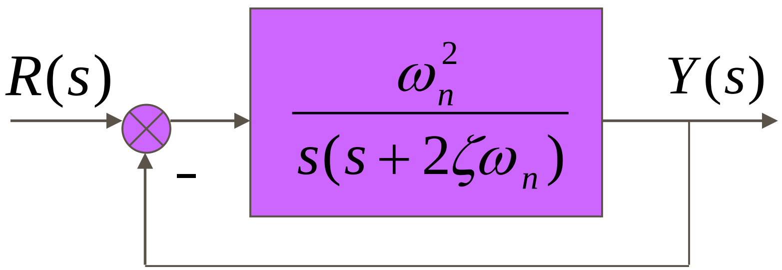
3.3 二阶系统的瞬态响应

一、典型二阶系统的数学模型

由二阶微分方程描述的系统称为二阶系统。它在控制工程中的应用极为广泛。许多高阶系统在一定的条件下，也可简化为二阶系统来研究。

典型结构的二阶系统如图所示。



开环传递函数为: $$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s}$$

闭环传递函数为: $$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$\Phi(s)$称为典型二阶系统的传递函数，ζ 称为阻尼系数，ω_n 称为无阻尼振荡频率或自然频率。这两个参数称为二阶系统特征参数。

特征方程为： $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

特征根为： $s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$

注意：当ζ不同时，特征根有不同的形式，系统的阶跃响应形式也不同。

1. 当$\zeta=0$时： 特征方程有一对共轭的虚根，称为零(无)阻尼系统。

2. 当$0<\zeta<1$时：特征方程有一对实部为负的共轭复根，称为欠阻尼系统。

3. 当$\zeta=1$时： 特征方程有一对相等的实根，称为临界阻尼系统。

4. 当$\zeta>1$时： 特征方程有一对不等的实根，称为过阻尼系统。

二、典型二阶系统的单位阶跃响应

当输入为单位阶跃函数时，$R(s)=\dfrac{1}{s}$ ，有：

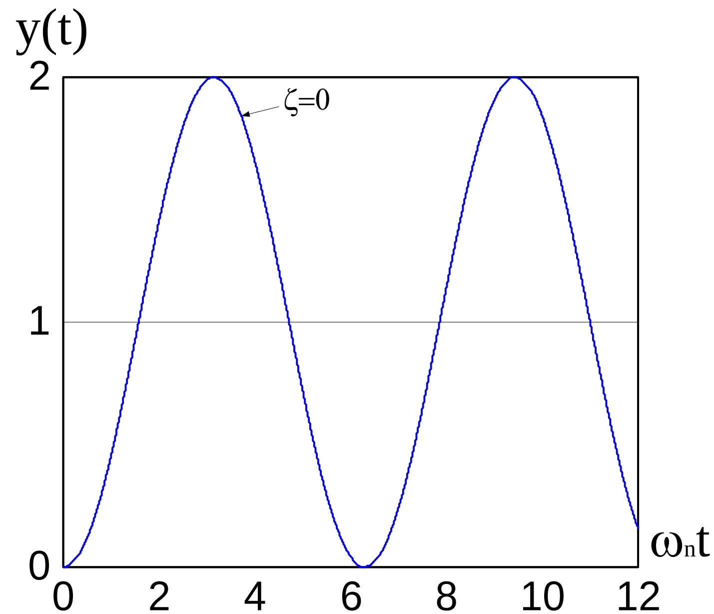
$$Y(s)=\Phi(s)\times\frac{1}{s}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\times\frac{1}{s}$$

$$y(t)=L^{-1}[\Phi(s)\times\frac{1}{s}]=L^{-1}[\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\times\frac{1}{s}]$$

1. 当 $\zeta=0$ 时， 极点为：$s=\pm j\omega_n$

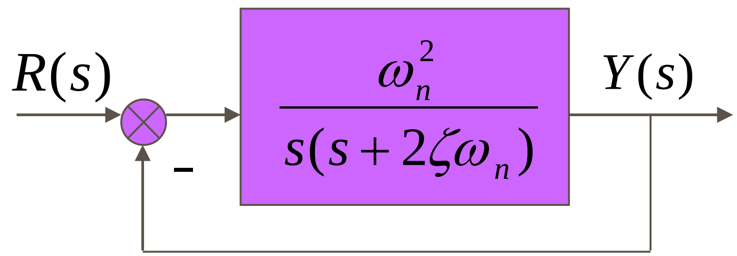
$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+\omega_n^2)}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega_n^2}$$

$$y(t)=1-\cos\omega_n t \quad ? \; t\geq 0$$

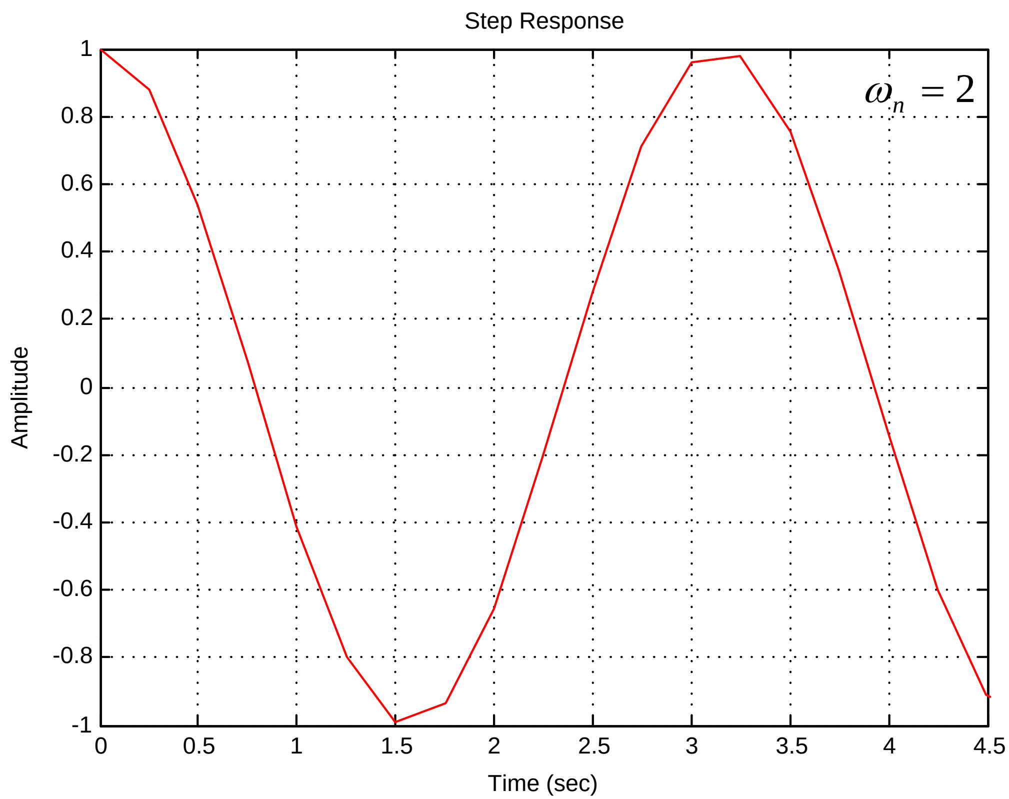


此时输出将以频率 ω_n 做等幅振荡，所以，ω_n 称为无阻尼振荡频率。

输入阶跃信号和阶跃响应之间的误差：



$$e(t)=r(t)-y(t)=1-y(t)=\cos\omega_n t，\quad t\geq 0$$



误差曲线呈现等幅振荡形式。即系统在无阻尼情况下，不能跟踪输入的单位阶跃信号。

2. 当$0<\zeta<1$时，系统极点为：$p_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$\boxed{\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\ \text{称为阻尼振荡频率。}}$

$$Y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+(\zeta\omega_n)^2-(\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)^2}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)^2}-\frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)^2}$$

