



第六章 控制系统的校正



主要内容

- 校正的基本概念
- 基于伯德图的相位超前、滞后、滞后-超前校正
- 基于根轨迹的相位超前、滞后、滞后-超前校正
- PID控制器设计



一、系统分析、设计与校正的概念

在给出系统的结构和参数的基础上分析系统的性能，这个过程称为**系统分析**。

如果已知控制对象以及控制系统的所要达到的性能指标，要求设计一个系统达到这些指标，这个过程称为**系统设计**。

设计控制系统的目的，是将构成控制器的各元件与被控对象适当组合起来，使之满足表征控制精度、相对稳定性和响应速度的性能指标要求。

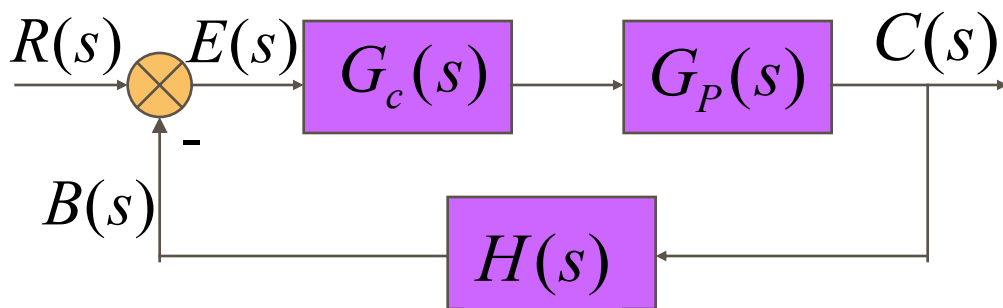
若通过调整控制系统本身的参数（包括放大器增益）不能全面满足设计要求的性能指标，则需在系统中增加一些参数及特性可按需改变的装置，使系统性能全面满足设计要求，这就是控制系统设计中的**校正问题**。相应的校正装置也称为补偿器。



二、校正方式

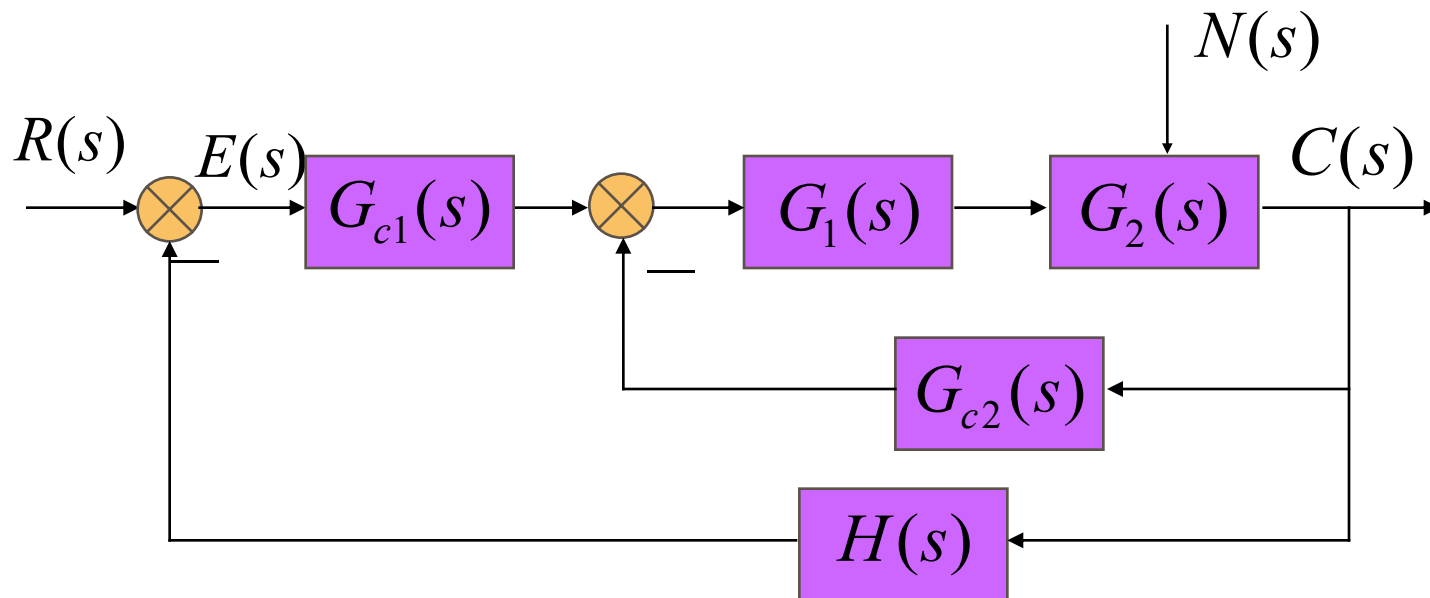
按照校正装置在系统中的连接方式，控制系统校正方式可分为串联校正、并联校正、前馈校正和复合校正四种。

1. 串联校正装置一般串联于系统前向通道中系统误差检测点之后和放大器之前。



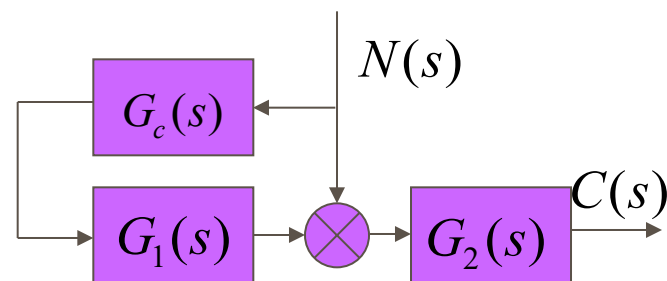
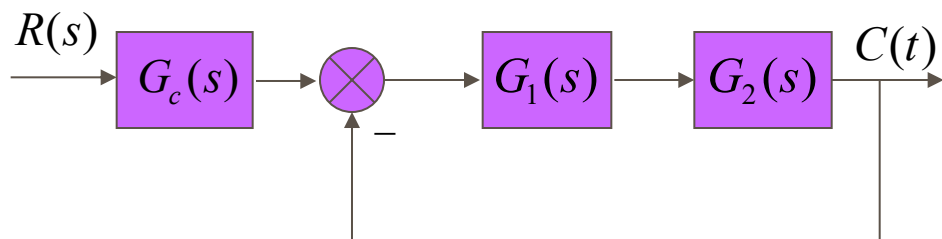


