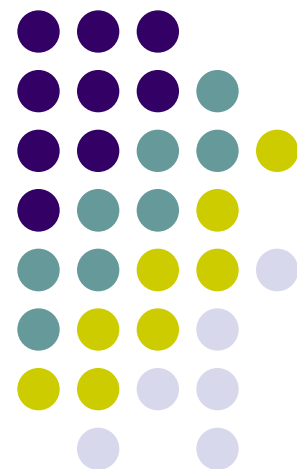


四、自动控制系统的 根轨迹分析



主要内容



1. 根轨迹的基本概念
2. 根轨迹绘制的基本准则
3. 参量根轨迹
4. 典型控制系统的根轨迹
5. 开环零极点对根轨迹的影响
6. 根轨迹的应用

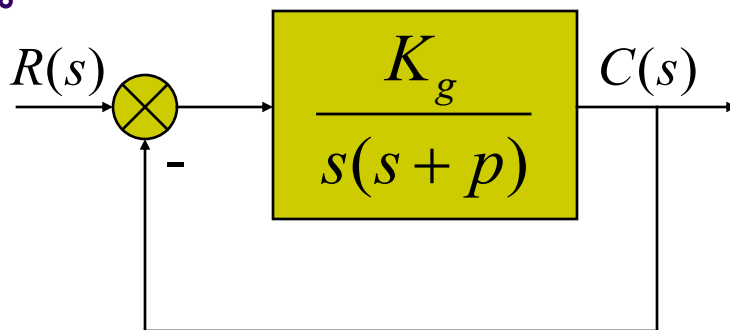




三、参量根轨迹

1. 参量根轨迹：闭环极点随开环根轨迹增益 K_g 以外的参数变化时的轨迹

例1：对于下图所示系统，绘制开环极点 $-p$ 变化时的参量根轨迹（设 $K_g = 4$ ）。



解：闭环传递函数为
$$\Phi(s) = \frac{K_g}{s^2 + ps + K_g} = \frac{4}{s^2 + ps + 4}$$





三、参量根轨迹

特征方程为 $s^2 + ps + 4 = 0$?

将其转变为 $G_k(s) = -1$ 的形式:

$$s^2 + ps + 4 = 0 \Rightarrow p \frac{s}{s^2 + 4} = -1$$

$p \frac{s}{s^2 + 4}$ 称为等效开环传递函数; 参数 p 称为等效根轨迹增益

画出 p 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时的根轨迹:

- 1) 根轨迹有两支, 起点为 $\pm 2j$, 一个终点为原点, 另一为无穷远零点
- 2) 实轴上的根轨迹为负实轴
- 3) 出射角: $\theta_1 = \pi + (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = \pi$ ($j2$ 极点)
 $\theta_2 = \pi + [(-\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}))] = \pi$ ($-j2$ 极点)



三、参量根轨迹



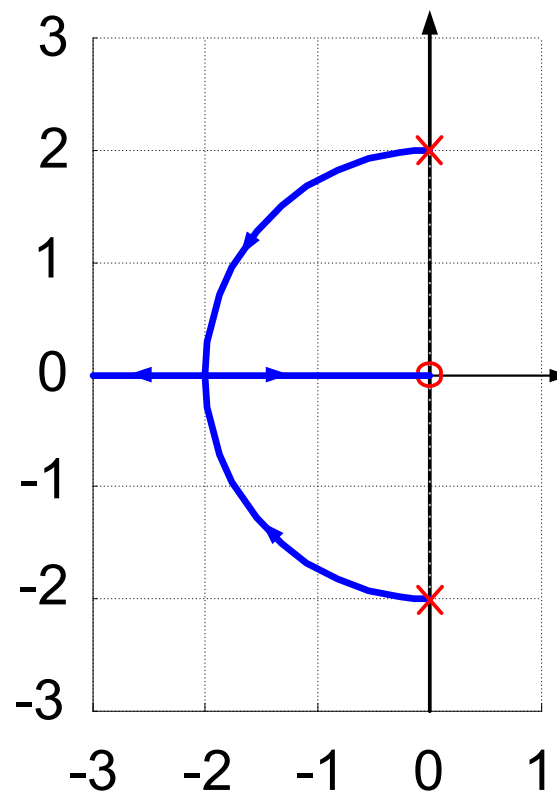
4) 分离会合点:

根据 $N'(s)D(s) - N(s)D'(s) = 0$, 解得 $s = \begin{cases} -2, & 4 \\ 2, & -4 \end{cases}$

因此 $s = -2$ 为会合点, 会合角为 $\theta_d = \frac{\pi}{2}$

复平面上的根轨迹是半个圆, 对应 $0 < p < 4$;

此时二阶系统处于欠阻尼状态





三、参量根轨迹

- 要求：所讨论的参数以线性形式出现在闭环特征方程中
- 处理方法：
 - 把特征方程写为含有可变参数的乘式多项式 $KA(s) +$ 不含可变参数的多项式 $B(s)$
 - 获得等效开环传递函数 $\frac{A(s)}{B(s)}$
 - 绘制关于等效根轨迹增益 K 的根轨迹
- 注意：“等效” 仅表示对应的闭环特征方程相同

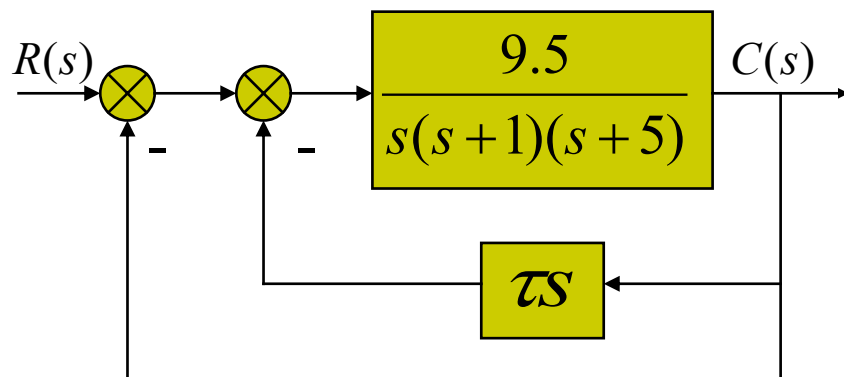


三、参量根轨迹



例2：系统结构如右图所示，绘制以 τ 为参变量的根轨迹，并讨论速度反馈对系统阶跃响应的影响。

解：1) 先求闭环传递函数，得



$$\Phi(s) = \frac{9.5}{s(s+1)(s+5) + 9.5(1 + \tau s)}$$

特征方程为 $s(s+1)(s+5) + 9.5(1 + \tau s) = 0$

$$\Rightarrow s^3 + 6s^2 + 5s + 9.5 + 9.5\tau s = 0 \quad \Rightarrow 1 + \frac{9.5\tau s}{s^3 + 6s^2 + 5s + 9.5} = 0$$

令 $\tau^* = 9.5\tau$ ，等效开环传函可写为

$$G_k^* = \frac{\tau^* s}{s^3 + 6s^2 + 5s + 9.5} = \frac{\tau^* s}{(s + 5.4)(s + 0.3 - j1.292)(s + 0.3 + j1.292)}$$



三、参量根轨迹



$$G_k^* = \frac{\tau^* s}{(s + 5.4)(s + 0.3 - j1.292)(s + 0.3 + j1.292)}$$

2) 画参量根轨迹:

① 开环极点为 -5.4 、 $-0.3 \pm j1.292$ ，
开环零点为 0 。

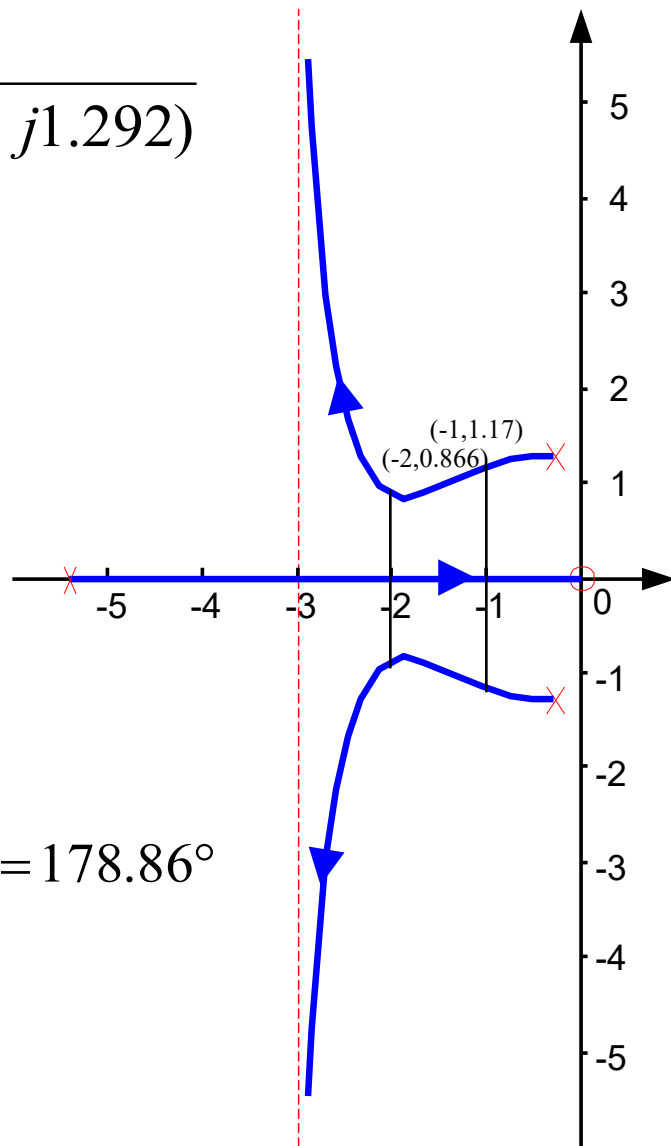
② 实轴根轨迹: $[-5.4, 0]$

③ 渐近线: $\sigma = -3$, $\theta = \pm 90^\circ$

④ 出射角:

$$\theta_{2c} = \pi + \left(\pi - \operatorname{tg}^{-1} \frac{1.292}{0.3} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \frac{1.292}{5.1} - 90^\circ = 178.86^\circ$$