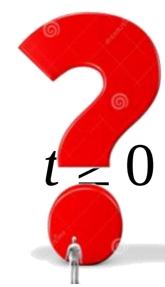
$$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2} \Leftrightarrow e^{-at}\cos(bt)$$

$$\frac{b}{(s+a)^2+b^2} \Leftrightarrow e^{-at}\sin(bt)$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)^2}-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)^2}$$

$$y(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}[\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)], \quad t\geq 0$$

$$y(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t+tg^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}), \quad t\geq 0$$

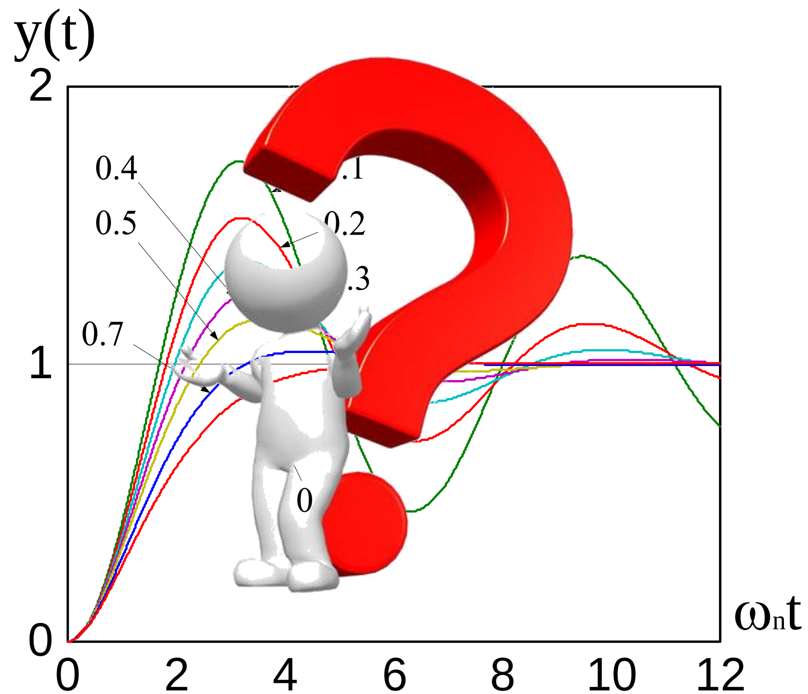


$$y(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t+tg^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right),\quad t\geq 0$$

系统极点为：

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

极点的负实部$-\zeta\omega_n$决定了指数衰减的快慢，虚部$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$是振荡频率。称$\omega_d$为阻尼振荡圆频率。注意：$\omega_d<\omega_n$。

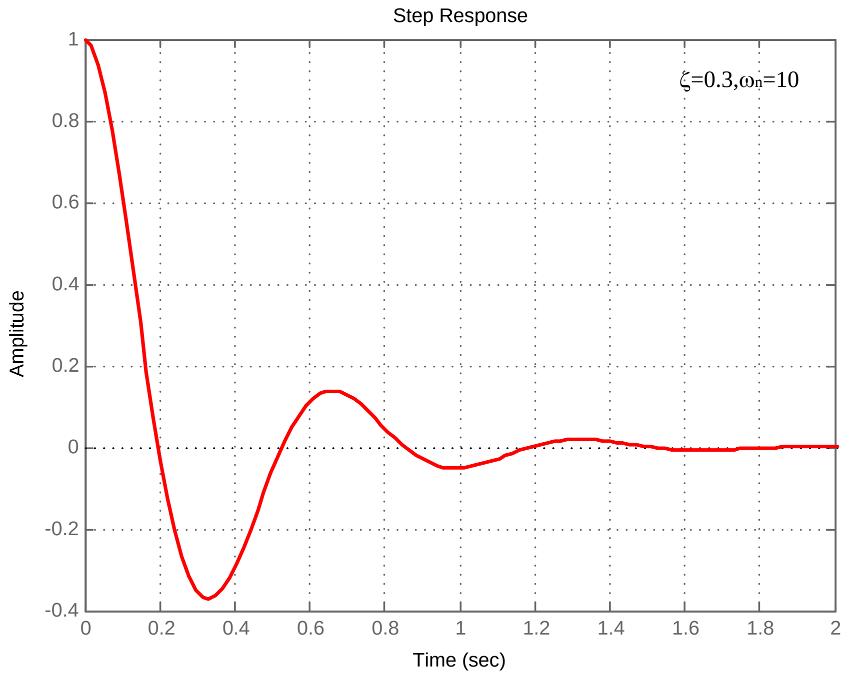


输入阶跃信号和阶跃响应之间的误差：

$$e(t)=r(t)-y(t)=1-y(t)$$

$$=\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t$$

$$+tg^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}),\quad t\ge 0$$



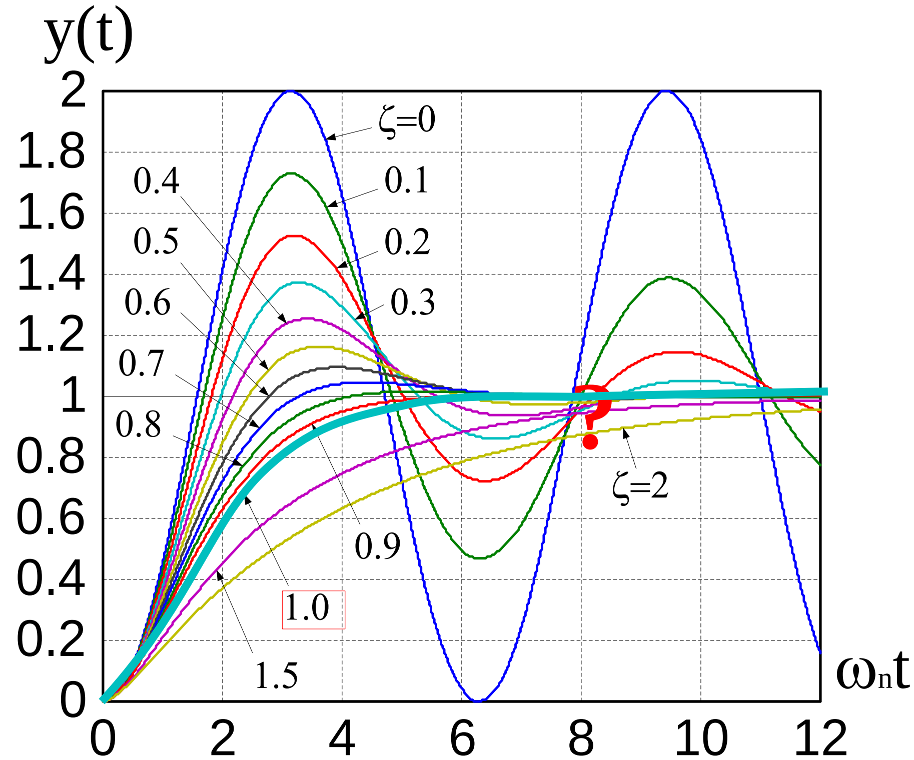
误差也呈阻尼正弦振荡。当稳态时，即当时$t\rightarrow\infty$，有$\lim\limits_{t\rightarrow\infty}e(t)=0$，表示欠阻尼二阶系统能够完全跟踪输入单位阶跃信号，没有稳态误差。

