3.4 高阶系统的时域分析

一、典型三阶系统的瞬态响应

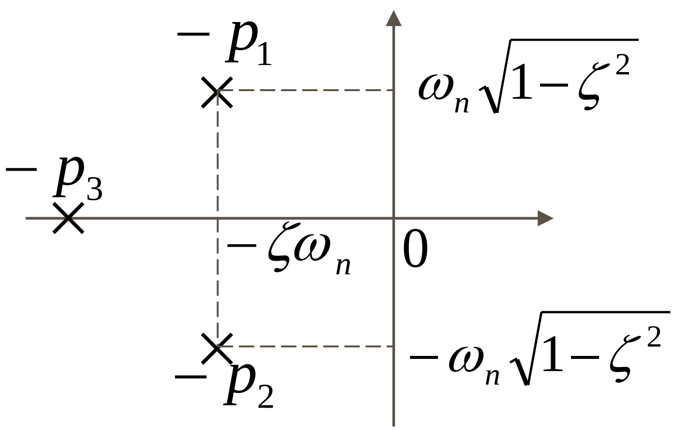
传递函数：$\Phi(s)=\dfrac{\omega_n^{\,2}}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\,2})(Ts+1)}$

当 $0<\zeta<1$ 时，极点分布如下：

$$-p_1=-\zeta\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

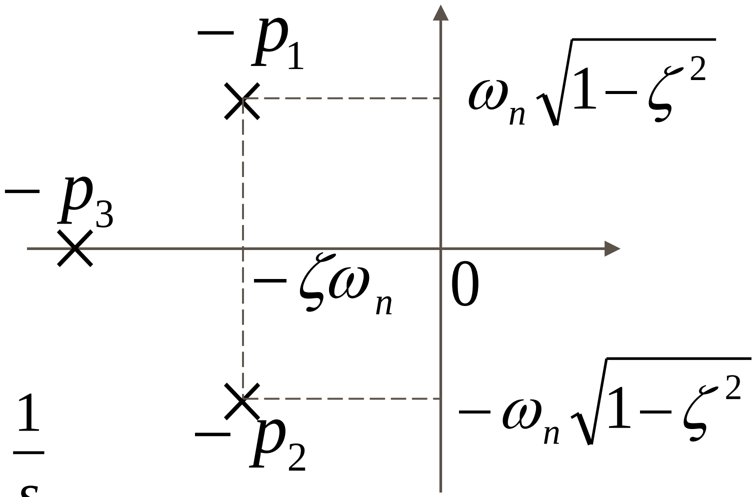
$$-p_2=-\zeta\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$-p_3=-\frac{1}{T}$$



这相当于在典型二阶系统的基础上增加了一个惯性环节

单位阶跃响应为：



$$Y(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{\omega_n^{\ 2}p_3}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})(s+p_3)}\cdot\frac{1}{s}$$

$$y(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\alpha\zeta^2(\alpha-2)+1}\left\{\alpha\zeta^2(\alpha-2)\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right.$$

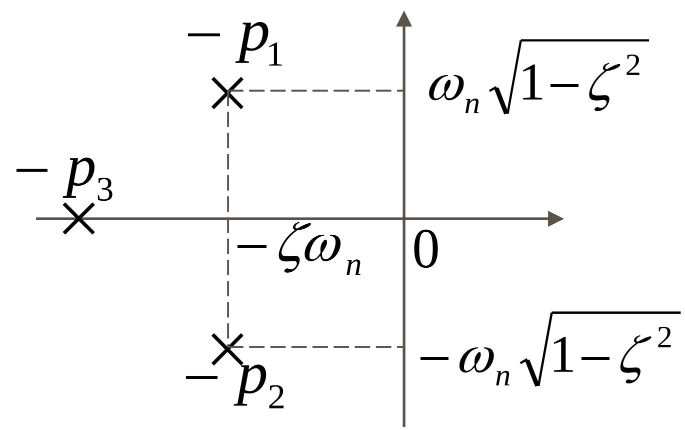
$$\left.+\frac{\alpha\zeta[\zeta^2(\alpha-2)+1]}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right\}-\frac{e^{-p_3 t}}{\alpha\zeta^2(\alpha-2)+1}$$

