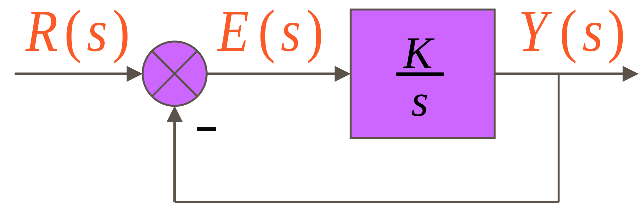
3.2　一阶系统的瞬态响应

1. 一阶系统的数学模型

一阶系统的微分方程为:



$$T\frac{dc(t)}{dt}+y(t)=r(t)$$

其闭环传递函数为:

$$\Phi(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{K}{s}}{1+\frac{K}{s}}=\frac{1}{\frac{s}{K}+1}=\frac{1}{Ts+1}$$

式中 $\boxed{T=\frac{1}{K}}$ 称为时间常数。

2. 一阶系统的单位阶跃响应

$$\Phi(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ts+1}$$

当 $R(s)=1/s$

$$Y(s)=\frac{1}{Ts+1}\times\frac{1}{s},$$

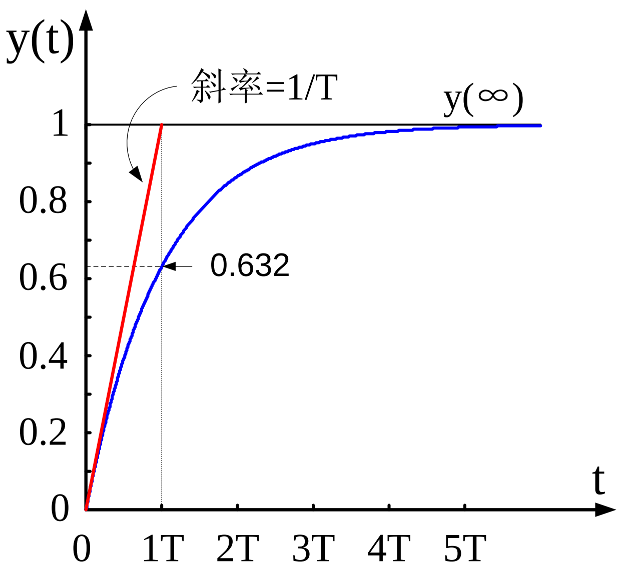
$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{Ts+1}\times\frac{1}{s}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right]=1-e^{-\frac{t}{T}}$$