3. 当 $\zeta=1$ 时，极点为：$s_{1,2}=-\omega_n$

阶跃响应函数为：

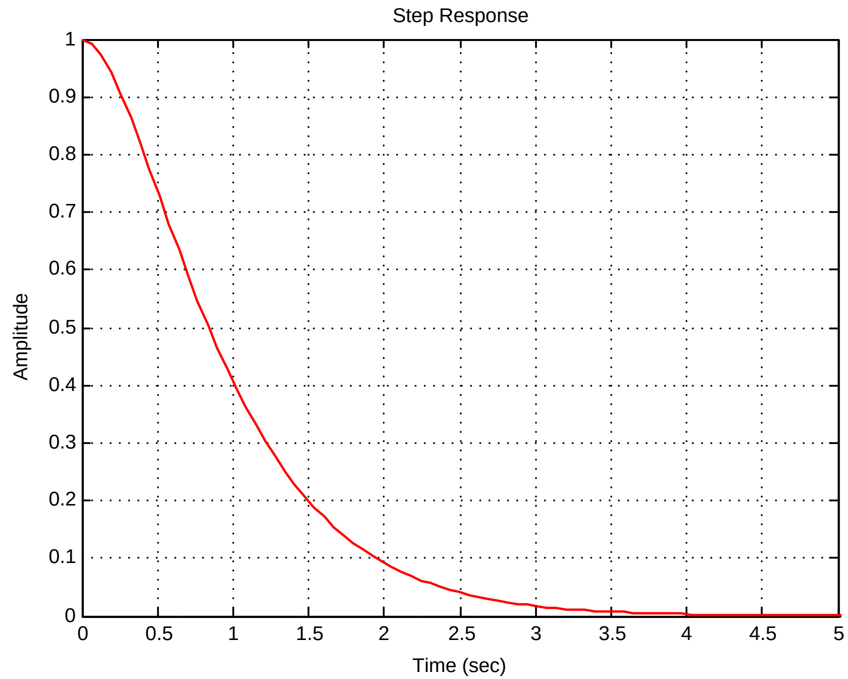
$$Y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\omega_n s+\omega_n{}^2}=\frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\omega_n}-\frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$$

$$y(t)=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$



输入阶跃信号和阶跃响应之间的误差：

$$e(t)=r(t)-y(t)=1-y(t)=e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t),\quad t\geq 0$$



随着时间的增加，误差越来越小，到稳态时误差变为零。通常，在临界阻尼情况下，二阶系统的单位阶跃响应称为临界阻尼响应。

4. 当 $\zeta>1$ 时，极点为： $s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$

即特征方程为

$$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=[s+\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})][s+\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})]$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{[s+\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})][s+\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})]}$$

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{[s+\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})][s+\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})]}\cdot\frac{1}{s}$$

$$y(t)=1-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}?\left[\frac{e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}-\frac{e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}\right]$$

特征方程还可为 $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=(s+\frac{1}{T_1})(s+\frac{1}{T_2})$

式中 $T_1=\dfrac{1}{\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$ $T_2=\dfrac{1}{\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}$

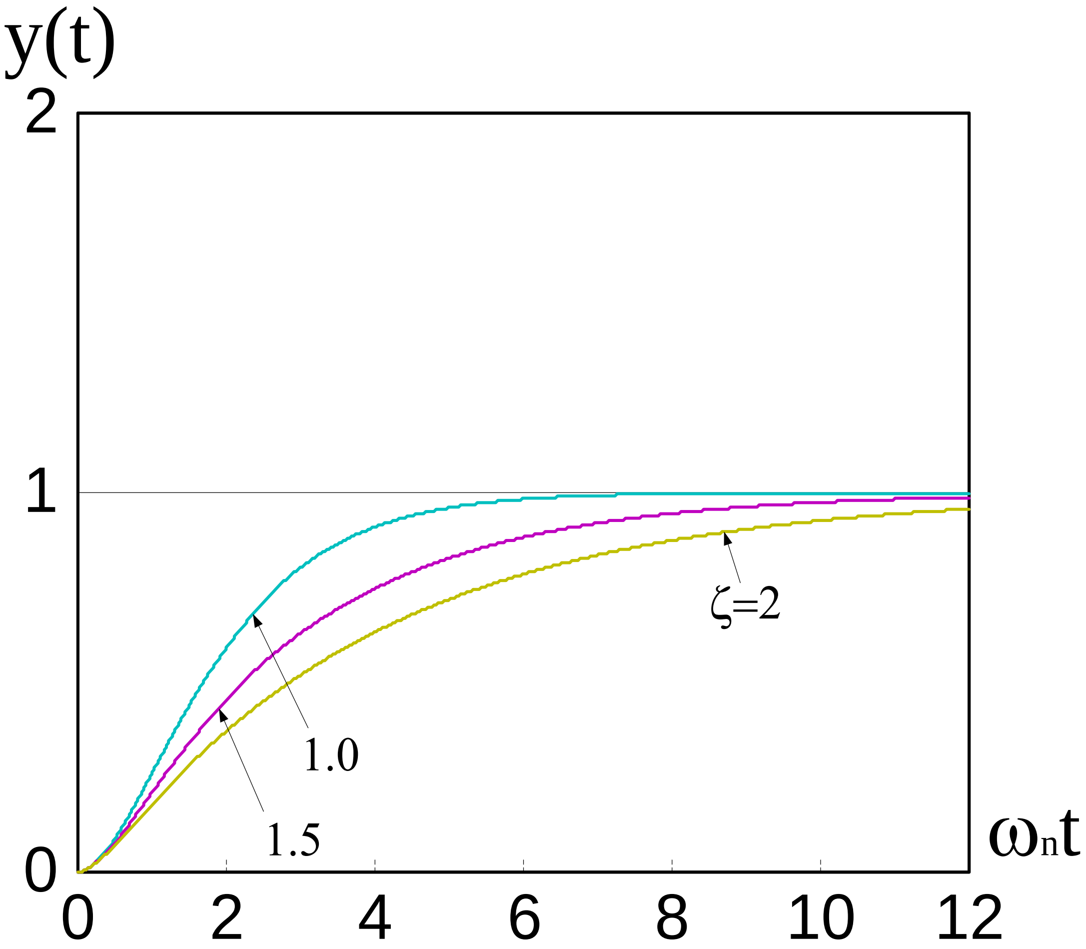
这里 $T_1>T_2$ ， $\omega_n^2=\dfrac{1}{T_1T_2}$ 于是闭环传函为：

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{1}{T_1T_2}}{(s+\frac{1}{T_1})(s+\frac{1}{T_2})}=\frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

