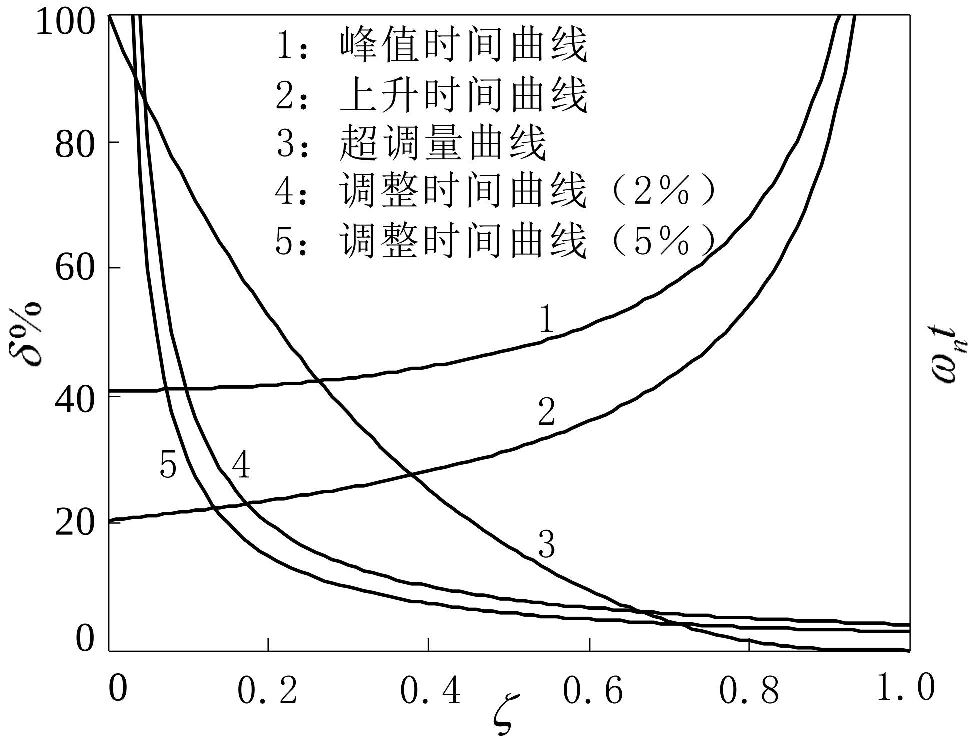
3.3 二阶系统的瞬态响应

5. 振荡次数N： $N=\dfrac{t_s}{t_f}$

式中 $t_f=\dfrac{2\pi}{\omega_d}$ 为阻尼振荡周期。若取 $t_s=\dfrac{4}{\zeta\omega_n}$ 和 $t_f=2t_p=\dfrac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}$

$$N=\frac{t_s}{2t_p}=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1}{\zeta^2}-1}$$

由此可见振荡次数N仅与阻尼系数ζ有关。



通常希望系统的输出响应既有充分的快速性，又有足够的阻尼。因此，为了获得满意的二阶系统瞬态响应特性，阻尼系数应选择在0.4和0.8之间。?

工程上常取阻尼系数 $\zeta = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$ 作为系统设计的依据，该阻尼系数称为最佳阻尼系数。

超调量：$$\delta\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\% \Big|_{\zeta=\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 4.32\%$$

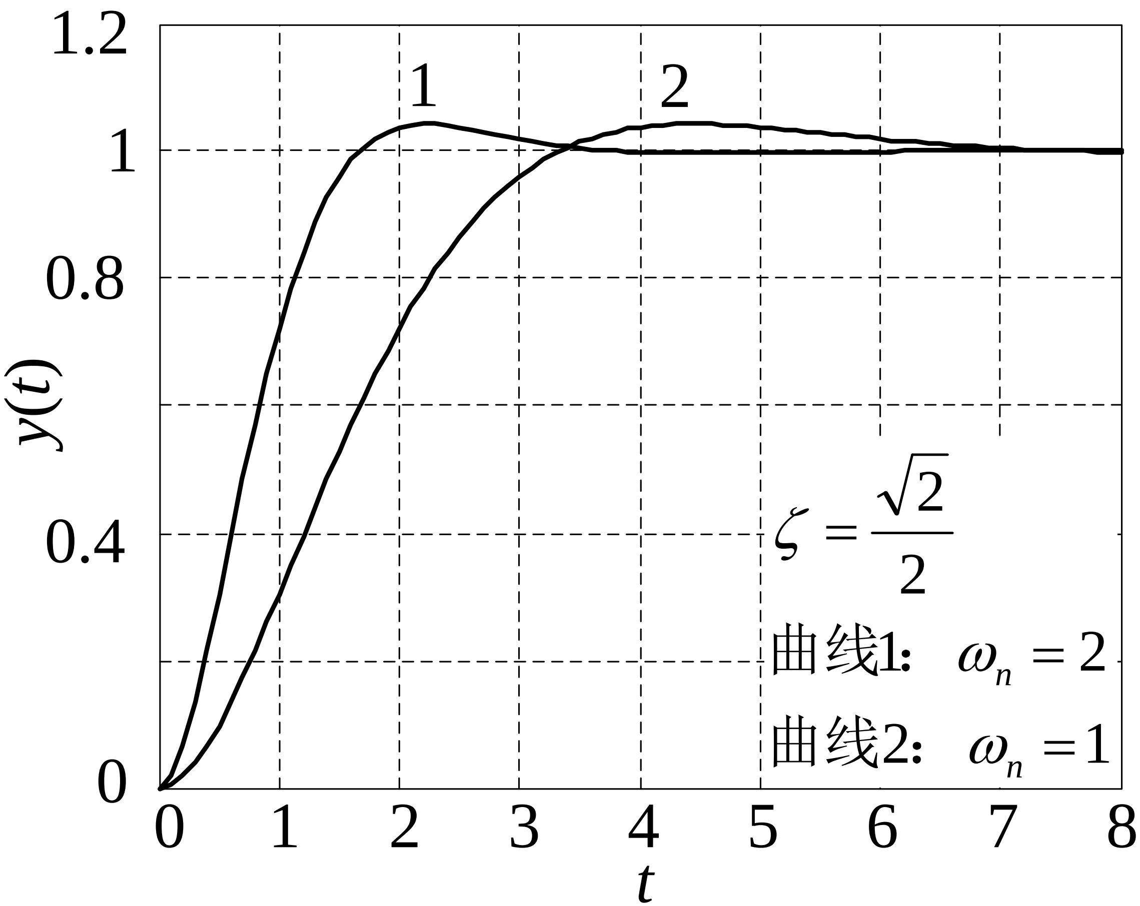
上升时间t_r：$$t_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_d}\Big|_{\zeta=\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx \frac{3.33}{\omega_n}$$

峰值时间t_p：$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\Big|_{\zeta=\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx \frac{4.44}{\omega_n}$$

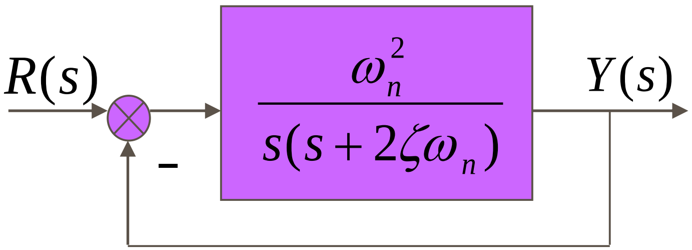
调整时间t_s：

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}\Big|_{\zeta=\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx \frac{5.66}{\omega_n} \quad (\Delta=2) \quad ; \quad t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}\Big|_{\zeta=\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx \frac{4.24}{\omega_n} \quad (\Delta=5)$$

当阻尼系数ζ一定时，无阻尼振荡频率ω_n越大，上升时间、峰值时间和调整时间越短，响应速度越快。



（二）非振荡瞬态过程：



1. 对于 $\zeta=1$，极点为：$s_{1,2}=-\omega_n$

$$c(t)=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$

$$|y(t)-y(\infty)|=e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)=0.02 \qquad e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)-0.02=0$$

牛顿迭代公式：令 $f(x)=0$，则有 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

令 $\omega_n t=x \quad f(x)=e^{-x}(1+x)-0.02=0 \qquad f'(x)=-xe^{-x}$

$$x_{k+1}=x_k+\frac{e^{-x_k}(1+x_k)-0.02}{x_k e^{-x_k}}$$

或 $$x_{k+1}=x_k+\frac{e^{-x_k}(1+x_k)-0.05}{x_k e^{-x_k}}$$

$$t_s\approx\begin{cases}\dfrac{5.84}{\omega_n} & \Delta=2\\[2ex] \dfrac{4.75}{\omega_n} & \Delta=5\end{cases}$$

2. 当 $\zeta > 1$ 时，极点为：$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\frac{e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}} - \frac{e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}\right]$$

若令 $T_1 = \dfrac{1}{\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$ $\qquad T_2 = \dfrac{1}{\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}$

$$y(t) = 1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1}e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}$$

$$y(t)=1+\frac{T_1}{T_2-T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}$$

$$T_1=\frac{1}{\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$$

$$T_2=\frac{1}{\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}$$

- 当 $\zeta=1.25$ 时，$T_1=\dfrac{2}{\omega_n},T_2=\dfrac{1}{2\omega_n}$ $\quad\therefore\dfrac{T_1}{T_2}=4$ 即 $T_1=4T_2$

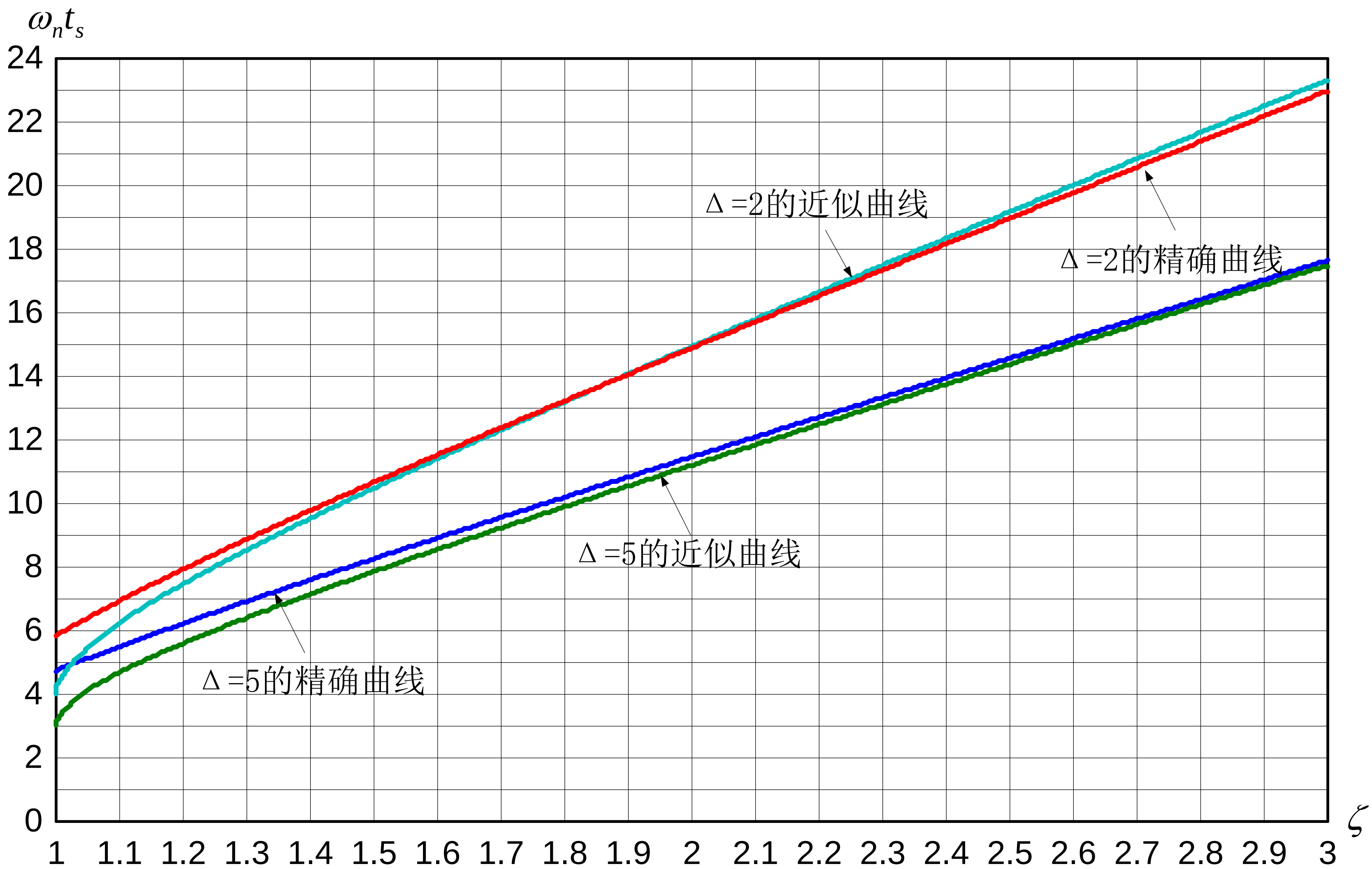
利用牛顿迭代公式可得 $t_s\approx\begin{cases}4.2T_1 & \Delta=2\\3.3T_1 & \Delta=5\end{cases}$

- 当 $\zeta\geq 0.6\sqrt{5}\approx 1.34$ 时，$T_1\geq 5T_2$，这时可用一阶系统来近似

$$t_s\approx\begin{cases}4T_1 & \Delta=2\\3T_1 & \Delta=5\end{cases}$$

式中 $T_1=\dfrac{1}{\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$

此时调整时间由较大的时间常数决定。


$\omega_n t_s$
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
Δ =2的近似曲线
Δ =2的精确曲线
Δ =5的近似曲线
Δ =5的精确曲线
ζ
1
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
2
2.1
2.2
2.3
2.4
2.5
2.6
2.7
2.8
2.9
3

当$\zeta >> 1$时，极点为：$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$，$s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left[\frac{e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}\right]$$

