据可减少一半的计算工作量。

可以证明劳斯判据和赫尔维茨判据是等价的，留做作业。

3. 劳斯-赫尔维茨稳定性判据的应用

判定控制系统的稳定性

[例]： 系统的特征方程为：$s^4+2s^3+3s^2+4s+5=0$，判断系统的稳定性。

[解]：

排列劳斯阵如下：

$$
\begin{array}{l|lll}
s^4 & 1 & 3 & 5 \\
s^3 & 2 & 4 & 0 \\
s^2 & 1 & 5 & 0 \\
s^1 & -6 & 0 & 0 \\
s^0 & 5 & 0 & 0
\end{array}
$$

因为，$a_i>0,(i=0\sim4)$ ，且劳斯阵第一列不全为正，所以，系统不稳定。

由于劳斯阵第一列有两次符号变化，所以系统在s右半平面有两个极点。

[例] 系统的特征方程为：$s^5+2s^4+24s^3+48s^2+23s+46=0$ 该系统稳定吗？求出每一个特征根，并画出特征根在S平面上的分布图。

[解]：劳斯阵如下

s^5	1	24	23
s^4	2	48	46
s^3	0	0	0

s^3行全为零。由前一行系数构成辅助方程得：

$$Q(s)=2s^4+48s^2+46 \text{或} Q(s)=s^4+24s^2+23$$

其导数为：$Q'(s)=4s^3+48s$ 将 4,48 或 1,12 代替s^3行，可继续排列劳斯阵如下：

s^5	1	24	23
s^4	1	24	23
s^3	1	12	0
s^2	12	23	0
s^1	10.1	0	0
s^0	23	0	0

- $a_i>0,(i=0\sim5)$
- 因为 s^3 行全为零，所以特征方程必有特殊的根。求解如下：

  $$\text{令} Q(s)=0, \text{有} (s^2+23)(s^2+1)=0,$$

  $$\therefore s_{1,2}=\pm j\sqrt{23}, s_{3,4}=\pm j1$$

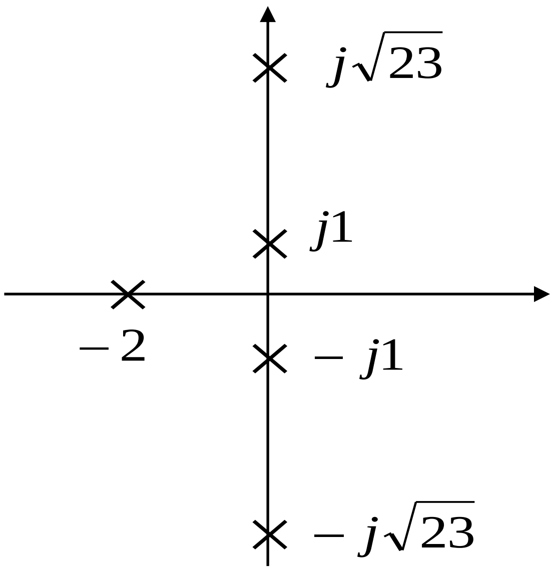
- 由于有特征根为共轭虚数，所以系统不稳定

设剩余的一个根为-p。则：$(s+p)(s^4+24s^2+23)=0$，整理得：

$$s^5+ps^4+24s^3+24ps^2+23s+23p=0$$

比较系数得：-p= -2

极点分布如下：



注意：

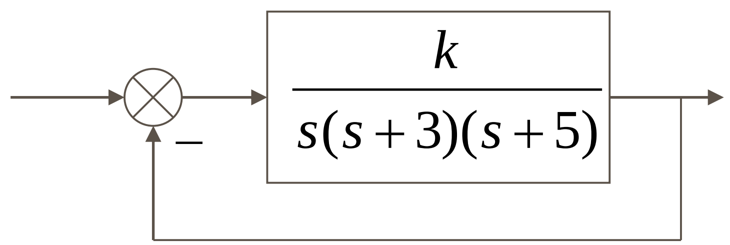
劳斯判据实际上只能判断代数方程的根是在s平面左半闭平面还是在右半开平面。对于虚轴上的根要用辅助方程求出。

