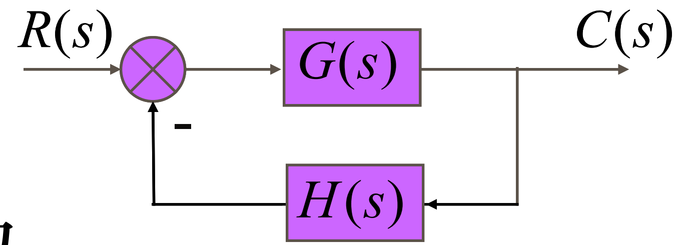
第六节　闭环系统频率特性的绘制

一、闭环系统频率特性和开环系统频率特性的关系

对于单位反馈系统，闭环系统的频率特性$\Phi(j\omega)$和开环系统的频率特性$G(j\omega)$的关系为

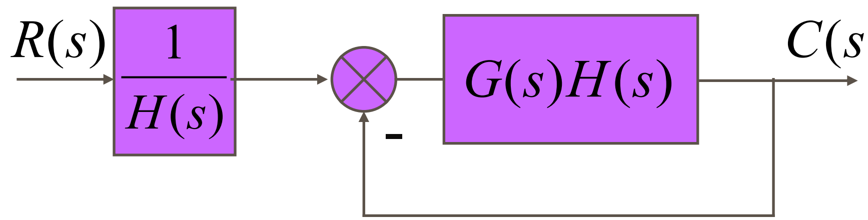
$$\Phi(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}$$



闭环系统的幅频特性和相频特性分别为

$$M(\omega)=\left|\Phi(j\omega)\right|=\left|\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}\right|$$

$$\alpha(\omega)=\angle\Phi(j\omega)=\angle\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}$$



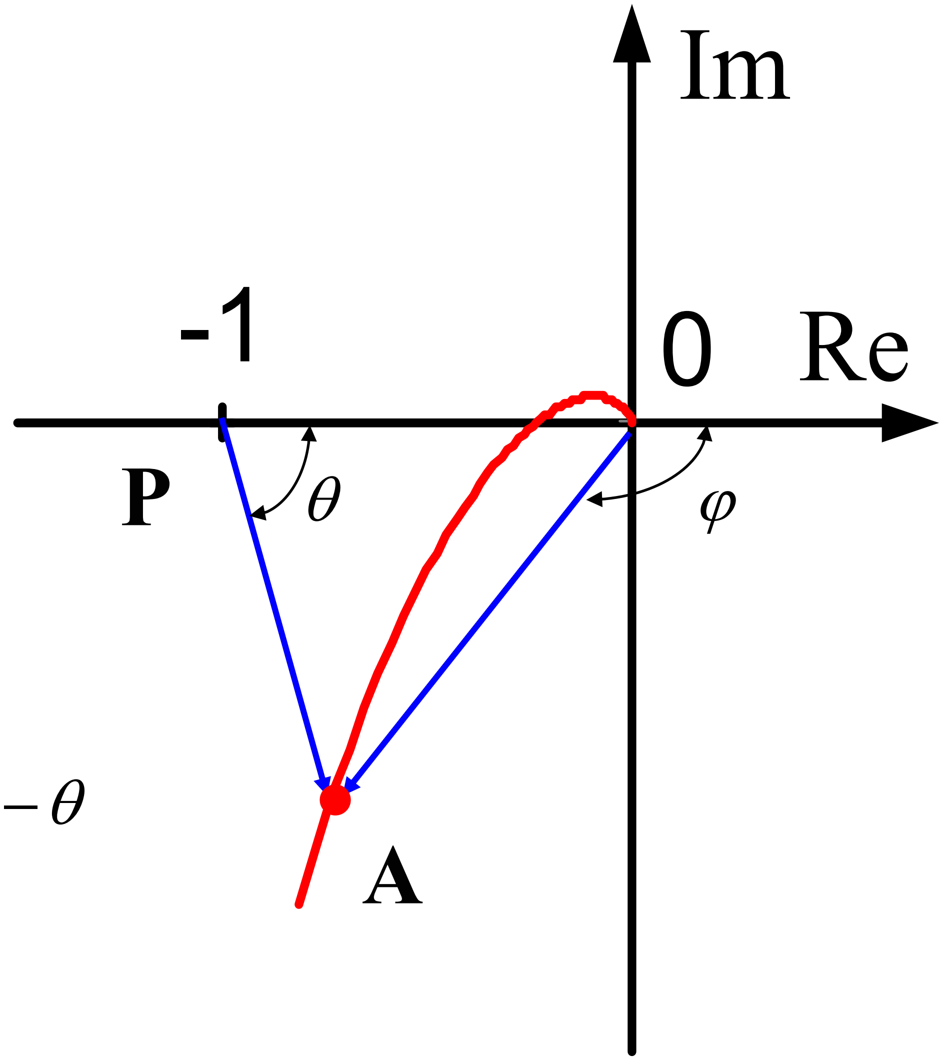
对于非单位反馈系统，闭环系统的频率特性$\Phi(j\omega)$

$$\Phi(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)H(j\omega)}=\frac{1}{H(j\omega)}\frac{G(j\omega)H(j\omega)}{1+G(j\omega)H(j\omega)}=\frac{1}{H(j\omega)}\frac{G_K(j\omega)}{1+G_K(j\omega)}$$

$$\Phi(j\omega_1) = \frac{G(j\omega_1)}{1+G(j\omega_1)} = \frac{OA}{PA}$$

$$M(\omega_1) = |\Phi(j\omega_1)| = \frac{|OA|}{|PA|}$$

$$\alpha(\omega_1) = \angle\Phi(j\omega_1)$$
$$= \angle OA - \angle PA = \varphi - \theta$$