- 极点s_2远离虚轴，且$y(t)$中包含极点s_2的指数项的系数绝对值大，所以由极点s_2引起的指数项衰减的很快。
- $y(t)$中包含极点s_2的衰减项的系数小，所以由极点s_2引起的指数项在解中所占比重小。

在瞬态过程中忽略s_2的影响，把二阶系统近似为一阶系统。

$$y(t) \cancel{\overset{?}{=}} 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \times \frac{e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

这时出现的问题是$y(0) \neq 0$。

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\dfrac{1}{T_1T_2}}{(s+\dfrac{1}{T_1})(s+\dfrac{1}{T_2})}=\frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}\approx\frac{1}{T_1s+1}\neq\frac{\dfrac{1}{T_1T_2}}{s+\dfrac{1}{T_1}}$$

$$Y(s)=\frac{1}{T_1s+1}\times\frac{1}{s},\quad y(t)=L^{-1}[\frac{1}{T_1s+1}\times\frac{1}{s}]=L^{-1}[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\dfrac{1}{T_1}}]=1-e^{-\frac{t}{T_1}}$$

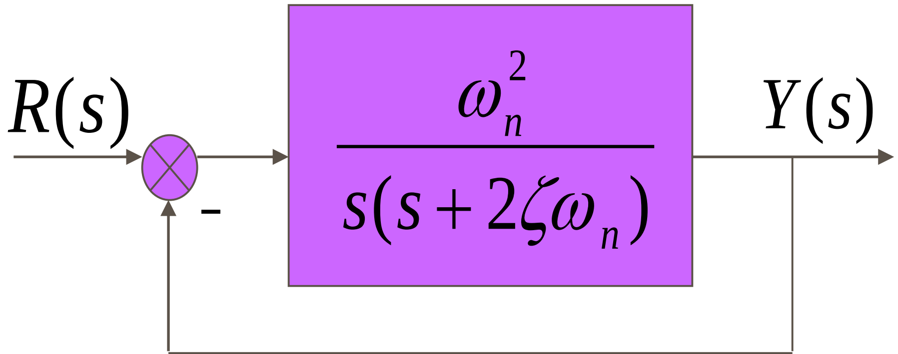
这样才能既保证降阶的系统的初值和终值都与原系统一样

在所有非振荡过程中，临界阻尼系统的调整时间最小。

通常，都希望控制系统有较快的时间响应，即希望系统的阻尼系数在0.7左右。而不希望处于过阻尼情况(调整时间过长)。但对于一些特殊的不希望出现超调系统(如液位控制)和大惯性系统(如加热装置，舰船靠岸)，则可采用ζ>1的过阻尼系统。

典型二阶系统响应特性的小结

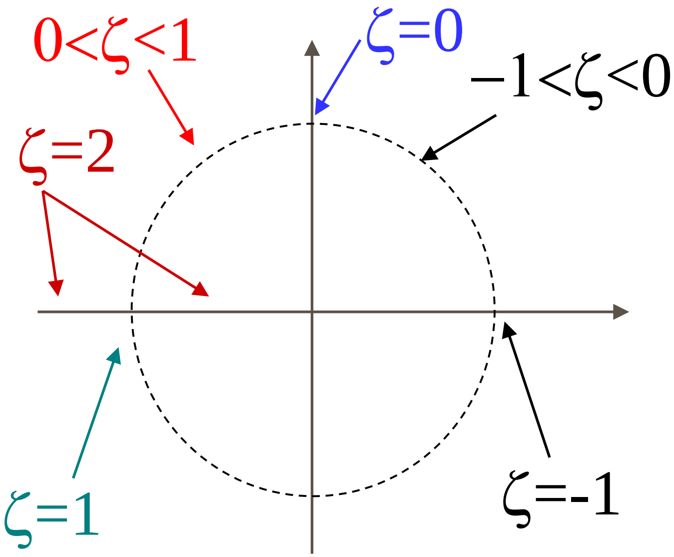
1. 极点位置与阶跃响应形式的关系

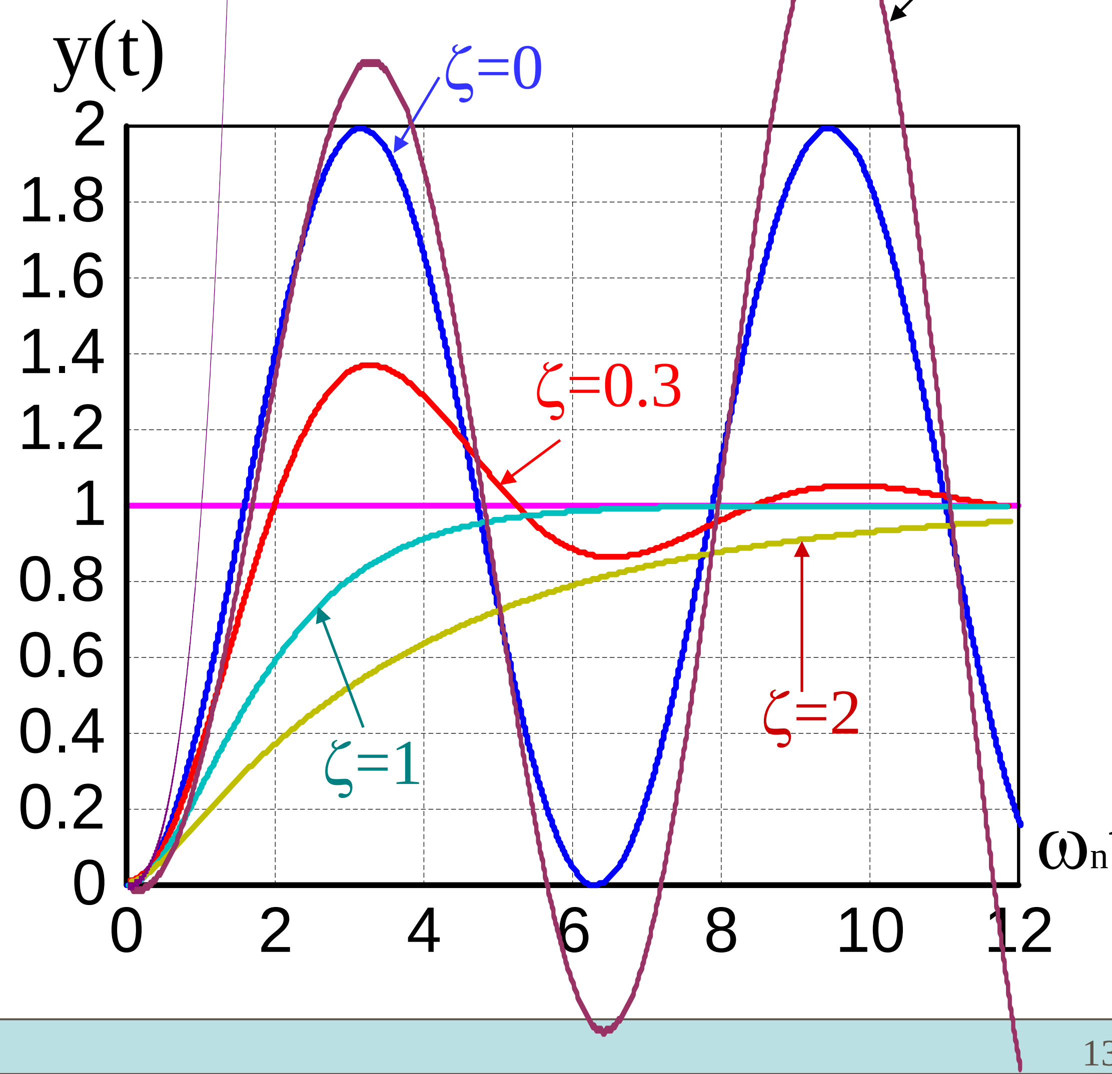


阻尼系数	特征根	极点位置	单位阶跃响应
$\zeta=0$, 无阻尼	$s_{1,2}=\pm j\omega_n$	一对共轭虚根	等幅周期振荡
$o<\zeta<1$, 欠阻尼	$s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	一对共轭复根(左半平面)	衰减振荡
$\zeta=1$，临界阻尼	$s_{1,2}=-\omega_n$(重根)	一对负实重根	单调上升
$\zeta>1$，过阻尼	$s_{1,2}=-\zeta\omega_n \mp \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$	两个互异负实根	单调上升

典型二阶系统响应特性的小结

1. 极点位置与阶跃响应形式的关系





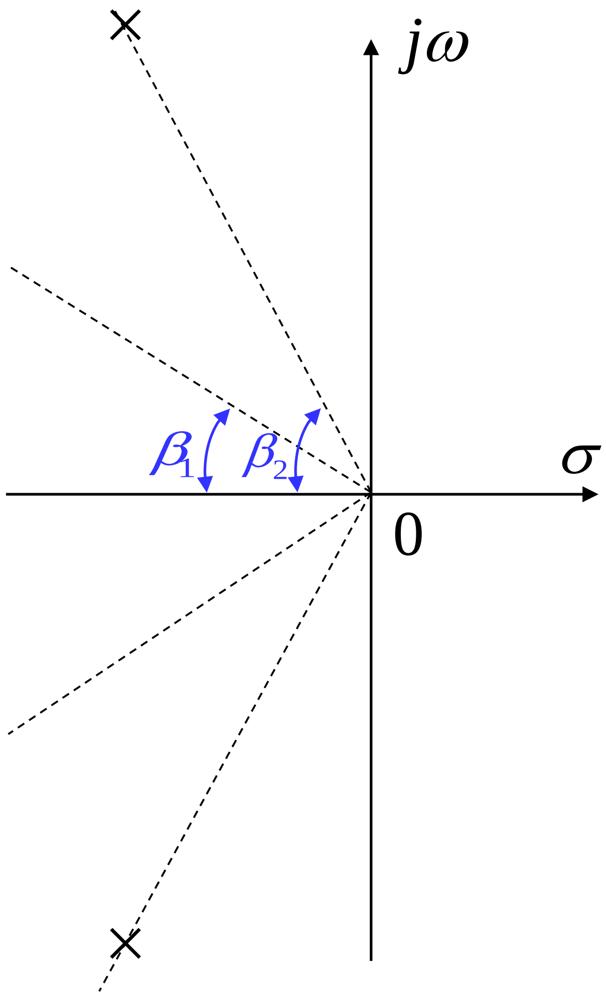
2. 性能指标与特征参数 ζ、ω_n 的关系

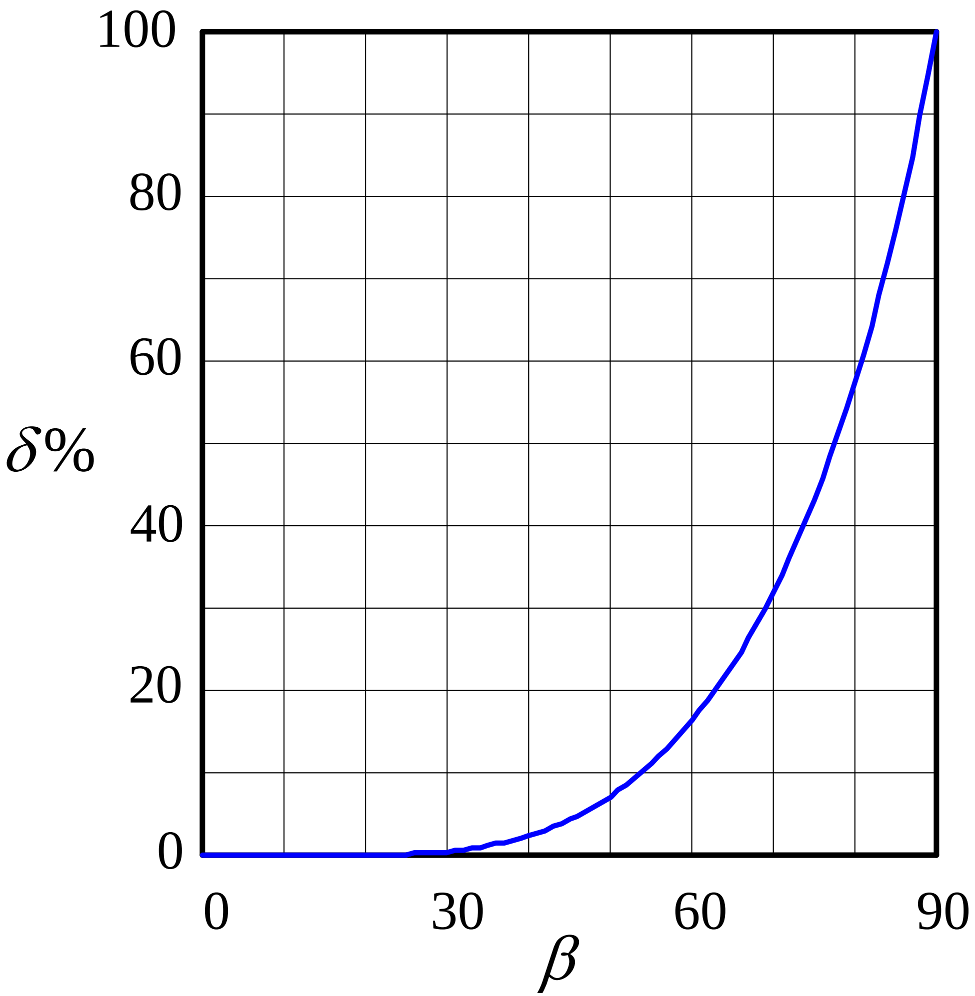
1）最大超调量与阻尼系数、阻尼角的关系

$$\delta\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\% = e^{-\pi\frac{\zeta\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\% = e^{-\pi ctg\beta}\times 100\%$$

ζ	$\beta=\cos^{-1}\zeta$	$\delta\%$
0.1	84.26°	72.9
0.2	78.46°	52.7
0.3	72.54°	37.23
0.4	66.42°	25.38
0.5	60°	16.3
0.6	53.13°	9.84

