

第3章 自动控制系统的时域分析

- 3.1 典型输入信号和时域性能指标
- 3.2 一阶系统的瞬态响应
- 3.3 二阶系统的瞬态响应
- 3.4 高阶系统分析
- 3.5 稳定性和代数稳定判据
- 3.6 稳态误差分析

3.1 典型输入信号和时域性能指标

选取测试信号时必须考虑的原则：

- 选取的输入信号的典型形式应反映系统工作时的大部分实际情况。
- 选取外加输入信号的形式应尽可能简单，易于在实验室获得，以便于理论分析和实验研究。
- 应选取那些能使系统工作在最不利情况下的输入信号作为典型的测试信号。

一、典型输入信号

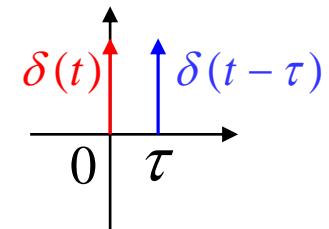
1. 脉冲函数：

1) 理想单位脉冲函数

[定义]: $\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$, 且 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$, 其积分面积为1。

其拉氏变换后的像函数为:

$$L[\delta(t)] = 1$$



2) 出现在 $t = \tau$ 时刻, 积分面积为A的理想脉冲函数定义

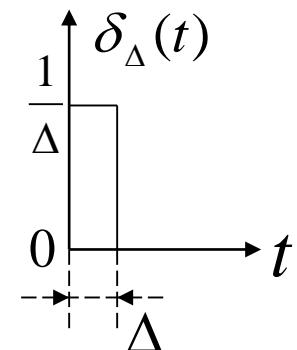
$$A\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0, t \neq \tau \\ \infty, t = \tau \end{cases} \quad \text{且} \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t - \tau) dt = A$$

3) 实际单位脉冲函数:

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ 和 } t > \Delta \\ \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \end{cases}$$

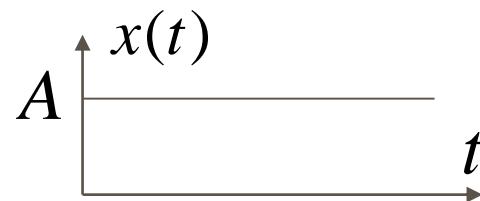
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\Delta}(t) dt = \Delta \times \frac{1}{\Delta} = 1$$

当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, $\delta_{\Delta}(t) = \delta(t)$



2. 阶跃函数:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & t \geq 0 \end{cases}$$



A为阶跃幅度, A=1称为单位阶跃函数, 记为1(t)。

其拉氏变换后的像函数为:

$$L[x(t)] = \frac{A}{s}$$

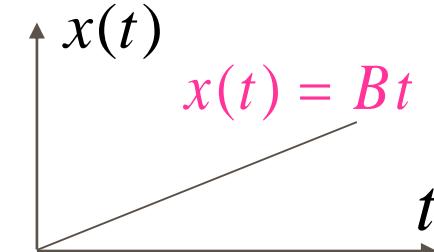
3. 斜坡函数 (速度阶跃函数) :

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Bt & t \geq 0 \end{cases}$$

$B=1$ 时称为单位斜坡函数。

其拉氏变换后的像函数为:

$$L[x(t)] = \frac{B}{s^2}$$



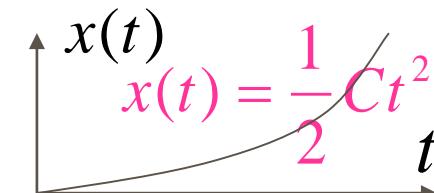
4. 抛物线函数 (加速度阶跃函数) :

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2}Ct^2 & t \geq 0 \end{cases}$$

$C=1$ 时称为单位抛物线函数。

其拉氏变换后的像函数为:

$$L[x(t)] = \frac{C}{s^3}$$



[提示]: 上述几种典型输入信号的关系如下:

$$A\delta(t) = \frac{d}{dt}[A \times 1(t)] = \frac{d^2}{dt^2}[At] = \frac{d^3}{dt^3}\left[\frac{1}{2}At^2\right]$$

5. 正弦函数: $x(t) = A \sin \omega t$, 式中, A为振幅, ω 为频率。

其拉氏变换后的像函数为:

$$L[A \sin \omega t] = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

分析系统特性究竟采用何种典型输入信号, 取决于实际系统在正常工作情况下最常见的输入信号形式。

当系统的输入具有突变性质时, 如指令的突然转换、电源的突然接通、负荷的突变等均可选择阶跃函数为输入信号;