若代数方程有对称于虚轴的实根或共轭复根，则一定在劳斯表的第一列有变号，并可由辅助方程求出

分析系统参数变化对稳定性的影响

利用劳斯稳定性判据还可以讨论个别参数对稳定性的影响，从而求得这些参数的取值范围。**若讨论的参数为开环放大系数K，则使系统稳定的最大K称为临界放大系数** K_p。

[例]: 已知系统的结构图，试确定系统的**临界放大系数**。



[解]：闭环传递函数为：$\Phi(s)=\dfrac{\dfrac{k}{s(s+3)(s+5)}}{1+\dfrac{k}{s(s+3)(s+5)}}=\dfrac{k}{s^3+8s^2+15s+k}$

特征方程为： $s^3+8s^2+15s+k=0$

特征方程为： $s^3+8s^2+15s+k=0$

劳斯阵：

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 15 \\
s^2 & 8 & k \\
s^1 & \dfrac{120-k}{8} & 0 \\
s^0 & k &
\end{array}
$$

要使系统稳定，必须

① 系数皆大于0，有 $k>0$

② 劳斯阵第一列皆大于0，有 $\dfrac{120-k}{8}>0 \Rightarrow k<120$

$$
\begin{cases} k<120 \\ k>0 \end{cases} \Rightarrow 0<k<120
$$

所以，临界放大系数 $k_p=120$

确定系统的相对稳定性（稳定裕度）

利用劳斯稳定性判据确定的是系统稳定或不稳定，即绝对稳定性。在实际系统中，往往需要知道系统离临界稳定有多少裕量，这就是相对稳定性或稳定裕量问题。

利用实部最大的特征方程的根 p（若稳定的话，它离虚轴最近）和虚轴的距离 σ 表示系统稳定裕量。

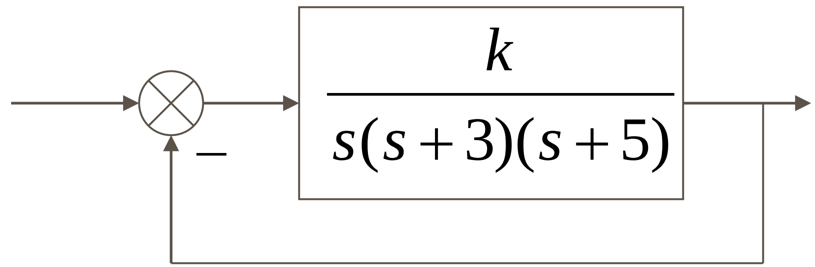
若p处于虚轴上，则 $\sigma=0$ ，表示稳定裕量为0。

作 $s=-\sigma$ 的垂线，若系统的极点都在该线的左边，则称该系统具有 σ 的稳定裕度。一般说，σ越大，稳定程度越高。

如何判断？

可用 $s=z-\sigma$ 代入特征方程，得以z为变量的新的特征方程，用劳斯-赫尔维茨判据进行判稳。若稳定，则称系统具有σ的稳定裕度。

[例]：已知系统的结构图，为使系统特征方程的根的实数部分不大于-1，试确定k值的取值范围。



[解]：闭环特征方程为：

$$s^3+8s^2+15s+k=0$$

现以 $s=x-1$代入上式，得

$$x^3+5x^2+2x+k-8=0$$

劳斯阵：

$$\begin{array}{c|cc} x^3 & 1 & 2 \\ x^2 & 5 & k-8 \\ x^1 & \dfrac{18-k}{5} & 0 \\ x^0 & k-8 & \end{array}$$

要使系统稳定，必须

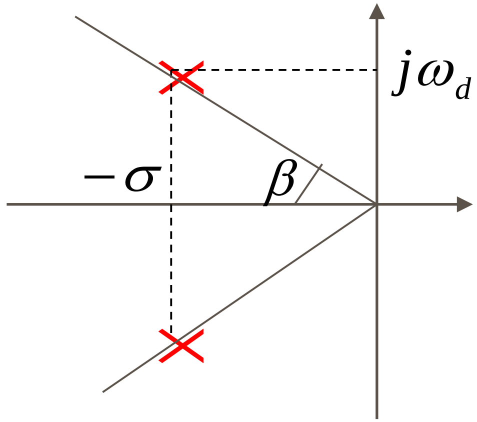
① 系数皆大于0，$\therefore k>8$

② 劳斯阵第一列皆大于0

有 $\begin{cases} \dfrac{18-k}{5}>0 \Rightarrow k<18 \\ k>8 \end{cases} \Rightarrow 8<k<18$