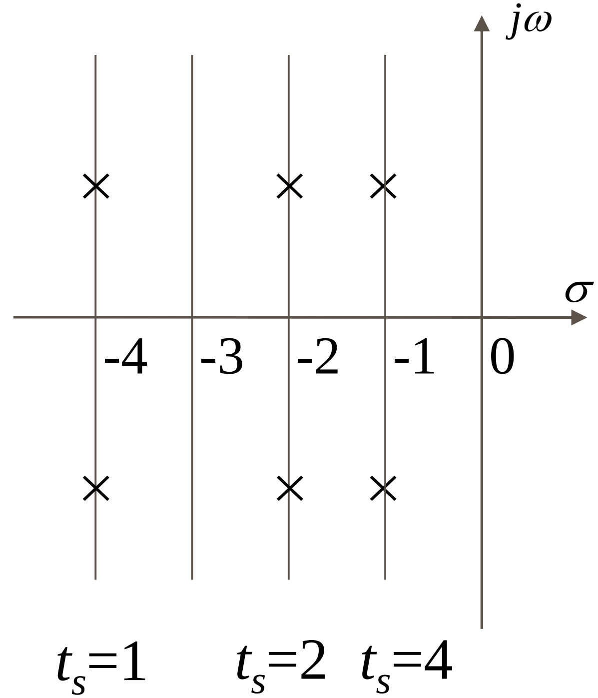
ζ	$\beta=\cos^{-1}\zeta$	$\delta\%$
0.69	46.37°	5
0.7	45.57°	4.6
0.707	45°	4.3
0.78	38.74°	2
0.8	36.87°	1.5
0.9	25.84°	0.15


jω
σ
β1
β2
0


100
80
60
40
20
0
δ%
0
30
60
90
β

2）调整时间与极点距虚轴的距离的反比关系(0<ζ<0.8)

$$t_s \approx \begin{cases} \dfrac{4}{\zeta\omega_n}, 当\Delta = 2时 \\ \dfrac{3}{\zeta\omega_n}, 当\Delta = 5时 \end{cases}$$



对于临界阻尼和过阻尼时，此规律也存在。

$$t_s \approx \begin{cases} \dfrac{5.84}{\omega_n} & \Delta = 2 \\ \dfrac{4.75}{\omega_n} & \Delta = 5 \end{cases} \qquad \zeta = 1$$

$$t_s \approx \begin{cases} 4.2T_1 & \Delta = 2 \\ 3.3T_1 & \Delta = 5 \end{cases} \qquad \zeta = 1.25$$

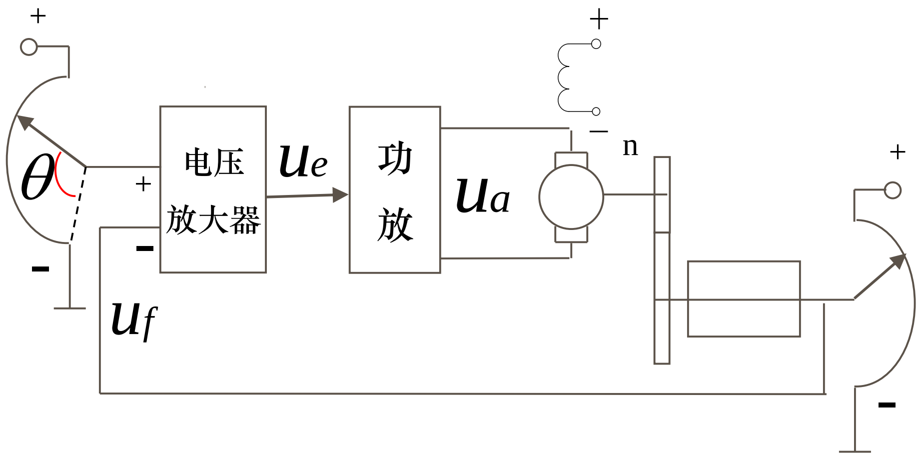
$$t_s \approx \begin{cases} 4T_1 & \Delta = 2 \\ 3T_1 & \Delta = 5 \end{cases} \qquad \zeta > 1.34$$

式中 $T_1 = \dfrac{1}{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$

3）性能指标与ω_n的关系

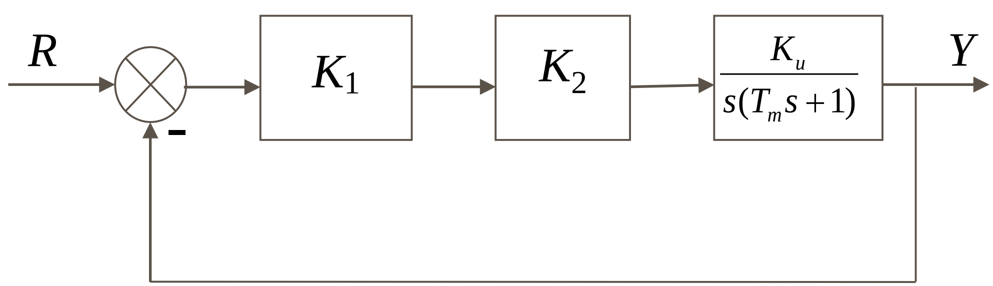
ω_n是极点到原点的直线距离，距离越大振荡频率越高。

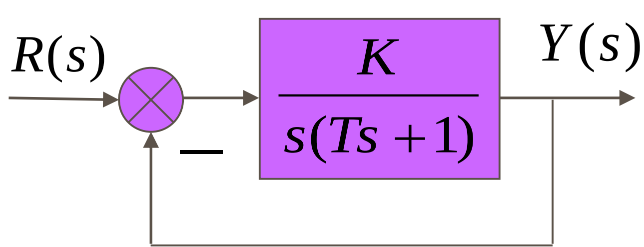
[例]：求如下随动系统的特征参数ζ,ω_n，分析与性能指标的关系。



电动机传递函数

$$\frac{\Theta(s)}{U_a(s)}=\frac{K_u}{s(T_m s+1)}$$





闭环传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{K}{Ts^2+s+K}=\frac{\frac{K}{T}}{s^2+\frac{1}{T}s+\frac{K}{T}}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\begin{cases}\omega_n^2=\frac{K}{T}\\ 2\zeta\omega_n=\frac{1}{T}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega_n= ?\\ \zeta= ?\end{cases}$$

瞬态性能指标和系统参数之间的关系$(0<\zeta<1)$:

1. T不变，$K\uparrow$ $\rightarrow\zeta\downarrow\rightarrow\delta\%\uparrow$

$\rightarrow\omega_n\uparrow\rightarrow\omega_d\uparrow$

$\rightarrow\zeta\omega_n=1/2T$ 不变，t_s几乎不变

$\rightarrow N\uparrow$。

K增大
振荡加剧

2. K不变，$T\uparrow$ $\rightarrow\zeta\downarrow\rightarrow\delta\%\uparrow$

$\rightarrow\omega_n\downarrow\rightarrow\omega_d\downarrow$

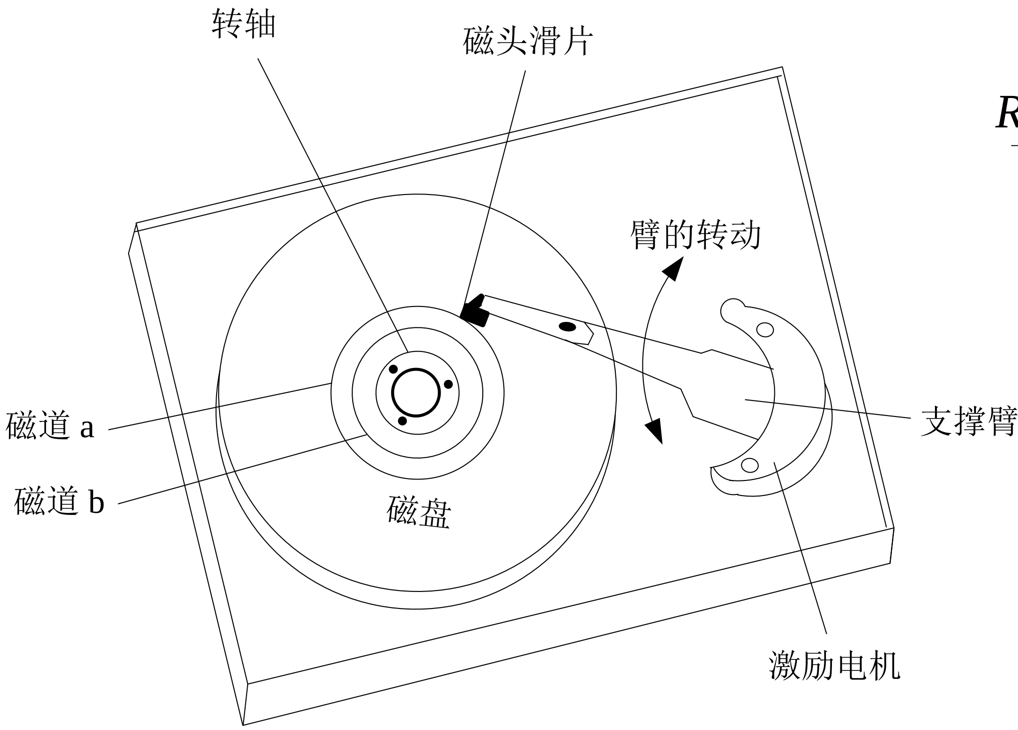
$\rightarrow\zeta\omega_n=1/2T\downarrow$ $\rightarrow t_s\uparrow$

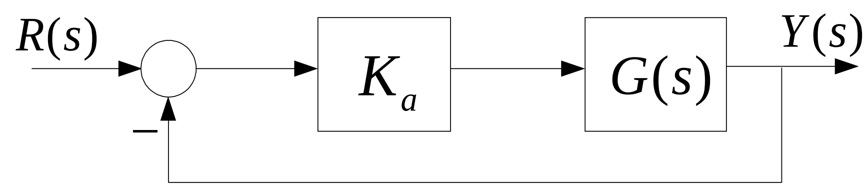
$\rightarrow N\uparrow$。

实际系统中T往往不能变，要使系统性能好，则$K\downarrow$，这对控制精度不利。

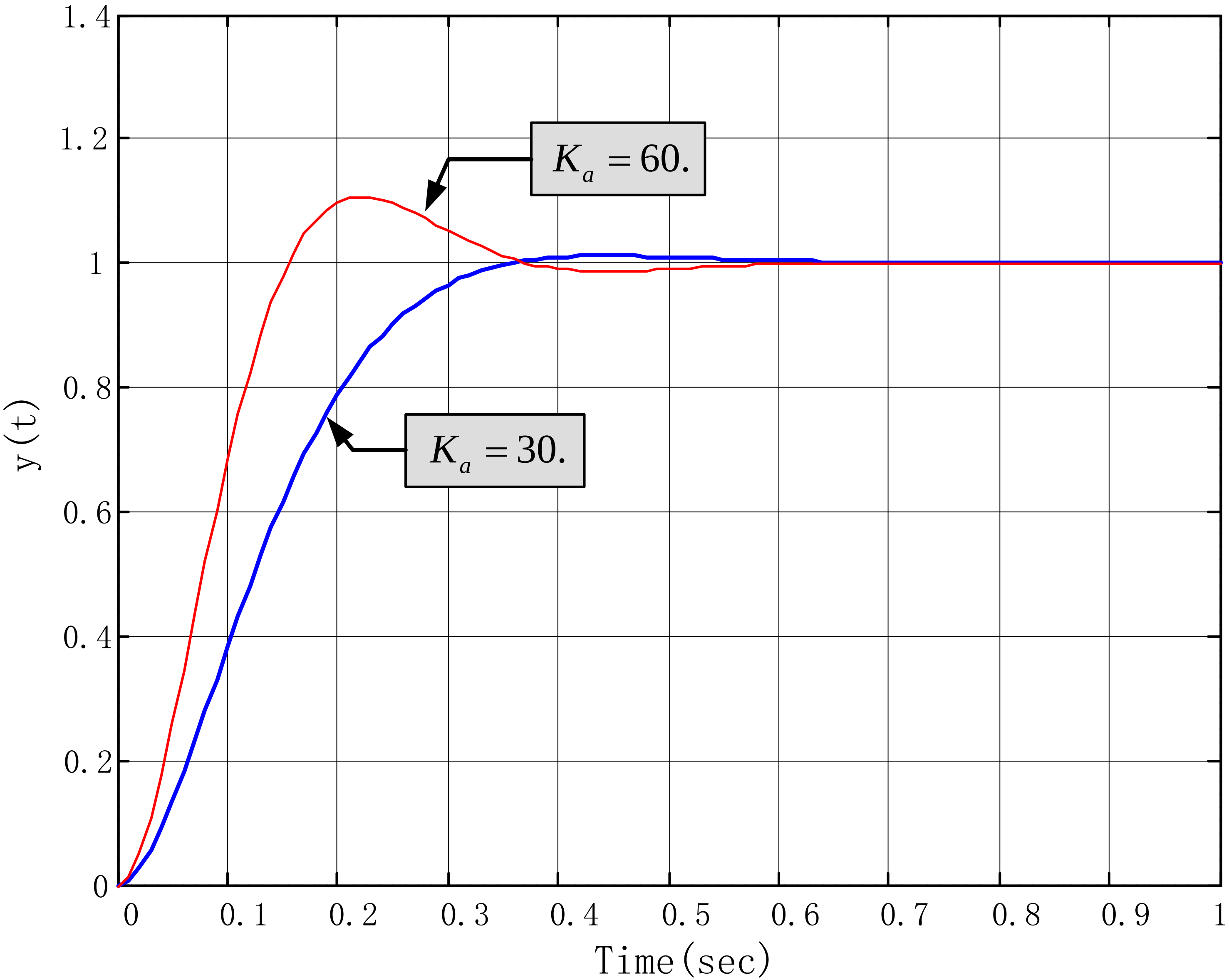
例: 磁盘驱动读取系统

1. 假定簧片是完全刚性的,则有:

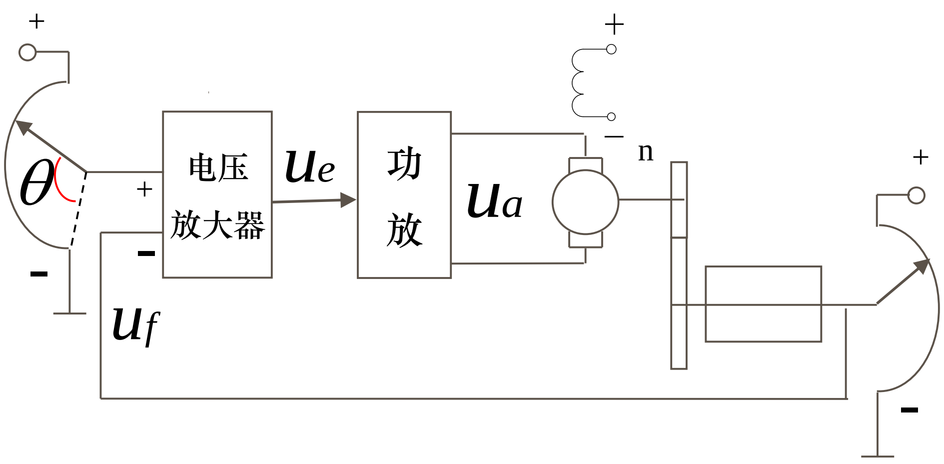


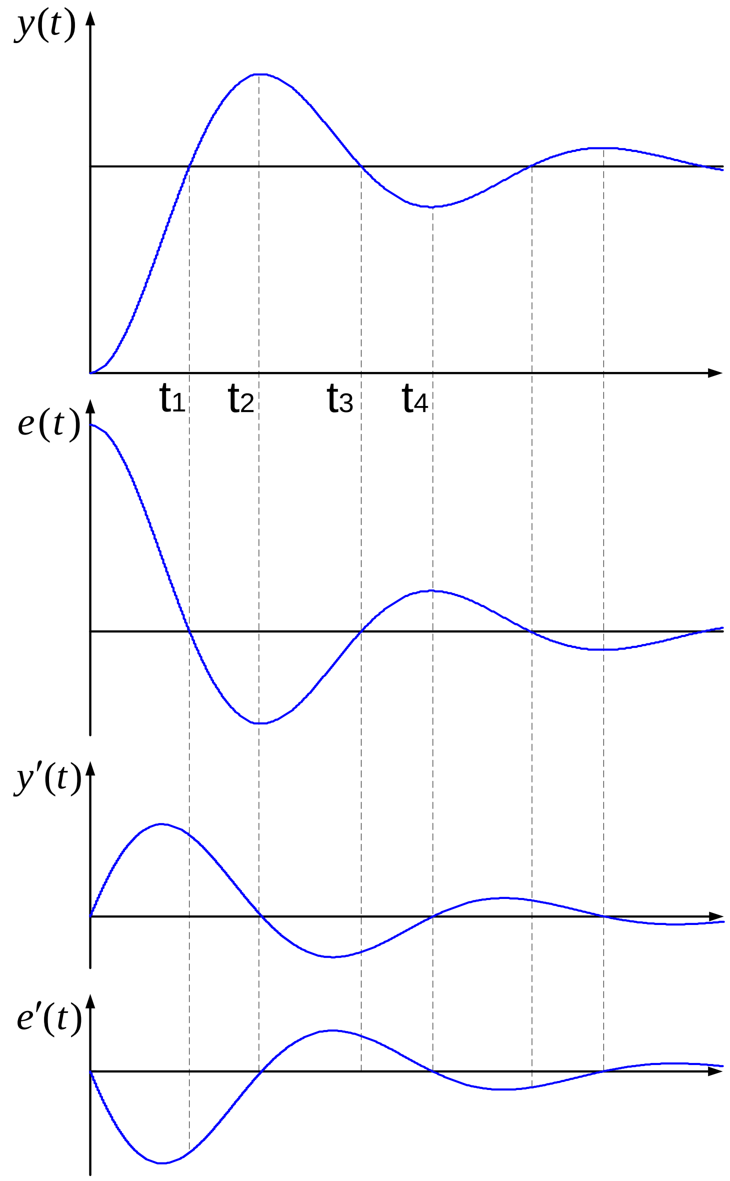


$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5K_a}{s^2 + 20s + 5K_a}$$


1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
y(t)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Time(sec)
$K_a = 60.$
$K_a = 30.$

四、二阶系统的时域设计方法



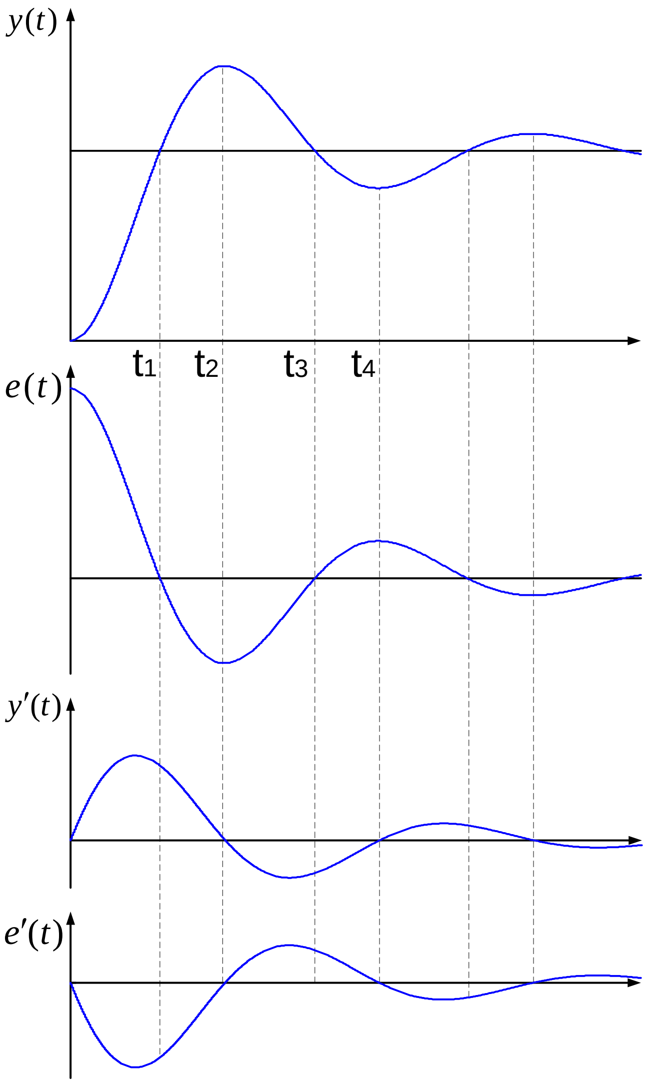


二阶系统超调产生过程

1. $[0,t_1]$误差信号为正，产生正向修正作用，以使误差减小，但因系统阻尼系数小，正向速度大，造成响应出现正向超调。

2. $[t_1,t_2]$误差信号为负，产生反向修正作用，但开始反向修正作用不够大，经过一段时间才使正向速度为零，此时输出达到最大值。

3. $[t_2,t_3]$误差信号为负，此时反向修正作用大，使输出返回过程中又穿过稳态值，出现反向超调。



二阶系统超调产生原因

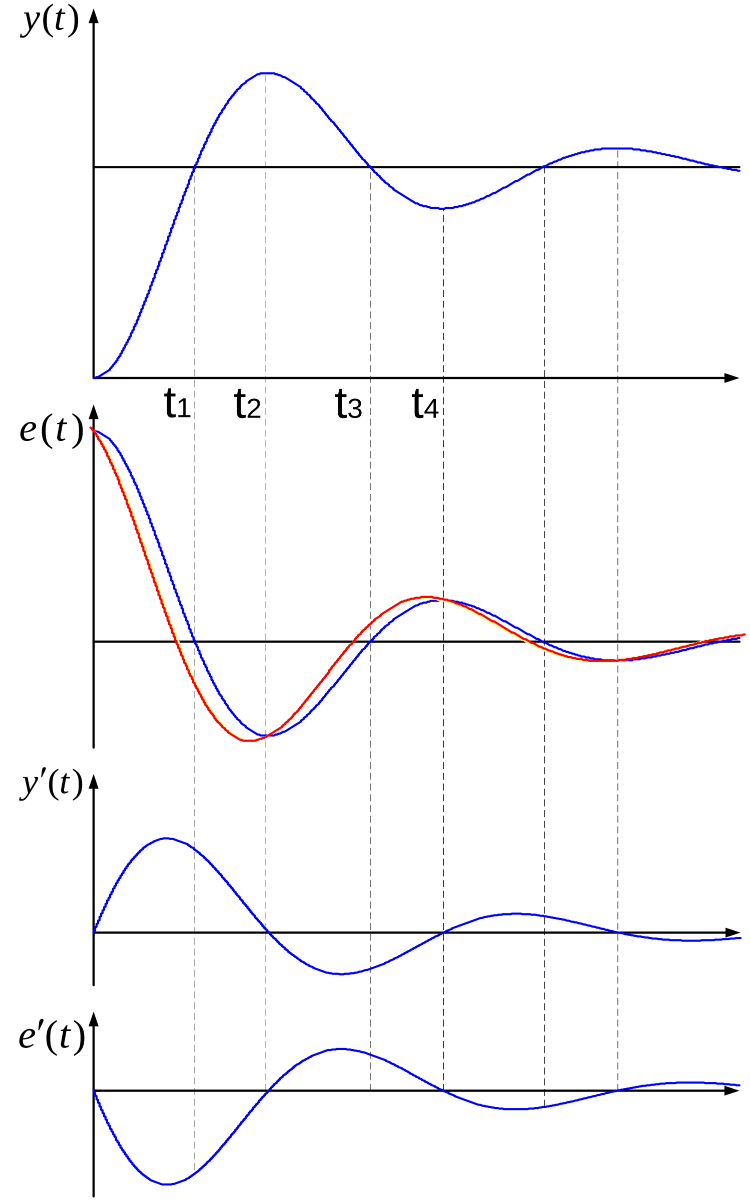
1. $[0,t_1]$ 正向修正作用太大，特别在靠近t_1点时。
2. $[t_1,t_2]$ 反向修正作用不足。

减小二阶系统超调的思路

1. $[0,t_1]$ 减小正向修正作用。附加与原误差信号相反的信号。
2. $[t_1,t_2]$ 加大反向修正作用。附加与原误差信号同向的信号。
3. $[t_2,t_3]$减小反向修正作用。附加与原误差信号相反的信号。
4. $[t_3,t_4]$ 加大正向修正作用。附加与原误差信号同向的信号。

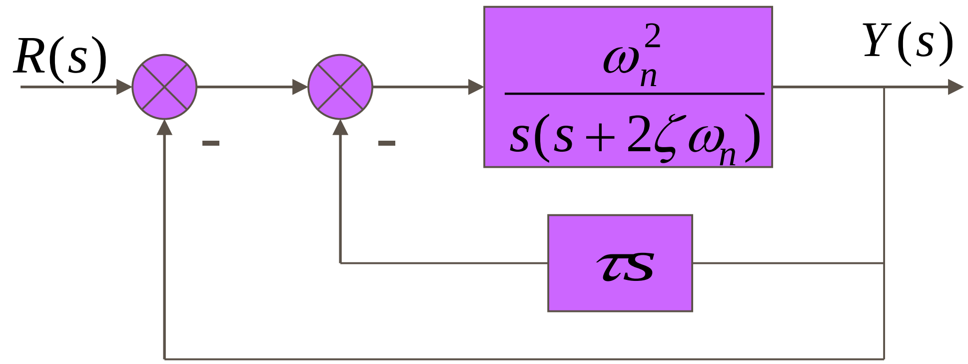
即在$[0,t_2]$ 内附加一个负信号，在$[t_2,t_4]$内附加一个正信号。