当系统的输入是随时间线性增长变化时, 可选择斜坡函数为典型输入信号。

当考虑海浪对舰艇的扰动、电源及机械噪声等均可近似为正弦输入。

二、典型响应

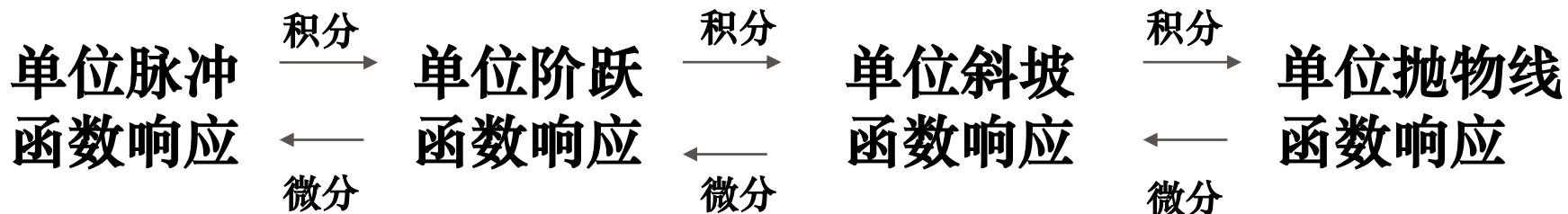
1. 单位脉冲函数响应: $C(s) = G(s) \times 1$

2. 单位阶跃函数响应: $C(s) = G(s) \frac{1}{s}$

3. 单位斜坡函数响应: $C(s) = G(s) \frac{1}{s^2}$

4. 单位抛物线函数响应: $C(s) = G(s) \frac{1}{s^3}$

[提示]: 上述几种典型响应有如下关系:

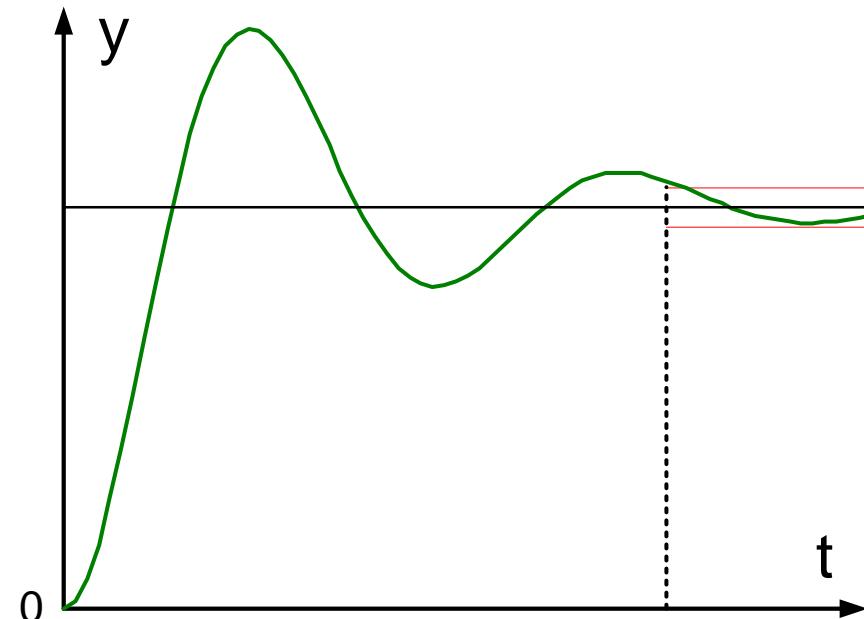


三、微分方程的解

设微分方程如下：

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 x'(t) + b_0 x(t)$$

通解
特解
稳态过程
瞬态过程



四、瞬态过程的性能指标

通常以阶跃响应来衡量系统控制性能的优劣和定义瞬态过程的时域性能指标。稳定的系统（不计扰动）的单位阶跃响应函数有衰减振荡和单调变化两种。

（一）衰减振荡：

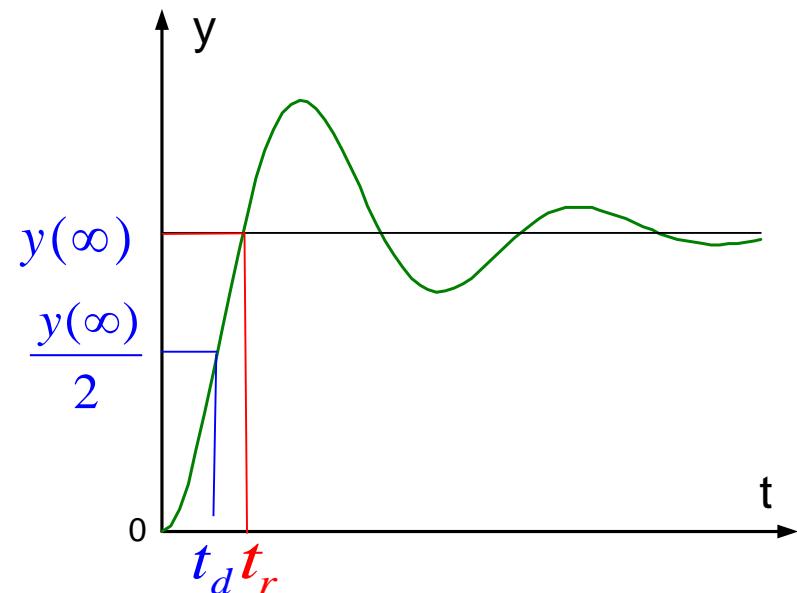
具有衰减振荡的瞬态过程如图所示：

1. 延迟时间 t_d :