所以，此时k的取值范围为 $8<k<18$

讨论相对稳定性除了考虑极点离虚轴远近外，还要考虑共轭极点的振荡情况。对于共轭极点，其实部反映响应的衰减快慢，虚部反映响应的振荡情况。对于极点$-\sigma \pm j\omega_d$，对应的时域响应为 $e^{-\sigma t}\sin(\omega_d t+\varphi)$。所以，$\sigma$越小，衰减越慢，$\omega_d$越大，振荡越激烈。如下图示意：

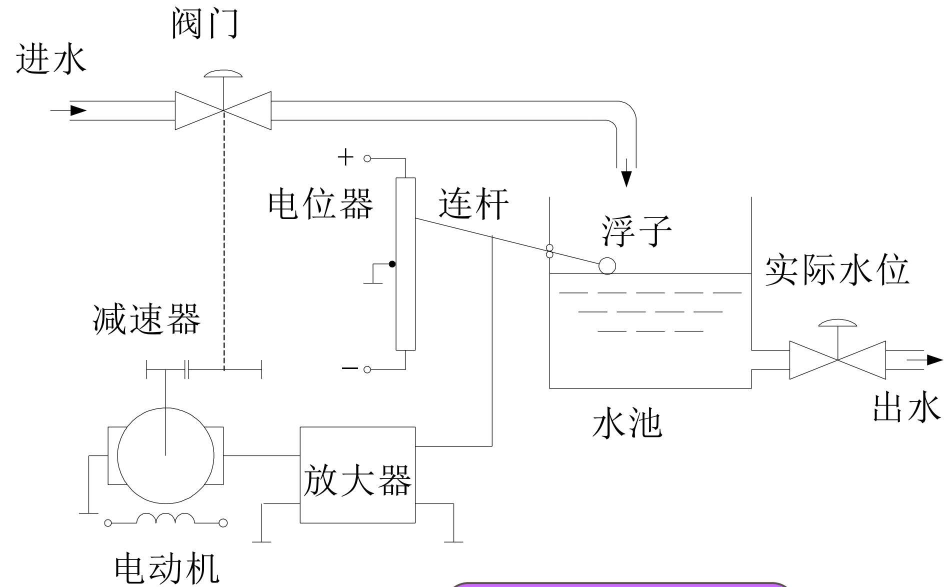


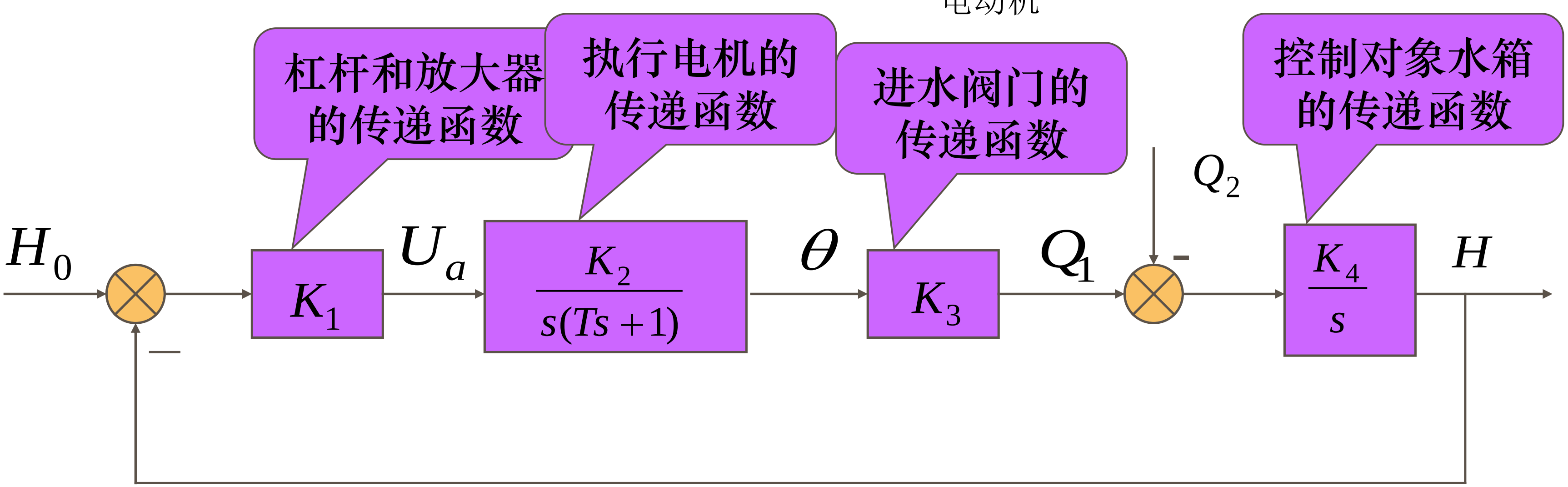
可用共轭极点对负实轴的张角β来表示系统的相对稳定性。当$\beta=90^\circ$时，表示极点在虚轴上，系统为临界稳定。β越小，稳定性越高。相对稳定性越好。