显然一阶系统的单位阶跃响应是一条由零开始按指数规律单调上升并最终趋于1的曲线。响应曲线具有非振荡特性，故也称为非周期响应。

该响应曲线的斜率是

$$\frac{dy(t)}{dt}=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

显然在t=0处的斜率为1/T，并且随时间的增加斜率变小。

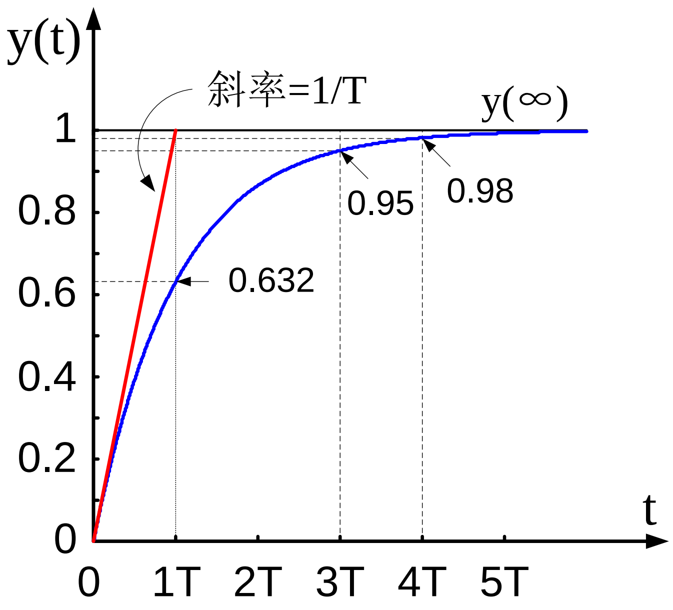


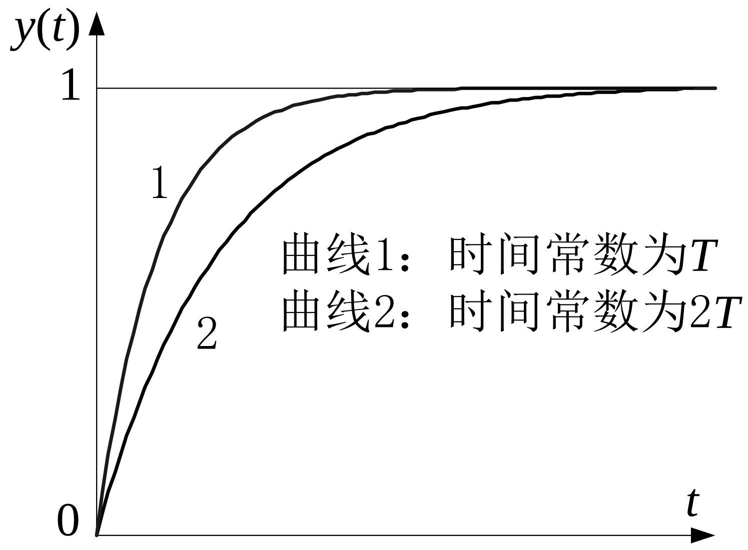
下表表示了单位阶跃响应曲线上各点的值、斜率与时间常数T之间的关系。

时间 t	0	T	$2T$	$3T$	$4T$	$\cdots$	∞
输出量	0	0. 632	0. 865	0. 950	0. 982	$\cdots$	1.0
斜率	$1/T$	$0.368/T$	$0.135/T$	$0.050/T$	$\cdots$	$\cdots$	0.0

根据这一特点，可用实验的方法测定一阶系统的时间常数，或测定系统是否属于一阶系统。

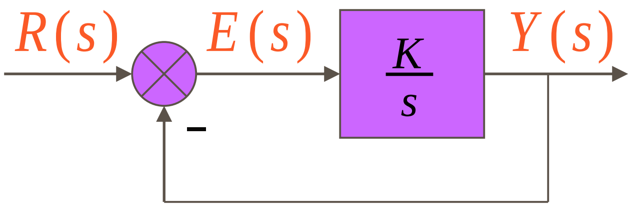
$$t_s \approx \begin{cases} 4T, & \text{当}\Delta = 2\text{时} \\ 3T, & \text{当}\Delta = 5\text{时} \end{cases}$$





- 时间常数T反映了系统的惯性，**时间常数T越大**，表示系统的惯性越大，**响应速度越慢**，系统跟踪单位阶跃信号越慢，单位阶跃响应曲线上升越平缓。反之，惯性越小，响应速度越快，系统跟踪单位阶跃信号越快，单位阶跃响应曲线上升越陡峭。
- 对于大多数的实际工程系统，通常**希望有较小的时间常数**。

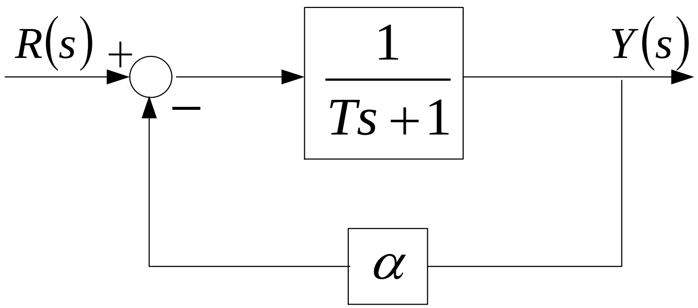
3. 改善一阶系统瞬态性能的设计方法



[方法一] 通过负反馈减小时间常数

$$T=\frac{1}{K}$$

原系统为：$G(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$，加入负反馈如下图：

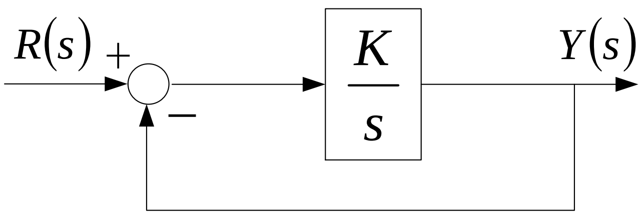


反馈后系统的闭环传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{1}{Ts+1}}{1+\dfrac{\alpha}{Ts+1}}\overset{?}{=}\frac{\dfrac{1}{1+\alpha}}{\dfrac{T}{1+\alpha}s+1}=\frac{K'}{T's+1}$$