二、等幅值轨迹（等M圆）

将开环系统频率特性写成复数形式：$G_K(j\omega)$=P+jQ，带入$\Phi(j\omega)$

$$\Phi(j\omega)=\frac{P+jQ}{1+P+jQ}$$

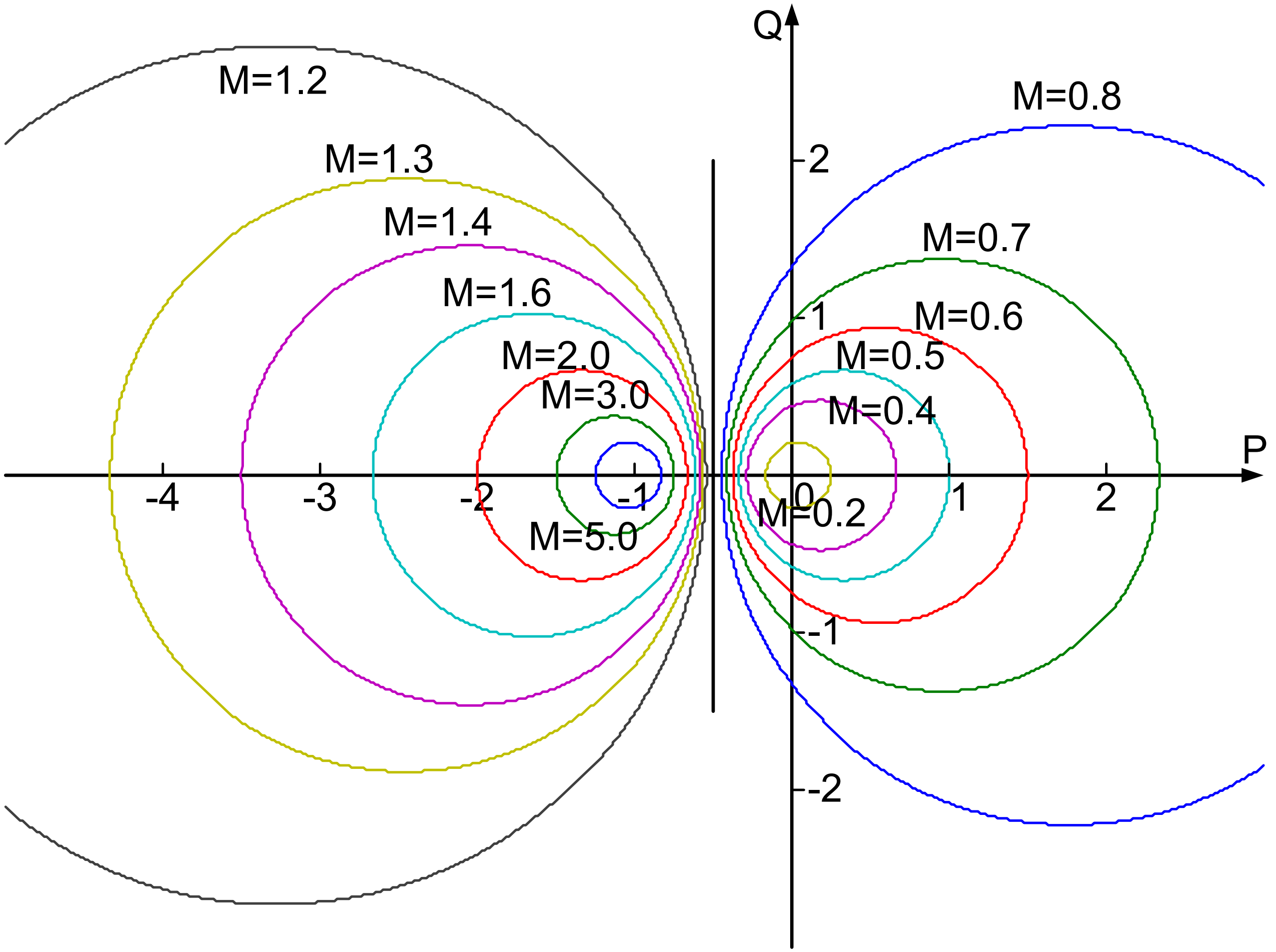
$$M(\omega)=\left|\Phi(j\omega)\right|=\left|\frac{P+jQ}{1+P+jQ}\right|=\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{\sqrt{(1+P)^2+Q^2}}$$