三、结构不稳定系统及其改进措施

仅仅调节参数无法稳定的系统称为结构不稳定系统。

例：如图所示的液位控制系统





闭环传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{K_1K_2K_3K_4}{s^2(Ts+1)+K_1K_2K_3K_4}$$

令： $K=K_1K_2K_3K_4$

闭环特征方程为： $s^2(Ts+1)+K=0$

展开为： $Ts^3+s^2+K=0$

方程系数： $a_3=T$， $a_2=1$， $a_1=0$， $a_0=K$

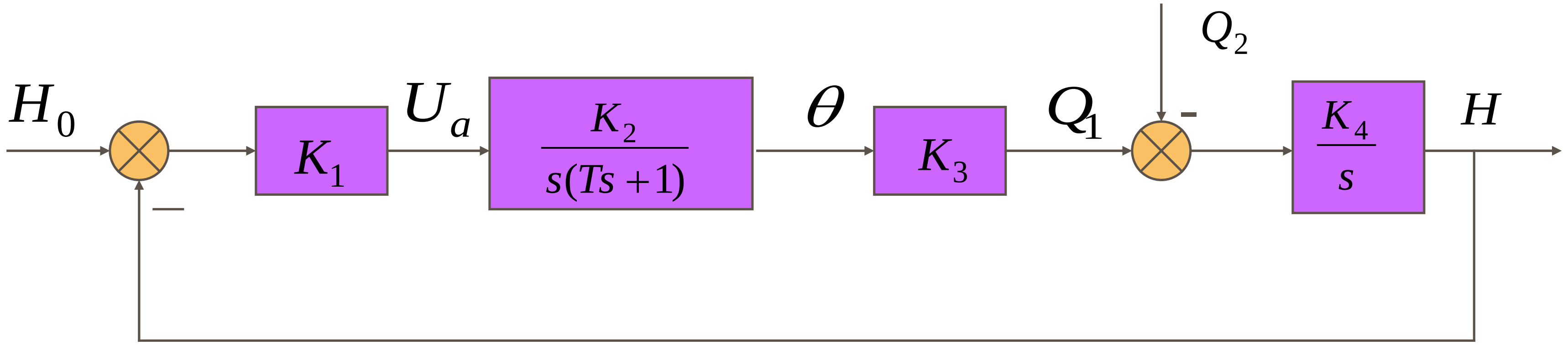
劳斯表：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & T & 0 \\ s^2 & 1 & K \\ s^1 & -KT & \\ s^0 & K & \end{array}$$