因此过阻尼二阶系统可以看作**两个时间常数不同的惯性环节的串联**，其单位阶跃响应为

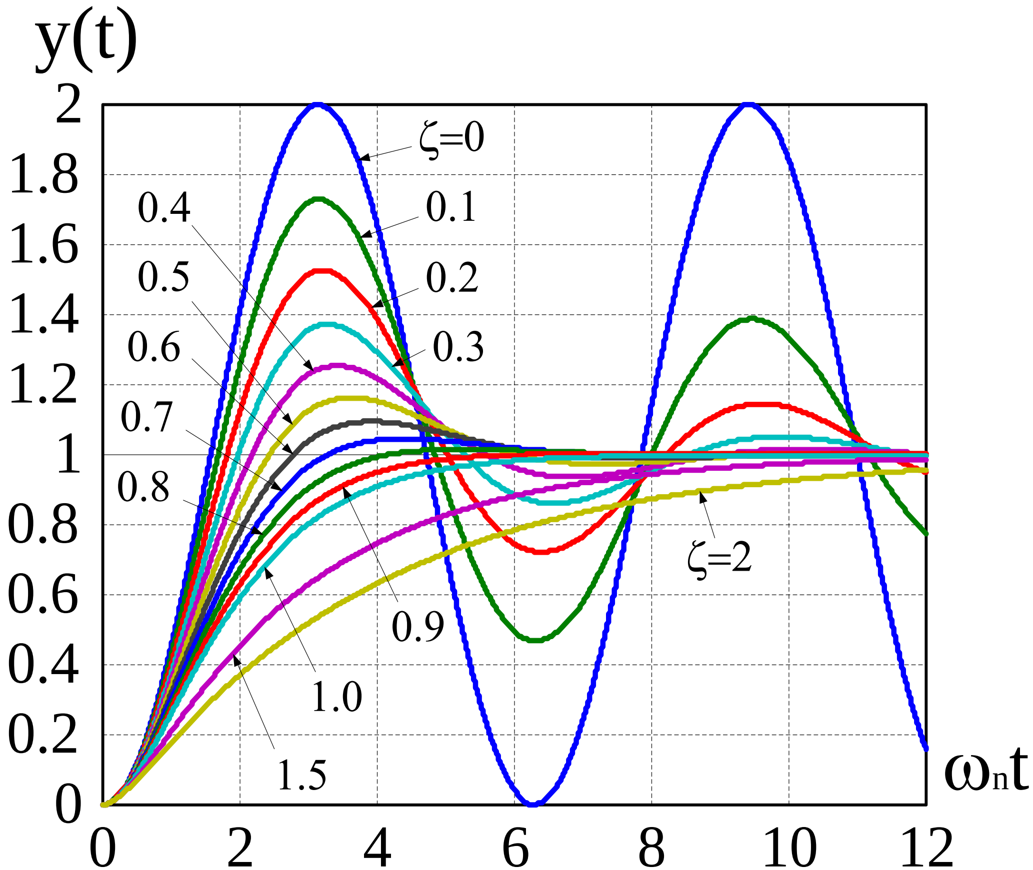
$$Y(s)=\frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}+\frac{T_1}{T_2-T_1}\frac{1}{(s+\frac{1}{T_1})}+\frac{T_2}{T_1-T_2}\frac{1}{(s+\frac{1}{T_2})}$$

$$y(t)=1+\frac{T_1}{T_2-T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}$$


y(t)
2
1
0
0
2
4
6
8
10
12
ωnt
ζ=2
1.0
1.5

上述四种情况分别称为二阶无阻尼、欠阻尼、临界阻尼和过阻尼系统。其阻尼系数、特征根、极点分布和单位阶跃响应如下表所示:

阻尼系数	特征根	极点位置	单位阶跃响应
$\zeta=0$,无阻尼	$s_{1,2}=\pm j\omega_n$	一对共轭虚根	等幅周期振荡
$o<\zeta<1$,欠阻尼	$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	一对共轭复根(左半平面)	衰减振荡
$\zeta=1$, 临界阻尼	$s_{1,2}=-\omega_n$(重根)	一对负实重根	单调上升
$\zeta>1$, 过阻尼	$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\mp\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$	两个互异负实根	单调上升



可以看出：随着ζ的增加，y(t)将从无衰减的周期运动变为有衰减的正弦运动，当$\zeta \geq 1$时y(t)呈现单调上升运动(无振荡)。可见ζ反映实际系统的阻尼情况，故称为阻尼系数。

三、典型二阶系统的性能指标及其与系统参数的关系

（一）衰减振荡瞬态过程 $(0<\zeta<1)$：

$$y(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}(\cos\omega_d t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t),\quad t\geq 0$$

1. 上升时间 t_r：根据定义，当 $t=t_r$ 时，$y(t_r)=1$。

$$y(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t_r}(\cos\omega_d t_r+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t_r)=1$$

$$\cos\omega_d t_r+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t_r=0$$

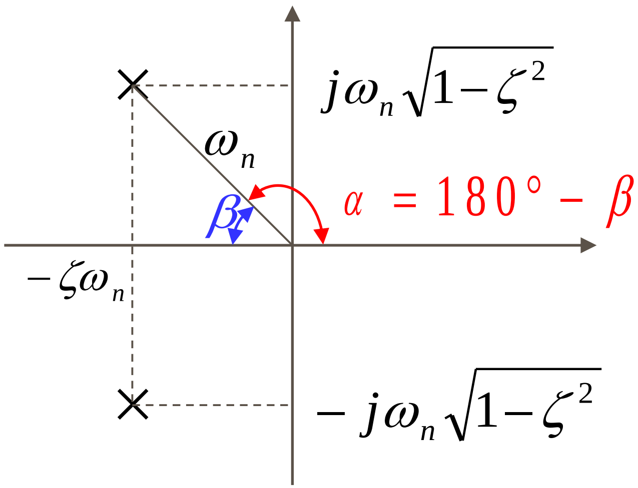
$$\mathrm{tg}\,\omega_d t_r=-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

?

解得：

$$t_r=\frac{1}{\omega_d}tg^{-1}(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} tg^{-1}\left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$



$$\alpha = tg^{-1}\left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}{-\zeta\omega_n}\right)$$

$$tg(\pi-\beta) = \frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta\omega_n} = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$tg^{-1}\left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = \pi-\beta$$

$$\therefore t_r = \frac{\pi-\beta}{\omega_d} = \frac{\pi-\beta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

β 称为阻尼角，这是由于 $\cos\beta = \zeta$ 。

2. 峰值时间t_p：当$t=t_p$时，$y'(t_p)=0$

$$y(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\beta),\quad t\geq 0$$

其中 $\beta=tg^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

$$y'(t)=-\frac{-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t_p+\beta)-\frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\omega_d\cdot\cos(\omega_d t_p+\beta)=0$$