上式两边平方，整理可得

$$P^2(1-M^2)-2M^2P-M^2+(1-M^2)Q^2=0$$

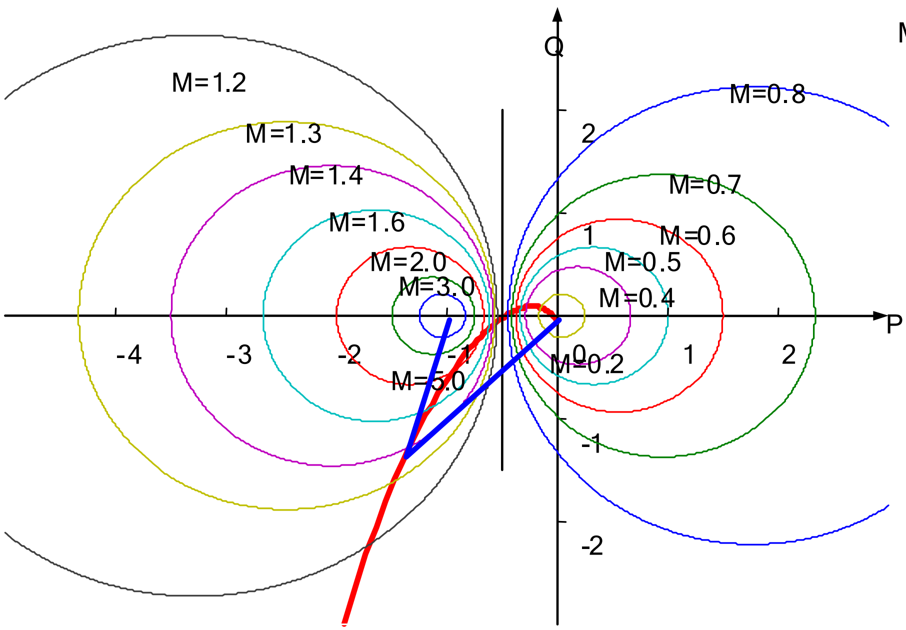
- 若M=1,上式变为: $P=-\dfrac{1}{2}$,这是通过 $(-\dfrac{1}{2},j0)$点平行于虚轴的直线
- 若M≠1,上式变为: $\left(P-\dfrac{M^2}{1-M^2}\right)^2+Q^2=\left(\dfrac{M}{1-M^2}\right)^2$

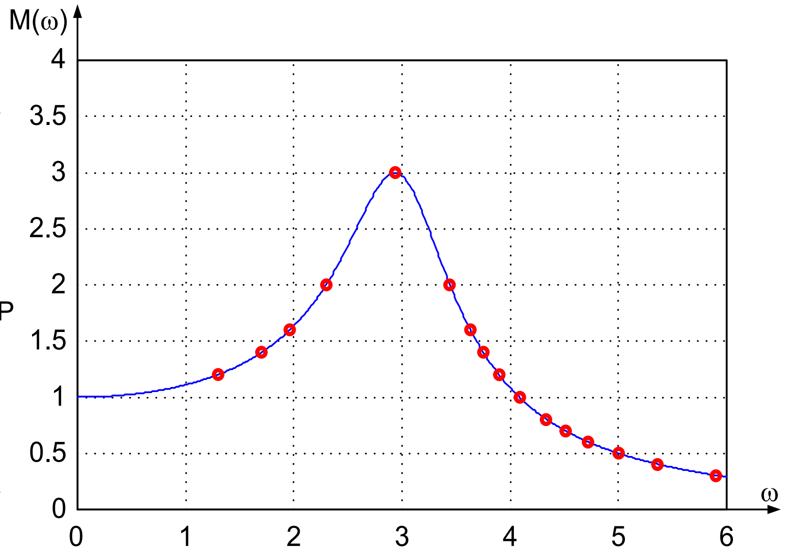
这是一个圆的方程。圆心在 $(\dfrac{M^2}{1-M^2},0)$ ，半径为 $\dfrac{M}{1-M^2}$ 。



当M>1时，等M圆在p=－1/2直线的左边，随着M的增大，M圆越来越小，最后收敛于(-1,j0)点。

当M<1时，等M圆在p=－1/2直线的右边，随着M的减小，M圆越来越小，最后收敛于原点。


Q
P
M=1.2
M=1.3
M=1.4
M=1.6
M=2.0
M=3.0
M=5.0
M=0.8
M=0.7
M=0.6
M=0.5
M=0.4
M=0.2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
-1
-2


M(ω)
ω
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
0
1
2
3
4
5
6

三、等相角轨迹（等N圆）

$$\Phi(j\omega)=\frac{P+jQ}{1+P+jQ} \qquad \alpha=tg^{-1}\frac{Q}{P}-tg^{-1}\frac{Q}{1+P}$$