减去输出的微分或加上误差的微分都具有这种效果。



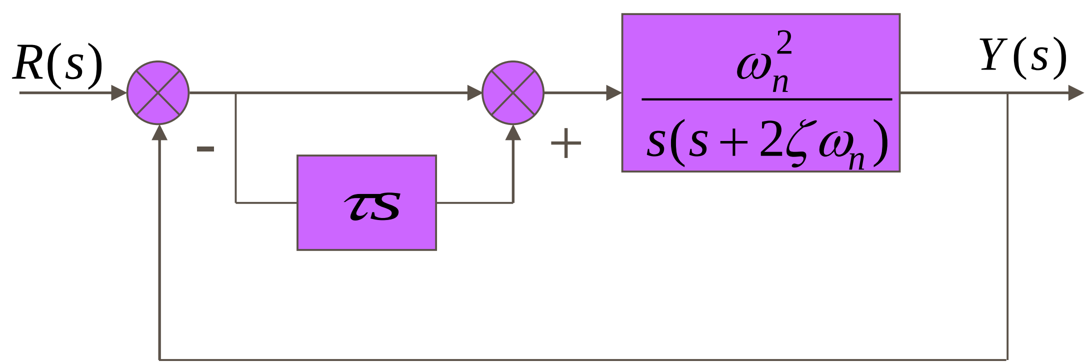
a. 输出量的速度反馈控制

将输出量的速度信号$y'(t)$采用负反馈形式反馈到输入端并与误差信号$e(t)$比较，构成一个内反馈回路。简称速度反馈。



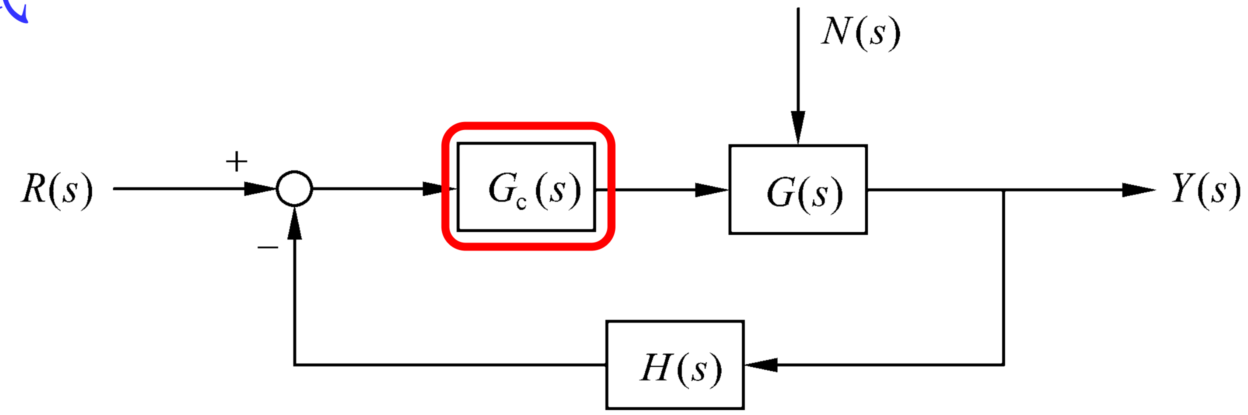
b. 误差的比例+微分控制

以误差信号$e(t)$与误差信号的微分信号$e'(t)$的和产生控制作用。简称PD控制。又称微分顺馈。

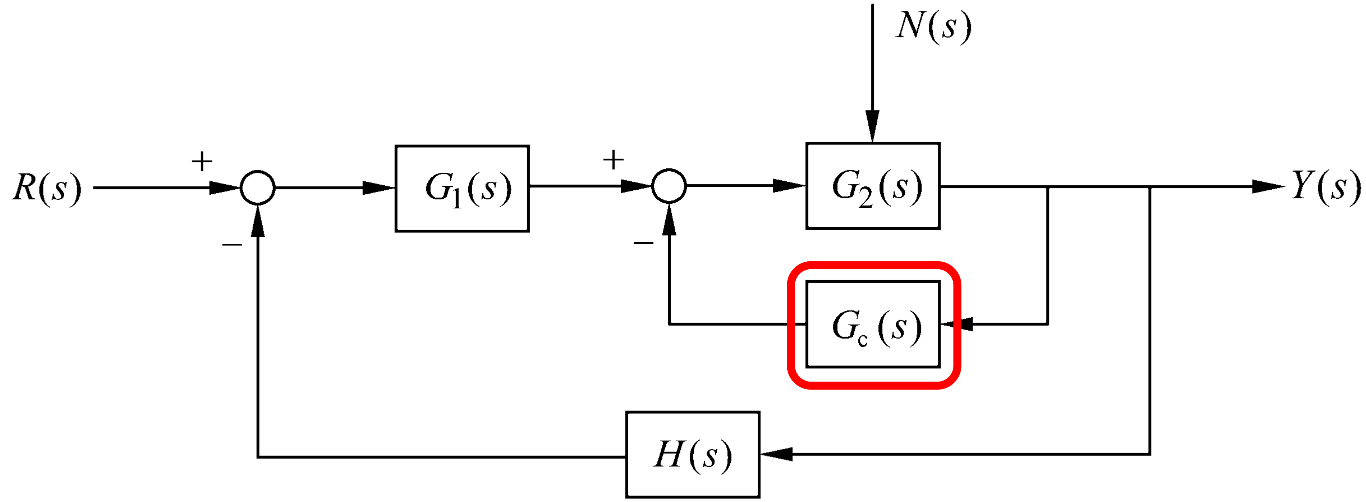


为了改善系统性能而改变系统的结构、参数或附加具有一定功能的环节的方法称为对系统进行校正。附加环节称为校正环节。速度反馈和微分顺馈是较常用的校正方法。

校正方式

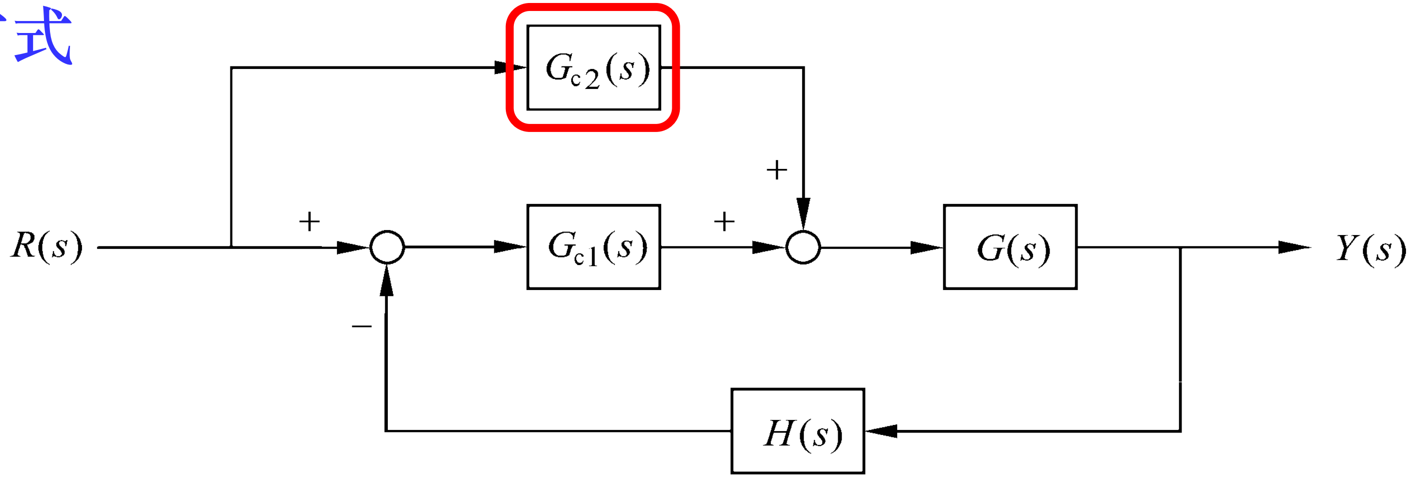


(a) 串联校正

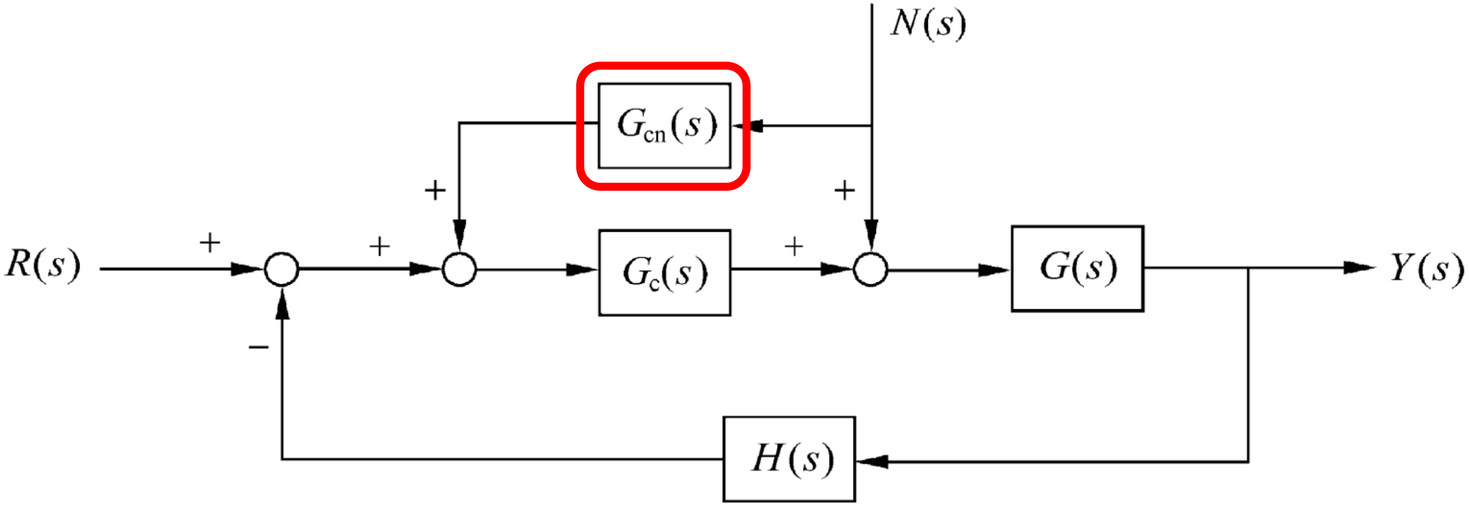


(b) 并联（或反馈）校正

校正方式

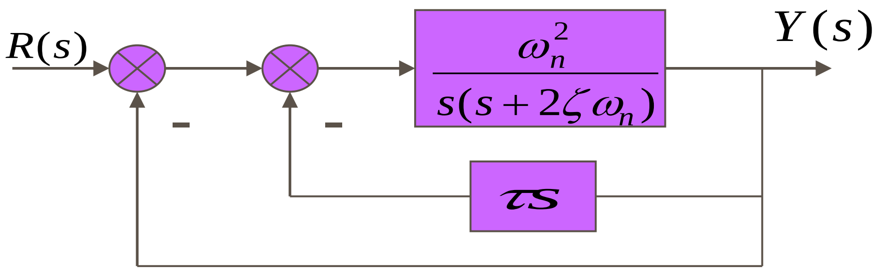


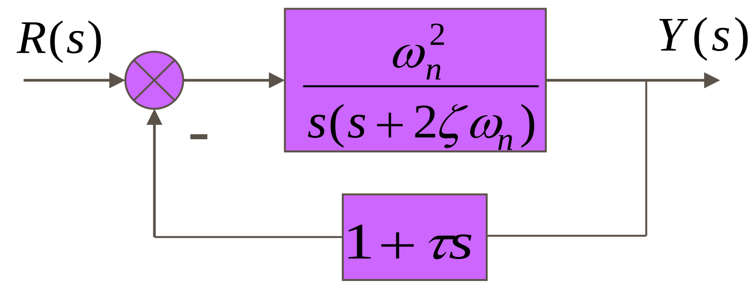
(c) 前馈校正1



(d) 前馈校正2

a. 输出量的速度反馈控制





$$\Phi(s)=\frac{\omega_n{}^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}\Big/\left(1+\frac{\cdots}{s}\ \ ?\ \ \frac{\tau s)}{\zeta\omega_n)}\right)=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+(2\zeta\omega_n+\tau\omega_n^2)s+\omega_n{}^2}$$

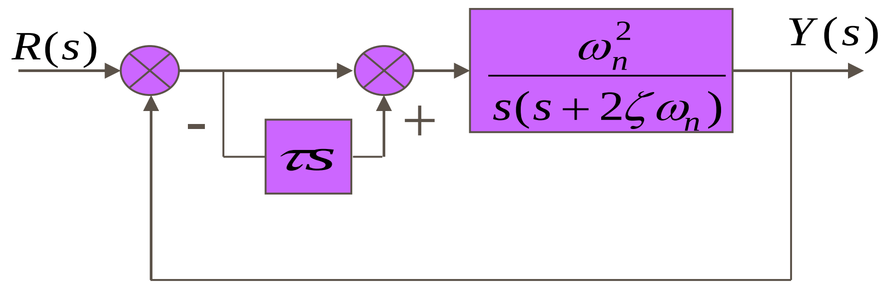
与典型二阶系统的标准形式 $\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ 比较

1. 不改变无阻尼振荡频率 ω_n
2. 等效阻尼系数为 $\zeta_t=\zeta+\frac{\tau}{2}\omega_n$，由于 $\zeta_t>\zeta$，即等效阻尼系数加大，将使超调量 $\delta\%$ 和调整时间 t_s 变小。
3. 开环增益的变化。 $K_{前}=\frac{\omega_n^2}{2\zeta\omega_n}$ $K_{后}=\frac{\omega_n^2}{2\zeta\omega_n+\tau\omega_n^2}$

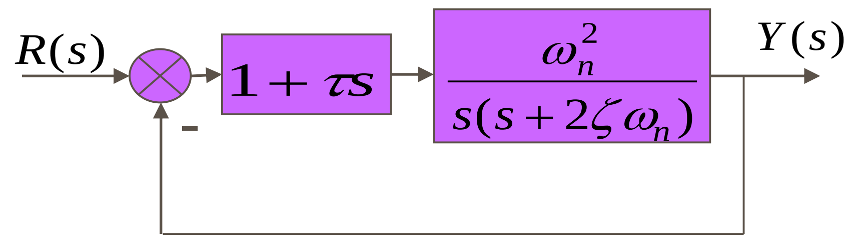
b. 误差的比例+微分控制

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}(1+\tau s)}{s^2+(2\zeta\omega_n+\tau\omega_n^2)s+\omega_n^{\ 2}}$$

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$



比较



1. 不改变无阻尼振荡频率 ω_n；
2. 等效阻尼系数为 $\zeta_d=\zeta+\dfrac{\tau}{2}\omega_n$，

   由于$\zeta_d>\zeta$,即等效阻尼系数加大，将使超调量δ%和调节时间t_s变小；
3. 闭环传递函数有零点 $z=-\dfrac{1}{\tau}$,将会给系统带来影响；
4. 不改变开环增益。

五、具有零点的二阶系统分析

具有零点的二阶系统比典型的二阶系统多一个零点，(ω_n 和 ζ 不变)。

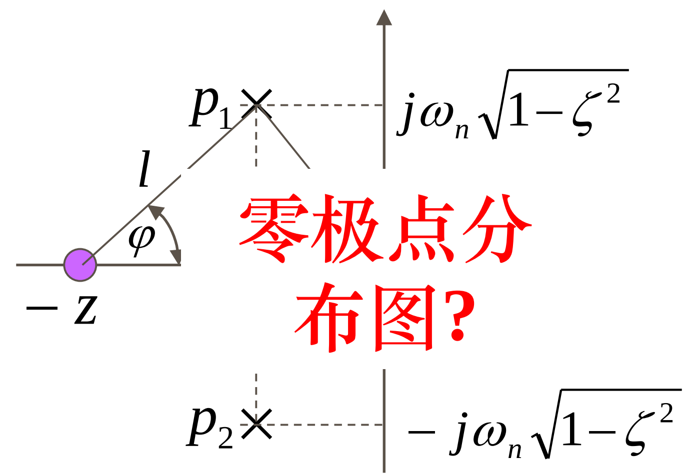
其闭环传递函数为：$\Phi(s)=\dfrac{\omega_n{}^2(1+\tau s)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}$ ，零点为：$-z=-\dfrac{1}{\tau}$

具有零点的二阶系统 $(0<\zeta<1)$ 的**单位阶跃响应**为：

$$Y(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{\omega_n^2(1+\tau s)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\,\frac{1}{s}$$

$$=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\,\frac{?}{s}+\frac{\omega_n^2\tau}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$=Y_1(s)+Y_2(s)$$