$$\theta_{3c} = -178.86^\circ$$



三、参量根轨迹

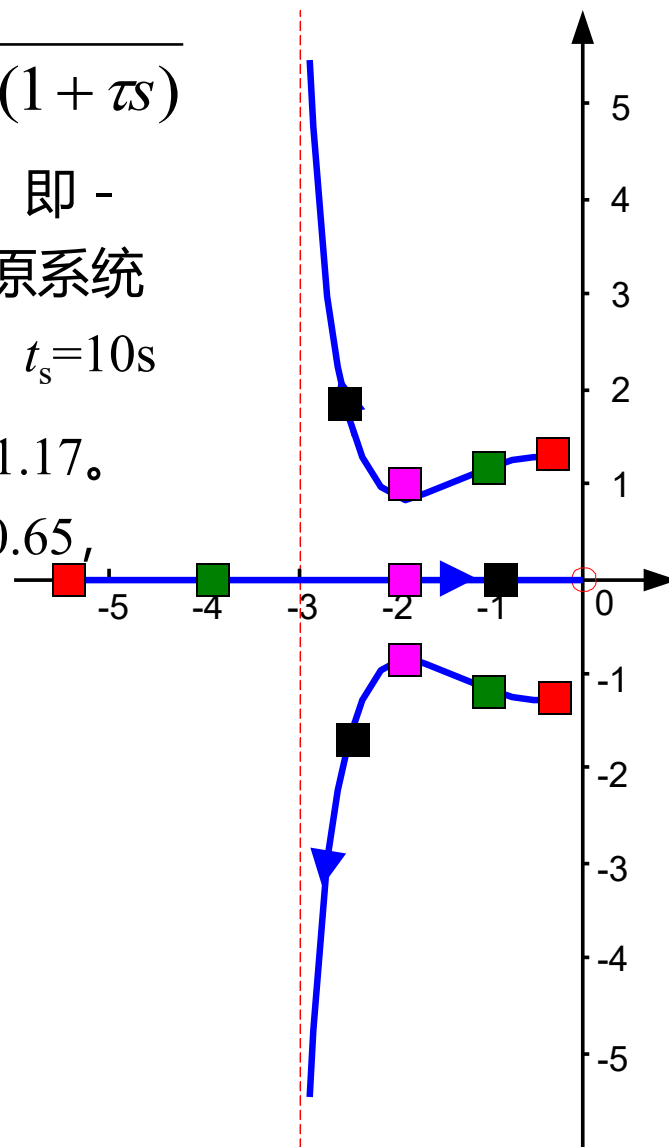
3) 讨论: $\Phi(s) = \frac{9.5}{s(s+1)(s+5) + 9.5(1+\tau s)}$

① 当 $\tau^* = 0$ 时, 闭环极点为等效开环极点, 即 -5.4、 $-0.3 \pm j1.292$ 。此时 $\beta = 5.4/0.3 = 18$, 原系统可看作二阶系统, $\zeta = 0.226$, $\delta\% = 48.2\%$, $t_s = 10s$

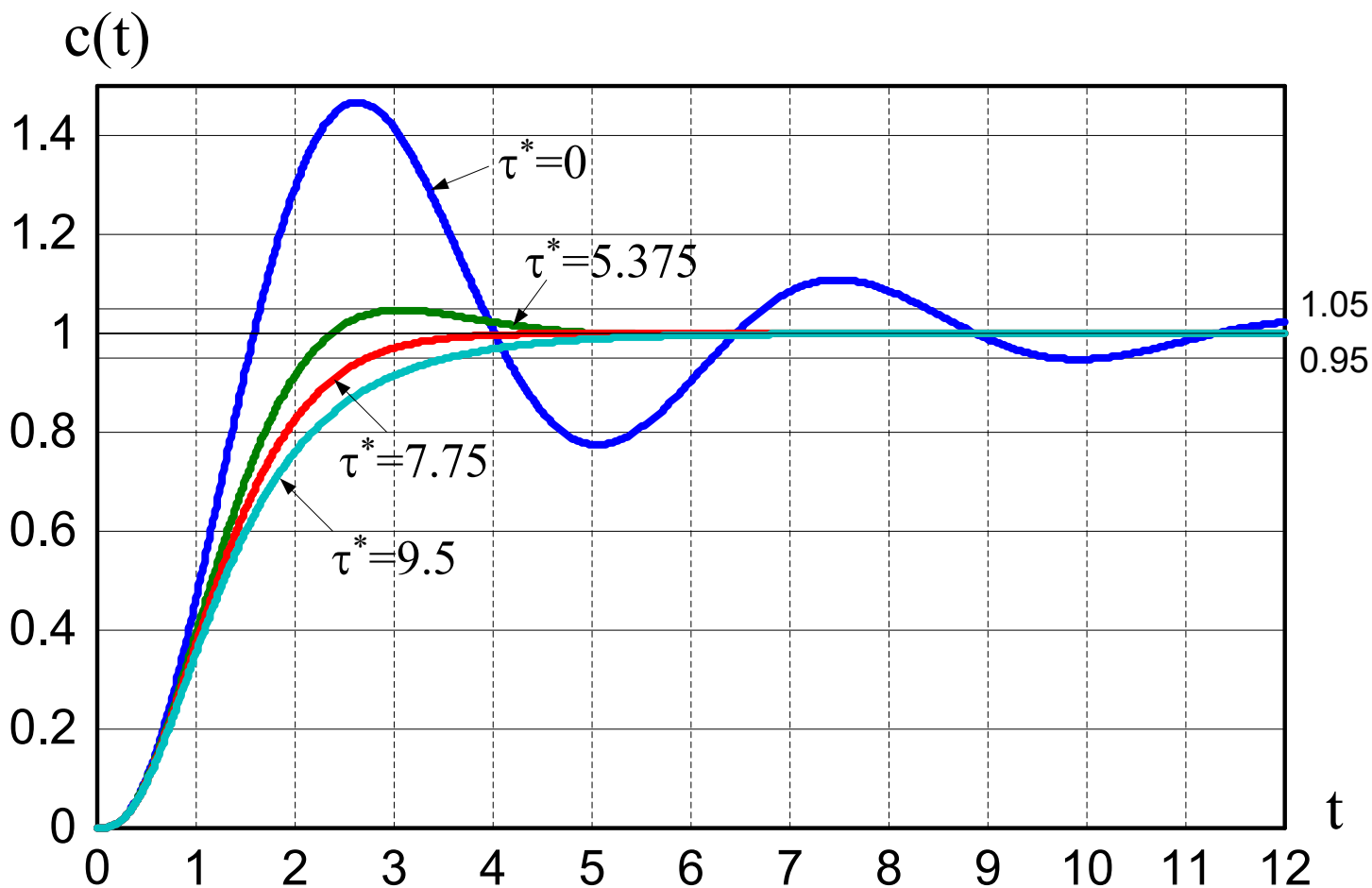
② 当 $\tau^* = 5.375$ 时, 闭环极点为 -4、 $-1 \pm j1.17$ 。此时 $\beta = 4/1 = 4$, 若看作二阶系统, 则 $\zeta = 0.65$, $\delta\% = 6.8\%$, $t_s = 3s$

③ 当 $\tau^* = 7.75$ 时, 闭环极点为 -2、 $-2 \pm j0.866$ 。此时 $\beta = 2/2 = 1$, 已不能看作二阶系统。

④ 当 $\tau^* = 9.5$ 时, 闭环极点为 -1、 $-2.5 \pm j1.8$, 此时可看作一阶系统。



三、参量根轨迹



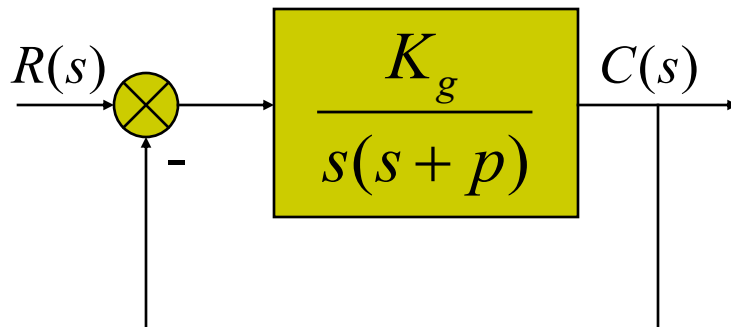


三、参量根轨迹

2. 闭环特征方程中含有两个可变参数时，如何绘制根轨迹？

根轨迹簇：为其中一个参数取若干有限值，对于选定值，绘制另一参数从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时的根轨迹

例3：对于下图所示系统，绘制当 K_g 和 p 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时的根轨迹。

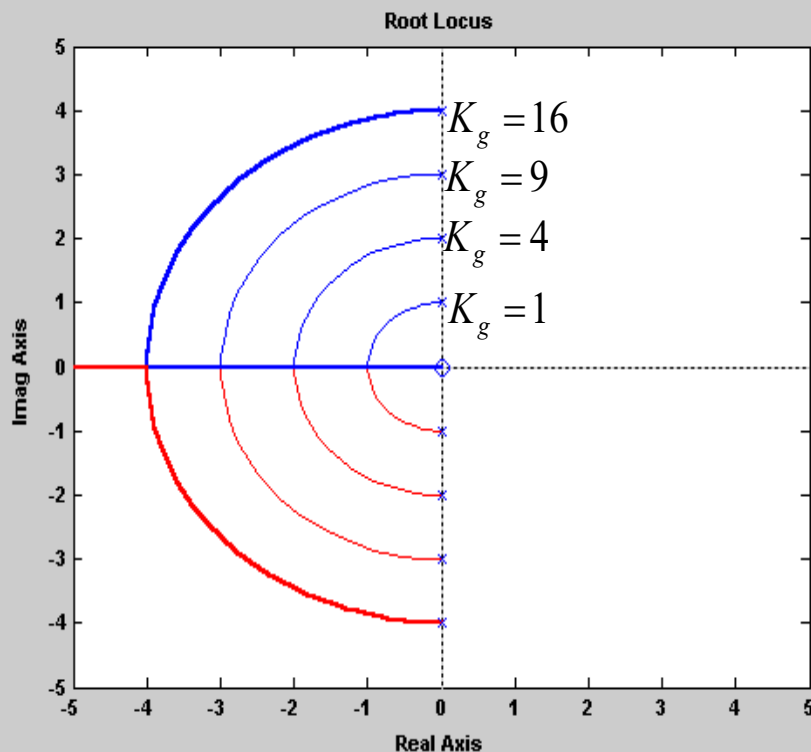


三、参量根轨迹



方法一：为 K_g 取不同值，针对每个值，绘制参数 p 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时的根轨迹。该情况下的根轨迹方程为：
$$p \frac{s}{s^2 + K_g} = -1$$