2. 并联校正装置接在系统局部反馈通道之中，并联校正也称为反馈校正。



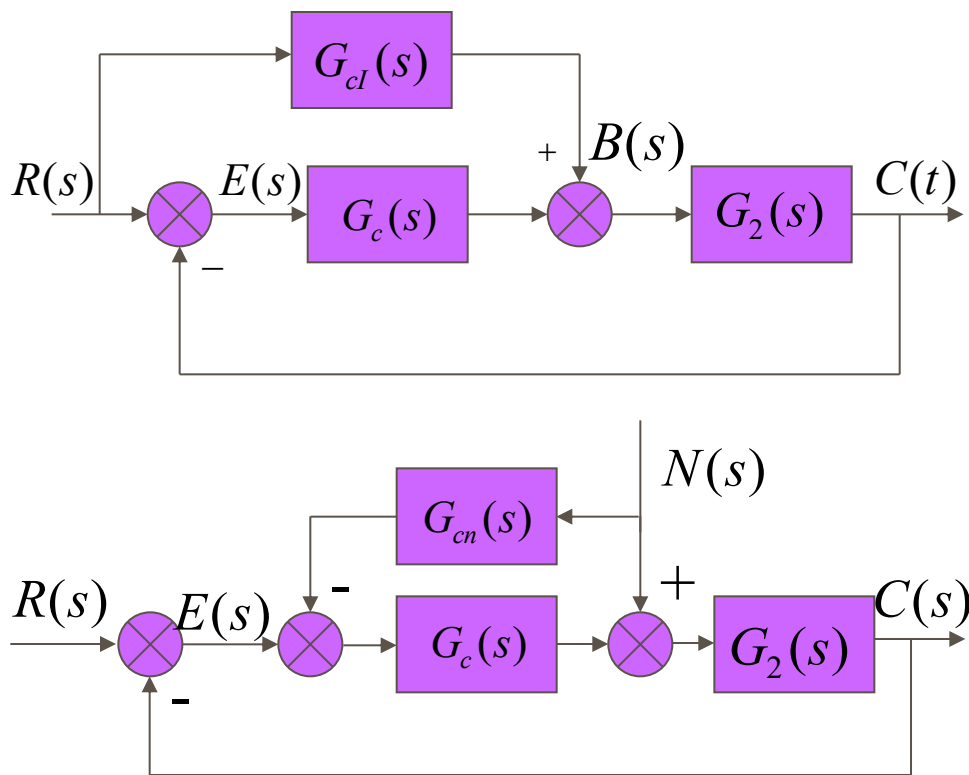


3. 前馈校正又称顺馈校正，是在系统主反馈回路之外采用的校正方式。





4. 复合校正是在系统反馈回路中加入前馈校正通路，组成一个有机整体。





三、设计方法

1. 基于根轨迹的设计法：若给出时域指标如 $\delta\%$ ， t_r ， t_s 等，或闭环主导极点时采用。
2. 基于频率的设计法：若给出稳态误差要求和频域指标时采用
3. 状态反馈法

本章主要介绍基于伯德图的单输入-单输出的线性定常控制系统的设计和校正的方法和步骤。



第一节 相位超前校正



一、相位超前校正装置

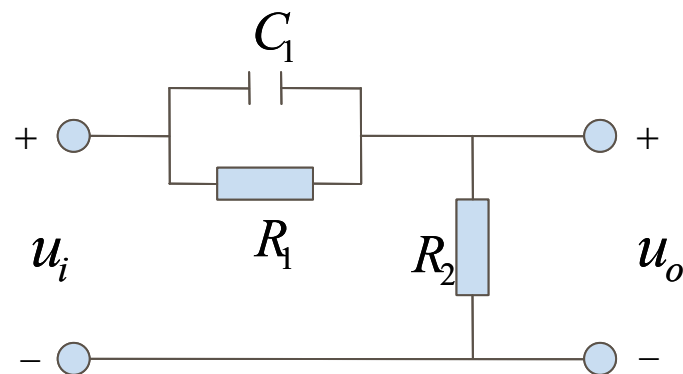
无源超前校正网络：

$$G_c(s) = \frac{u_o}{u_i} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{Cs + \frac{1}{R_1}}}$$

$$= \frac{R_2 + R_1 R_2 Cs}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 Cs} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + R_1 Cs}{1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} Cs}$$

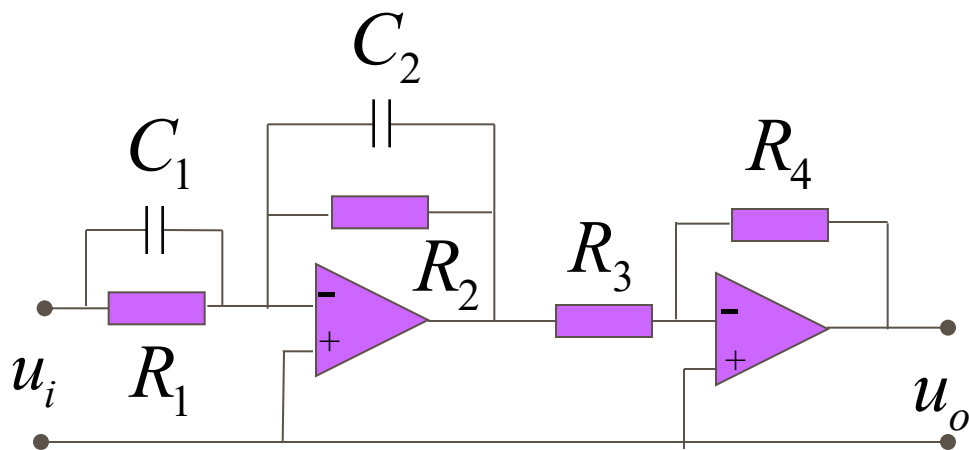
$$= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + \frac{R_1 + R_2}{R_2} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} Cs}{1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} Cs}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} \quad \text{其中: } T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C, \quad \alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \quad \alpha > 1$$





