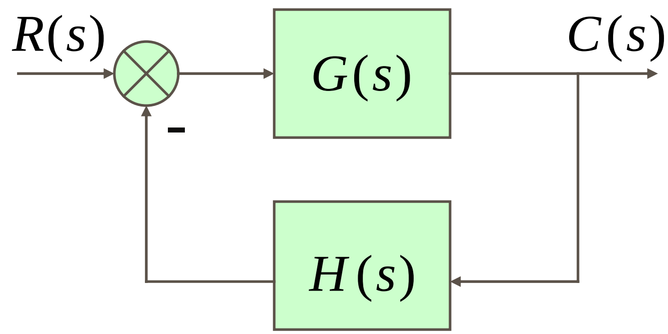
第四节 控制系统根轨迹的绘制

一、 单回路负反馈系统的根轨迹

1. 常规根轨迹
2. 参量根轨迹

特殊情况： 对于开环传递函数$G_k(s)$有零极点相对消的情况。

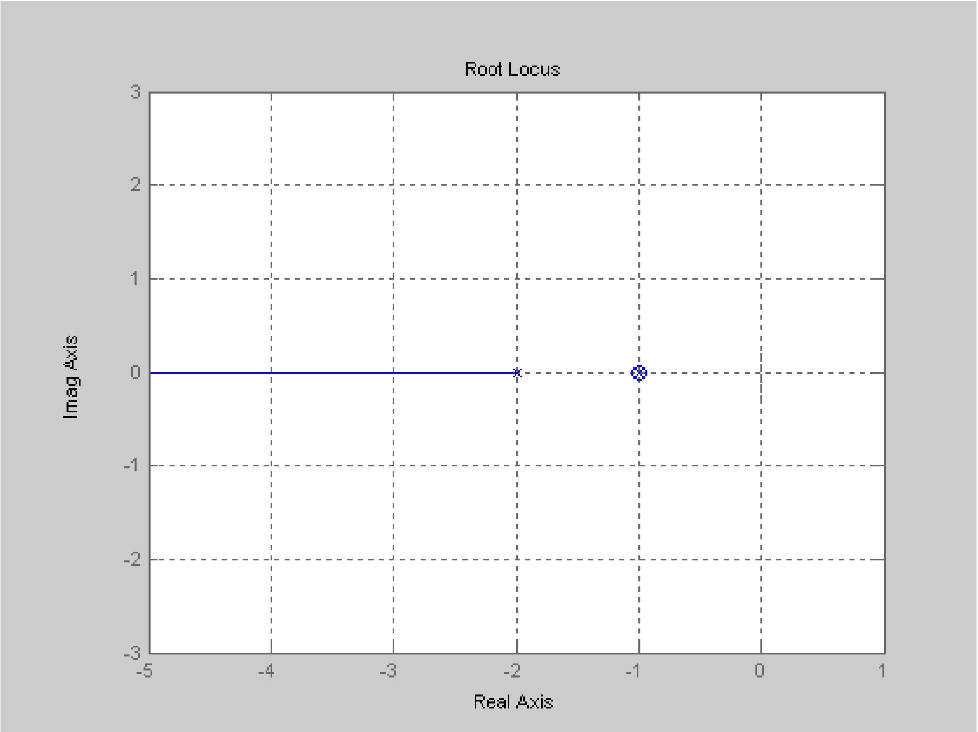


如：$G(s)=\dfrac{K_g}{(s+1)(s+2)}$

$$H(s)=s+1$$

则：$G_k(s)=G(s)H(s)=\dfrac{K_g}{s+2}$，

引起特征方程阶数的下降。

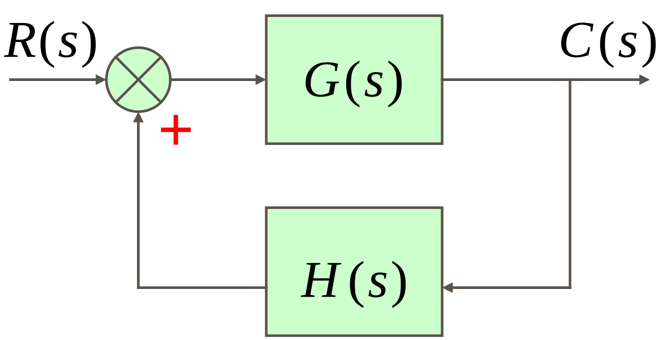


二、多回路系统的根轨迹

简单处理办法：将多回路系统等效为单回路系统，再绘制180度根轨迹或参量根轨迹。

三、正反馈系统的根轨迹

以上我们讨论的都是闭环负反馈系统的根轨迹绘制准则。在实际的复杂系统中，可能有局部的正反馈的结构。正反馈系统的根轨迹绘制准则与负反馈系统根轨迹略有不同。如下图所示系统：



开环传递函数为： $G_k(s)=G(s)H(s)$

闭环传递函数为： $\Phi(s)=\dfrac{G(s)}{1-G(s)H(s)}$

相应的根轨迹方程为： $G_k(s)=1$

幅值条件和相角条件为：

$$|G_k(s)|=1, \quad \angle G_k(s)=2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,...)$$

