第五节　控制系统的根轨迹分析法

- 条件稳定系统的分析；
- 瞬态性能分析和开环系统参数的确定；
- 利用根轨迹求解代数方程的根；
- 开环零、极点对根轨迹形状的影响;
- 用Matlab绘制根轨迹。

一、 条件稳定系统的分析

[例4-11]：设开环系统传递函数为： $G_k(s)=\dfrac{K_g(s^2+2s+4)}{s(s+4)(s+6)(s^2+1.4s+1)}$

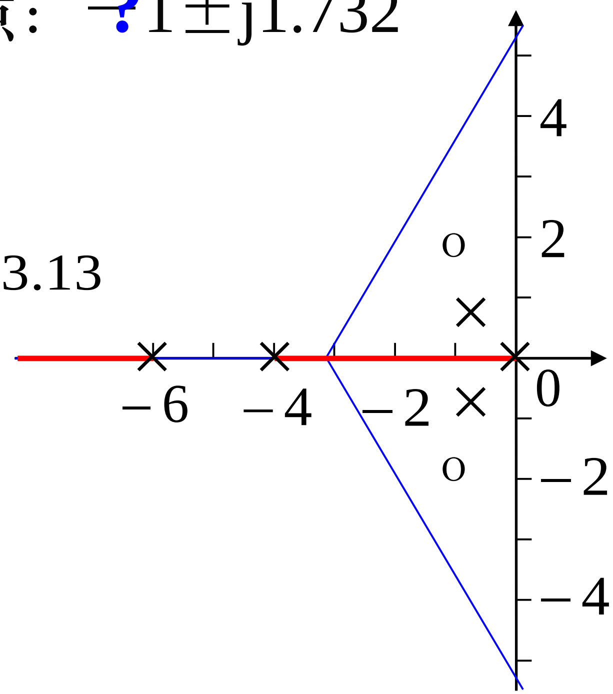
试绘制根轨迹，并讨论使闭环系统稳定时 K_g 的取值范围。

[解] 根据绘制根轨迹的步骤，可得：

- 开环极点：0, －4, －6, －0.7±j0.714, 零点： －1±j1.732
- 渐近线：与实轴的交点：

$$-\sigma=\frac{\sum -p_i-\sum -z_i}{n-m}=\frac{-4-6-1.4+2}{3}=-3.13$$

倾角： $\theta=\dfrac{\pi(2k+1)}{n-m}=\pm\dfrac{\pi}{3},\pi$



- 实轴上根轨迹区间： $(-\infty,-6],[-4,0]$

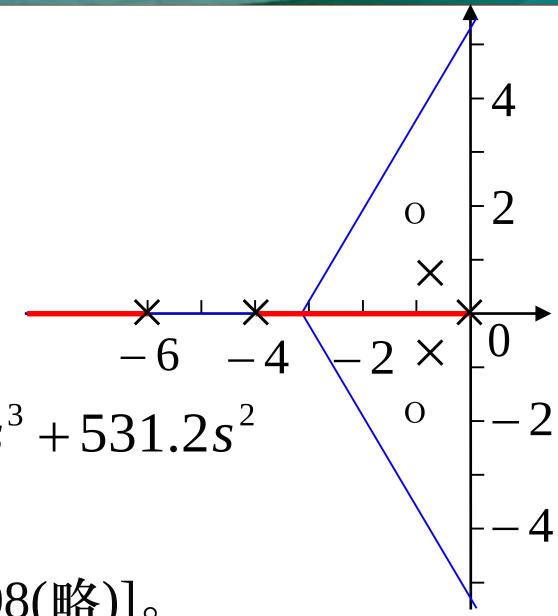
- 分离会合点：

$$N(s)=s^2+2s+4,\quad N'(s)=2s+2$$

$$D(s)=s^5+11.4s^4+39s^3+43.6s^2+24s$$

$$D'(s)=5s^4+45.6s^3+117s^2+87.2s+24$$

$$N'(s)D(s)-N(s)D'(s)=3s^6+30.8s^5+127.4s^4+338.4s^3+531.2s^2$$
$$+348.8s+96=0$$



用Matlab可算出分离点s=－2.3557；[另一根为－5.1108(略)]。

另外可以根据 $K_g=-\dfrac{D(s)}{N(s)}$ 求实轴分离点的近似值。

求出[-4，0]之间的增益如下表所示

s	0	-0.5	-1	-1.5	-2.0	-2.5	-3	-3.5	-4
K_{gd}	0	1.628	3	5.971	8.80	9.375	7.457	3.949	0