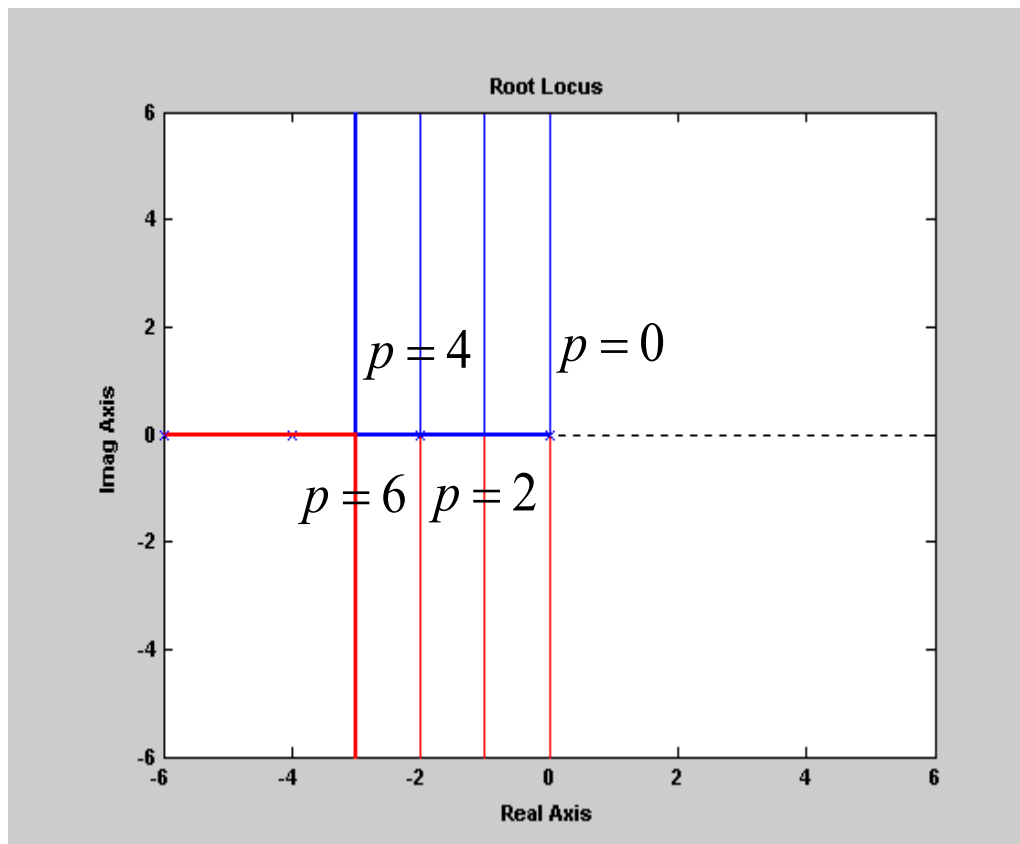
对应的根轨迹簇为





三、参量根轨迹

方法二：为 p 取不同值，针对每个值，绘制参数 K_g 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时的根轨迹。该情况下的根轨迹方程为：
$$K_g \frac{1}{s(s+p)} = -1$$
对应的根轨迹簇为





四、典型控制系统的根轨迹

1. 单回路负反馈系统的根轨迹（基础）

例1：开环传递函数为 $G_k(s) = \frac{k_g}{s(s+2)[(s+3)^2+16]}$ 画根轨迹。

解：1) 标出四个开环极点：0、-2、 $-3 \pm j4$ ，有4条根轨迹；

2) 实轴上的根轨迹区间为 $[-2, 0]$ ；

3) 渐近线倾角： $\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4},$

渐近线与实轴交点：

$$-\sigma = -\frac{\sum p_j - \sum z_i}{n-m} = -\frac{0+2+6}{4} = -2$$



四、典型控制系统的根轨迹

4) 出射角:

$$\theta_1 = \pi - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$$

$$= \pi - (\pi - \tan^{-1} \frac{4}{3} + \pi - \tan^{-1} 4 + 90^\circ) = -140.9^\circ$$

由对称性可知, $\theta_2 = 140.9^\circ$

5) 与虚轴的交点:

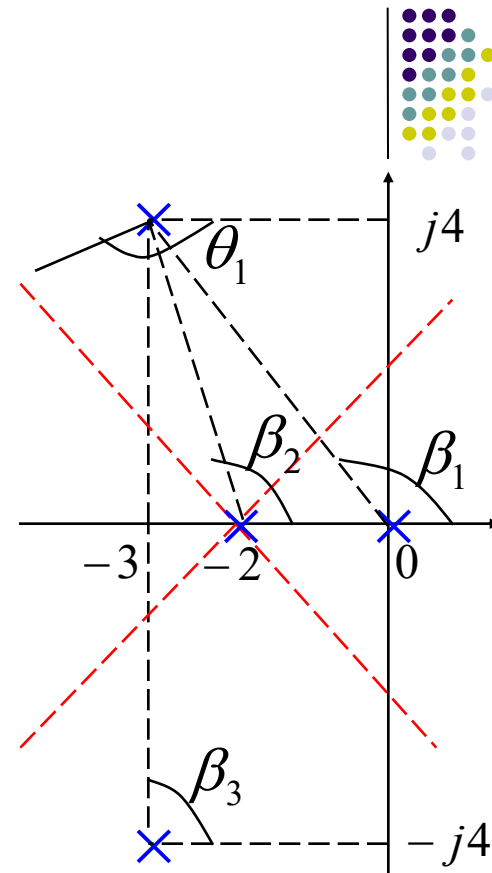
闭环特征方程为 $s^4 + 8s^3 + 37s^2 + 50s + k_g = 0$

s^4	1	37	k_g
s^3	8	50	
s^2	30.75	k_g	
s^1	$\frac{1537.5 - 8k_g}{30.75}$		
s^0	k_g		

令 s^1 行全为0, 此时 $k_g = 192.1875$

由辅助方程 $30.75s^2 + 192.1875 = 0$, 可得

$s_{1,2} = \pm j2.5$, 此即根轨迹与虚轴的交点。





四、典型控制系统的根轨迹

6) 分离（会合）点

由闭环特征方程得, $k_g = -(s^4 + 8s^3 + 37s^2 + 50s)$

在分离点处,

$$\frac{dk_g}{ds} = -(4s^3 + 24s^2 + 74s + 50) = 0$$

高阶方程直接求解比较困难, 一个方法是借助牛顿迭代公式;

另一方面, 分离点肯定位于区间 $[-2, 0]$ 内, 该区间内能够使 k_g 取极值的点即为分离点。

s	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-1.0	-1.2	-1.4	-1.6	-1.8	-2.0
k_{gd}	8.58	14.57	18.28	20.01	20.0	18.47	15.59	11.49	6.28	0.0

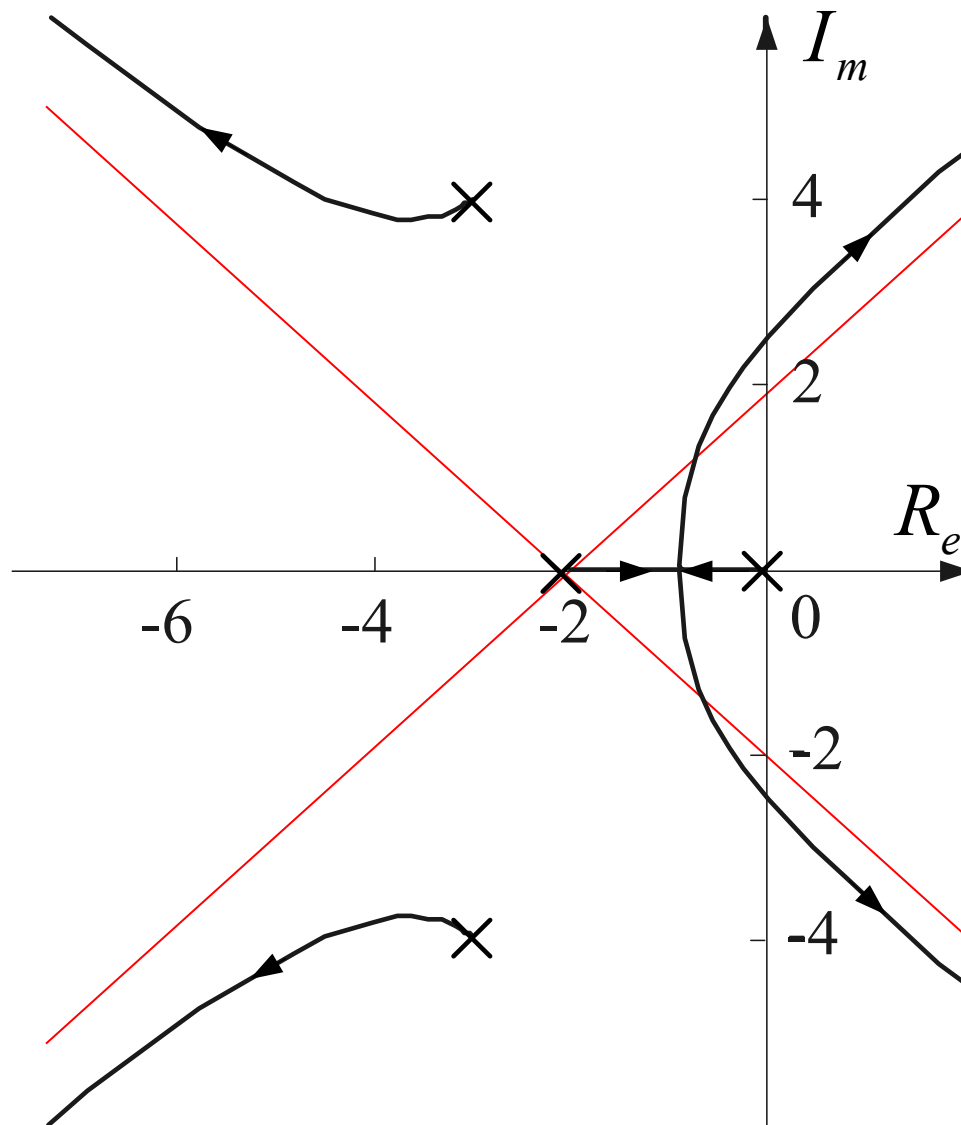
可见, 分离点在 $-0.8 \sim -1.0$ 之间, 可近似取为 -0.9 (精确值为 -0.8981)