输出响应第一次达到稳态值的50%所需的时间。

2. 上升时间 t_r :

输出响应第一次达到稳态值 $y(\infty)$ 所需的时间。或指由稳态值的10%上升到稳态值的90%所需的时间（对单调上升响应的定义）。





3. 峰值时间 t_p :

输出响应超过稳态值达到第一个峰值 y_{\max} 所需要的时间。

4. 最大超调量(简称超调量) $\delta\%$:

瞬态过程中输出响应的最大值超过稳态值的百分数。

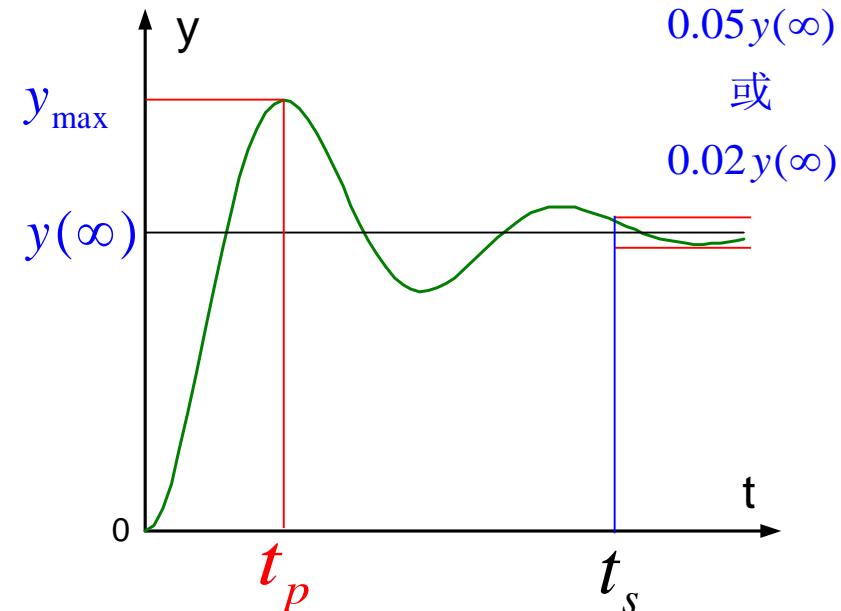
$$\delta\% = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

式中: y_{\max} 是输出响应的最大值; $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ 是稳态值;

5. 调整时间或过渡过程时间 t_s :

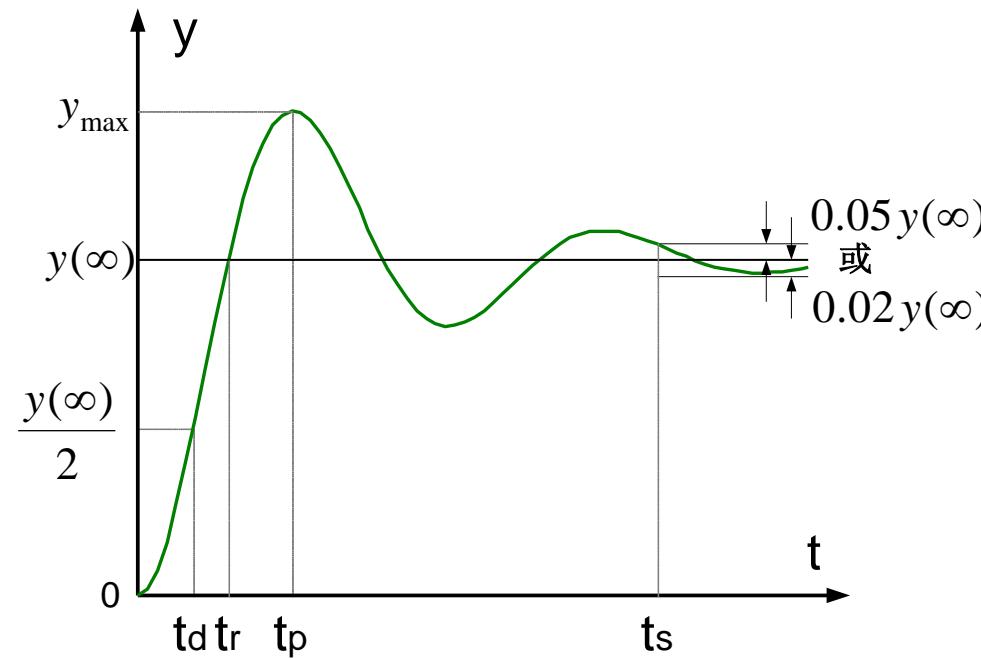
当 $y(t)$ 和 $y(\infty)$ 之间的误差达到规定的范围之内 [一般取 $y(\infty)$ 的 $\pm 5\%$ 或 $\pm 2\%$, 称允许误差范围, 用 D 表示] 且以后不再超出此范围的最长时间。即当 $t \geq t_s$, 有:

$$|y(t) - y(\infty)| \leq y(\infty) \times \Delta\% \quad (\Delta = 2 \text{ 或 } 5)$$



6. 振荡次数N:

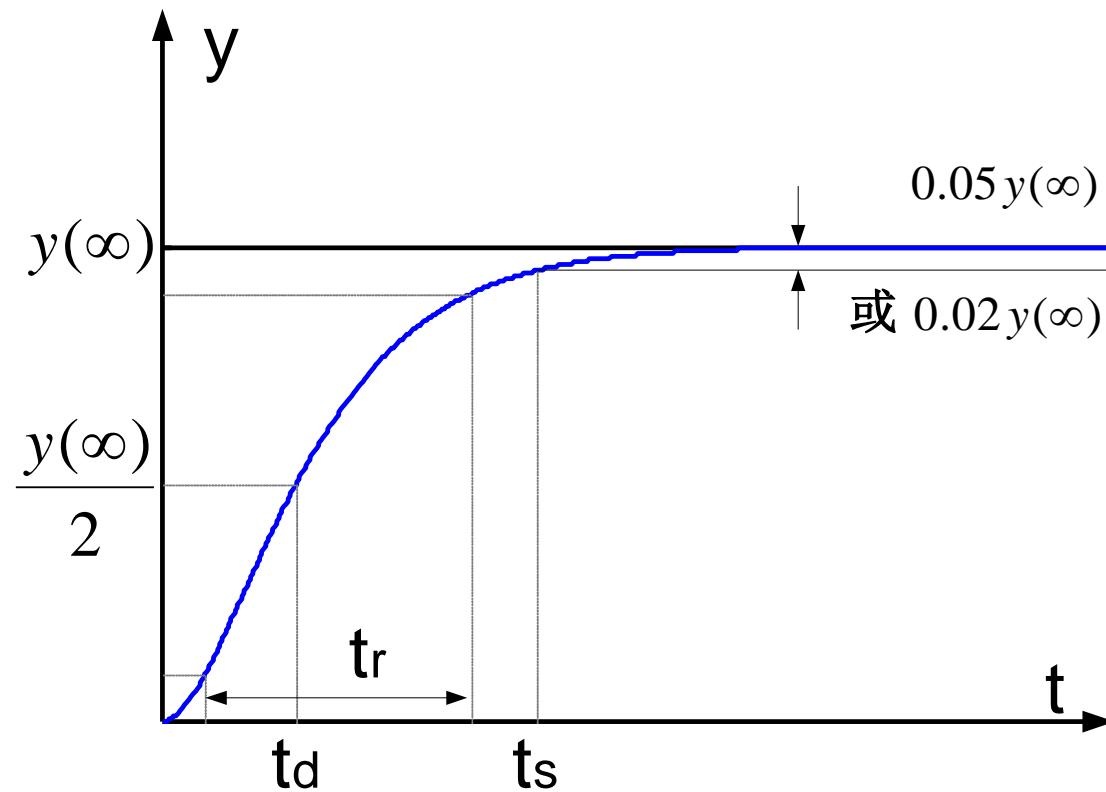
在调整时间内， $y(t)$ 偏离 $y(\infty)$ 的振荡次数。



在上述几种性能指标中， t_p, t_r, t_s 表示瞬态过程进行的快慢，是快速性指标；而 $\delta\%, N$ 反映瞬态过程的振荡程度，是振荡性指标。其中 $\delta\%$ 和 t_s 是两种最常用的性能指标。

(二) 单调变化

单调变化响应
曲线如图所示：



这种系统就无需采用峰值时间和最大超调量这两个指标。
此时最常用的是**调整时间**这一指标来表示瞬态过程的快速性。
有时也采用**上升时间**这一指标。

小结

- 典型输入信号
- 典型响应及其之间的关系
- 线性微分方程的解
- 瞬态过程和稳态过程
- 瞬态过程的性能指标(有衰减振荡和单调变化之分)