K_{gd}的最大值为9.375，这时s=－2.5，是近似分离点。

分离角： $\theta_d=\dfrac{\pi}{2}$

- 出射角： $\theta_c = \mp 55^\circ$
- 入射角： $\theta_r = \pm 103^\circ$
- 与虚轴的交点和 对应的增益值：

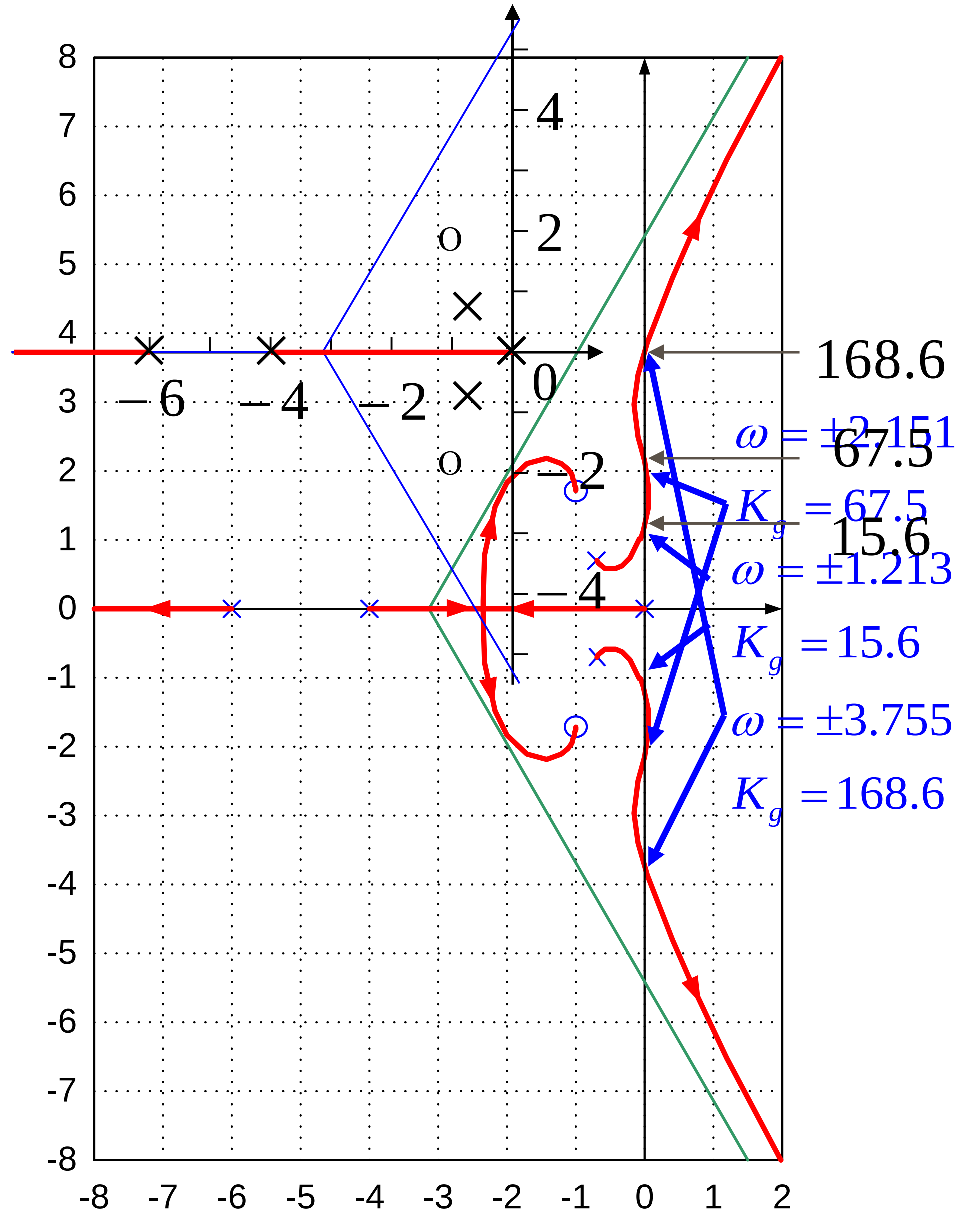
$$\omega = \begin{cases} \pm 1.213 \\ \pm 2.151 \\ \pm 3.755 \end{cases} \qquad k_{gp} = \begin{cases} 15.6 \\ 67.5 \\ 168.6 \end{cases}$$