四、典型控制系统的根轨迹



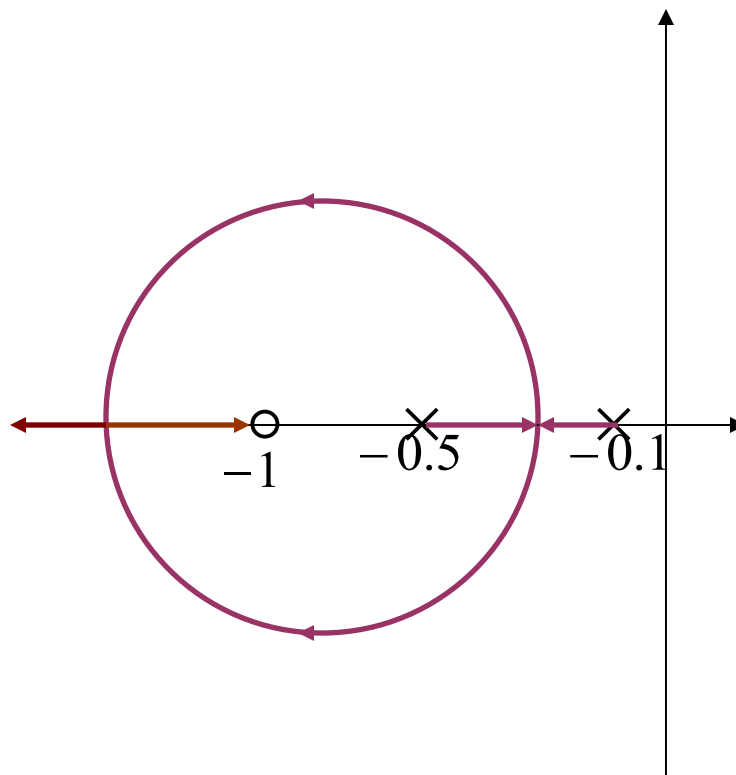
7) 绘制根轨迹:





四、典型控制系统的根轨迹

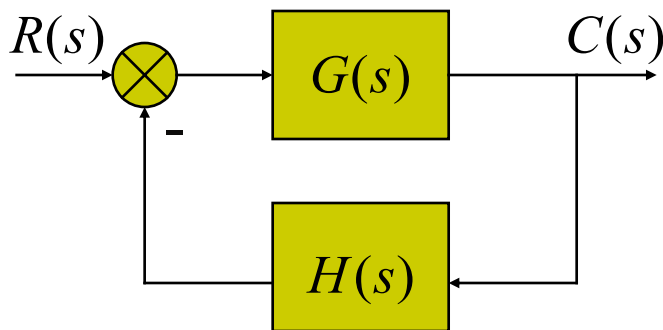
例2：设开环系统传递函数为 $G_k(s) = \frac{k_g(s+1)}{(s+0.1)(s+0.5)}$ ，试绘制根轨迹。



四、典型控制系统的根轨迹



2. 开环传递函数有零极点对消的情况



$$G(s) = \frac{K_g}{(s+1)(s+2)}, H(s) = s+1$$

$$G_k(s) = \frac{K_g(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_g}{s+2}$$

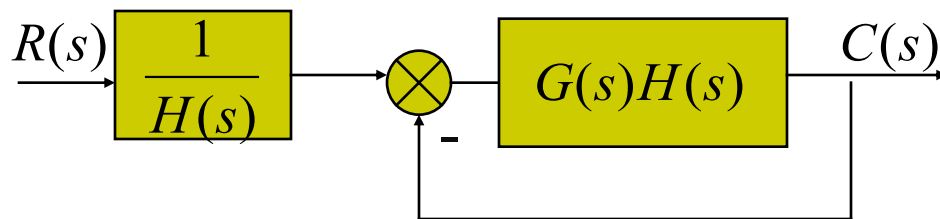
- 对消前实际的闭环特征方程为 $(s+1)(s+2+K_g) = 0$
- 对消后的等效闭环特征方程为 $s+2+K_g = 0$; 阶数下降, 丢了一个闭环极点





四、典型控制系统的根轨迹

处理方法：转化为单位反馈系统



$$\Phi(s) = \frac{1}{H(s)} \cdot \frac{G_k(s)}{1 + G_k(s)} = \frac{1}{H(s)} \cdot \Phi'(s)$$

根据开环传递函数 $G_k(s)$ 绘制 $\Phi'(s)$ 的根轨迹；

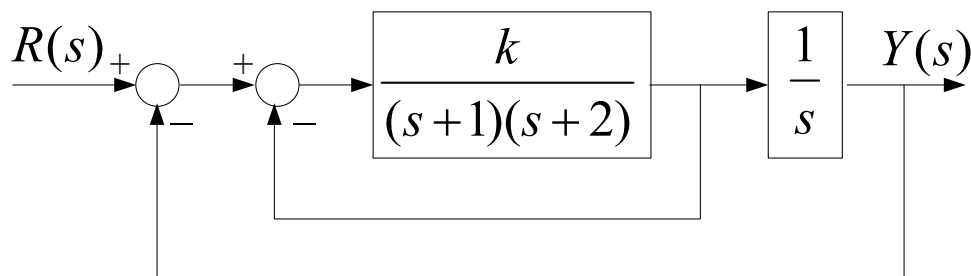
原闭环系统 $\Phi(s)$ 的极点由 $\Phi'(s)$ 和 $\frac{1}{H(s)}$ 的极点组合而成。



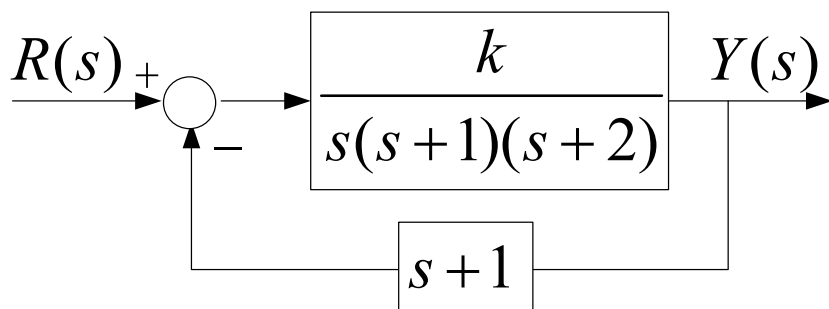
四、典型控制系统的根轨迹



例3：控制系统的方块图如下图所示，试绘制系统的根轨迹。



解：对方块图作如下等效变换：



可得开环传递函数

$$G_{k1}(s) = \frac{k(s+1)}{s(s+1)(s+2)}$$

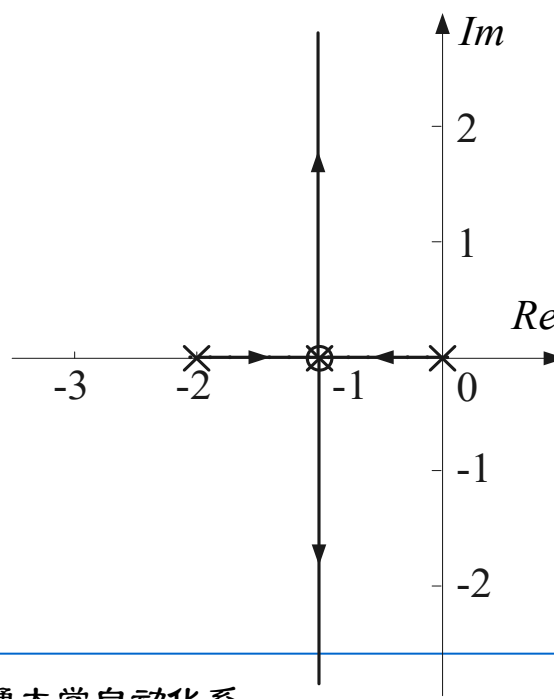
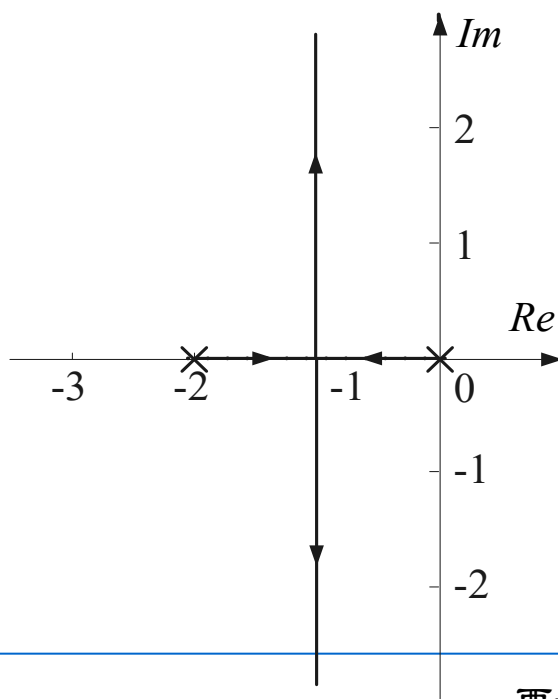
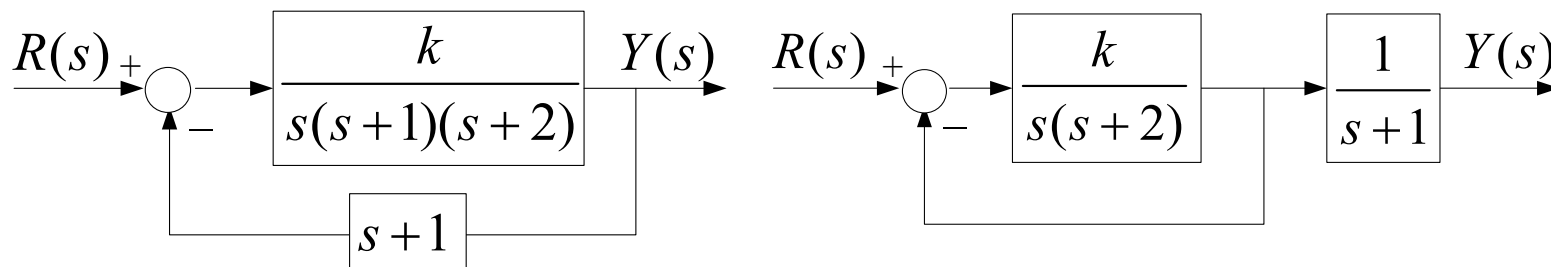




四、典型控制系统的根轨迹

抵消后的开环传递函数为 $G_{k2}(s) = \frac{k}{s(s+2)}$

消去的公因子 $s+1$ 中具有闭环极点，应加到原系统的闭环根轨迹中



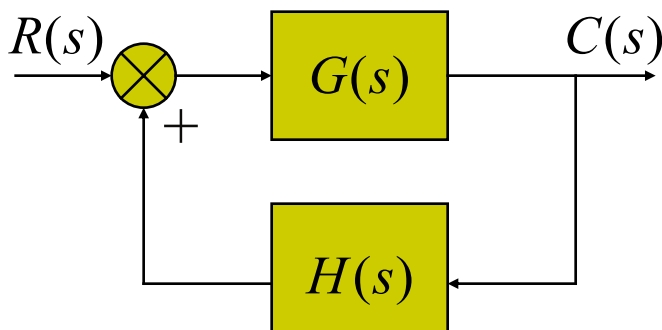


四、典型控制系统的根轨迹

3. 多回路系统的根轨迹

- 将多回路系统等效为单回路系统后，再绘制根轨迹

4. 正反馈系统的根轨迹



$$G_k(s) = G(s)H(s)$$

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}$$

- 闭环特征方程: $1 - G_k(s) = 0$; 根轨迹方程: $G_k(s) = 1$
- 幅值条件: $|G_k(s)| = 1$; 相角条件: $\angle G_k(s) = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$