由于$a_1=0$，不满足系统稳定的必要条件，所以系统是不稳定的。这也可从劳斯表看出。

由于无论怎样调节参数K和T都不能使系统稳定，所以是一个结构不稳定的系统。

欲使系统稳定，必须改变原系统的结构。



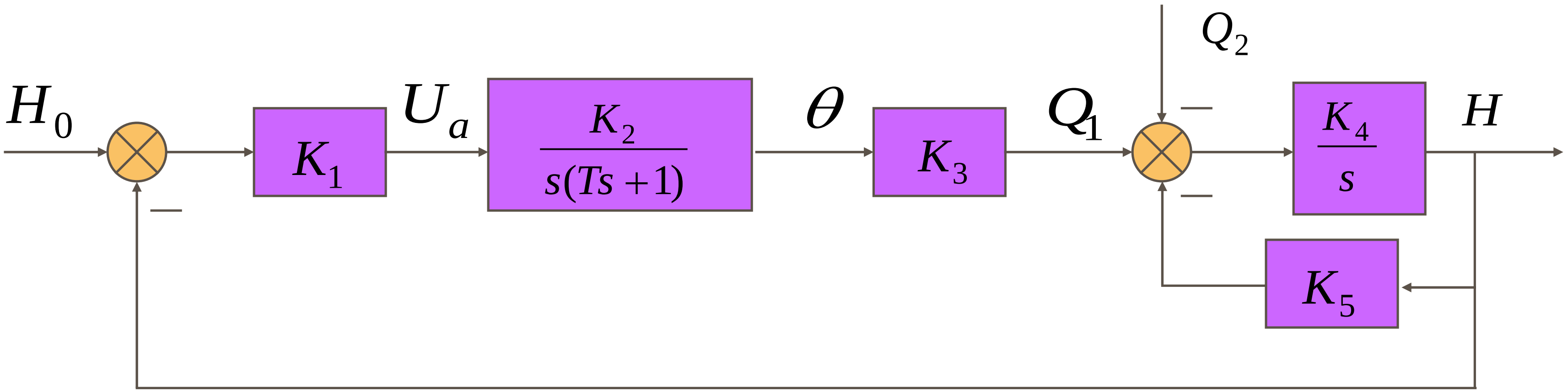
不稳定的原因是?

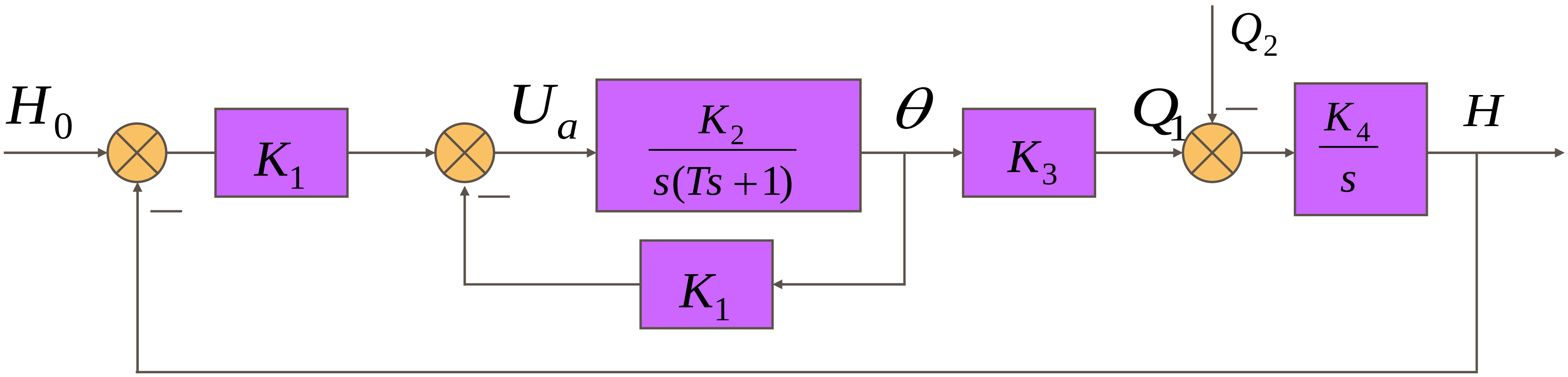
由图可看出，造成系统结构不稳定的原因是前向通路中有两个积分环节串联，而传递函数的分子只有增益K。这样，造成系统闭环特征方程缺项，即s一次项系数为零。

怎样才能补上缺项呢?