零极点分布图

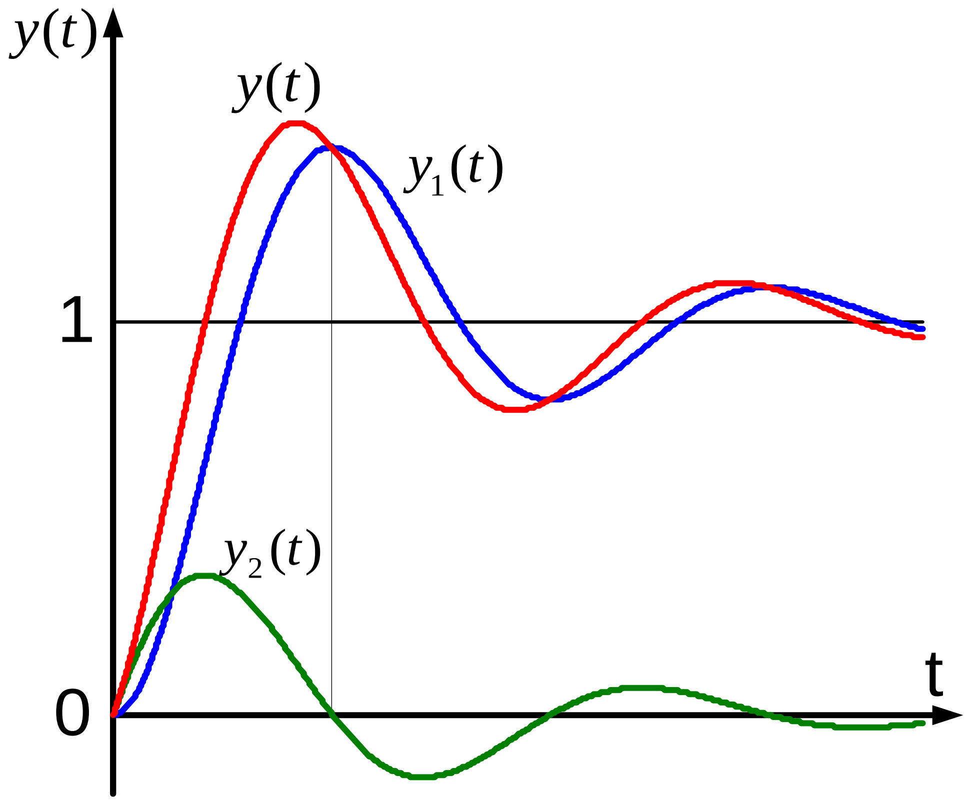
$$Y_1(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\frac{1}{s}$$

$$Y_2(s)=\frac{\omega_n^2\tau}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$Y_2(s)=Y_1(s)\cdot\tau s$$

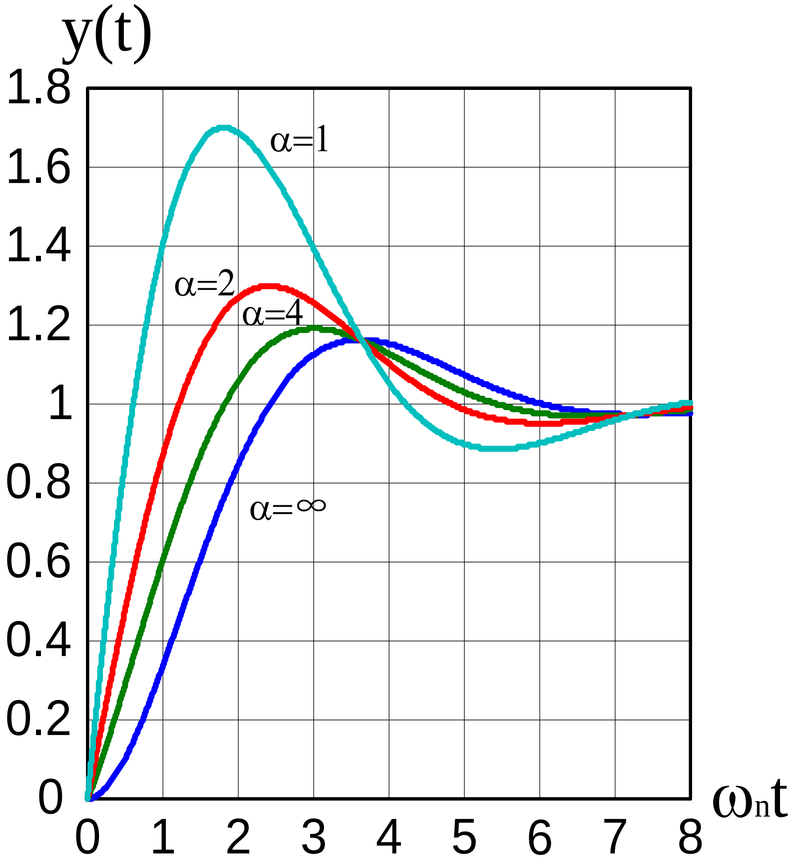
$$y_2(t)=\tau\frac{dc_1(t)}{dt}=\frac{1}{z}\frac{dc_1(t)}{dt}$$

$$y(t)=y_1(t)+\frac{1}{z}\frac{dy_1(t)}{dt}$$

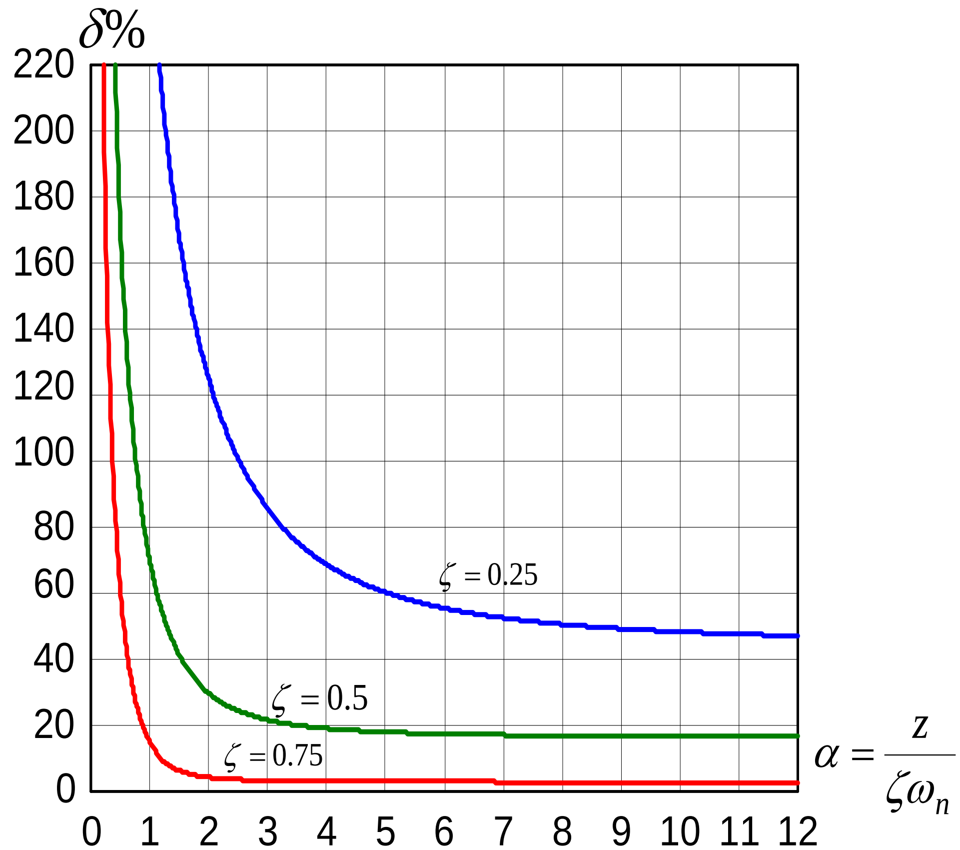


由上图可出：$y_2(t)$ 使得 $y(t)$ 比 $y_1(t)$ 响应迅速且有较大超调量。

设 $\alpha = \dfrac{z}{\zeta\omega_n}$，为零点和极点实部之比



$\zeta = 0.5 \qquad \alpha = \dfrac{z}{\zeta\omega_n}$



具有零点的二阶系统阶跃响应为：

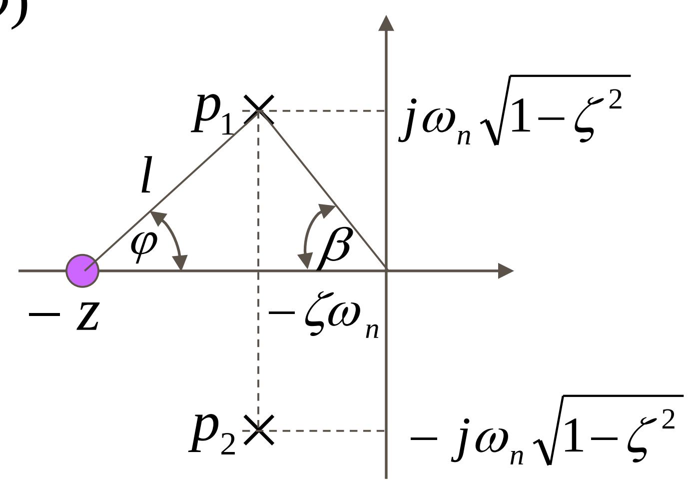
$$y(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}[\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)]+\frac{\tau\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)$$

$$y(t)=1-\sqrt{1+\frac{(\zeta-\tau\omega_n)^2}{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t+tg^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta-\tau\omega_n})$$

$$y(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot\frac{l}{z}\cdot\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t+\beta+\phi)$$

式中：$\beta=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ ，$\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{z-\zeta\omega_n}$

$$l=\sqrt{z^2-2\zeta\omega_n z+\omega_n^2}$$



零极点分布图

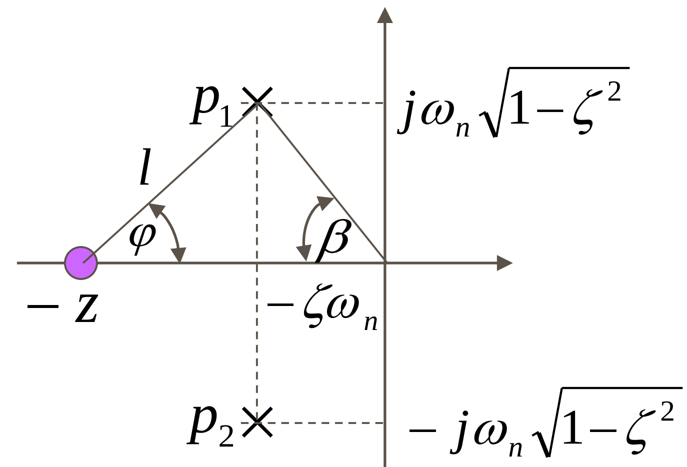
根据上式可以得出主要性能指标如下：

$$t_p=\frac{1}{\omega_d}\left(\pi-tg^{-1}\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{z-\zeta\omega_n}\right)=\frac{1}{\omega_d}(\pi-\varphi)$$

$$\delta\%=\frac{\sqrt{z^2-2\zeta\omega_n z+\omega_n^2}}{z}e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\pi-tg^{-1}\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{z-\zeta\omega_n}\right)}=\frac{l}{z}e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}(\pi-\varphi)}$$

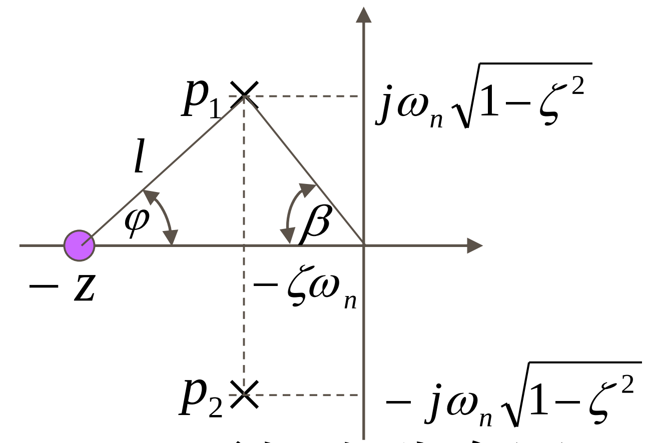
$$t_s\approx\begin{cases}\dfrac{1}{\zeta\omega_n}\left(4+\ln\dfrac{l}{z}\right) & \text{当 }\Delta=2\text{时}\\[2ex] \dfrac{1}{\zeta\omega_n}\left(3+\ln\dfrac{l}{z}\right) & \text{当 }\Delta=5\text{时}\end{cases}$$

$$t_r=\frac{\pi-(\beta+\varphi)}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}$$



零极点分布图

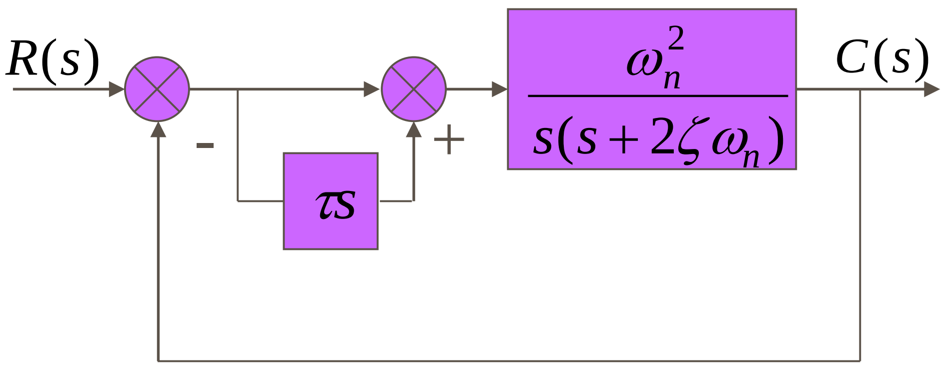
式中：$\beta=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ ， $\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{z-\zeta\omega_n}$ ， $l=\sqrt{z^2-2\zeta\omega_n z+\omega_n^2}$