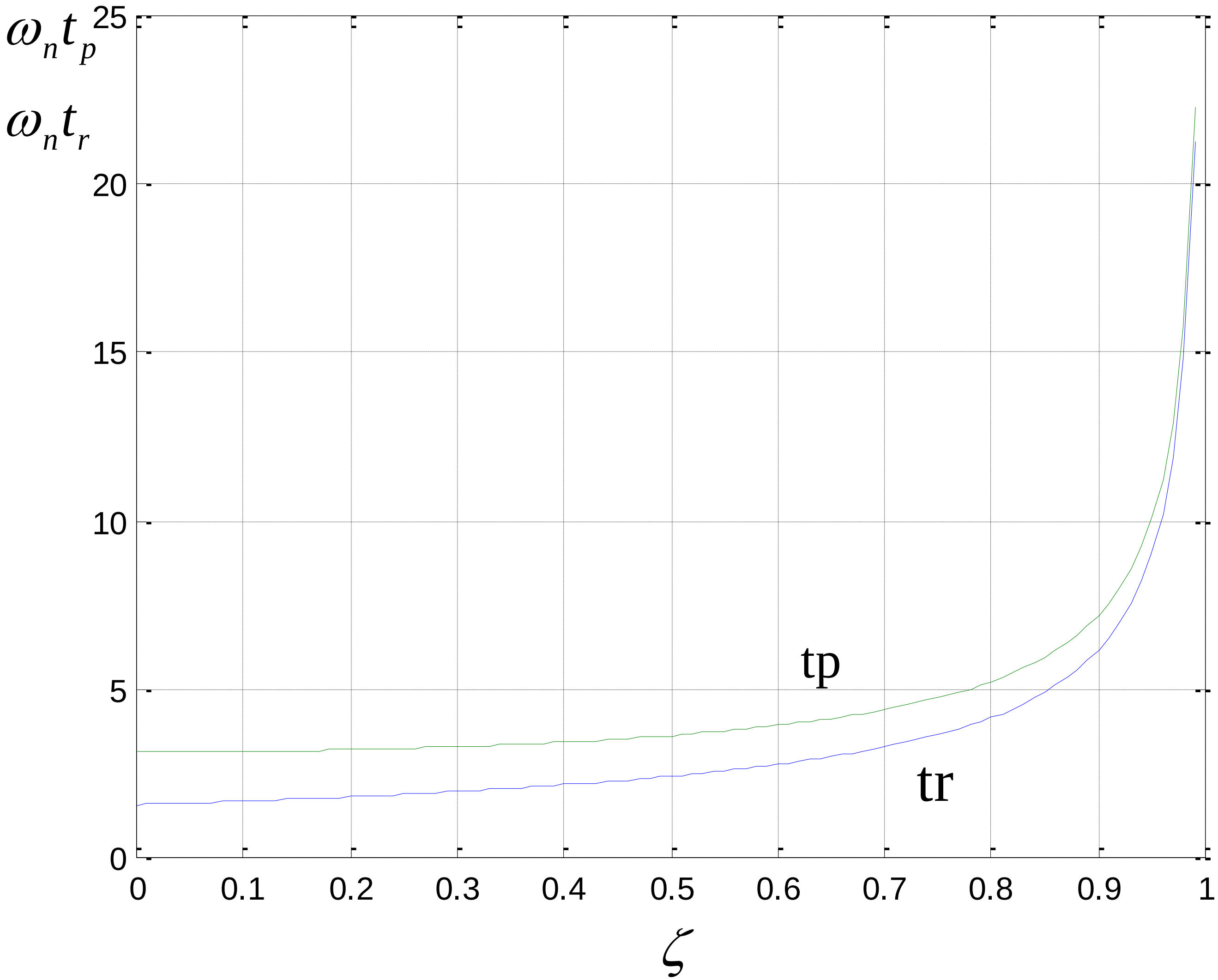
$$\zeta\omega_n\sin(\omega_d t_p+\beta)-\omega_d\cdot\cos(\omega_d t_p+\beta)=0$$

整理得：$tg(\omega_d t_p+\beta)=\dfrac{\omega_d}{\zeta\omega_n}=\dfrac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n}=\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}=tg\beta$

$$\omega_d t_p = n\pi \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

?

由于t_p出现在第一次峰值时间，取n=1，有：$t_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=\dfrac{\pi}{\omega_d}$


$\omega_n t_p$
$\omega_n t_r$
25
20
15
10
5
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
tp
tr
ζ

3. 最大超调量 $\delta\%$：

将峰值时间 $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d}$ 代入 $y(t)$得$y(t_p) = y_{\max}$

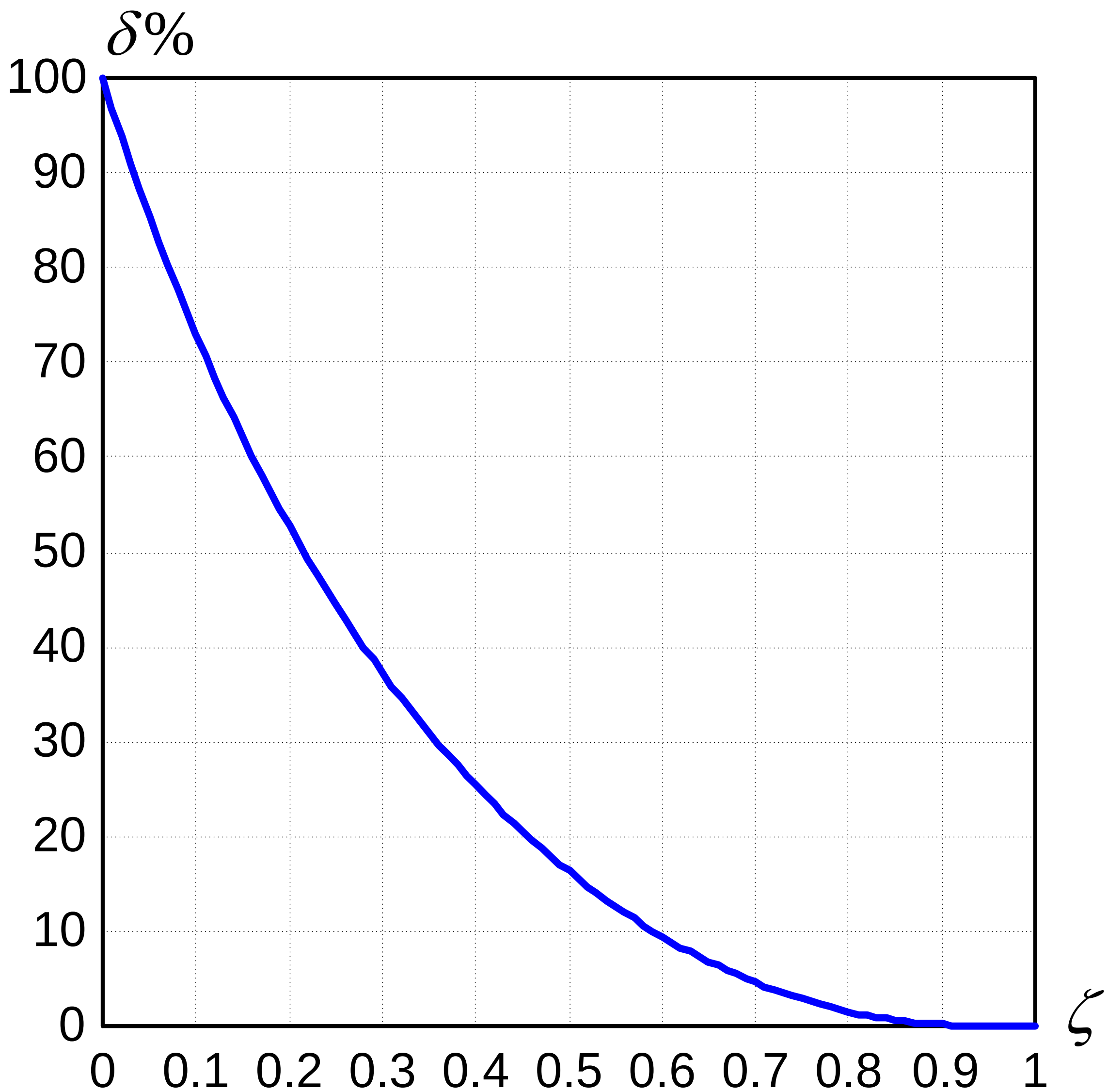
$$y_{\max} = y(t_p) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_p}(\cos\omega_d t_p + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t_p)$$