因此，消除结构不稳定的措施可以有两种，一是改变积分性质；二是引入开环零点，补上特征方程中的缺项。

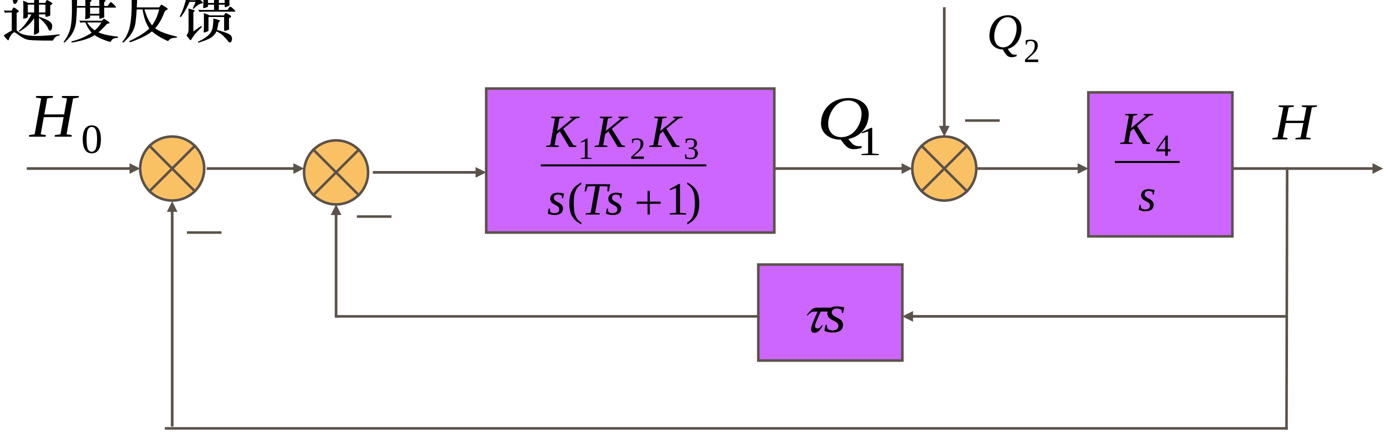
(1) 改变积分性质：用反馈包围积分环节，破坏其积分性质。



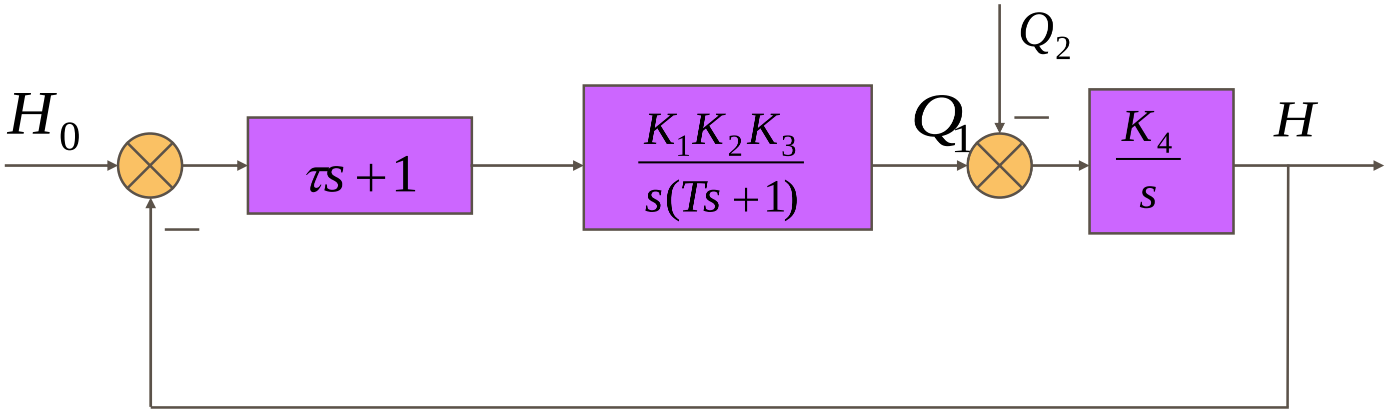


积分性质的破坏将改善系统的稳定性，但会使系统的稳态精度下降。

（2）速度反馈



(3) 引入开环零点：比例+微分



闭环传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{K(\tau s+1)}{s^2(Ts+1)+K(\tau s+1)}$$