零极点分布图

	标准二阶	带有零点的二阶系统
峰值时间t_p：	$t_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$	$t_p=\dfrac{1}{\omega_d}(\pi-\phi)$
上升时间t_r：	$t_r=\dfrac{\pi-\beta}{\omega_d}$	$t_r=\dfrac{\pi-(\beta+\varphi)}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}$
超调量：	$\delta\%=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$	$\delta\%=\dfrac{l}{z}e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}(\pi-\phi)}$
调整时间t_s：	$t_s=\begin{cases}\dfrac{4}{\zeta\omega_n}\\ \dfrac{3}{\zeta\omega_n}\end{cases}$	$t_s\approx\begin{cases}\dfrac{1}{\zeta\omega_n}(4+\ln\dfrac{l}{z}) & 当\ \Delta=2时\\ \dfrac{1}{\zeta\omega_n}(3+\ln\dfrac{l}{z}) & 当\ \Delta=5时\end{cases}$

比例+微分控制的性能



$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}(1+\tau s)}{s^2+(2\zeta\omega_n+\tau\omega_n^2)s+\omega_n^{\ 2}}$$

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}(1+\tau s)}{s^2+2\zeta_d\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$$

$$\zeta_d=\zeta+\frac{\tau\omega_n}{2}$$

显然，这是一个典型二阶环节加微分顺馈。不同的是其原二阶环节的阻尼系数增加了，变为ζ_d，而无阻尼振荡频率不变。我们知道，当阻尼系数不变时，附加零点会使系统的超调量增大。但是，增加了顺馈环节虽然增加了一个零点，却使系统的阻尼系数增加了。一般来讲，超调量会下降。这样，就能改善系统的瞬态性能。

比例微分控制与速度反馈控制的比较

附加阻尼来源：比例微分控制的阻尼作用产生于系统的输入端误差信号的速度，而测速反馈控制的阻尼作用产生于系统的输出端响应的速度，因此对于给定的开环增益和输入，测速反馈控制对应较大的稳态误差。

使用环境: 比例微分控制对噪声有明显的放大作用，当系统输入端噪声严重时，一般不宜选用比例微分控制。同时微分器的输入信号为系统的误差信号，其能量水平低，需要相当大的放大作用，为了不明显恶化信噪比，要求选用高质量的放大器；而速度反馈可以提高系统的抗负载扰动的能力，使用场合比较广泛。

比例微分控制与速度反馈控制的比较

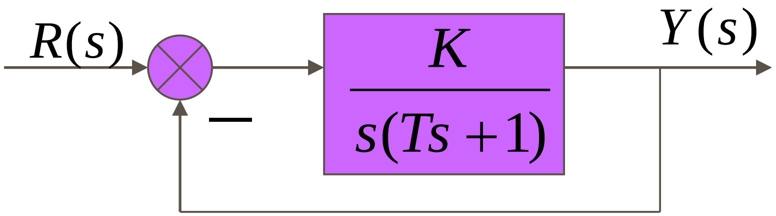
对开环增益和自然频率的影响：比例微分控制对系统的开环增益和自然频率均无影响；速度反馈控制虽不影响自然频率，但却会降低开环增益。因此，对于确定的常值稳态误差，速度反馈控制要求有较大的开环增益。开环增益的加大，必然导致系统自然频率增大，在系统存在高频噪声时，可能引起系统共振。

对动态过程的影响： 比例微分控制相当于在系统中加入实零点，可以加快上升时间。在相同阻尼比的条件下，比例微分控制系统的超调量会大于速度反馈控制系统的超调量。

[例3-1]：如图所示系统，$K=16s^{-1}$, $T=0.25s$

试求：① ζ和ω_n ；② $\delta\%$ 和 t_s

③ 若要求$\delta\%=16\%$ 时，当T不变时K=?



[解]: ① $\omega_n=\sqrt{\dfrac{K}{T}}=\sqrt{\dfrac{16}{0.25}}=8s^{-1}$, $\zeta=\dfrac{1}{2\sqrt{KT}}=\dfrac{1}{2\sqrt{16\times0.25}}=0.25$

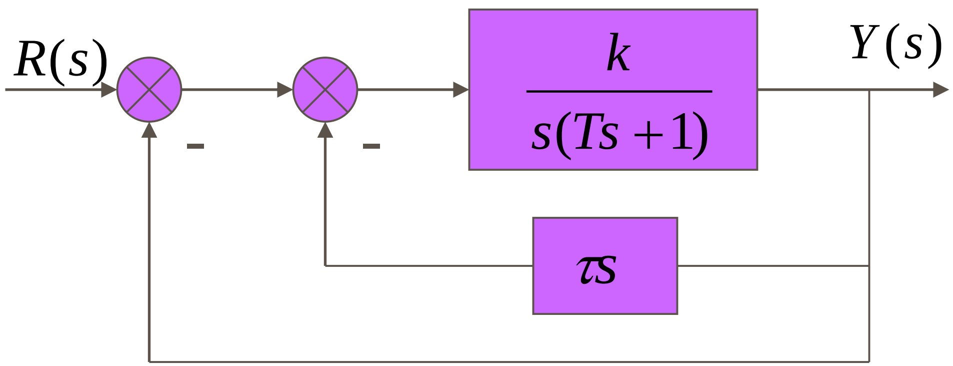
② $$\delta\%\times100\%=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%=44\%$$

$$t_s=\begin{cases}\dfrac{4}{\omega_n\zeta}=\dfrac{4}{8\times0.25}=2s,(当\Delta=2)\\[2ex]\dfrac{3}{\omega_n\zeta}=\dfrac{3}{8\times0.25}=1.5s,(当\Delta=5)\end{cases}$$

③ $\because\ \delta\%=16\%,\ \therefore 0.16=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$,解得，$\zeta=0.5038$

当T不变时，T=0.25， $K=\dfrac{1}{4T\zeta^2}=\dfrac{1}{4\times0.25\times0.5038^2}\approx3.9388$

[例3-2]：上例中，用速度反馈改善系统的性能。如下图所示。为使 $\zeta_1 = 0.5$ ，求τ 的值。并计算加入速度反馈后的瞬态指标。



$K = 16s^{-1}, T = 0.25s$

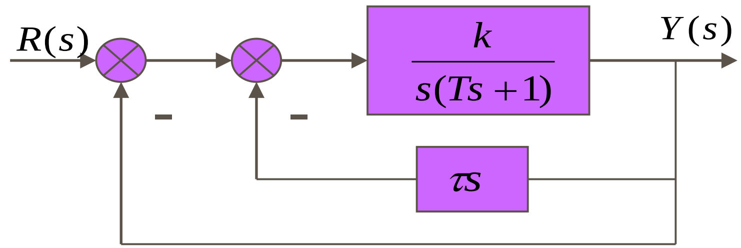
[解]: 系统的闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{\frac{k}{T}}{s^2 + \frac{1+k\tau}{T}s + \frac{k}{T}}$$

$$\text{则}:\begin{cases} \omega_{n1}^{\ 2} = \frac{k}{T} \\ 2\zeta_1\omega_{n1} = \frac{1+k\tau}{T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{n1} = \sqrt{\frac{k}{T}} \\ \zeta_1 = \frac{1+k\tau}{2\sqrt{kT}} \end{cases}$$

显然，加入了速度反馈后，ω_n 不变，而 ζ_1 增加了 $1+k\tau$ 倍。上例中 $\zeta=0.25$，若要求 $\zeta_1=0.5$，则：

$$1+k\tau=2, \text{求得：} \quad \tau=\frac{1}{k}=\frac{1}{16}=0.0625$$



这时的瞬态性能指标为：

$$\delta_1\%=e^{-\frac{\pi\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}}\times 100\%=16\%$$

$$t_s=\frac{4}{\omega_{n1}\zeta_1}=\frac{4}{0.5\times 8}=1(s)$$

加速度反馈后，

开环增益=?

[例3-3] 对典型的二阶系统（ $\zeta=0.25,\omega_n=8$ ）采用比例微分校正。为使 $\zeta_1=0.5$，试确定比例微分系数 τ 和 $\delta_1\%$，t_{s1} 。

$$[解]:\ \zeta_1=\zeta+\frac{\tau\omega_n}{2},\therefore\tau=\frac{2(\zeta_1-\zeta)}{\omega_n}=\frac{2(0.5-0.25)}{8}=0.0625(s),z=\frac{1}{\tau}=16$$

$$\varphi=tg^{-1}\frac{\omega_{n1}\sqrt{1-\zeta_1^{\ 2}}}{z-\zeta_1\omega_{n1}}=tg^{-1}\frac{8\times\sqrt{1-0.5^2}}{16-0.5\times8}=30^\circ=\frac{\pi}{6}$$

$$l=\sqrt{z^2-2z\zeta_1\omega_n+\omega_n^{\ 2}}=\sqrt{16^2-2\times16\times0.5\times8+8^2}=13.86$$

$$\delta_1\%=\frac{l}{z}e^{-\frac{\zeta_1(\pi-\varphi)}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%=19.1\%$$

$$t_{s1}=(4+\ln\frac{l}{z})\times\frac{1}{\zeta_1\omega_n}=(4+\ln\frac{13.86}{16})\times\frac{1}{0.5\times8}=0.964(s),(当\Delta=2)$$

原系统:

$$\delta\% = 44.4\%$$

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = 2(s), (\text{�}\Delta = 2)$$

加比例微分:

$$\delta_1\% = 19.1\%$$

$$t_{s1} = 0.964(s), \qquad (\text{当}\Delta = 2)$$

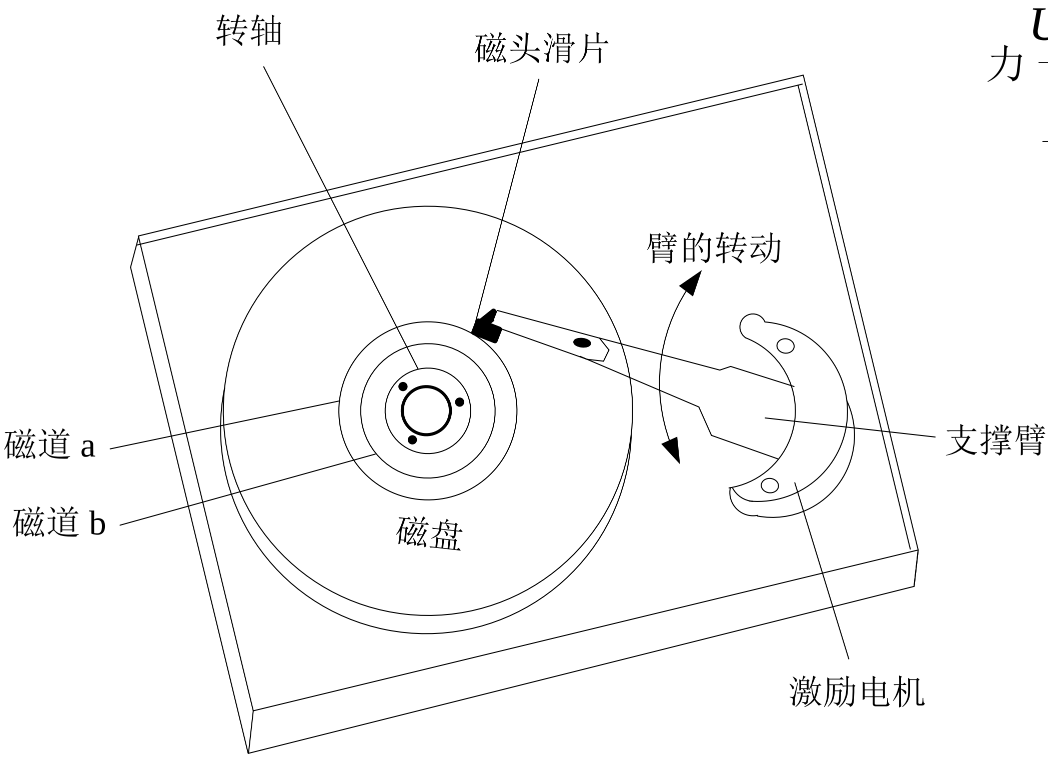
加速度反馈:

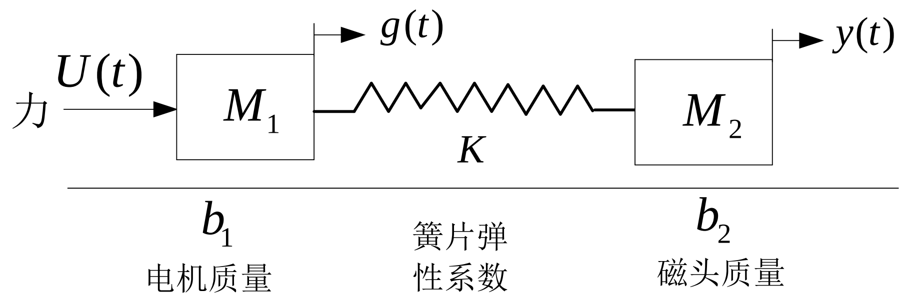
$$\delta_1\% = 16\%$$

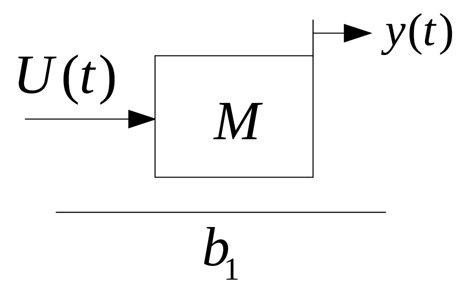
$$t_s = \frac{4}{\omega_{n1}\zeta_1} = 1(s)$$