四、典型控制系统的根轨迹

□ 负反馈系统的相角条件是 $(2k+1)\pi$ ，相应的根轨迹称为180度根轨迹或常规根轨迹，简称为根轨迹；

正反馈系统的相角条件是 $2k\pi$ ，相应的根轨迹称为 0 度根轨迹或补根轨迹。

□ 绘制 0 度根轨迹的基本准则

① 连续性、对称性、根轨迹支数、起点与终点均与常规根轨迹相同

② 实轴上的根轨迹：右侧开环零极点之和应为偶数

③ 渐近线：与实轴的交点同常规根轨迹；倾斜角 $\theta = \frac{2k\pi}{n-m}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

④ 分离（会合）点及分离角均与常规根轨迹相同





四、典型控制系统的根轨迹

⑤ 出射角与入射角：

$$\theta_{\text{出}} = \sum_{i=1}^m (\text{所有开环零点到该极点的矢量幅角}) \\ - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \theta_{c1}}}^{n-1} (\text{其它开环极点到该极点的矢量幅角})$$

$$\theta_{\text{入}} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \theta_{c2}}}^{m-1} (\text{其它开环零点到该零点的矢量幅角}) \\ + \sum_{j=1}^{n-1} (\text{所有开环极点到该零点的矢量幅角})$$

⑥ 与虚轴的交点：同常规根轨迹

⑦ 闭环极点之和与之积：同常规根轨迹



四、典型控制系统的根轨迹



例4：设单位正反馈系统的开环传递函数为 $G_k(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+5)}$
试绘制系统的根轨迹。

解：1) 起点在0, -1, -5处, 终点在无穷远处; 有 3 支根轨迹

2) 实轴上的根轨迹区间为 $[-5, -1], [0, \infty)$

3) 渐近线：与实轴的交点为 $-\sigma = -\frac{\sum p_j - \sum z_i}{n - m} = -\frac{0+1+5}{3} = -2$

倾角为 $\theta = \frac{2k\pi}{n - m} = 0, \pm \frac{2\pi}{3}$

4) 分离点：

由 $N'(s)D(s) - N(s)D'(s) = 0$, 可得 $3s^2 + 12s + 5 = 0$

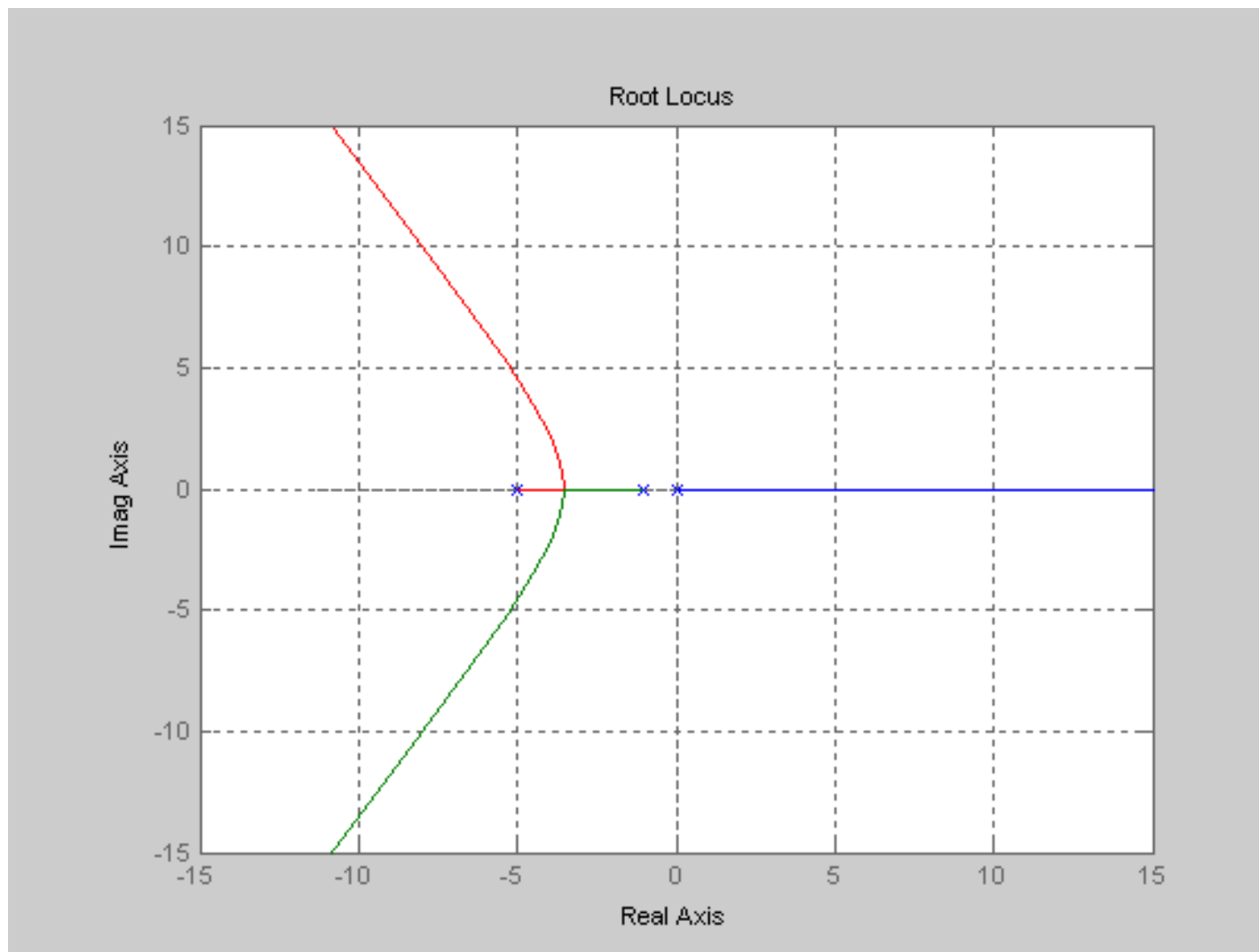
解得 $s_{1,2} = -0.48, -3.52$; $s_1 = -0.48$ 不在根轨迹上, 分离点为

分离角为 $\theta_d = \frac{\pi}{2}$,

$s_2 = -3.52$



四、典型控制系统的根轨迹





四、典型控制系统的根轨迹

□ 正负反馈系统根轨迹方程的对比

$$K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = 1$$

$$K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = -1$$

□ 正反馈系统的根轨迹相当于负反馈系统中的 K_g 从 $0 \rightarrow -\infty$ 变化时的根轨迹。

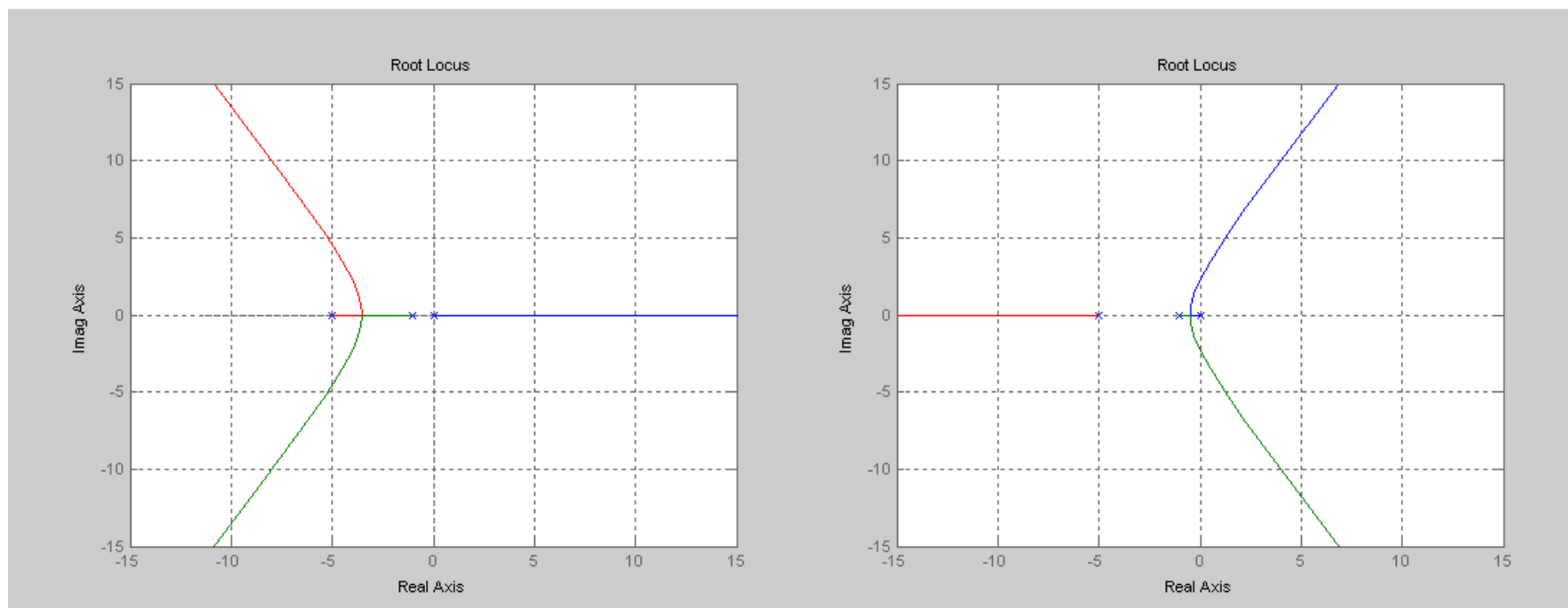
若将正负反馈系统的根轨迹合并，可得 K_g 从 $-\infty \rightarrow \infty$ 变化时的根轨迹，称为**全根轨迹**。



四、典型控制系统的根轨迹



对于上例中的开环传递函数 $G_k(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+5)}$ ，全根轨迹为：



左图为正反馈（0度）根轨迹；右图为负反馈（180度）根轨迹



四、典型控制系统的根轨迹

5. 非最小相位系统的根轨迹

- **最小相位系统**：在右半 s 平面上既无极点也无零点，同时无纯滞后环节的系统
- **非最小相位系统**：在右半 s 平面上具有极点或零点，或具有纯滞后环节的系统