有源超前校正网络：



$$G_c(s) = \frac{u_o}{u_i} = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}}$$
$$= \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1}$$

当 $R_1 C_1 > R_2 C_2$ 超前校正网络

当 $R_1 C_1 < R_2 C_2$ 滞后校正网络



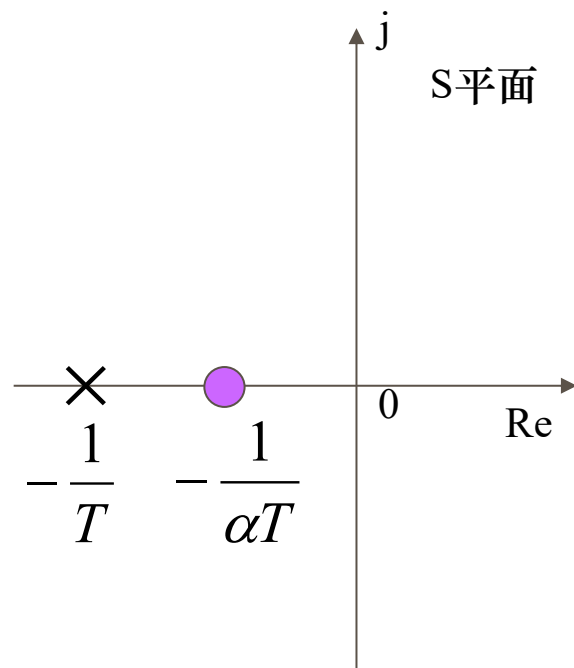
二、相位超前校正网络的特性

附加一个增益为 α 的放大器后，相位超前校正网络的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}, \quad \alpha > 1$$

1. 零极点分布图

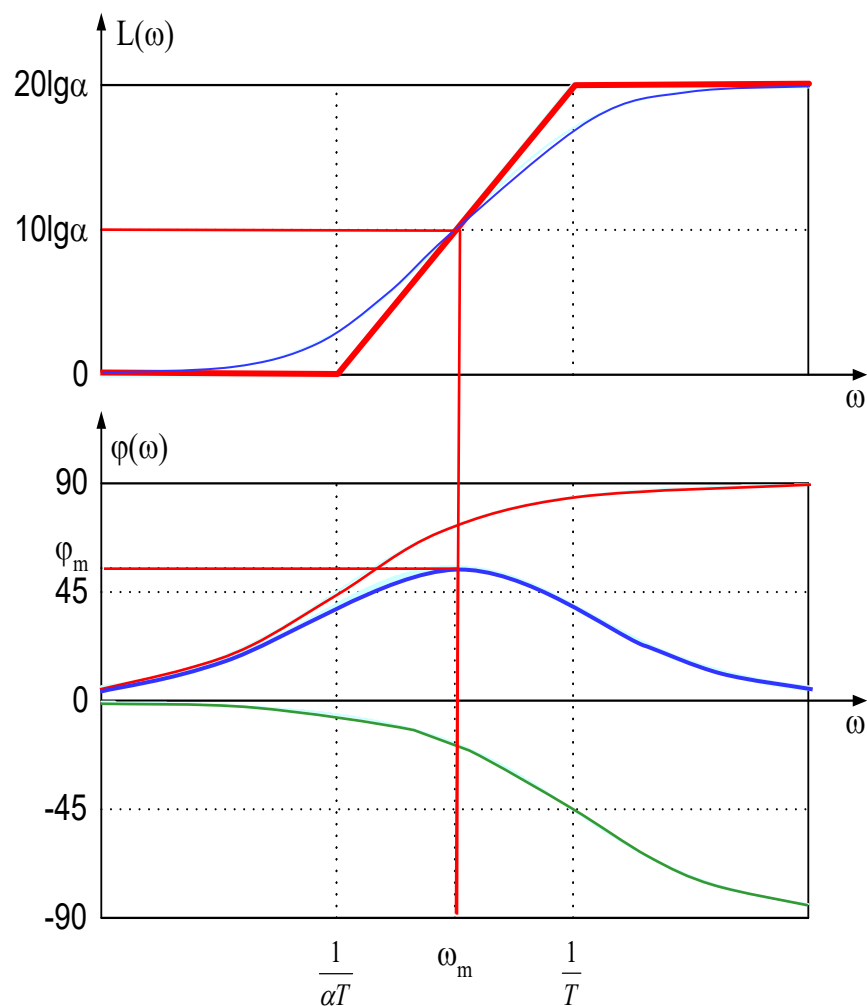
在复平面上，该环节零点总是在极点的右面。由于零点较极点更接近原点，对输入信号具有明显的微分作用。故相位超前校正也称为微分校正。





2. Bode图

$$G_c(s) = \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}, \quad \alpha > 1$$



$$L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + (\alpha T \omega)^2} - 20 \lg \sqrt{1 + (T \omega)^2}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \alpha T \omega - \operatorname{tg}^{-1} T \omega$$