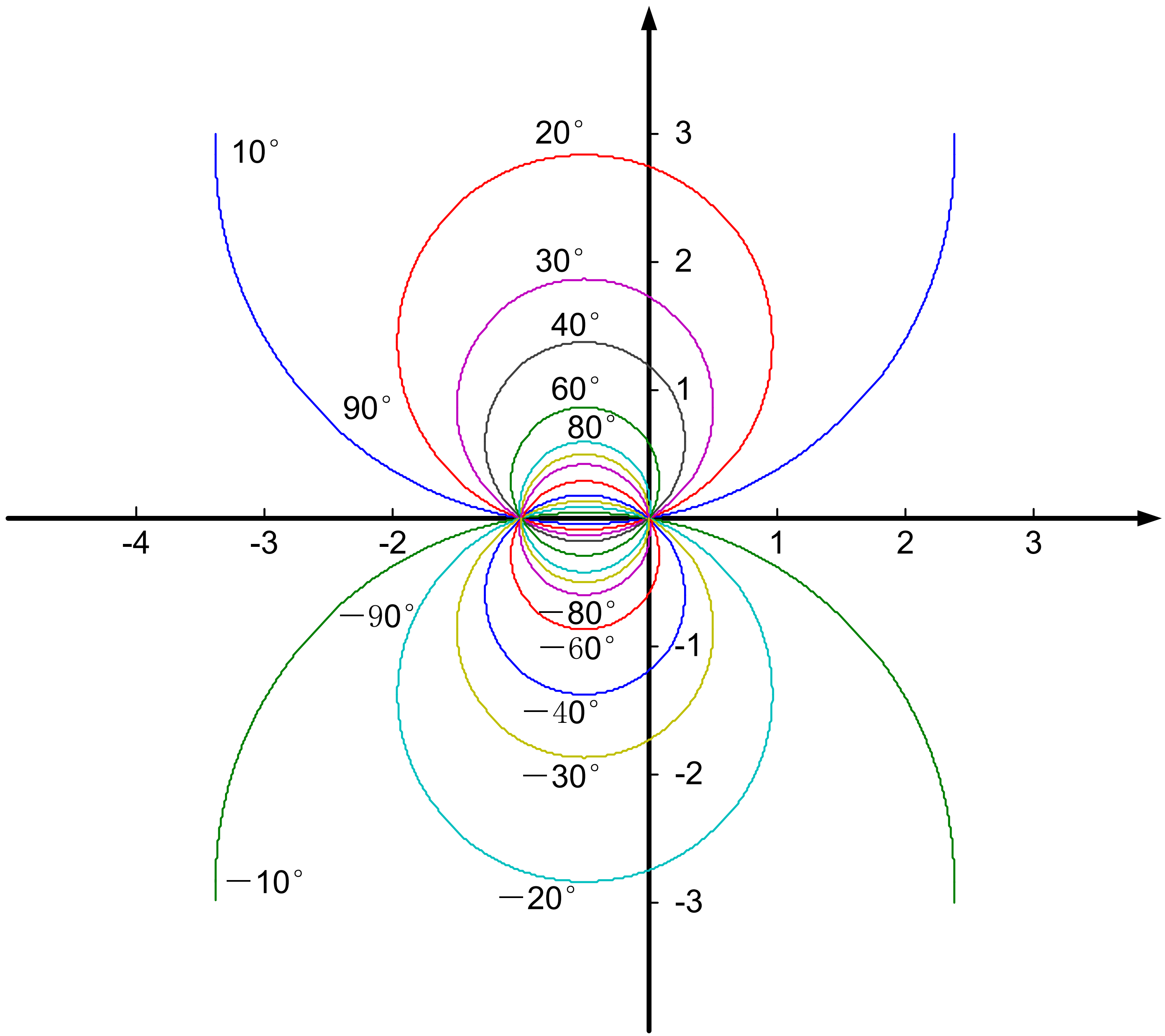
设 $tg\alpha=N$

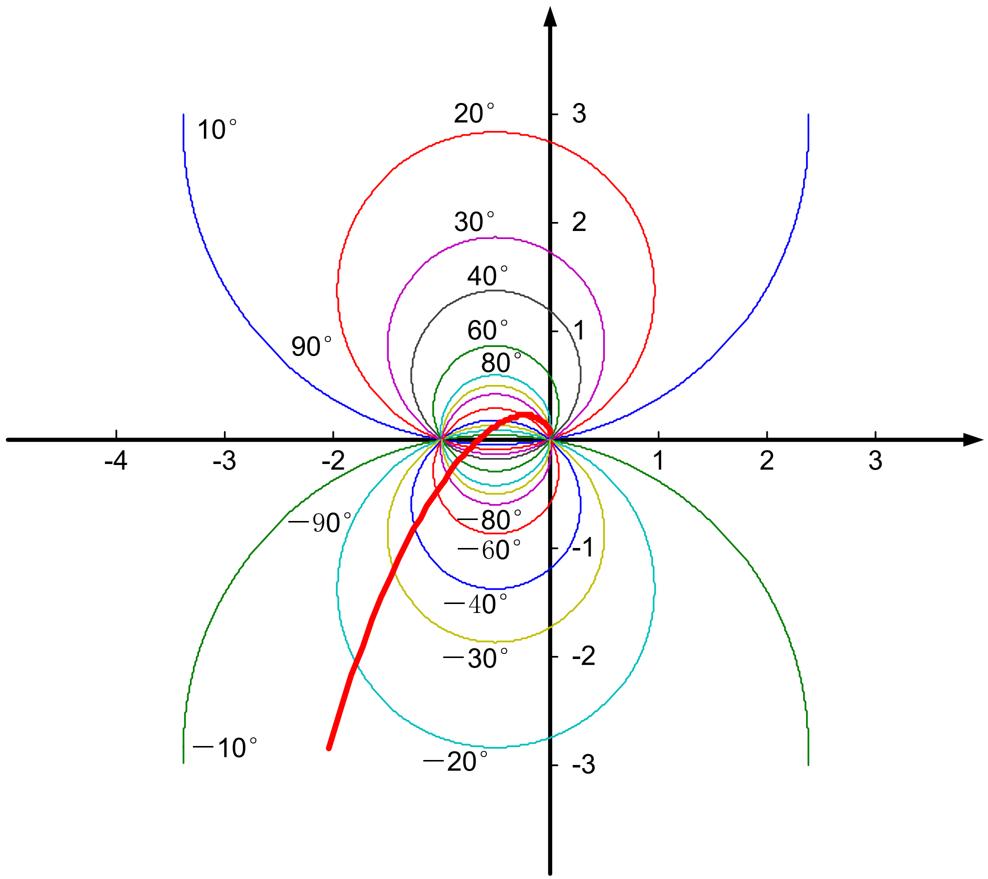
$$N=tg(tg^{-1}\frac{Q}{P}-tg^{-1}\frac{Q}{1+P})=\frac{Q}{P^2+P+Q^2}$$

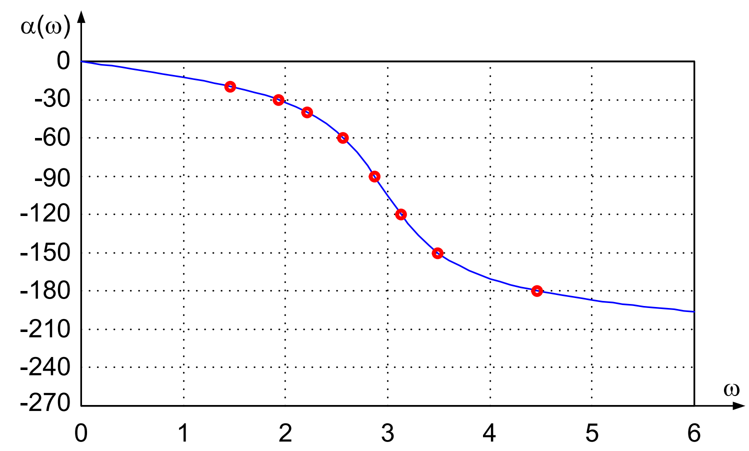
整理可得

$$(P+\frac{1}{2})^2+(Q-\frac{1}{2N})^2=\frac{1}{4}+(\frac{1}{2N})^2$$