本课程只考虑在右半 s 平面上具有极点或零点的非最小相位系统的根轨迹，其开环传递函数具有两种可能的零极点形式：

$$G_k(s) = K_g \frac{\prod (s + z_i)}{\prod (s + p_j)} \quad \text{按 } 180^\circ \text{ 根轨迹画图}$$

$$G_k(s) = -K_g \frac{\prod (s + z_i)}{\prod (s + p_j)} \quad \text{按 } 0^\circ \text{ 根轨迹画图}$$

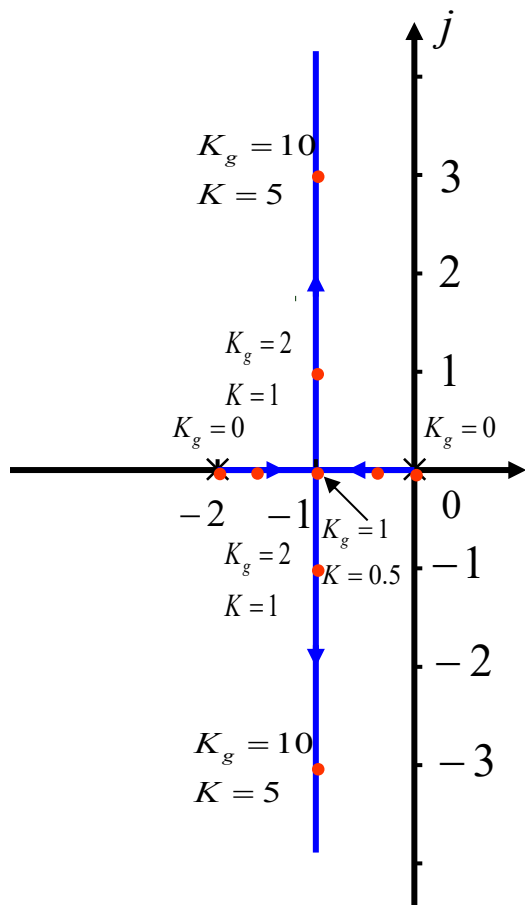




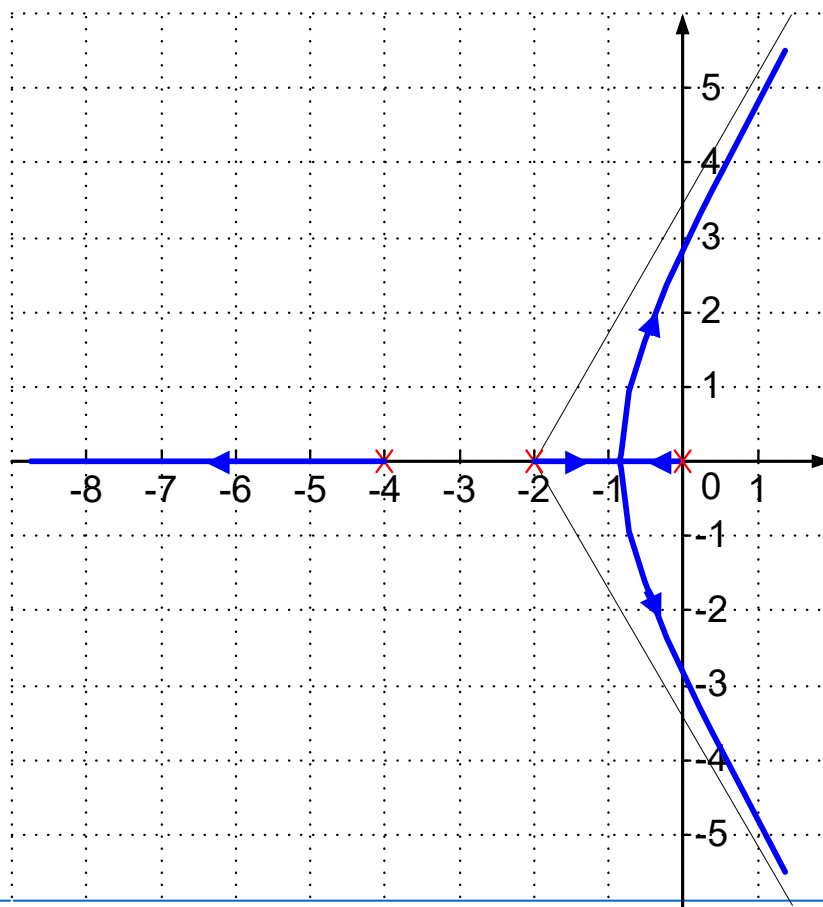
五、开环零极点对根轨迹的影响

1. 增加开环极点

$$G_k(s) = \frac{K_g}{s(s+2)}$$



$$G_k(s) = \frac{K_g}{s(s+2)(s+4)}$$



五、开环零极点对根轨迹的影响

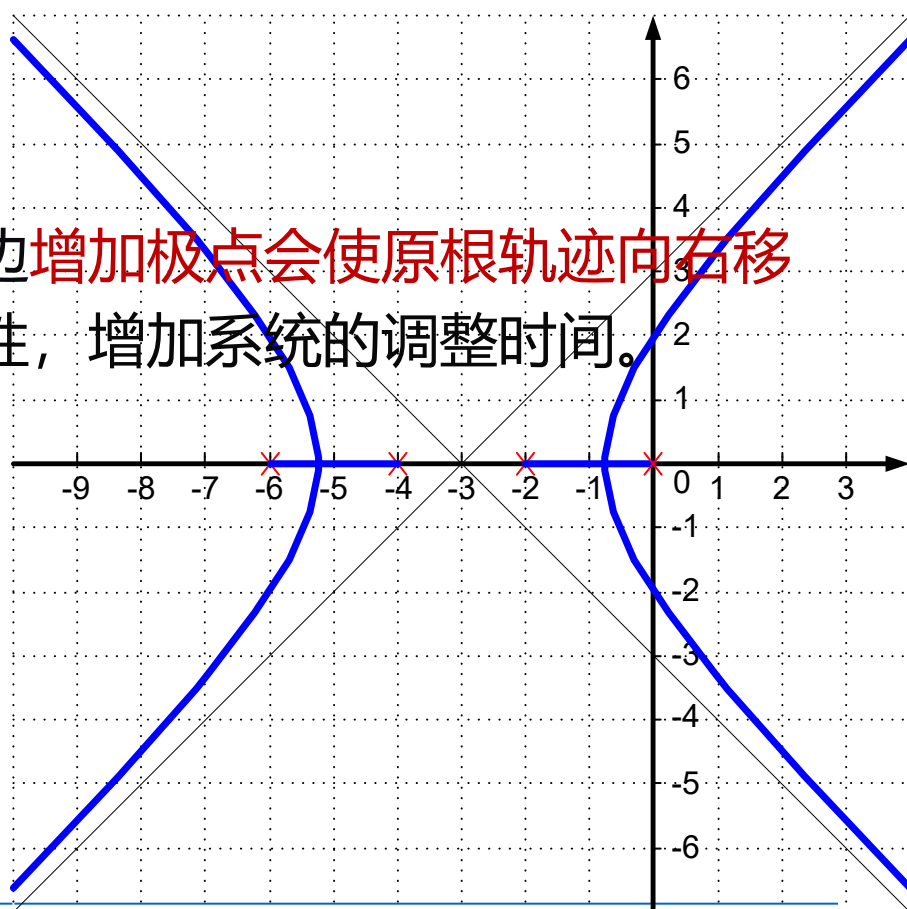
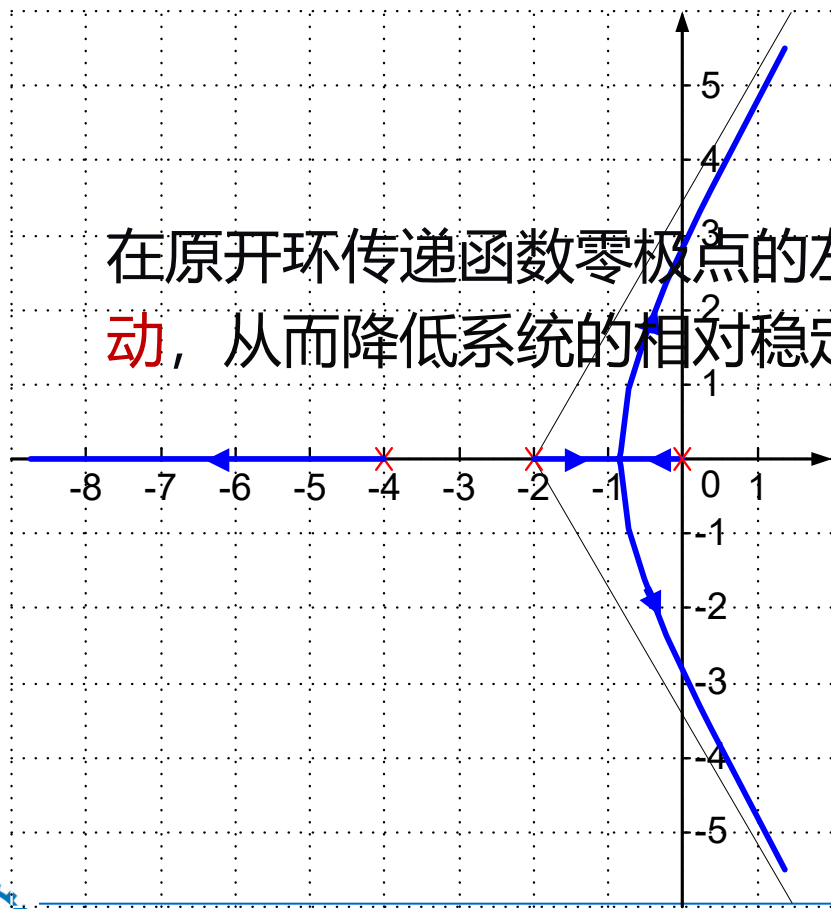