频率特性的主要特点是：

所有频率下相频特性为正值，且在频率 $\omega = \omega_m$ 处相频特性 $\varphi(\omega)$ 存在最大相位超前量 φ_m 。

φ_m 发生在对数刻度的 ω 坐标中 $1/T$ 与 $1/(\alpha T)$ 的几何中点。



① 求 ω_m

$$\text{令 } \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0, \text{ 可得 } \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{\alpha T}{1 + (\alpha T\omega)^2} - \frac{T}{1 + (T\omega)^2} = 0$$

$$\text{化简得: } \alpha + \alpha(T\omega)^2 = 1 + (\alpha T\omega)^2 \Rightarrow \alpha(1 - \alpha)T^2\omega^2 = 1 - \alpha$$

$$\text{解得: } \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}$$

由Bode图知： φ_m 发生在对数刻度的 ω 坐标中 $1/T$ 与 $1/(\alpha T)$ 的几何中点。所以求 ω_m 的另一种方法是：

$$\lg \omega_m = \frac{1}{2} \left(\lg \frac{1}{T} + \lg \frac{1}{\alpha T} \right) = \lg \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}$$

$$\therefore \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}$$



② 求最大相位超前量 φ_m

将 ω_m 代入相频特性有

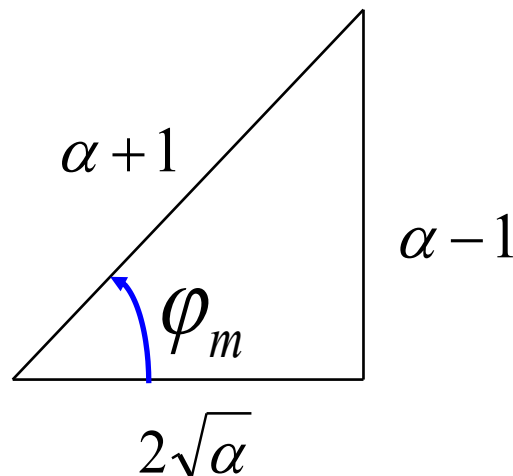
$$\varphi_m = \left[\operatorname{tg}^{-1} \alpha T \omega - \operatorname{tg}^{-1} T \omega \right]_{\omega = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T}} = \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\alpha} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}}$$

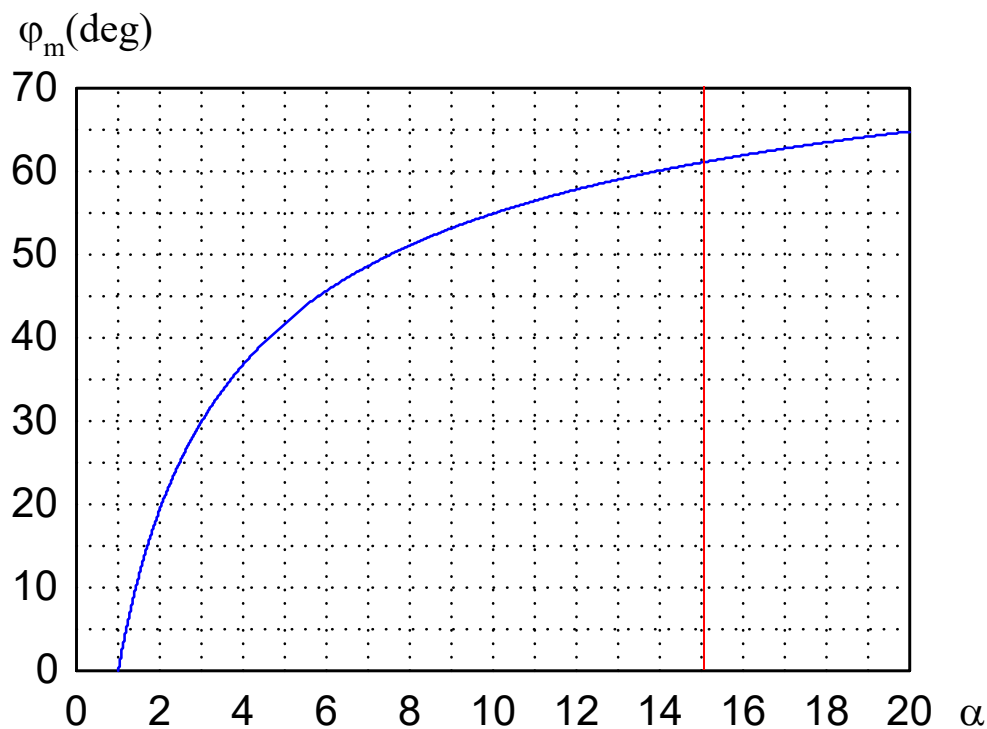
$$\operatorname{tg} \varphi_m = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}}$$

利用三角函数关系可得

$$\sin \varphi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

$$\varphi_m = \sin^{-1} \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$





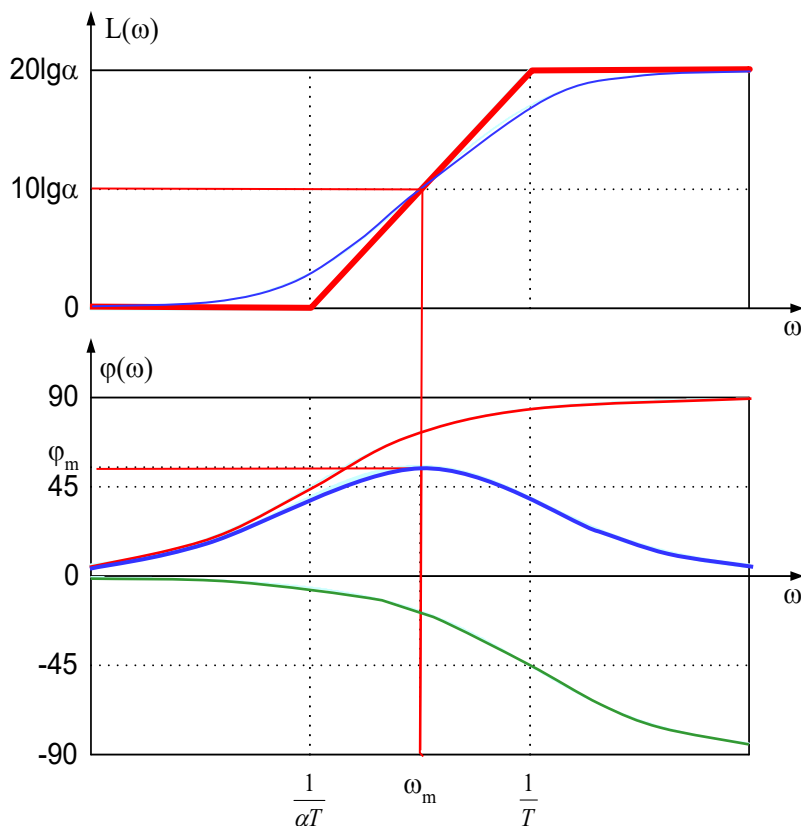
由图可见： φ_m 随 α 增大而增大，当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时 $\varphi_m \rightarrow 90^\circ$ ，但当 $\alpha > 15$ 以后随 α 增大 φ_m 增大缓慢。故很少取 $\alpha > 15$ 。