这是一个圆的方程。圆心在 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2N})$，半径为 $\frac{\sqrt{N^2+1}}{2N}$ 。


10°
20°
30°
40°
60°
80°
90°
−90°
−80°
−60°
−40°
−30°
−20°
−10°
-4
-3
-2
1
2
3
3
2
1
-1
-2
-3

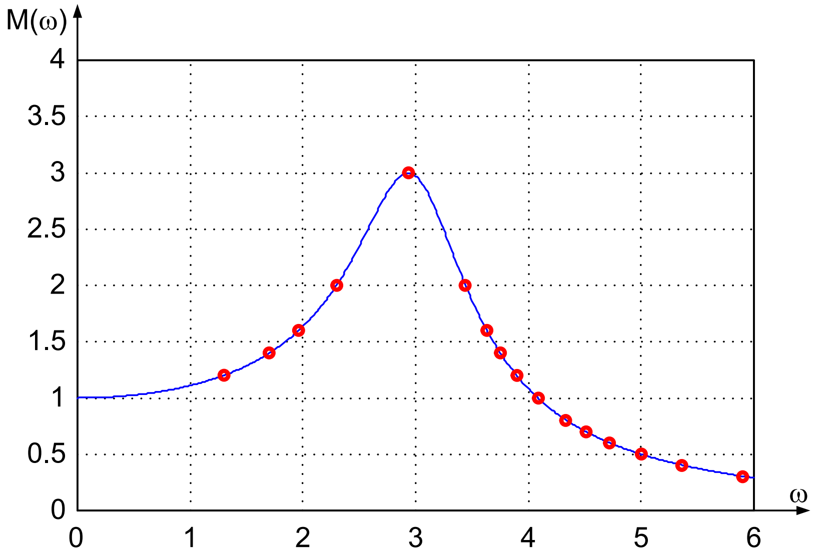

10°
20°
30°
40°
60°
80°
90°
−90°
−80°
−60°
−40°
−30°
−20°
−10°
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-3
-2
1
2
3