画出根轨迹如图所示，该图是用Matlab工具绘制的。

- 由图可知： 当 $0 < K_g < 15.6$ 和 $67.5 < K_g < 168.6$ 时，系统是稳定的；

当 $K_g > 168.6$和$15.6 < K_g < 67.5$ 时，系统是不稳定的。

这种情况称为条件稳定系统



条件稳定系统：参数在一定的范围内取值才能使系统稳定，这样的系统叫做条件稳定系统。

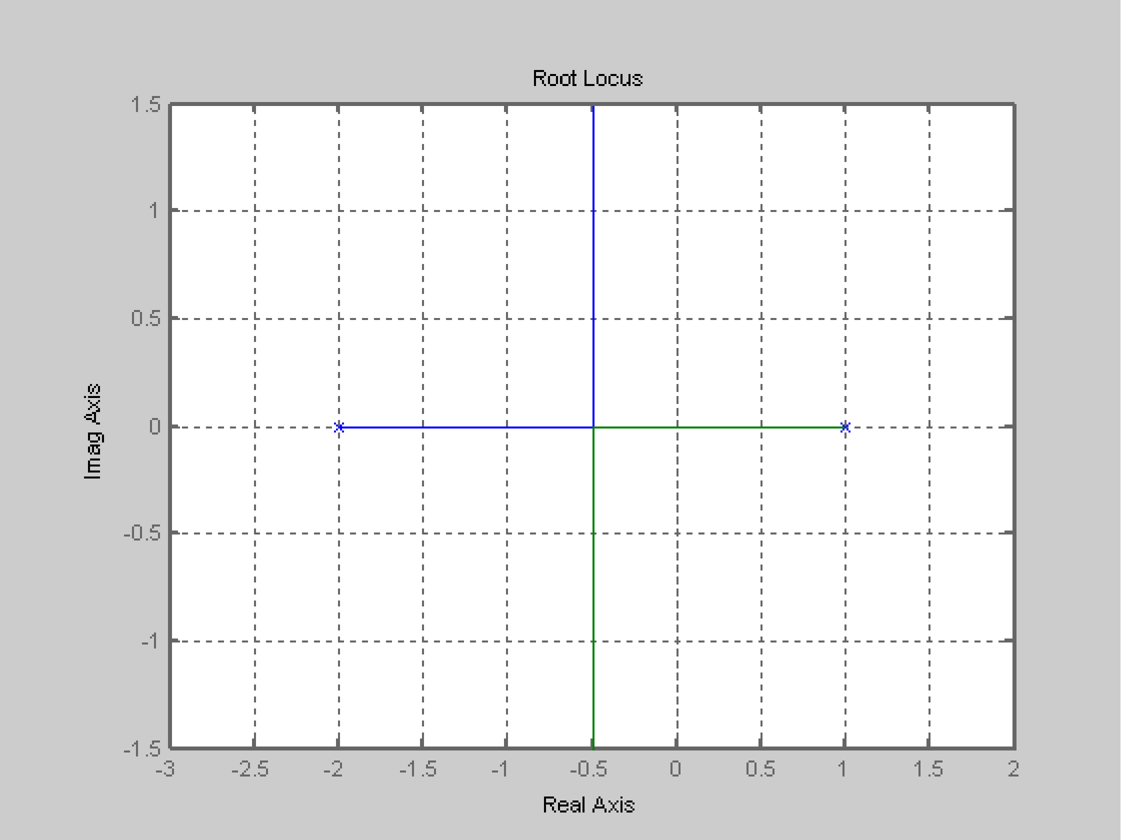
下面的系统就是条件稳定系统的例子:

- 开环非最小相位系统，其闭环系统的根轨迹必然有一部分在s的右半平面;
- 具有正反馈的环节。

条件稳定系统的工作性能往往不能令人满意。在工程实际上，应注意参数的选择或通过适当的校正方法消除条件稳定问题。

[例] 非最小相位系统：$G_k(s)=\dfrac{k_g}{(s-1)(s+2)}$，试确定使系统稳定时的增益值。

[解]：根轨迹如右：



有闭环极点在右半平面，系统是不稳定的。显然稳定临界点在原点。该点的增益临界值为 k_{gp}。

闭环特征方程为：$s^2+s+k_g-2=0$，当s=0时，$k_{gp}=2$，所以，系统稳定的条件是：$k_g>2$

问　题

1. 增加开环零点改变根轨迹，因而改变闭环极点。那么是否改变闭环零点?
2. 当两个系统的根轨迹相同并选择相同的闭环极点时，这两个系统的瞬态响应是否一样?