$$\sin \varphi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}$$

即只要知道需要提供多大的 φ_m 就可确定参数 α 值。



③ 对应 ω_m 的幅值 $L(\omega_m)$

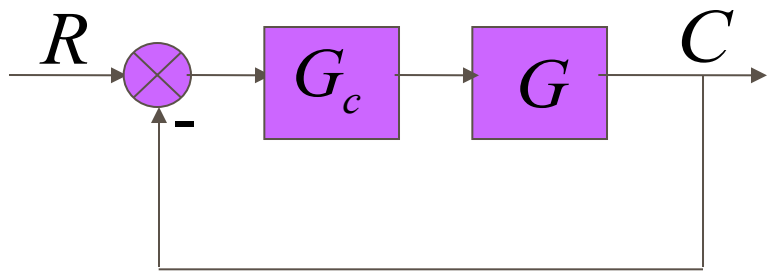


将 ω_m 代入对数幅频特性有

$$\begin{aligned} L(\omega_m) &= 20\lg\sqrt{1 + (\alpha T\omega_m)^2} - 20\lg\sqrt{1 + (T\omega_m)^2} \\ &= 20\lg\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 T^2}{\alpha T^2}} - 20\lg\sqrt{1 + \frac{T^2}{\alpha T^2}} \\ &= 20\lg\sqrt{\frac{(1 + \alpha)\alpha}{1 + \alpha}} \\ &= 20\lg\sqrt{\alpha} = 10\lg\alpha \end{aligned}$$



三、基于伯德图的相位超前校正



图中， G_c 为校正装置， G 为对象。

基于伯德图设计超前校正装置的步骤如下：

- ① 求出满足稳态性能指标的开环增益 K 值；
- ② 根据求出的 K 值，画出校正前的Bode图，确定此时的幅值穿越频率 ω_{c1} 和相位裕量 γ_1 ；



- ③ 求出为了满足系统对相位裕量的要求，需要相位超前网络提供的最大相位超前量

$$\varphi_m = \gamma_0 - \gamma_1 + (5^\circ \sim 10^\circ)$$

γ_0 为系统期望的相角裕量

γ_1 未校正系统的相角裕量

- ④ 根据 $\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}$ ，由 φ_m 求出 α 值

- ⑤ 决定校正系统的幅值穿越频率 ω_{c2} 。为了最大限度利用相位超前网络的相位超前量， ω_{c2} 应与 ω_m 相重合。

$$L(\omega_m) = 10 \lg \alpha$$

所以 ω_{c2} 应选在未校正系统的 $L(\omega) = -10 \lg \alpha$ 处。



⑥ 当 $\omega_{c2} = \omega_m$ 时，由

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T} \quad \longrightarrow \quad T = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\omega_m} \quad \longrightarrow \quad G_c(s) = \frac{1}{\alpha} \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}$$

- ⑦ 在系统中把原放大器增益增大 α 倍，或插入一个增益为 α 的放大器。
- ⑧ 画出校正后的Bode图，确定此时的幅值穿越频率 ω_{c2} 和相位裕量 γ_2 ，校验系统的性能指标。一定要校验，不满足重做。
- ⑨ 求出网络参数。这步在实现中是必不可少的，但电路参数的选择有很多技巧，如不特别申明，可省略不做。



[例]已知一单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{2500K_g}{s(s+25)}$ 。
试设计一个相位超前校正装置满足：

(1)相位裕量大于 45° ；

(2)对单位速度函数输入，输出的稳态误差小于或等于 0.01rad 。

[解]：① 对I型系统 $e_{ss}=R/K_v$ ，现 $R=1$

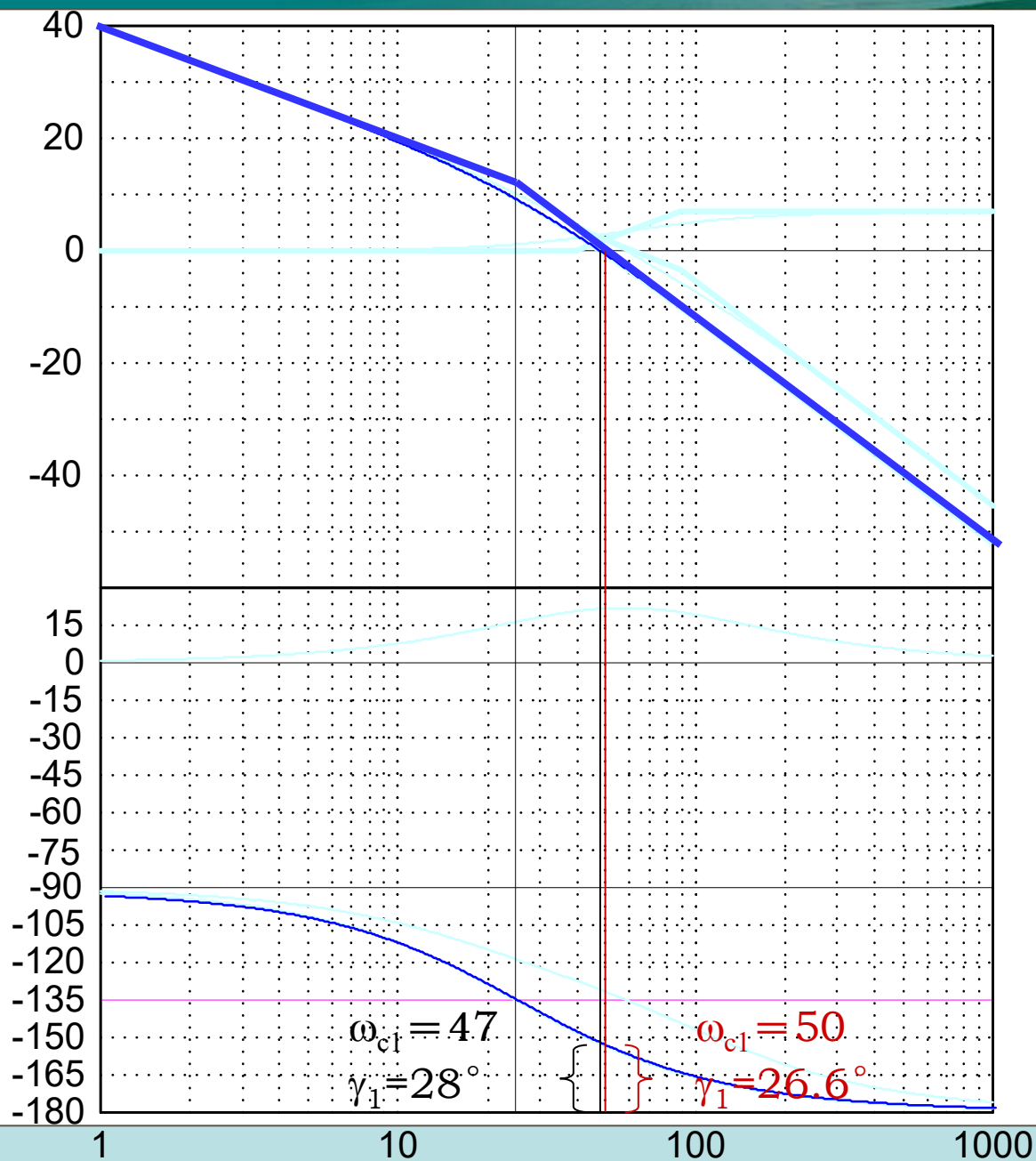
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_k(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2500K_g}{s(s+25)} = 100K_g$$