α(ω)
0
-30
-60
-90
-120
-150
-180
-210
-240
-270
ω
0
1
2
3
4
5
6

四、闭环系统频率特性的特点

1. $M(0)=1$或$M(0)\approx 1$，$M(\infty)=0$。

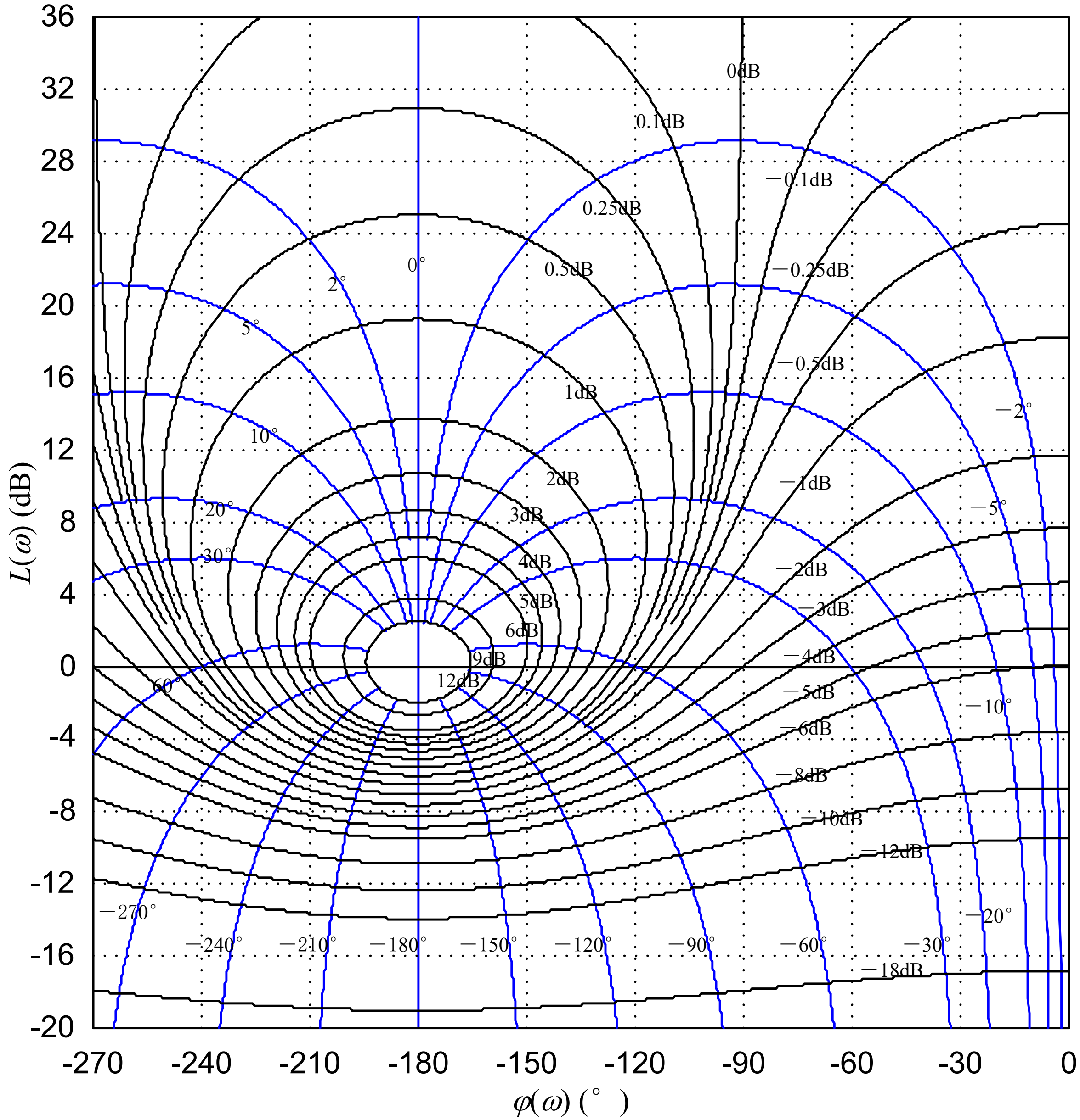
2. 对具有峰值的$M(\omega)$曲线，称峰值M_P为谐振峰值，相应的频率ω_P称为峰值频率或谐振频率。