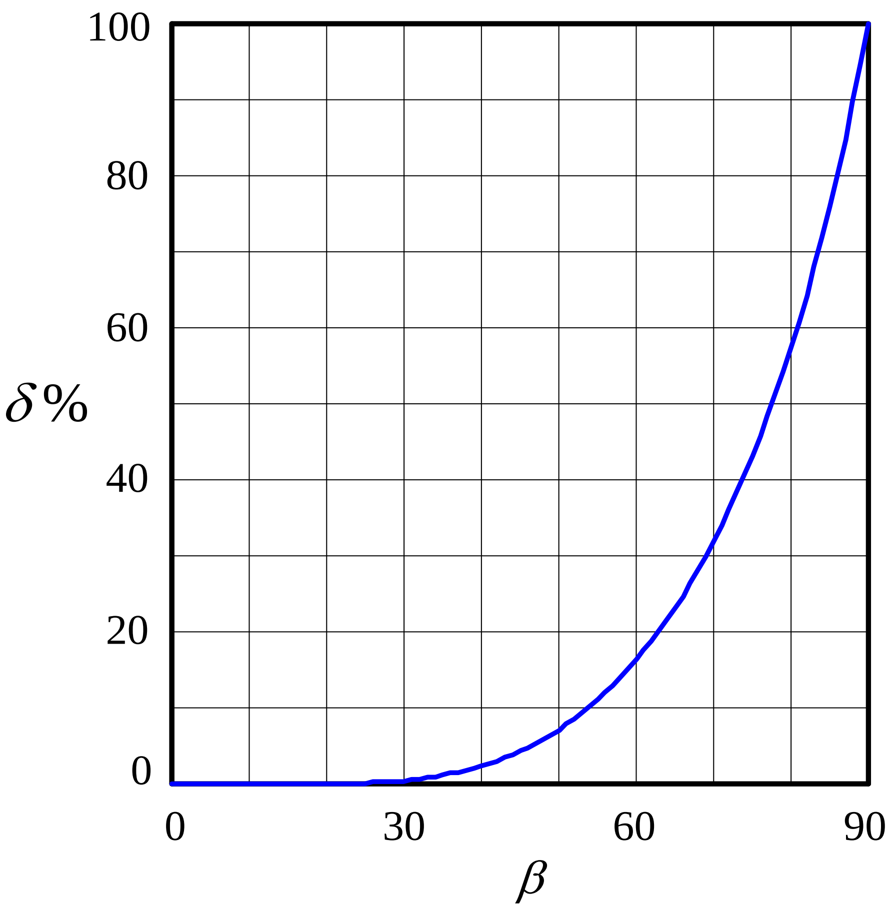
$$= 1 - e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}(\cos\pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\pi) = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

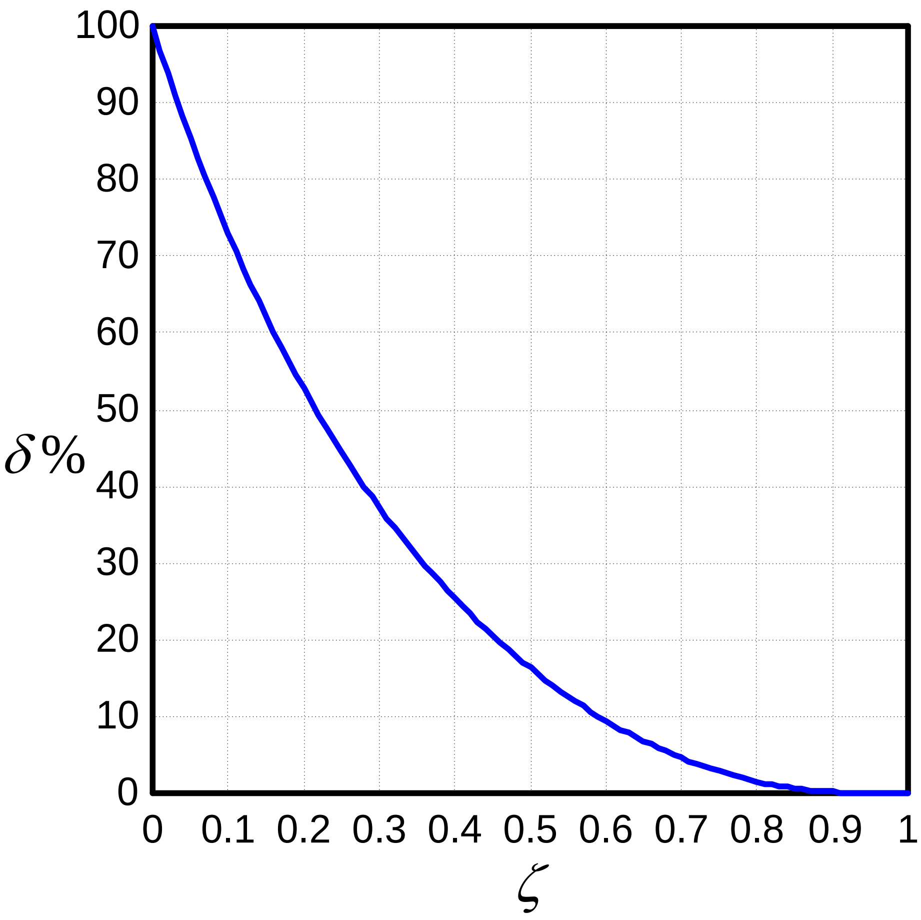
$$\delta\% = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\% = (c(t_p) - 1) \times 100\%$$

故： $\delta\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$

最大超调量仅与阻尼系数有关。


δ%
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
ζ


100
80
60
40
20
0
δ%
0
30
60
90
β


100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
δ%
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
ζ

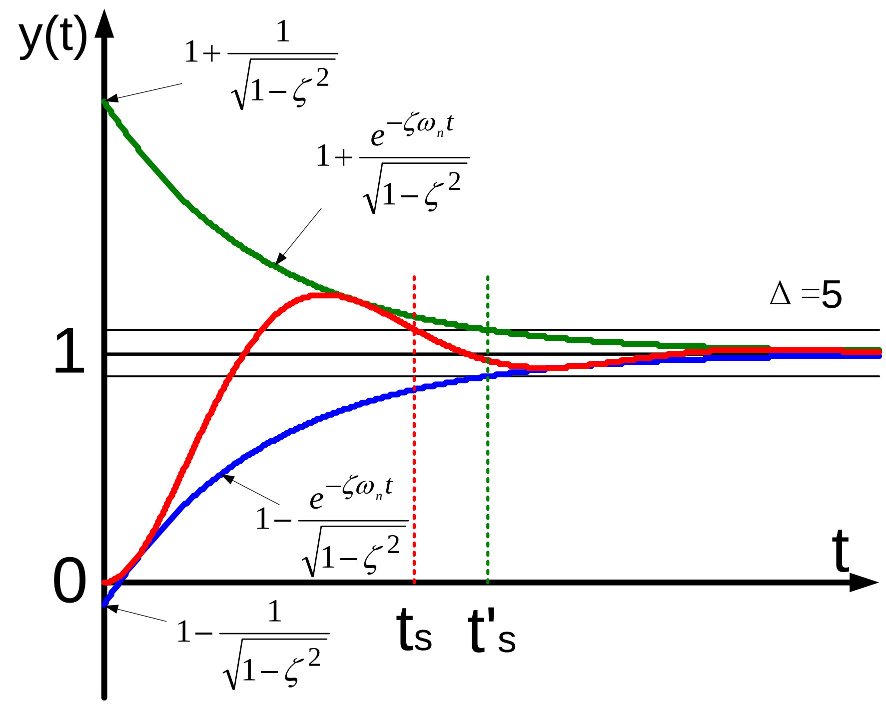
4. 调整时间 t_s：

根据调整时间的定义，当 $t \ge t_s$ 时 $|y(t)-y(\infty)| \le y(\infty)\times\Delta\%$ 。

$$\left|\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})\right| \le \Delta\%$$