[方法二] 在系统的前向通道上串联一个比例环节。

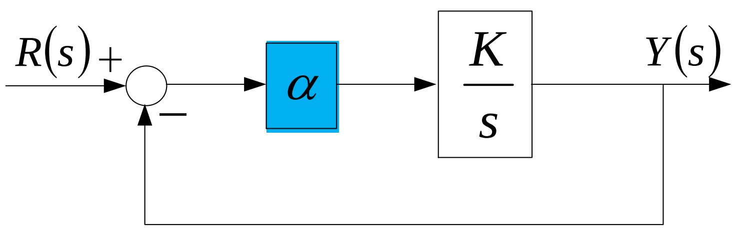
原系统为：



传递函数为：

$$\Phi_0(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

改进后系统为：



闭环传递函数为：

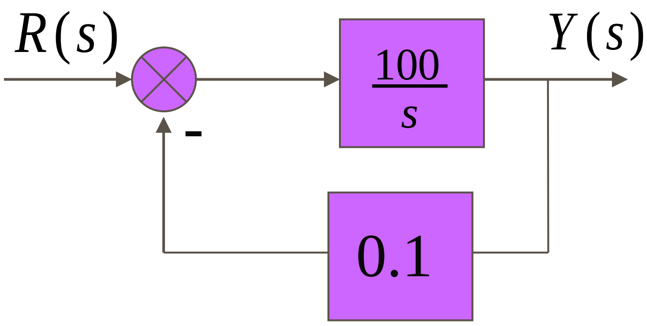
$$\Phi(s)=\frac{\frac{\alpha K}{s}}{1+\frac{\alpha K}{s}}=\frac{1}{\frac{1}{\alpha K}s+1}=\frac{1}{\frac{T}{\alpha}s+1}=\frac{1}{T's+1}$$

$$\boxed{T'=\frac{T}{\alpha}}$$

例：已知一阶系统的结构图如图所示。①试求该系统单位阶跃响应的调节时间t_s；②若要求$t_s \le 0.1$秒，求此时的反馈系数。

解：①由系统结构图求出闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{100}{s}}{1+\frac{100}{s}\times 0.1}=\frac{100}{s+10}=\frac{10}{0.1s+1}$$



由闭环传递函数知时间常数T=0.1秒

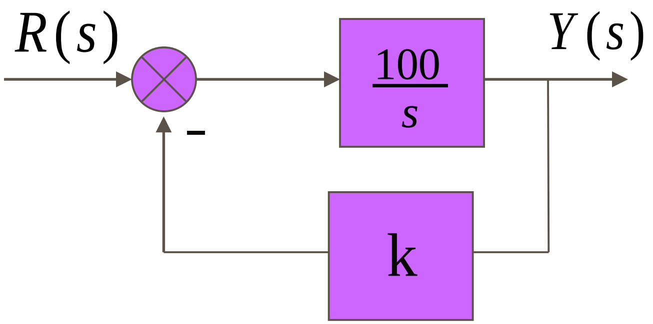
由公式知: $\boxed{t_s=3T=0.3\text{秒}\ (\Delta=0.05)}$

$$Y(s)=\frac{10}{0.1s+1}\frac{1}{s}=\frac{10}{s}-\frac{10}{s+10}$$

$$y(t)=10(1-e^{-10t})=10(1-e^{-\frac{t}{0.1}})$$

② 若要求t_s≤0.1秒，求此时的反馈系数。

可设反馈系数为k



$$\Phi(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{100}{s}}{1+\frac{100}{s}\times k}=\frac{\boxed{\frac{1}{k}}}{\frac{0.01}{k}s+1}$$

当 $T=\frac{0.01}{k}$，则 $t_s=3T=\frac{0.03}{k}\le 0.1$，即 $k\ge 0.3$ 时 t_s≤0.1秒

由此可知：对一阶系统而言反馈加深可使调节时间减小。

反馈加深对系统的响应还有什么影响?