要求 $e_{ss} = \frac{1}{100K_g} \leq 0.01$ ，即 $K_g \geq 1$ 取 $K_g = 1$

$$G(j\omega) = \frac{100}{j\omega(1+0.04\omega j)}$$



② 画出 $K_g=1$
时未校正系统
Bode图，确定
此时的 ω_{c1} 和 γ 。



用解析的方法确定校正前的 ω_{c1} 和 γ 。

$$L(\omega) = 20\lg 100 - 20\lg \omega - 20\lg \sqrt{1 + (0.04\omega)^2}$$

$$\text{令 } L(\omega)=0 \quad L(\omega) = 20\lg \frac{100}{\omega \sqrt{1 + (0.04\omega)^2}} = 0$$

$$\omega^2 [1 + (0.04\omega)^2] = 10000 \quad \omega^4 + 625\omega^2 = 6250000$$

$$\omega^2 = \frac{-625 + \sqrt{625^2 + 6250000 \times 4}}{2} = 2206.955546$$

$$\omega_{c1} \approx 47 \quad \varphi(\omega_{c1}) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} 0.04\omega_{c1} = -152^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_{c1}) = 180^\circ - 90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} 0.04\omega_{c1} = 28^\circ$$



③求出需要相位超前网络提供的最大相位超前量 φ_m 。

$$\varphi_m = \gamma_0 - \gamma_1 + (5^\circ \sim 10^\circ) = 45^\circ - 28^\circ + 5^\circ = 22^\circ$$

这里考虑原系统相频特性在 ω_{c1} 附近较平坦，所以只加 5° 。

④ 由
$$\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} = 2.2$$

⑤ 决定校正系统的幅值穿越频率 ω_{c2} 。

$$L(\omega_{c2}) = 20\lg 100 - 20\lg \omega \sqrt{1 + (0.04\omega)^2} = -10\lg \alpha$$

$$20\lg \frac{100\sqrt{\alpha}}{\omega \sqrt{1 + (0.04\omega)^2}} = 0 \quad \omega^4 + 625\omega^2 - 6250000 \times \alpha = 0$$

$$\omega^2 = 3408.743912 \quad \omega_m = \omega_{c2} \approx 58$$



⑥ 当 $\omega_{c2} = \omega_m$ 时, 由 $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}$ \rightarrow

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha \omega_m}} = \frac{1}{\sqrt{2.2 \times 58}} \approx \frac{1}{86} \approx 0.01162 \quad \alpha T \approx 0.02557 \approx \frac{1}{39}$$