系数总为负

式中 $\alpha=\dfrac{p_3}{\zeta\omega_n}$ 表示增?加的极点和共轭复极点的相对位置。

$$y(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\alpha\zeta^2(\alpha-2)+1}\left\{\alpha\zeta^2(\alpha-2)\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t+\frac{\alpha\zeta[\zeta^2(\alpha-2)+1]}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right\}$$

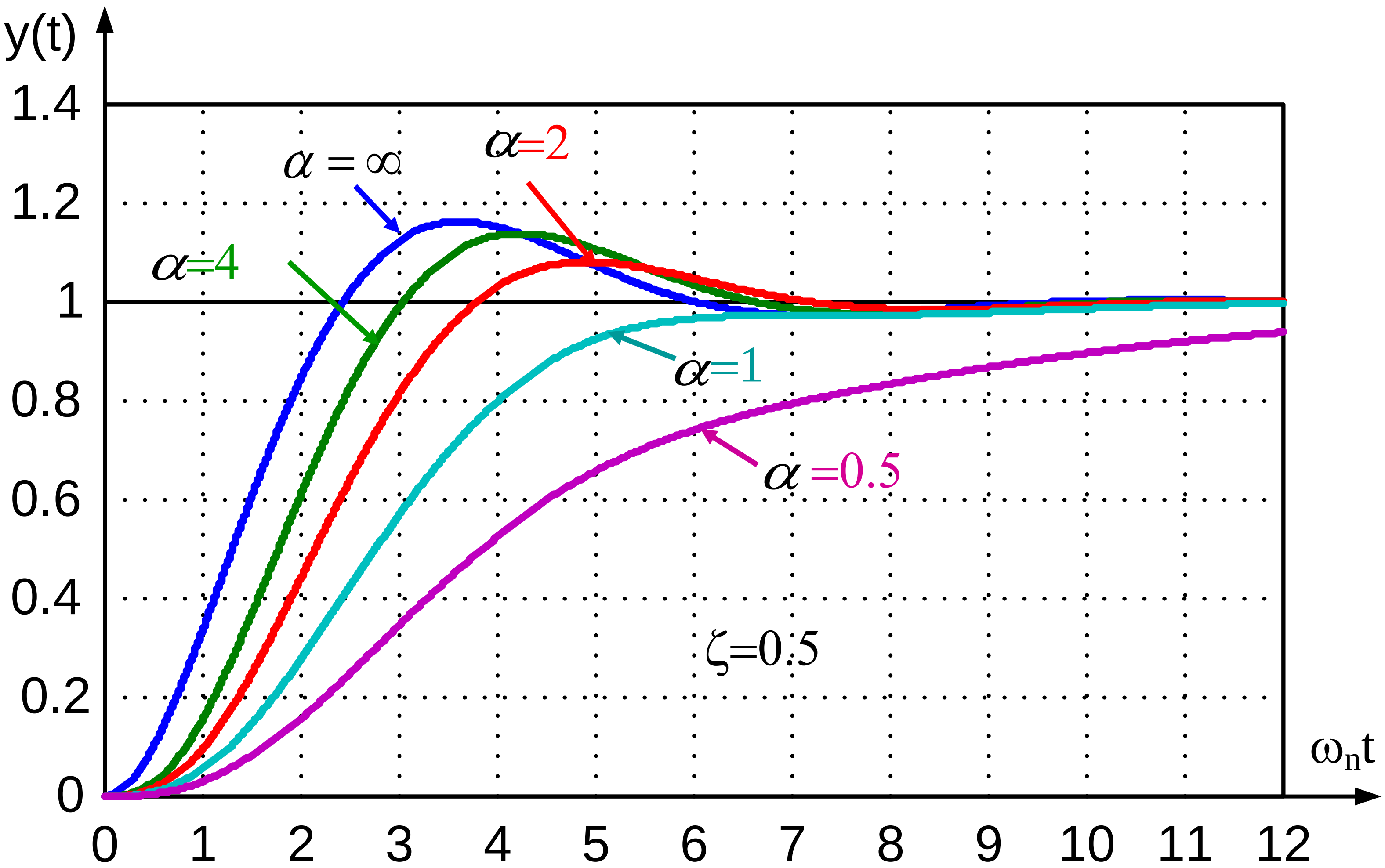
$$-\frac{e^{-p_3 t}}{\alpha\zeta^2(\alpha-2)+1}$$