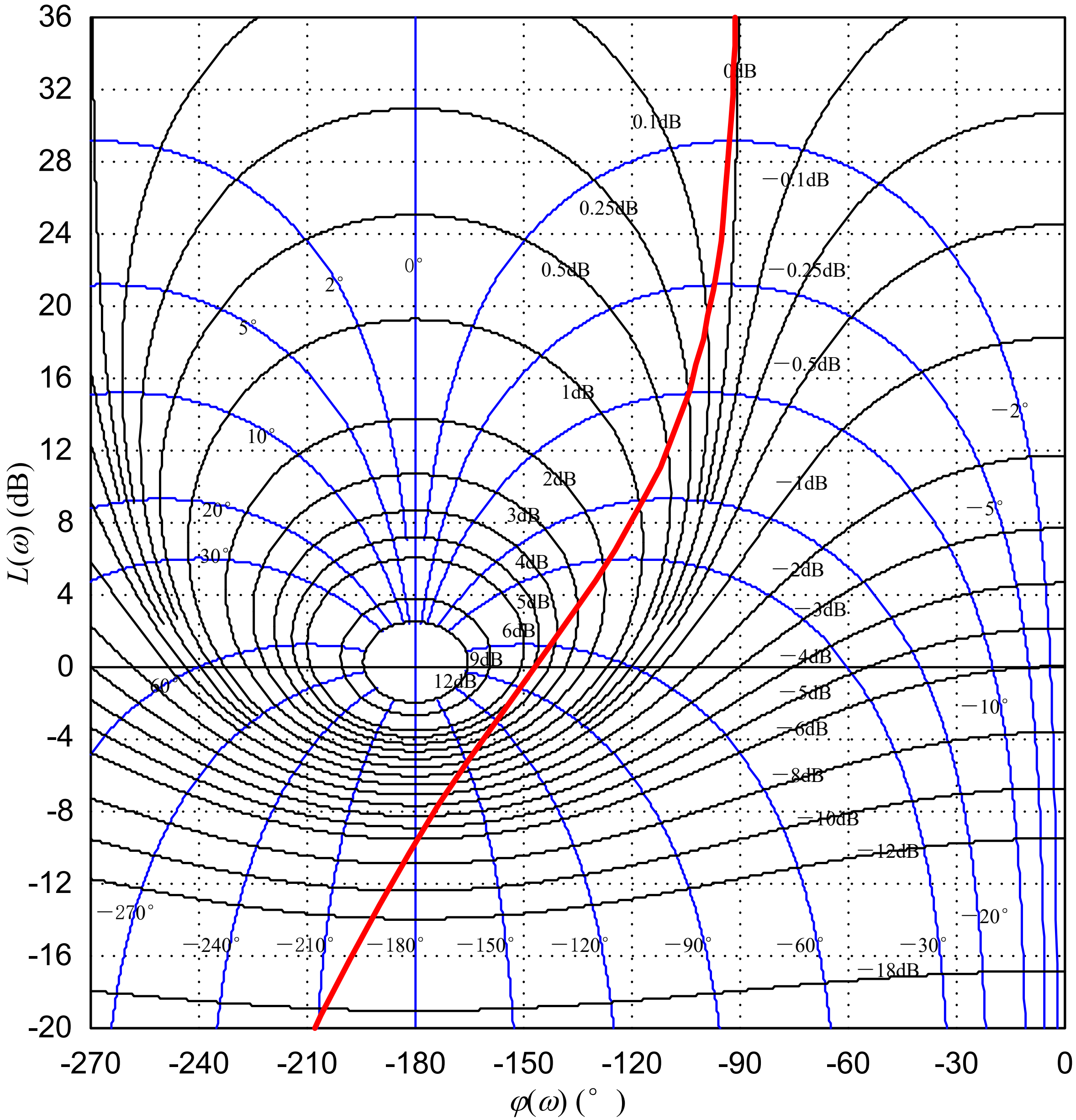


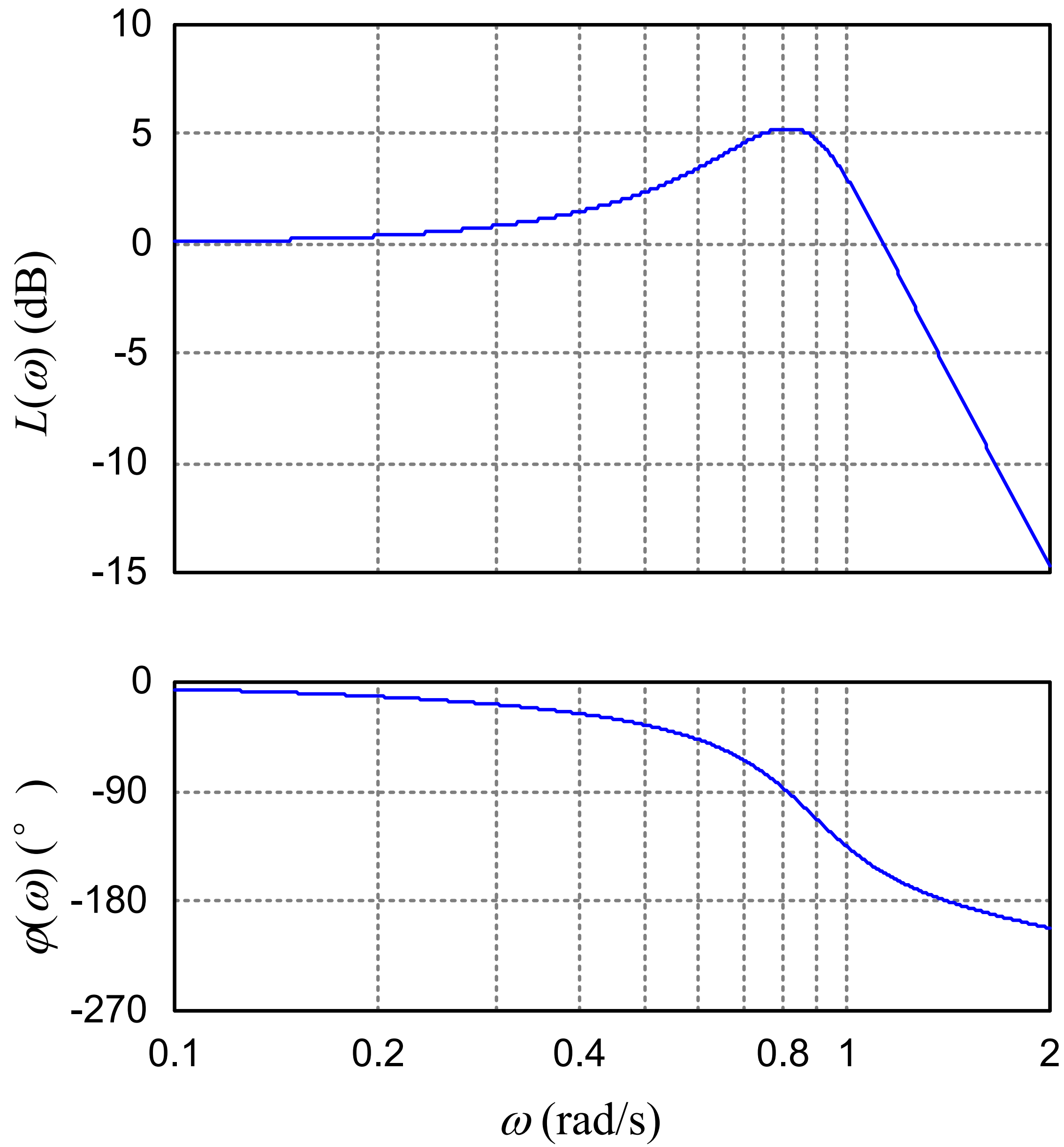
3. 当$M(\omega)$曲线下降到$0.707M(0)$时，对应的频率ω_b称为闭环系统的通频带频率或频带宽度。由$G(j\omega)$曲线和$M=0.707M(0)$的等M圆的交点对应的频率即为ω_b。

五、尼柯尔斯图

尼柯尔斯(Nichols)图，也称对数幅相频率特性图。它是以相频特性为横坐标(单位一般为°)，以对数幅频特性为纵坐标(单位一般为dB)，以ω为参变量的一种图示法。


36
32
28
24
20
16
12
8
4
0
-4
-8
-12
-16
-20
-270
-240
-210
-180
-150
-120
-90
-60
-30
0
L(ω) (dB)
φ(ω) (°)
0dB
0.1dB
0.25dB
0.5dB
1dB
2dB
3dB
4dB
5dB
6dB
9dB
12dB
−0.1dB
−0.25dB
−0.5dB
−1dB
−2dB
−3dB
−4dB
−5dB
−6dB
−8dB
−10dB
−12dB
−18dB
0°
2°
5°
10°
20°
30°
60°
−2°
−5°
−10°
−20°
−270°
−240°
−210°
−180°
−150°
−120°
−90°
−60°
−30°


36
32
28
24
20
16
12
8
4
0