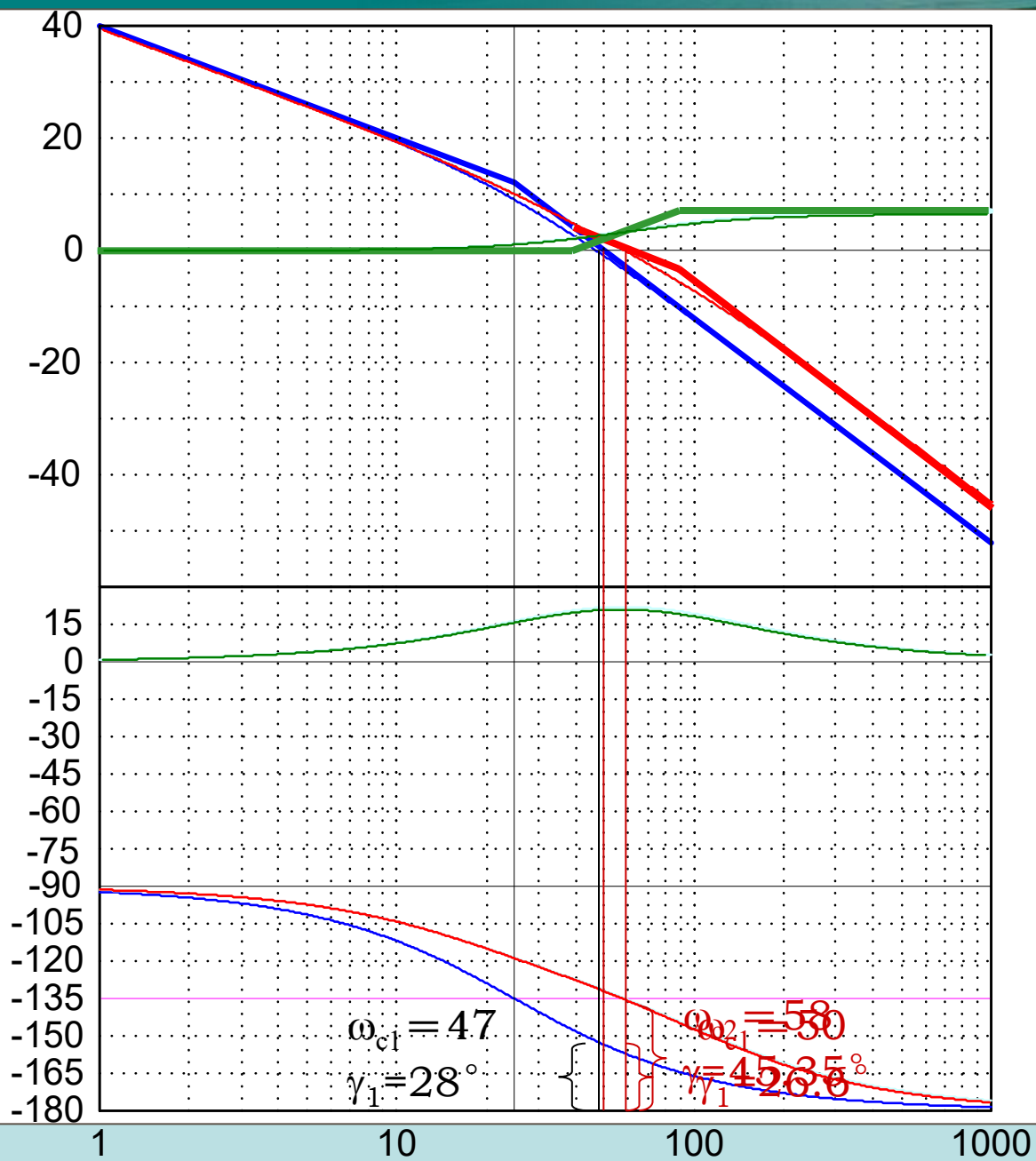
$$\rightarrow G_c(s) = \frac{1}{\alpha} \frac{1 + \alpha T s}{1 + T s} = \frac{1}{2.2} \frac{1 + 0.02557s}{1 + 0.01162s} = \frac{s + 39}{s + 86}$$

⑦ 在系统中把原放大器增益增大2.2倍, 或插入一个增益为2.2的放大器。

⑧ 画出校正后的Bode图, 确定此时的幅值穿越频率 ω_{c2} 和相位裕量 γ_2 , 校验系统的性能指标。

$$G(s) = \frac{100(1 + 0.02557s)}{s(1 + 0.04s)(1 + 0.01162s)} = \frac{2500 \times 2.2(s + 39)}{s(s + 25)(s + 86)}$$

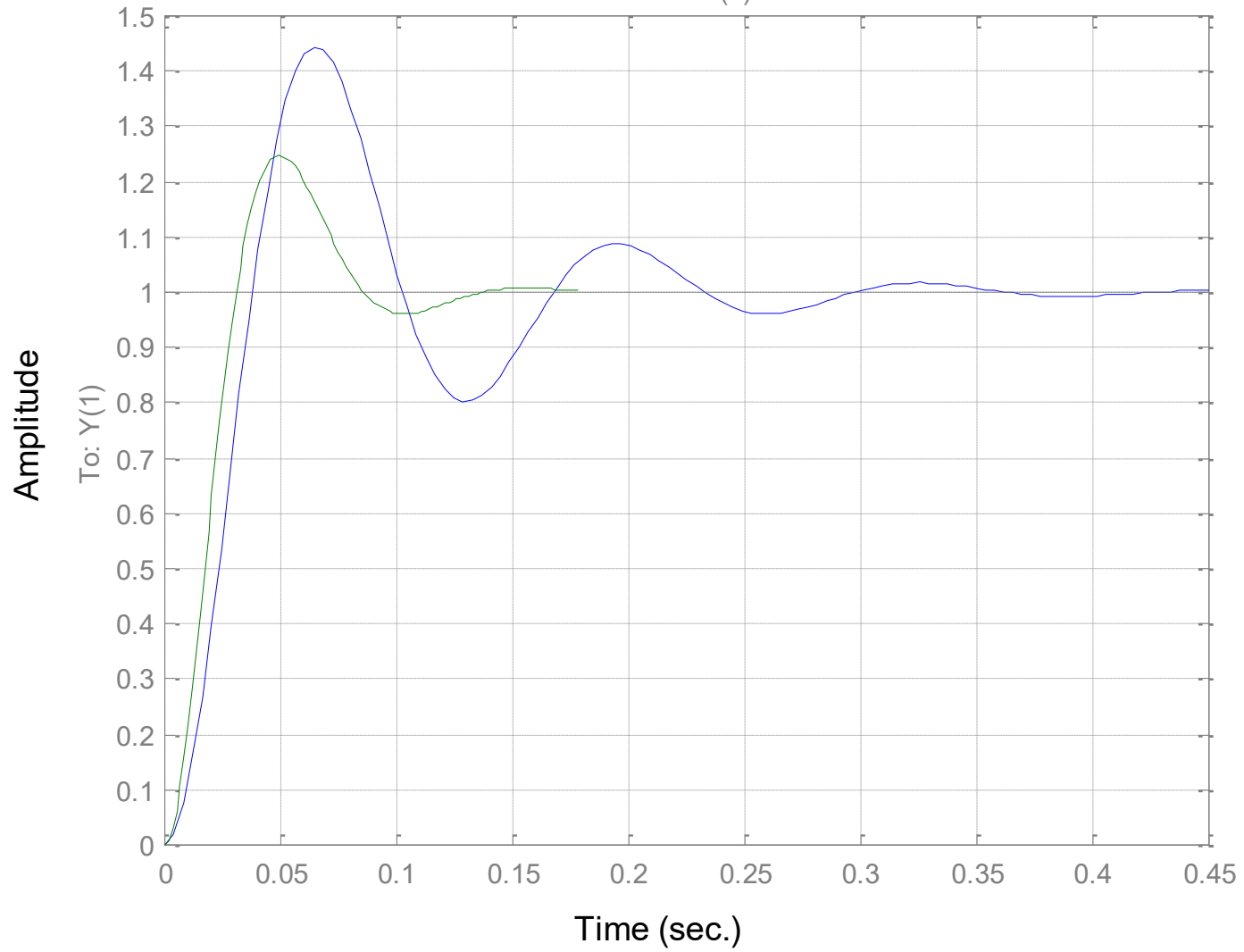
$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} 0.04 \omega_{c2} - \operatorname{tg}^{-1} 0.01162 \omega_{c2} + \operatorname{tg}^{-1} 0.02557 \omega_{c2} = 45.35^\circ$$