与负反馈系统根轨迹比较，幅值条件相同，相角条件不同。负反馈系统的相角条件 $(2k+1)\pi$，是180度等相角条件；而正反馈系统的相角条件 $2k\pi$，是0度等相角条件。

注意：

- 负反馈系统根轨迹称为180度根轨迹或常规根轨迹，简称为根轨迹；
- 正反馈系统根轨迹称为0度根轨迹或补根轨迹。

绘制0度根轨迹的基本准则：

- 对称性和连续性同常规根轨迹；
- 起点、终点和根轨迹支数同常规根轨迹；
- 渐近线：与实轴的交点同常规根轨迹；但倾斜角不同，

  为：$\theta = \dfrac{2k\pi}{n-m}, k = 0, \pm1, \pm2 \ldots$ ，有n-m个角度。
- 实轴上的根轨迹：其右方实轴上的开环零极点之和为偶数（包括0）的区域。
- 分离点、会合点和分离角：同常规根轨迹；

- 出射角和入射角：

$$\theta_{出}=\sum_{i=1}^{m}(\text{所有开环零点到该极点的矢量幅角})-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\theta_{c1}}}^{n-1}(\text{其它开环极点到该极点的矢量幅角})$$

$$\theta_{入}=-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\theta_{c2}}}^{m-1}(\text{其它开环零点到该零点的矢量幅角})+\sum_{j=1}^{n-1}(\text{所有开环极点到该零点的矢量幅角})$$