-4
-8
-12
-16
-20
-270
-240
-210
-180
-150
-120
-90
-60
-30
0
L(ω) (dB)
φ(ω) (°)
0dB
0.1dB
0.25dB
0.5dB
1dB
2dB
3dB
4dB
5dB
6dB
9dB
12dB
−0.1dB
−0.25dB
−0.5dB
−1dB
−2dB
−3dB
−4dB
−5dB
−6dB
−8dB
−10dB
−12dB
−18dB
0°
2°
5°
10°
20°
30°
60°
−2°
−5°
−10°
−20°
−270°
−240°
−210°
−180°
−150°
−120°
−90°
−60°
−30°


10
5
0
-5
-10
-15
$L(\omega)$ (dB)
0
-90
-180
-270
$\varphi(\omega)$ (°)
0.1
0.2
0.4
0.8
1
2
ω (rad/s)

六、闭环频率特性性能指标

常用的有下列三项:

- 谐振峰值M_P： 系统闭环频率特性幅值的最大值。
- 谐振频率ω_P： 系统闭环频率特性幅值出现最大值时的频率。
- 系统带宽和带宽频率：设 $M(j\omega)$为系统的闭环频率特性，当幅频特性 $|M(j\omega)|$下降到$\dfrac{\sqrt{2}}{2}|M(0)|$ 时，对应的频率ω_b 称为带宽频率。频率范围$\omega \in [0, \ \omega_b]$ 称为系统带宽。

小 结