[分析]：三阶系统的单位阶跃响应由三部分组成：稳态项，共轭复极点形成的振荡分量，实极点构成的衰减指数项分量。

1. 当 $\boxed{\alpha \gg 1}$ 时，表示实极点远离虚轴，共轭复极点离虚轴近，系统的瞬态特性主要由共轭复极点决定，呈二阶系统的特性，即系统的特性由二阶系统的特征参数 ζ 和 ω_n 决定。

2. 当 $\boxed{\alpha \ll 1}$ 时，表示实极点离虚轴近，共轭复极点离虚轴远，系统的瞬态特性主要由实极点决定，呈一阶系统的特性。



图中$\alpha=\infty$，表示无实极点。加入实极点后，当ζ不变时，

超调量下降了，但调节时间增加了。

二、高阶系统的瞬态响应

时域表达式为:

$$y(t) = \quad ?$$

$$\Phi(s) = \frac{k_g \prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n_1}(s+p_j)\prod_{k=1}^{n_2}(s^2+2\zeta_k\omega_k s+\omega_k^2)} \qquad n_1+2n_2=n, \quad m \le n$$

$$y(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{n_1} a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^{n_2} b_k e^{-\zeta_k\omega_k t}\cos\sqrt{1-\zeta_k^2}\,\omega_k t$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_2} c_k e^{-\zeta_k\omega_k t}\sin\sqrt{1-\zeta_k^2}\,\omega_k t$$

时域表达式为:

$$y(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{n_1} a_j e^{-p_j t}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_2} b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos\sqrt{1-\zeta_k^2}\,\omega_k t + \sum_{k=1}^{n_2} c_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin\sqrt{1-\zeta_k^2}\,\omega_k t \qquad t \ge 0$$

由此可见:

1. 高阶系统的阶跃响应总可以由简单函数项组成，即由一阶、二阶系统的响应组成。

2. $y(t)$ 不仅与闭环极点 $-p_j$、$-\zeta_k\omega_k \pm j\sqrt{1-\zeta_k^2}\,\omega_k$ 有关，而且与系数 a_j、b_k、c_k 有关(这些系数都与闭环零、极点有关)。所以，高阶系统的单位阶跃响应取决于闭环系统的零、极点分布。

[定性分析]：

$$y(t)=a_0+\sum_{j=1}^{n_1}a_j e^{-p_j t}+\sum_{k=1}^{n_2}b_k e^{-\zeta_k\omega_k t}\cos\sqrt{1-\zeta_k^2}\,\omega_k t+\sum_{k=1}^{n_2}c_k e^{-\zeta_k\omega_k t}\sin\sqrt{1-\zeta_k^2}\,\omega_k t$$

1. 极点的影响

- 极点对应的项衰减的快慢取决于极点离虚轴的距离
  距虚轴近的极点对应的项衰减得慢；距虚轴远的极点对应的项衰减得快。
- 距虚轴近的极点对应的系数大，而距虚轴远的极点对应的系数小。

距虚轴近的极点对瞬态响应影响大。

$$Y(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{10}{s(s+1)(s+10)}=\frac{1}{s}-\frac{10}{9}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{9}\frac{1}{s+10}$$

$$y(t)=1-\frac{10}{9}e^{-t}\boxed{+\frac{1}{9}e^{-10t}}$$

2. 零点的影响

$$y(t)=a_0+\sum_{j=1}^{n_1}a_je^{-p_jt}+\sum_{k=1}^{n_2}b_ke^{-\zeta_k\omega_kt}\cos\sqrt{1-\zeta_k^2}\,\omega_kt$$

$$+\sum_{k=1}^{n_2}c_ke^{-\zeta_k\omega_kt}\sin\sqrt{1-\zeta_k^2}\,\omega_kt$$

零点不影响响应的形式。零点只影响各项的系数。

零点若靠近某个极点，则该极点对应项的系数就小。

$$Y(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{10}{9}\frac{s+9}{s(s+1)(s+10)}=\frac{1}{s}-\frac{80}{81}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{81}\frac{1}{s+10}$$