1. 增加开环极点

$$G_k(s) = \frac{K_g}{s(s+2)(s+4)}$$

$$G_k(s) = \frac{K_g}{s(s+2)(s+4)(s+6)}$$

在原开环传递函数零极点的左边增加极点会使原根轨迹向右移动，从而降低系统的相对稳定性，增加系统的调整时间。



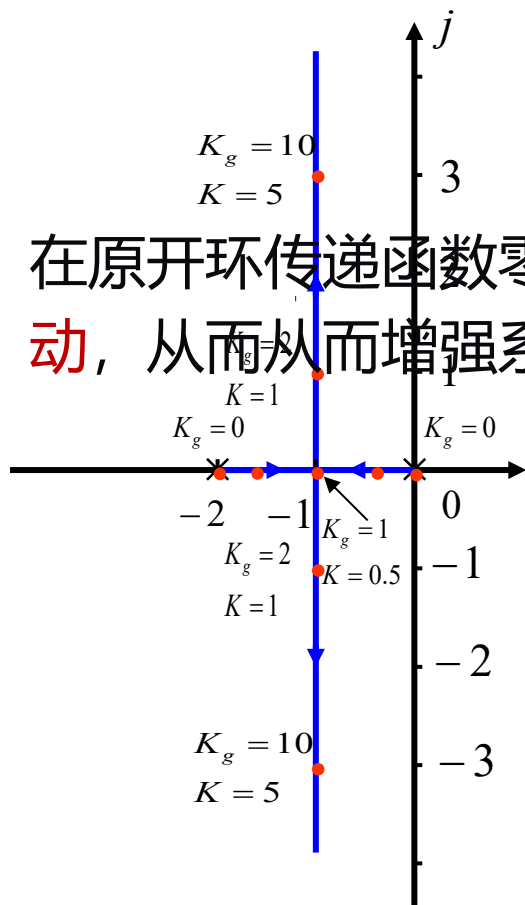


五、开环零极点对根轨迹的影响

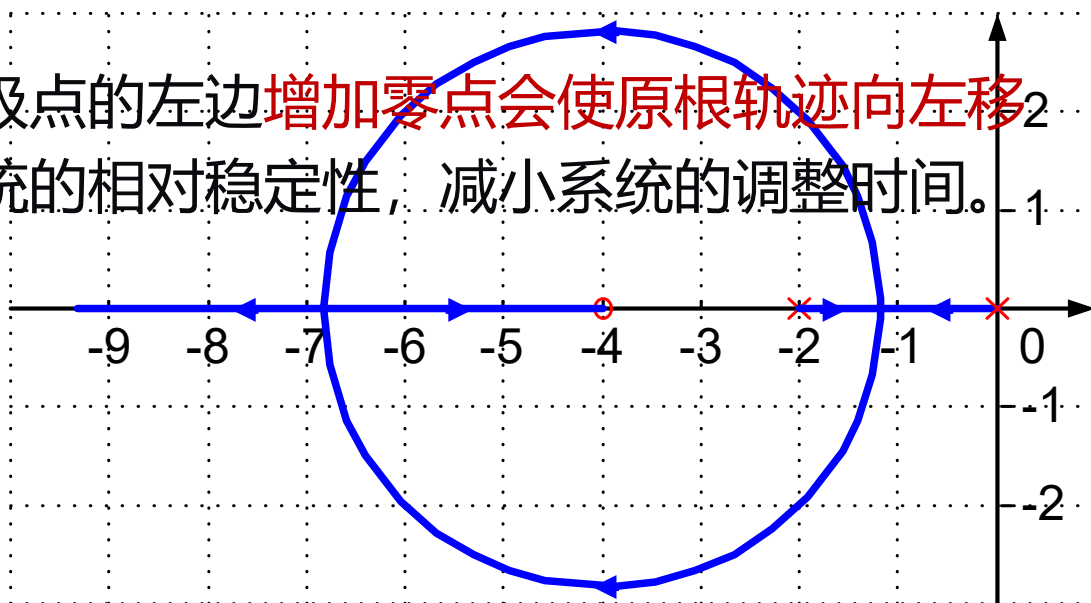
2. 增加开环零点

$$G_k(s) = \frac{K_g}{s(s+2)}$$

$$G_k(s) = \frac{K_g(s+4)}{s(s+2)}$$



在原开环传递函数零极点的左边增加零点会使原根轨迹向左移动，从而增强系统的相对稳定性，减小系统的调整时间。

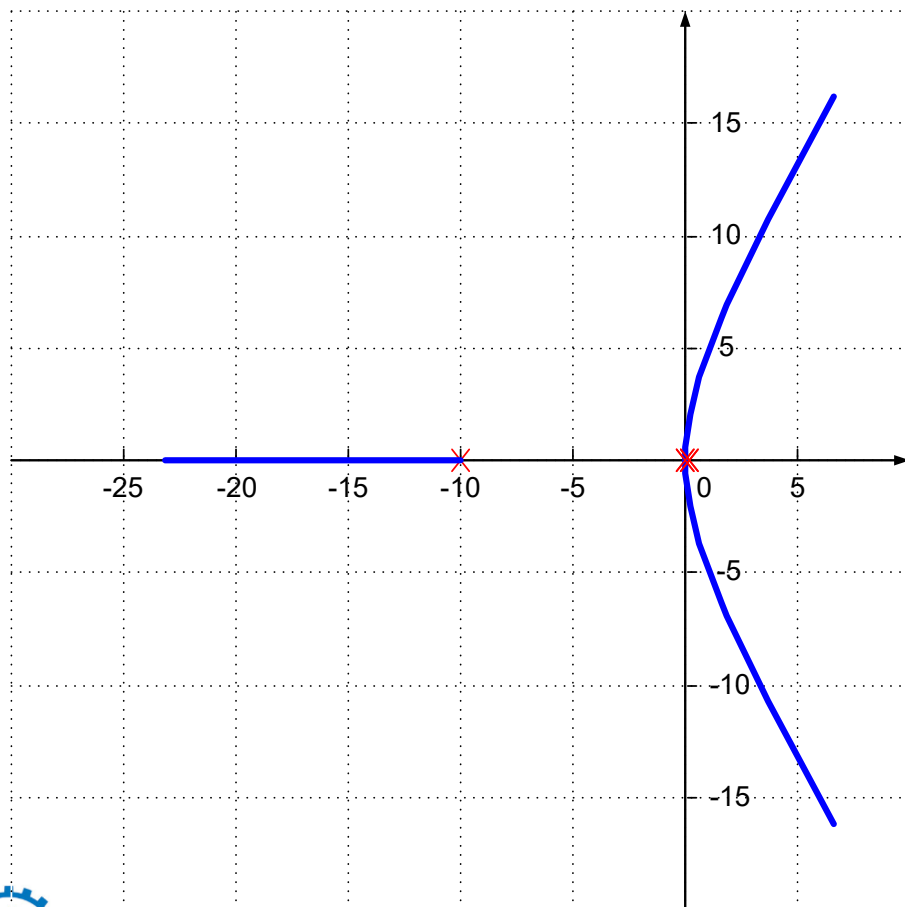




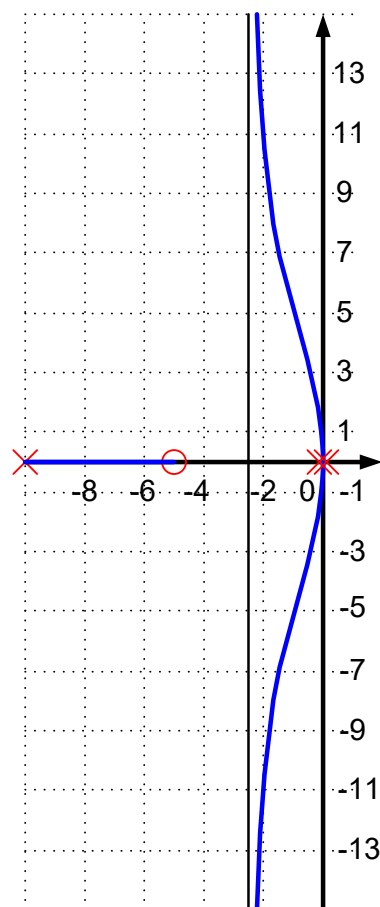
五、开环零极点对根轨迹的影响

3. 移动开环零点

$$G_k(s) = \frac{K_g}{s^2(s+10)}$$



$$G_k(s) = \frac{K_g(s+5)}{s^2(s+10)}$$

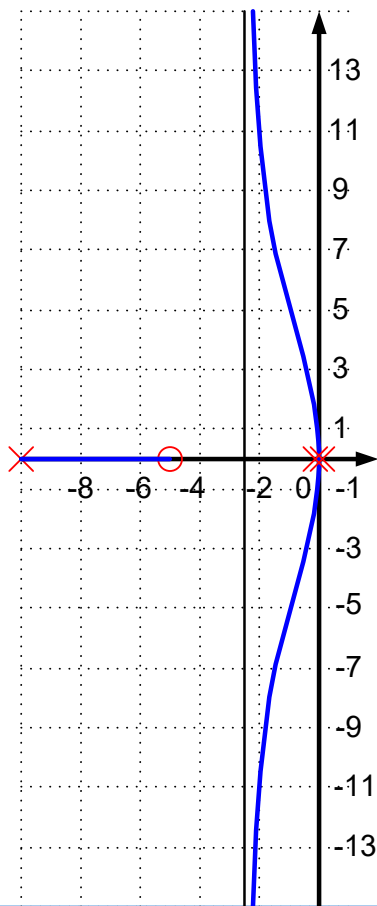




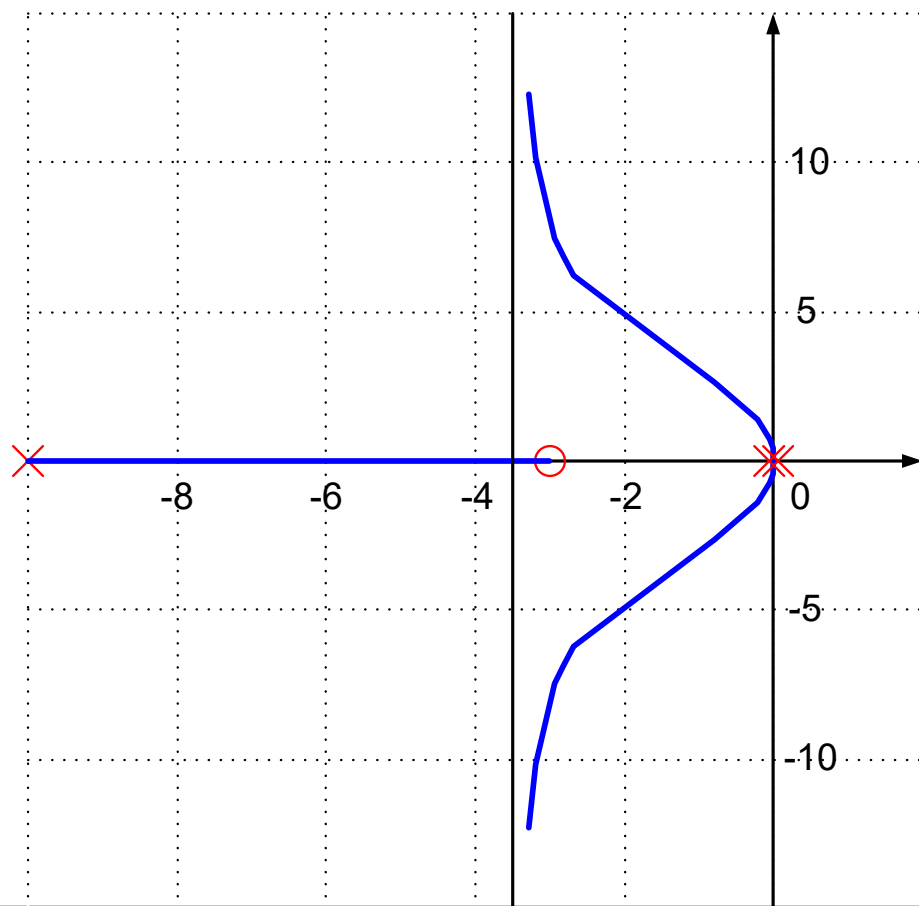