- 与虚轴的交点：同常规根轨迹；
- 闭环极点之和与之积：同常规根轨迹。

[例4-9]：设单位正反馈系统的开环传递函数为：

$$G_k(s)=\frac{K_g}{s(s+1)(s+5)}$$ ，试绘制系统的根轨迹。

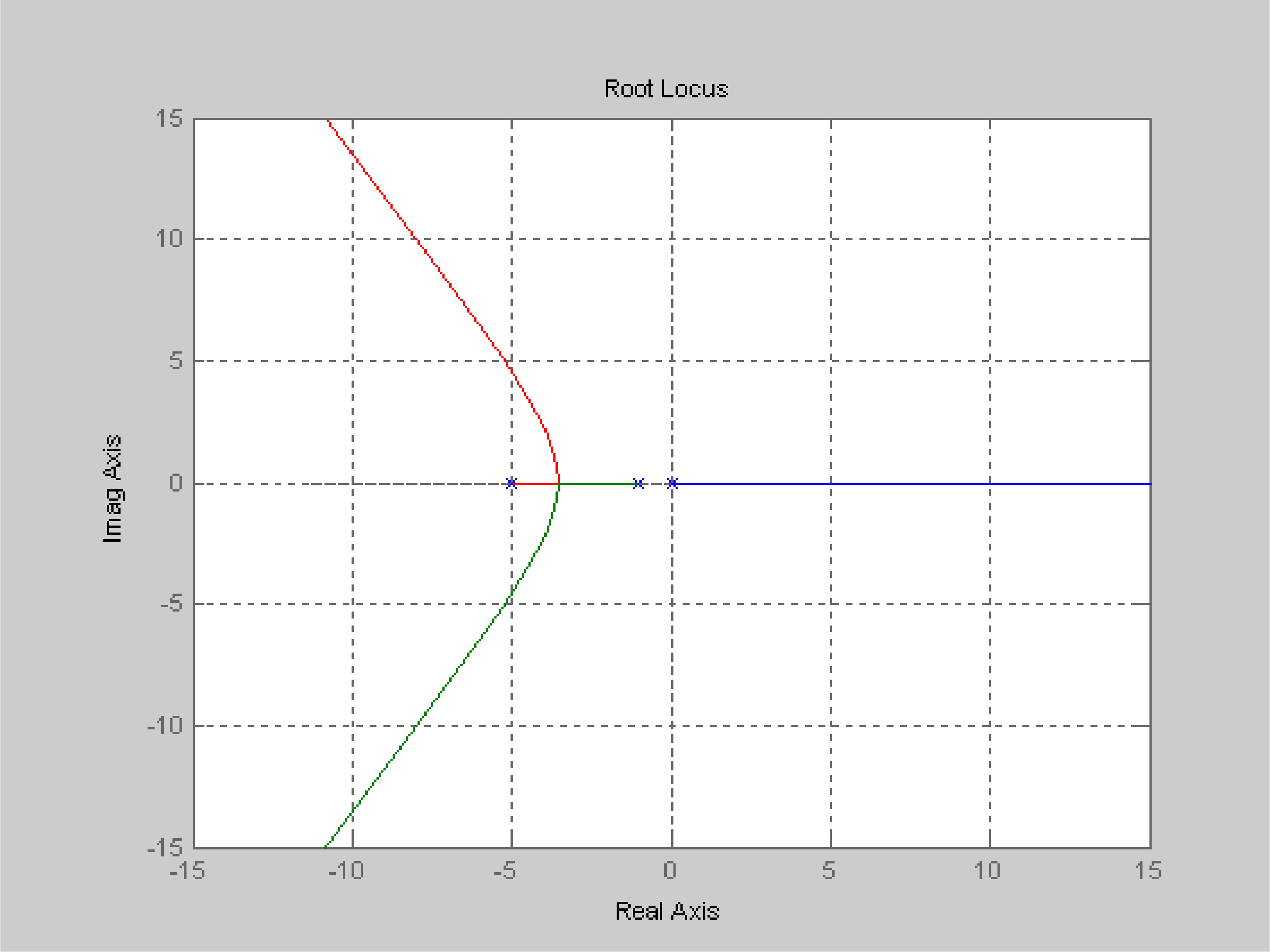
[解]：

- 起点在0，-1，-5处，终点在无穷远处。有3支根轨迹。
- 渐近线：与实轴的交点 $-\sigma=\frac{\sum -p_j-\sum -z_i}{n-m}=-\frac{0+1+5}{3}=-2$

  倾角： $\theta=\frac{2k\pi}{n-m}=0,\pm\frac{2\pi}{3}$
- 实轴上根轨迹区间：[-5，-1]，[0，∞)
- 分离点（角）：$\theta_d=\frac{\pi}{2}$，由 $N'(s)D(s)-N(s)D'(s)=0$ 得：