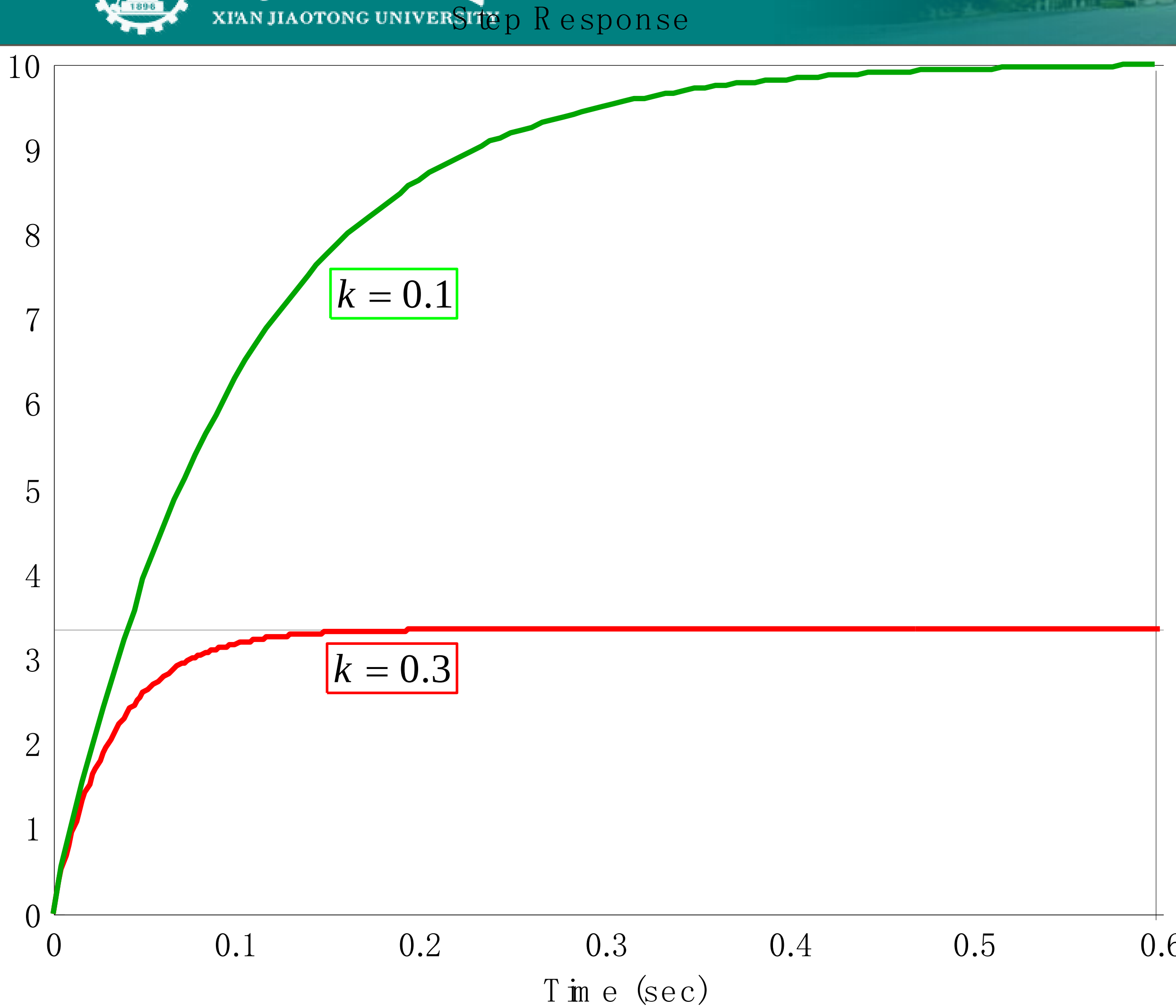
$$Y(s)=\frac{\frac{100}{s}}{1+\frac{100}{s}\times 0.3}\times\frac{1}{s}=\frac{100}{s+30}\times\frac{1}{s}=\frac{10}{3}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+30}\right)$$

?

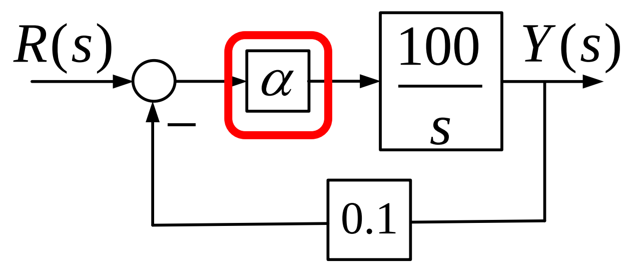
$$y(t)=\frac{10}{3}(1-e^{-30t})$$

$$\boxed{y(t)=10(1-e^{-\frac{t}{0.1}})}$$

反馈加深还将使输出幅值减小。


Step Response
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
Time (sec)
$k = 0.1$
$k = 0.3$

串联比例环节?


$R(s)$
$-$
α
$\frac{100}{s}$
$Y(s)$
0.1

小 结

- 一阶系统的传递函数和典型结构图
- 一阶系统的单位阶跃响应(单调上升曲线，性能指标常用调整时间)
- 改善一阶系统瞬态性能的设计方法