包络线为

$$1\pm\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

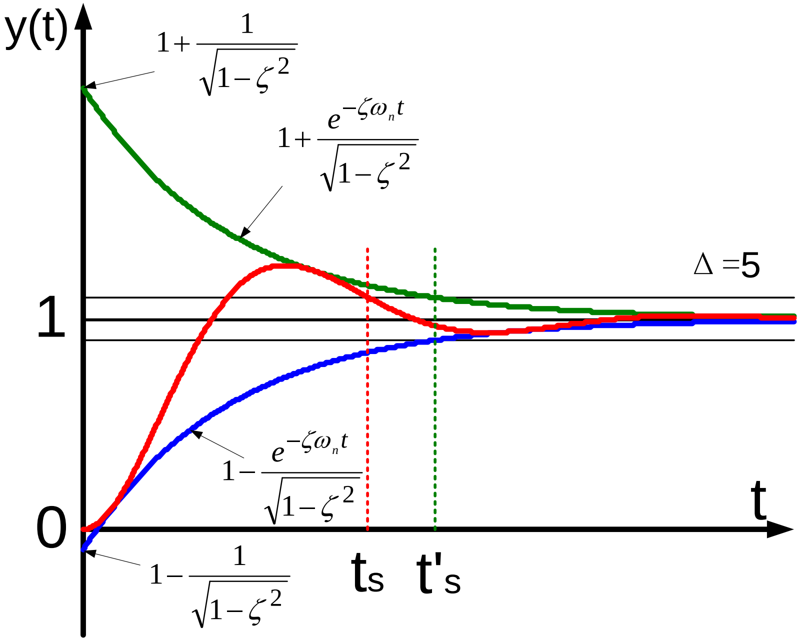


$$\left|y(t)-y(\infty)\right| \le y(\infty)\times\Delta\%$$

当$t=t'_s$时，有：

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}}=\Delta\%$$

$$t_s=-\frac{\ln(\boxed{\sqrt{1-\zeta^2}}\times\Delta\%)}{\zeta\omega_n}$$

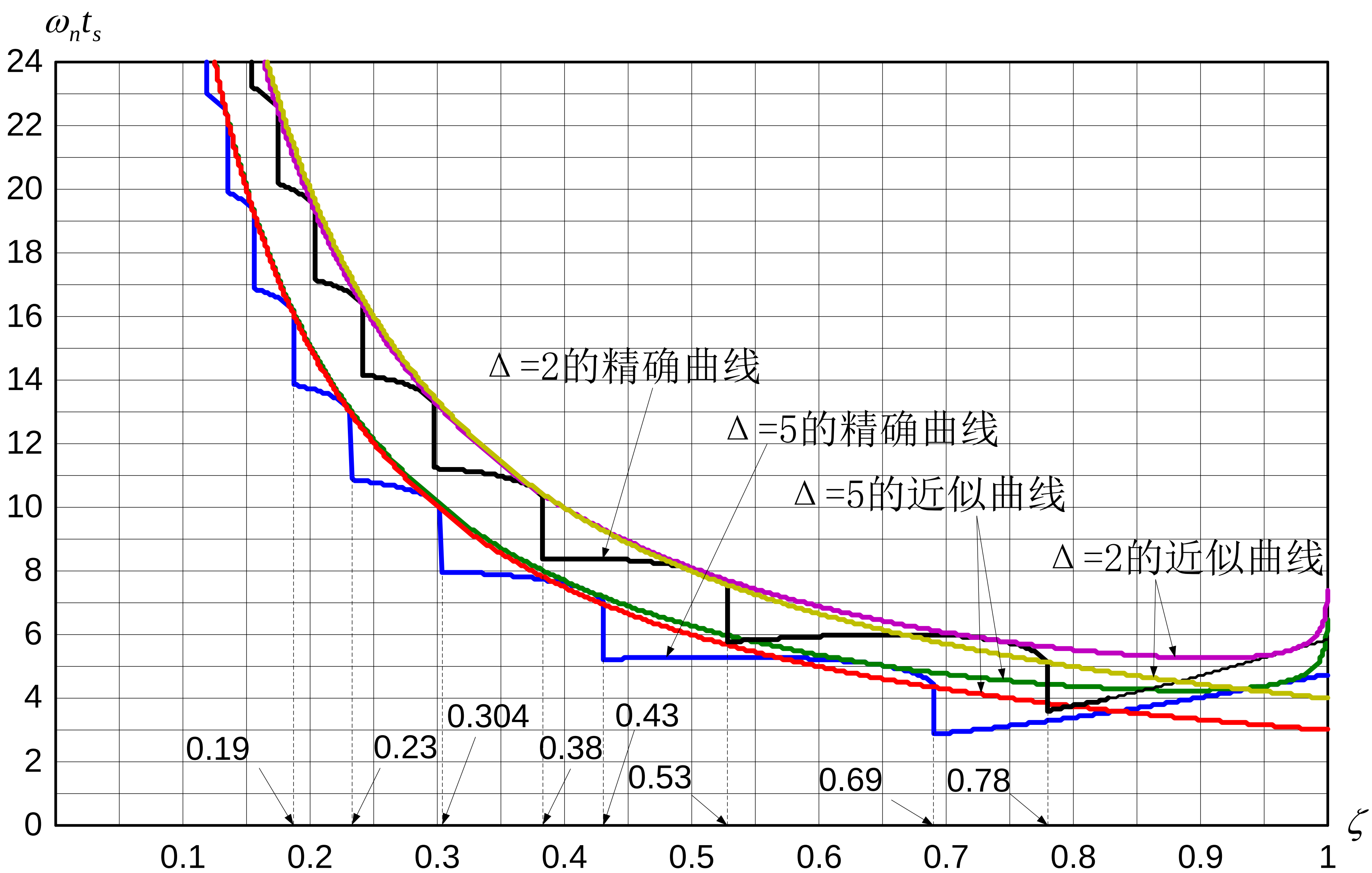


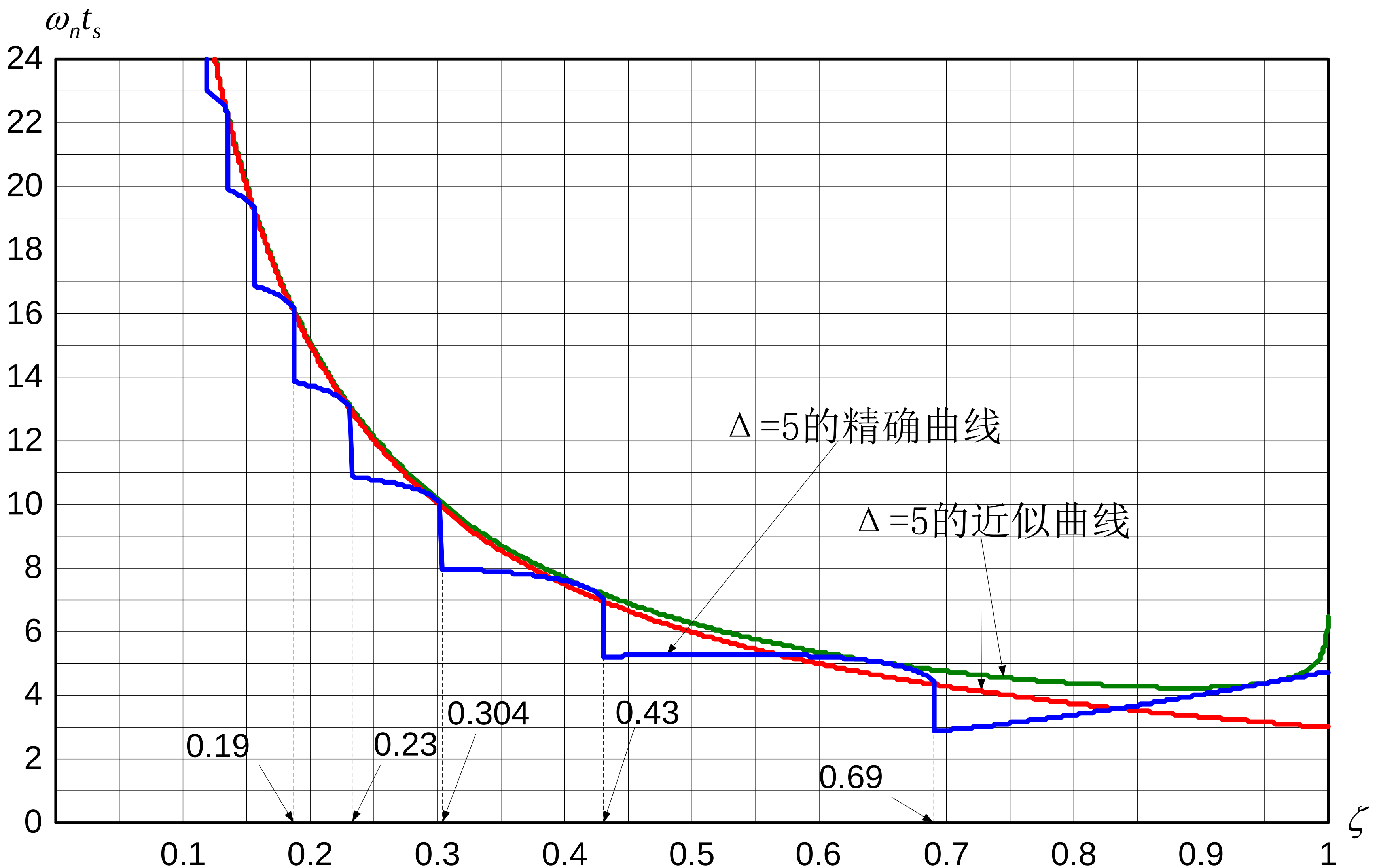
当ζ较小时，取$\sqrt{1-\zeta^2}\approx 1$

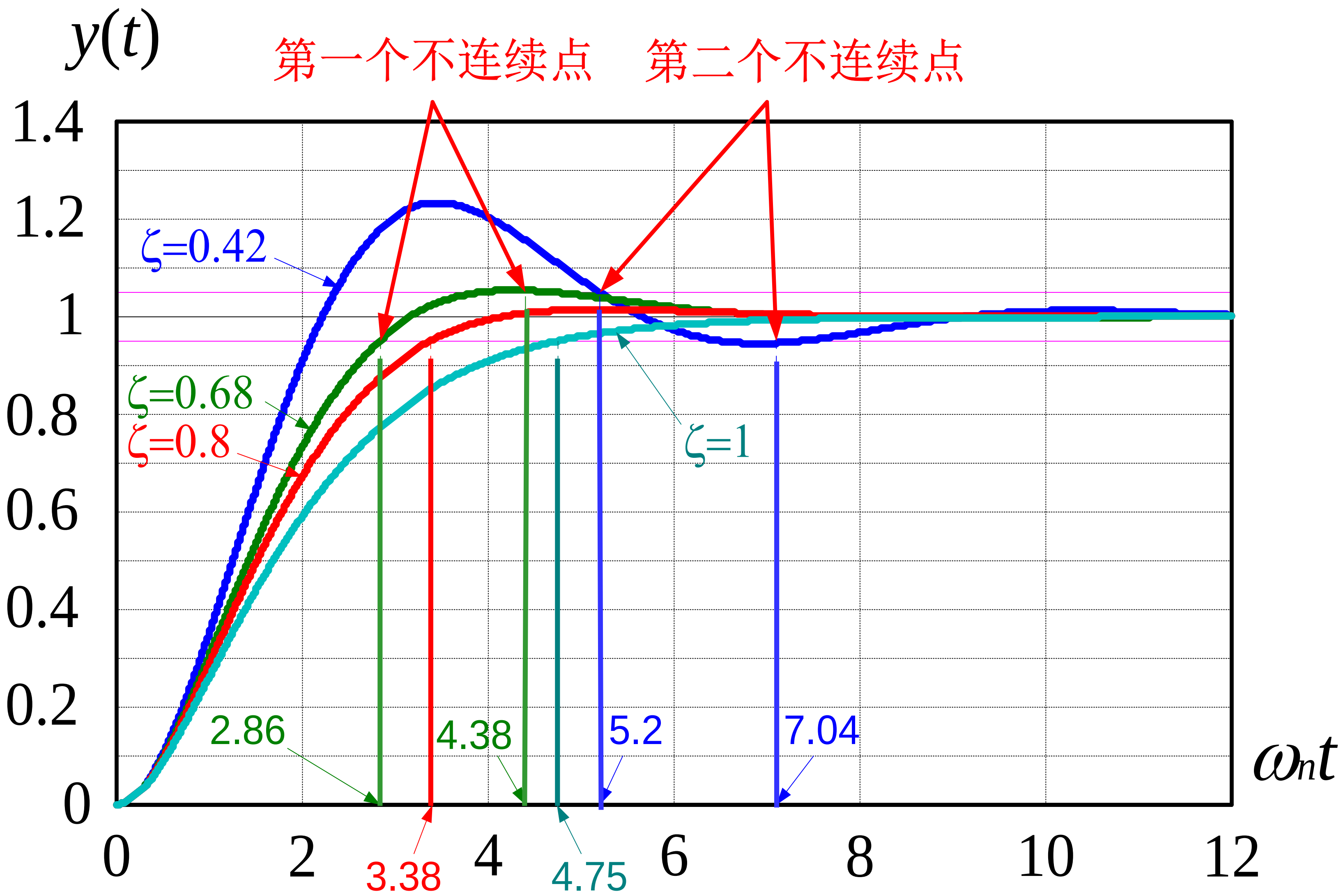
$$\ln(0.02)\approx -3.912\approx -4$$

$$\ln(0.05)\approx -2.996\approx -3$$

$$t_s\approx\begin{cases}\dfrac{4}{\zeta\omega_n}，当\Delta=2时\\[2ex]\dfrac{3}{\zeta\omega_n}，当\Delta=5时\end{cases}$$


$\omega_n t_s$
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
ζ
Δ =2的精确曲线
Δ =5的精确曲线
Δ =5的近似曲线
Δ =2的近似曲线
0.19
0.23
0.304
0.38
0.43
0.53
0.69
0.78


$\omega_n t_s$
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
ζ
Δ =5的精确曲线
Δ =5的近似曲线
0.19
0.23
0.304
0.43
0.69


y(t)
第一个不连续点
第二个不连续点
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
ζ=0.42
ζ=0.68
ζ=0.8
ζ=1
2.86
3.38
4.38
4.75
5.2
7.04
0
2
4
6
8
10
12
ωnt