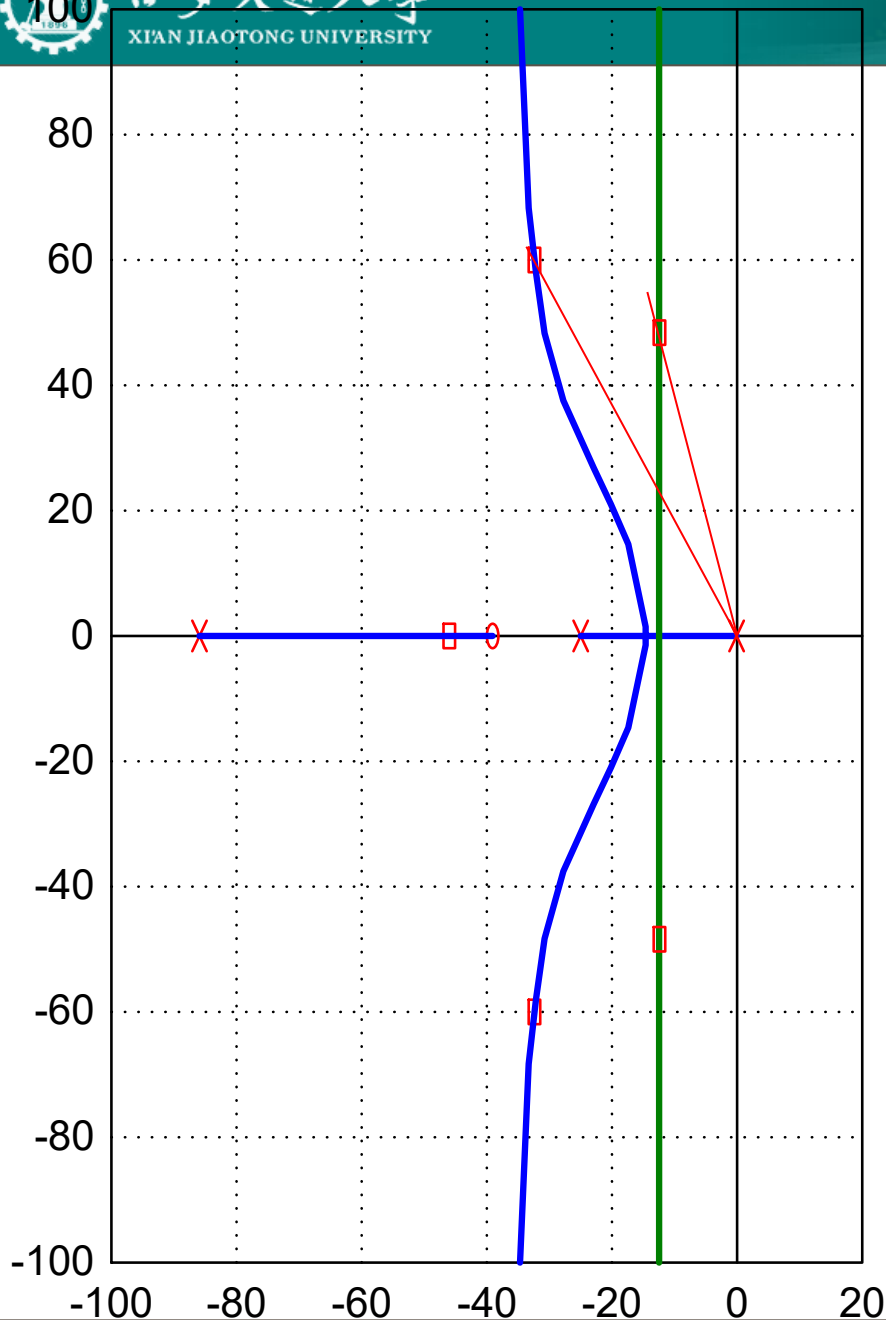




Step Response

From: U(1)





校正前闭环极点为

$$s_{1,2} = -12.5 \pm 48.4j, \\ \zeta = 0.25$$

校正后闭环极点为

$$s_{1,2} = -32.4815 \pm 60.0354j, \\ s_3 = -46.037, \\ \zeta = 0.476$$



四、相位超前校正对系统的影响和限制

1. 影响：

- ① 从Bode图看系统的幅值穿越频率 ω_c 增加了；
- ② 幅频特性在 ω_c 附近的斜率减小了，即曲线平坦了；
- ③ 改善了系统的相位裕量 γ ，提高了系统的相对稳定性；
- ④ 减小了系统的最大超调量及上升时间，调节时间等；
- ⑤ 对系统的稳态误差没有影响。



2. 限制:

- ① 若在 ω_c 处的对数幅频特性具有一个陡的负斜率(如斜率为 -60dB/dec), 采用相位超前校正一般无效(可用多个相位超前校正)。
- ② 若在 ω_c 附近相频特性衰减很快(一般具有纯时间延迟环节或震荡环节), 采用相位超前校正一般无效(或效果不好);
- ③ 若所希望的带宽是比原来未校正系统的窄, 则不能采用相位超前校正