磁盘驱动读取系统

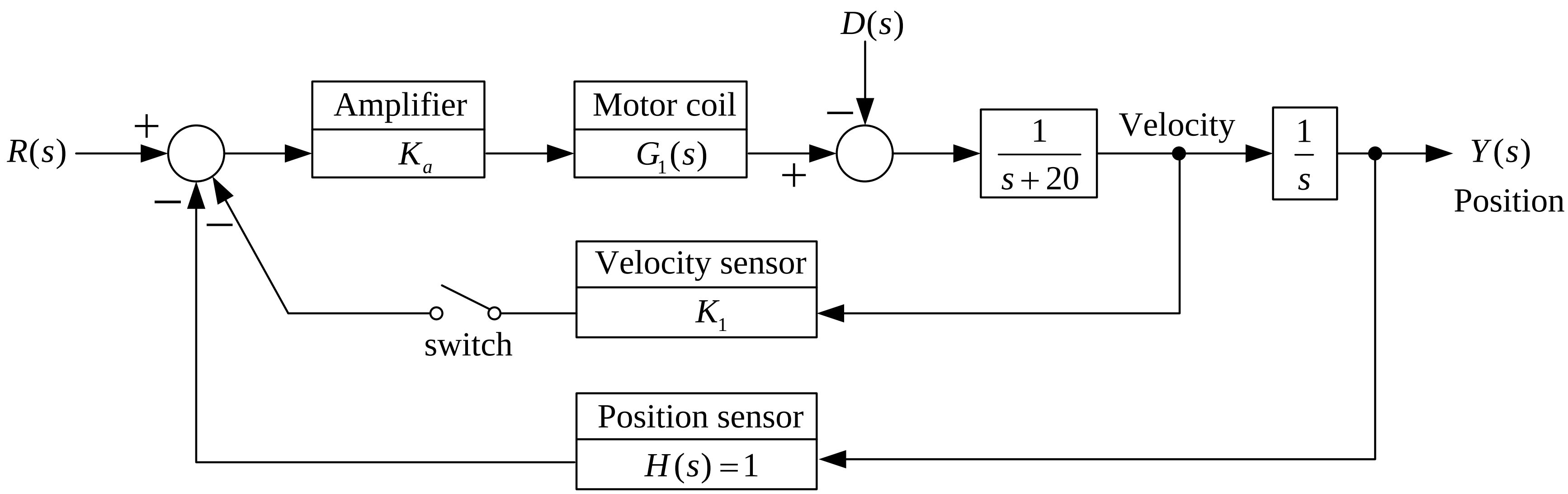
2. 考虑摩擦力,但仍是刚性连接时的情况:

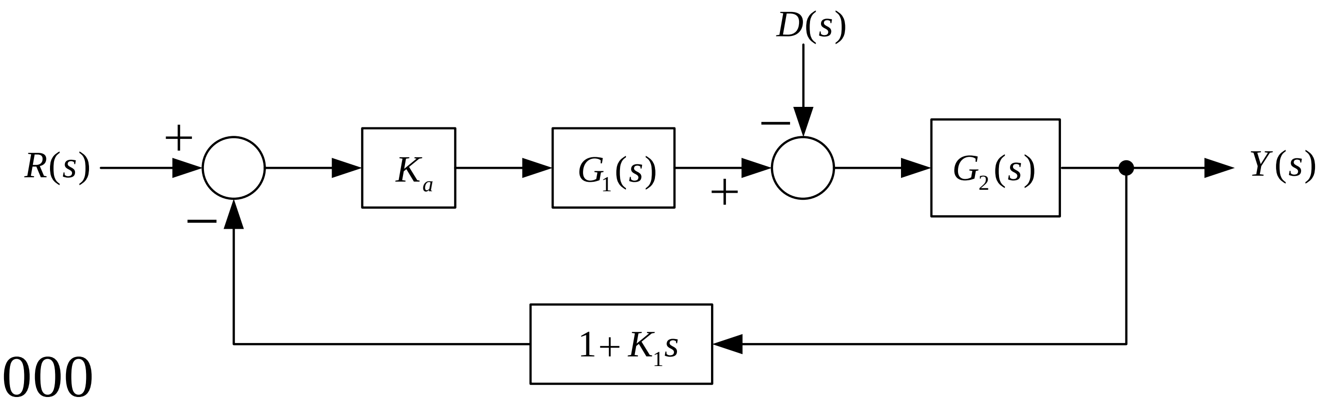






$$G(s)=\frac{Y(s)}{V(s)}=\frac{5000}{s(s+20)(s+1000)}$$





$$G_1(s) = \frac{5000}{s+1000}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s(s+20)} \qquad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G_1(s) G_2(s)}{1+[K_a G_1(s) G_2(s)](1+K_1 s)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_aG_1(s)G_2(s)}{1+[K_aG_1(s)G_2(s)](1+K_1s)}$$

无速度反馈时，即 $K_1=0$， $K_a=100$

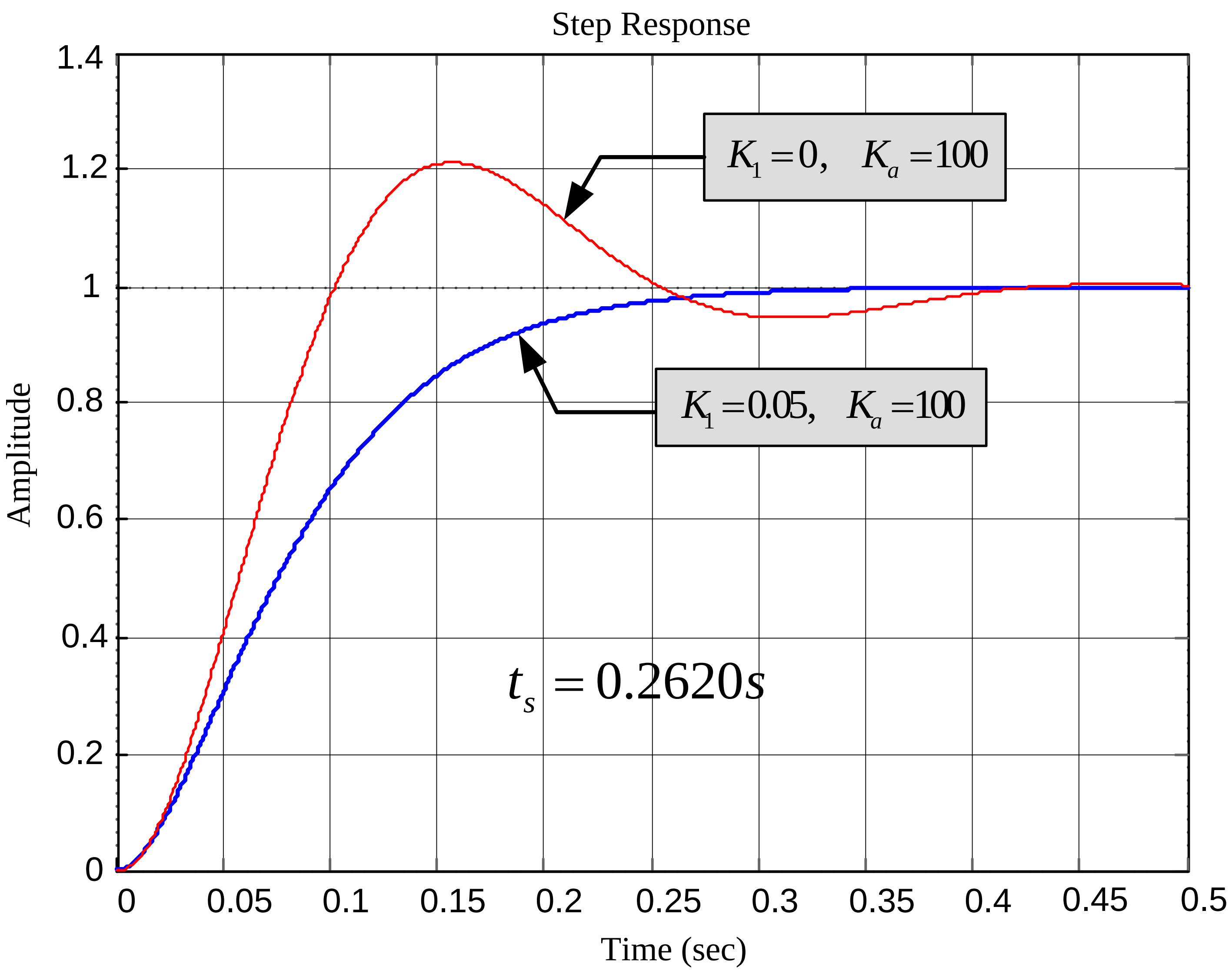
$$\Phi=\frac{500000}{s^3+1020s^2+20000s+500000}$$

加入速度反馈，当 $K_1=0.05$， $K_a=100$

$$\Phi=\frac{5000K_a}{s(s+20)(s+1000)+5000K_a(1+K_1s)}$$

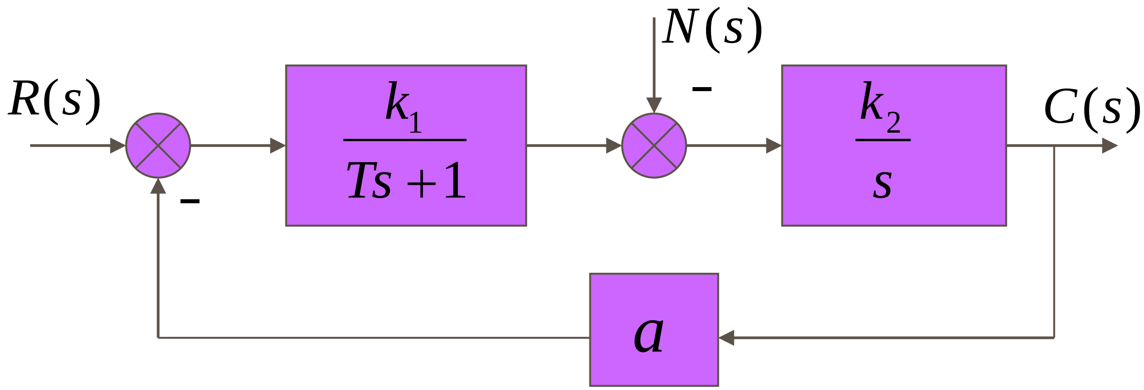
$$=\frac{5000K_a}{s^3+1020s^2+(20000+5000K_aK_1)s+5000K_a}$$

$$=\frac{500000}{s^3+1020s^2+45000s+500000}$$


Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
$K_1 = 0, \quad K_a = 100$
$K_1 = 0.05, \quad K_a = 100$
$t_s = 0.2620s$

六、扰动作用下典型二阶系统的分析

[例子]：



设$R(s)=0$，得输出对扰动的闭环传递函数为：

$$\Phi_N(s)=\frac{C(s)}{N(s)}=-\frac{k_2(Ts+1)}{Ts^2+s+k_1k_2a}=-\frac{1}{k_1a}\cdot\frac{\omega_n^{\ 2}(s+z)}{z(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})}$$

式中：$\omega_n=\sqrt{\frac{k_1k_2a}{T}},\zeta=\frac{1}{2\sqrt{k_1k_2aT}},z=\frac{1}{T}$

显然，这是一个带有零点的二阶系统。

单位阶跃响应为（$N(s)=\frac{1}{s}$）：$C(s)=\Phi_N(s)\cdot\frac{1}{s}$

$$\therefore c(t) = -\frac{1}{k_1 a}\cdot\{1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}[\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t+\theta)+\frac{\omega_n}{z}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)]\}$$

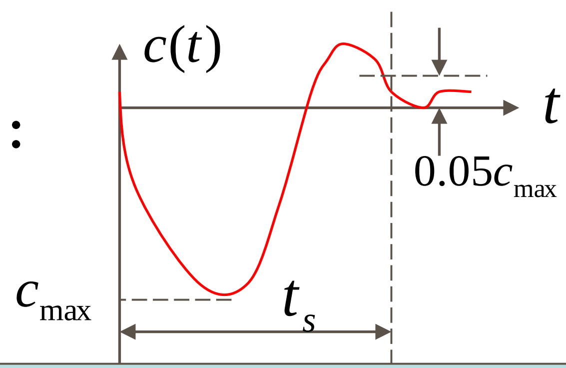
$$= -\frac{1}{k_1 a}\cdot[1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot\frac{l}{z}\cdot[\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t+\theta+\varphi)]$$

式中： $\theta=\varphi=tg^{-1}\dfrac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{z-\zeta\omega_n}=tg^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta},\ \dfrac{l}{z}=\dfrac{\sqrt{z^2-2z\zeta\omega_n+\omega_n^2}}{z}$

将 $\omega_n,\zeta,\dfrac{l}{z}$ 代入c(t)中得：

$$c(t) = -\frac{1}{k_1 a}\cdot[1-\frac{e^{-\frac{zt}{2}}}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{2\zeta}zt+2\theta)]$$

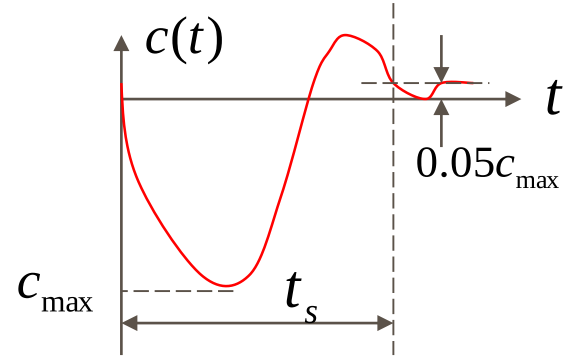
单位阶跃响应曲线如右：



扰动作用下的瞬态性能指标与随动系统略有不同：

（1）最大偏离 c_{max}： 瞬态过程中出现的c(t)的最大值。

（2）调节时间（恢复时间）t_s ： 表示c(t)达到最大偏离的5%，且以后不再超出此值的时间。



稳态值：$c(\infty)=-\dfrac{N}{k_1 a}$ ，最大偏离值：$c_{max}=-\dfrac{N}{k_1 a}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2\zeta}e^{-\frac{\zeta(\pi-\theta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\right)$

式中：N为阶跃强度，$\theta=tg^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

小 结

- 二阶系统的动态性能指标基于以下两个条件：第一，性能指标是根据系统对单位阶跃输入的响应给出的；第二，初始条件为零。
- 典型二阶系统的瞬态响应：二阶无阻尼、欠阻尼、临界阻尼和过阻尼系统的阻尼系数、特征根、极点分布和单位阶跃响应。
- 典型二阶系统的性能指标：主要是超调量和调整时间；与系统参数之间的关系。
- 具有零点的二阶系统：单位阶跃响应的紧凑形式；性能指标；微分顺馈校正。
- 二阶系统的时域设计方法：比例微分控制；速度反馈。