劳斯表：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & T & K\tau \\ s^2 & 1 & K \\ s^1 & K(\tau-T) & \\ s^0 & K & \end{array}$$

闭环特征方程为： $Ts^3+s^2+K\tau s+K=0$

方程系数： $a_3=T$， $a_2=1$， $a_1=K\tau$， $a_0=K$

稳定的充分必要条件为：

① $a_i>0$ 即 $T>0$， $K>0$， $\tau>0$

② $K(\tau-T)>0$ 即 $\tau>T$

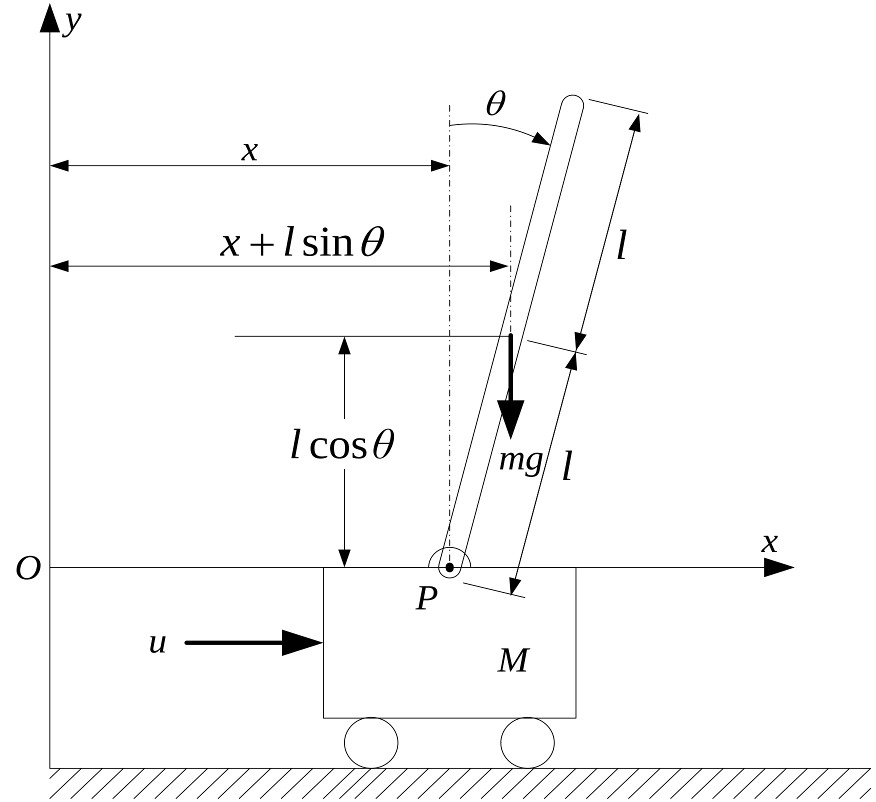
引入比例+微分控制后，补上了特征方程中s一次项系数。故只要适当匹配参数，满足上述条件，系统就可稳定。

[例]：倒立摆系统当忽略转动惯量J时

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}-\frac{(M+m)g}{Ml}\theta=-\frac{u}{Ml}$$

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)}=\frac{-\dfrac{1}{Ml}}{s^2-\dfrac{(M+m)g}{Ml}}$$

$$=\frac{-\dfrac{1}{Ml}}{\left(s-\sqrt{\dfrac{(M+m)g}{Ml}}\right)\left(s+\sqrt{\dfrac{(M+m)g}{Ml}}\right)}$$



此时若输入 $u=a\theta+b\theta'$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{b}{Ml}\frac{d\theta}{dt}+\frac{a-(M+m)g}{Ml}\theta=0$$

当 $\frac{b}{Ml}>0$，$\frac{a-(M+m)g}{Ml}>0$时系统稳定。

小 结

- 线性系统稳定的充要条件
- 劳斯代数稳定性判据（劳斯阵，各种特殊情况下劳斯阵的排列和判稳方法）
- 劳斯-赫尔维茨稳定性判据的应用
  — 判稳
  — 系统参数变化对稳定性的影响
  — 系统的相对稳定性
- 结构不稳定系统及其改进措施