五、开环零极点对根轨迹的影响

3. 移动开环零点

$$G_k(s) = \frac{K_g(s+5)}{s^2(s+10)}$$



$$G_k(s) = \frac{K_g(s+3)}{s^2(s+10)}$$

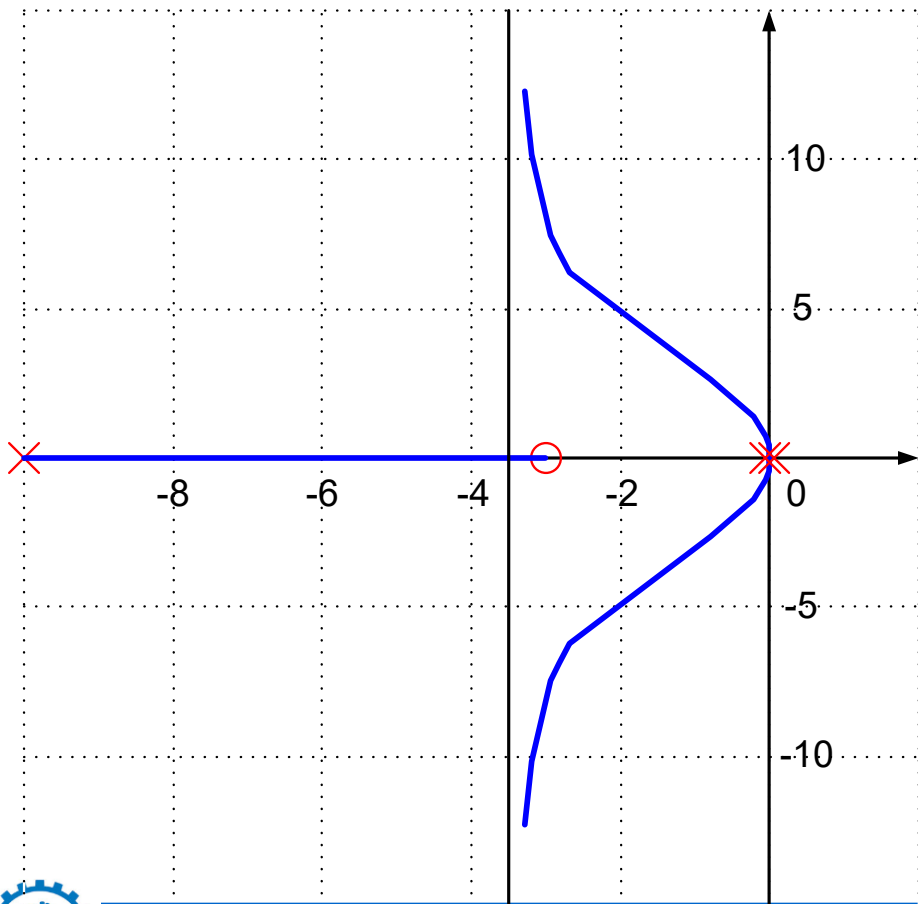




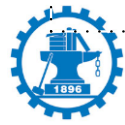
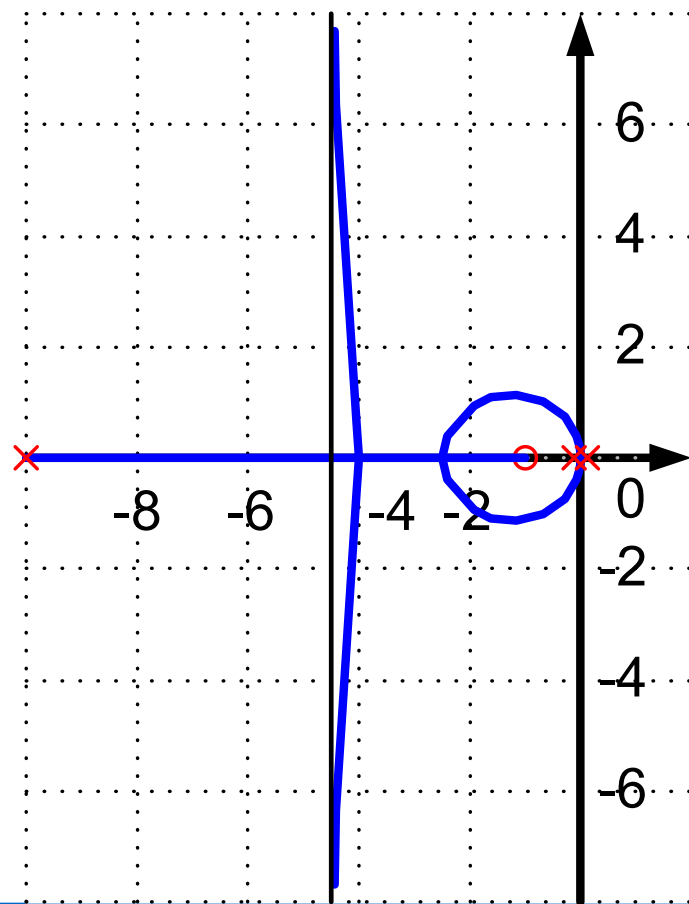
五、开环零极点对根轨迹的影响

3. 移动开环零点

$$G_k(s) = \frac{K_g(s+3)}{s^2(s+10)}$$



$$G_k(s) = \frac{K_g(s+1)}{s^2(s+10)}$$

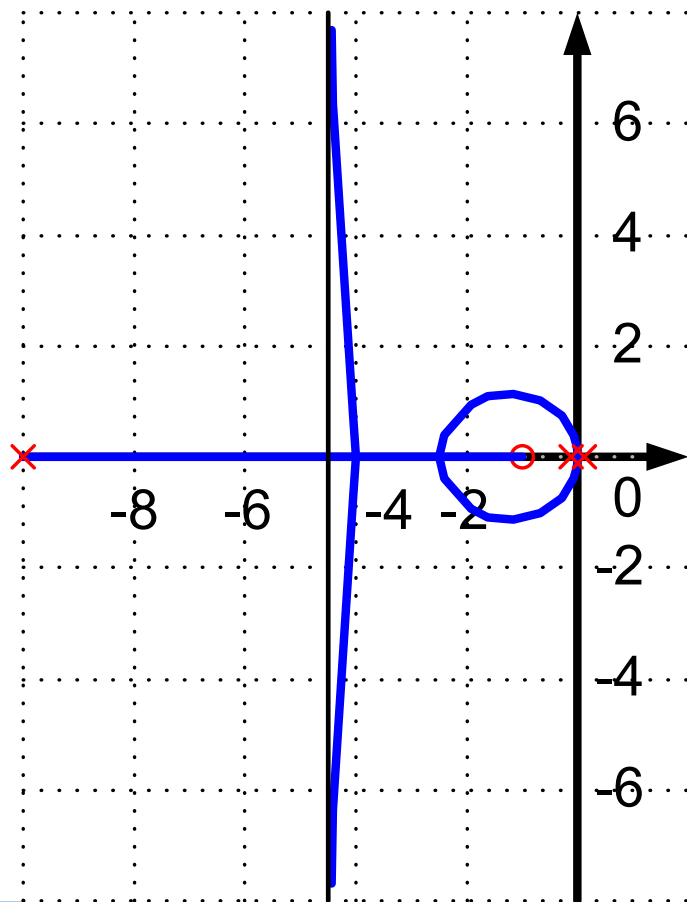




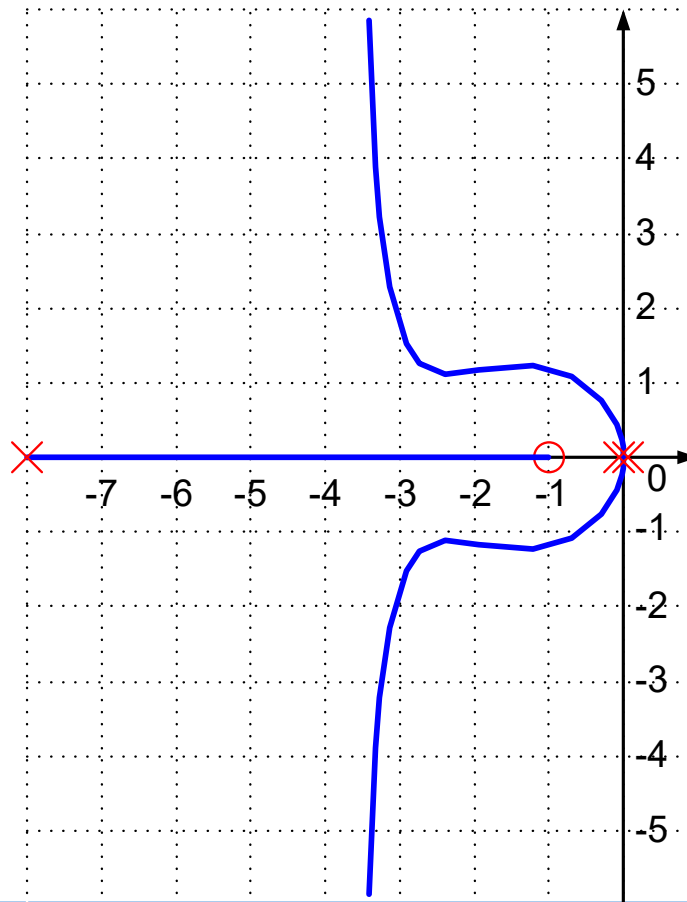
五、开环零极点对根轨迹的影响

4. 移动开环极点

$$G_k(s) = \frac{K_g(s+1)}{s^2(s+10)}$$



$$G_k(s) = \frac{K_g(s+1)}{s^2(s+8)}$$



本节要求



1. 根轨迹的本质：系统中某参数变化时，闭环极点在复平面中的变化轨迹
2. 进一步熟悉根轨迹绘制的基本步骤
3. 参量根轨迹：等效开环传递函数
4. 0 度根轨迹及其与180度根轨迹的异同
5. 开环零极点对根轨迹的影响