近似：$$Y(s)=\frac{\boxed{\frac{1}{9}s+1}}{s(s+1)\boxed{(\frac{1}{10}s+1)}}\approx\frac{1}{s(s+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

$$Y(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{10}{1.1}\frac{s+1.1}{s(s+1)(s+10)}=\frac{1}{s}-\frac{10}{99}\frac{1}{s+1}+\frac{89}{99}\frac{1}{s+10}$$

近似：$$Y(s)=\frac{\boxed{\frac{1}{1.1}s+1}}{s\boxed{(s+1)}(\frac{1}{10}s+1)}\approx\frac{1}{s(\frac{1}{10}s+1)}=\frac{10}{s(s+10)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+10}$$

3. 偶极子

若有一对零极点，它们之间的距离比极点到虚轴距离的十分之一还要小，这对零极点称为偶极子。

偶极子对瞬态响应的影响可以忽略。

总之

- 极点远离原点，则衰减快、系数小；
- 极点靠近一个零点，且远离其他极点和零点，则系数小；
- 极点接近原点，周围没有零点，则系数大。

衰减慢且系数大的项在瞬态过程中起主导作用。

4. 主导极点

- 离虚轴最近的一对共轭极点或一个实极点；
- 极点附近无零点；
- 其他极点距虚轴的距离是离虚轴最近的极点距虚轴的距离的5倍以上。

此时系统的性能主要由主导极点来决定。

5. 等效低阶系统

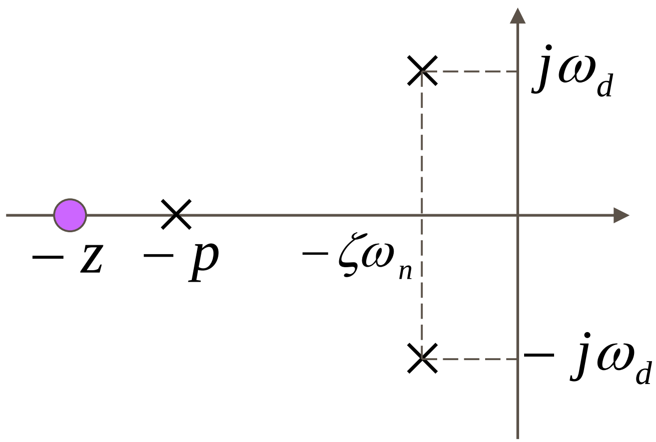
具有主导极点的高阶系统可近似为二阶或一阶系统。此时高阶系统的特性可用等效低阶系统的特性做近似的估计分析。

高阶系统近似简化原则：

- 在近似前后，确保输出稳态值不变；
- 在近似前后，瞬态过程基本相差不大。

具体方法：是在时间常数形式的开环或闭环传递函数上略去小时间常数。

例如： $\Phi(s)=\dfrac{\omega_n^2(s+z)}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(s+p)}$



如果： $\dfrac{z}{\zeta\omega_n}>5$以及$\dfrac{p}{\zeta\omega_n}>5$

则： $\Phi(s)\approx\dfrac{z\omega_n^2}{p(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$

说明：**假设输入为单位阶跃函数，则化简前后的稳态值如下**

$$\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^2(s+z)}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(s+p)}=\frac{z}{p}$$

$$\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^2 z}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)p}=\frac{z}{p}$$

小　结

- 零、极点位置对高阶系统单位阶跃响应曲线的影响情况。极点位置决定衰减快慢，零点和极点同时决定各项系数的大小
- 主导极点
- 高阶系统简化为二阶系统的原则