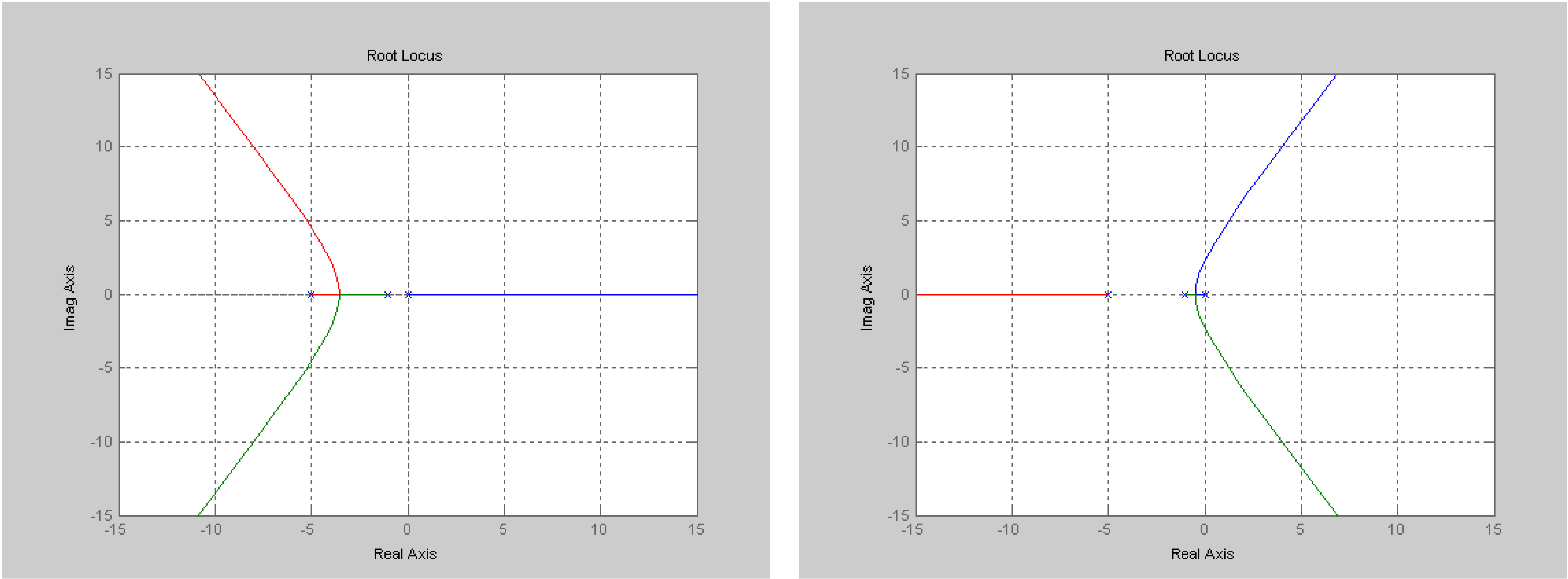
  $3s^2+12s+5=0$，解得：$s_{1,2}=-0.48,-3.52$

  显然，$s_1=-0.48$，不在根轨迹上。分离点为：$s_2=-3.52$ 。


Root Locus
15
10
5
0
-5
-10
-15
-15
-10
-5
0
5
10
15
Imag Axis
Real Axis

将例4-9的给出的开环传递函数分别绘制正负根轨迹图如下：

$$G_k(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+5)}$$



左图为正反馈（0度）根轨迹图；右图为负反馈（180度）根轨迹图；

比较正负反馈的根轨迹方程：

若开环传递函数为： $G_k(s)=K_g\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(s+p_j)}$

则正负反馈的根轨迹方程分别为：

$$K_g\frac{\prod\limits_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(s+p_j)}=1 \qquad\qquad K_g\frac{\prod\limits_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(s+p_j)}=-1$$

可见，正反馈根轨迹相当于负反馈根轨迹的K_g从$0\to-\infty$时的根轨迹。

所以，若将正负反馈系统的根轨迹合并，可得$-\infty<K_g<\infty$时的整个区间的根轨迹，称为全根轨迹。

四、非最小相位系统的根轨迹

定义： 在右半S平面上既无极点也无零点，同时无纯滞后环节的系统是**最小相位系统**，相应的传递函数称为最小相位传递函数；反之，在右半S平面上具有极点或零点，或有纯滞后环节的系统是**非最小相位系统**，相应的传递函数称为非最小相位传递函数。

这里只讨论在右半S平面上具有极点或零点的非最小相位系统根轨迹。将开环传递函数写为零极点形式，可出现两种情况：

① 若 $G_k(s) = K_g \dfrac{\prod (s+z_i)}{\prod (s+p_j)}$ 按180°根轨迹画图。

② 若 $G_k(s) = -K_g \dfrac{\prod (s+z_i)}{\prod (s+p_j)}$ 按 0°根轨迹画图。

小　结

- 手工绘制180度根轨迹的步骤(单回路负反馈系统和多回路系统根轨迹的绘制)；
- 手工绘制0度根轨迹的步骤(单回路正反馈系统根轨迹的绘制)；
- 180度根轨迹和0度根轨迹的关系；
- 非最小相位系统的根轨迹