3.6 稳态误差分析

温度是决定炼钢质量的核心因素，直接影响钢水成分控制、夹杂物去除及最终钢材性能，需严格控制在合理区间。

1. 对成分控制的影响

- 正向作用：适当高温可提高熔池流动性，促进合金元素（如Mn、Si、Cr）均匀溶解，避免成分偏析，确保钢材成分符合标准。
- 负面影响：温度过高会加剧钢水对耐火材料的侵蚀，导致耐火材料中的Al_2O_3、MgO等进入钢水，造成成分污染；温度过低则会使合金元素溶解不充分，形成未溶合金颗粒，影响钢材纯度。

2. 对夹杂物去除的影响

- 正向作用：高温能降低钢水黏度，使钢水中的有害夹杂物（如SiO_2、FeO）更易聚集、上浮至炉渣中被去除，减少钢材内部缺陷（如裂纹、气孔）。
- 负面影响：温度过低时钢水黏度增大，夹杂物上浮困难，易残留在钢水中，导致钢材力学性能（如韧性、疲劳强度）下降。

3. 对钢材性能的影响

- 晶粒大小：出钢温度过高会导致钢材凝固时晶粒粗大，降低其强度和韧性；温度过低则可能使钢水凝固过快，形成细小但不均匀的晶粒，同样影响性能稳定性。
- 相变过程：轧制或热处理前的钢水温度偏差，会改变钢材的相变临界点（如Ac1、Ac3），导致最终产品的硬度、塑性等力学指标不符合设计要求。

4. 对冶炼过程稳定性的影响

- 温度过低会导致钢水流动性差，易出现“回磷”（磷重新进入钢水）、“结瘤”（炉壁黏附钢渣）等问题，延长冶炼时间；温度过高则会增加能耗，并可能引发喷溅、漏钢等安全事故。

对于一个实际的控制系统，由于系统的结构、输入作用的类型(给定量或扰动量)、输入函数的形式(阶跃、斜坡或抛物线)不同，控制系统的稳态输出不可能在任何情况下都与输入量一致或相当，也不可能在任何形式的扰动作用下都能准确地恢复到原平衡位置。这类由于系统结构、输入作用形式和类型所产生的稳态误差称为原理性稳态误差。

此外，控制系统中不可避免地存在摩擦、间隙、不灵敏区等非线性因素，都会造成附加的稳态误差。这类由于非线性因素所引起的系统稳态误差称为附加稳态误差或结构性稳态误差。

本节只讨论原理性稳态误差，不讨论结构性稳态误差。

显然，**只有当系统稳定时，研究稳态误差才有意义**；对于不稳定的系统而言，根本不存在研究稳态误差的可能性。

有时，把在阶跃函数作用下没有原理性稳态误差的系统，称为无差系统；而把具有原理性稳态误差的系统，称为有差系统。

一、误差及稳态误差的定义

系统误差： 输出量的希望值 $y_0(t)$ 和实际值 $y(t)$ 之差。即

$$\varepsilon(t)=y_0(t)-y(t)$$

系统稳态误差： 当 t→∞ 时的系统误差，用 ε_{ss} 表示。即

$$\varepsilon_{ss}=\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)$$

系统偏差： 系统的输入 $r(t)$ 和主反馈信号 $b(t)$ 之差。即

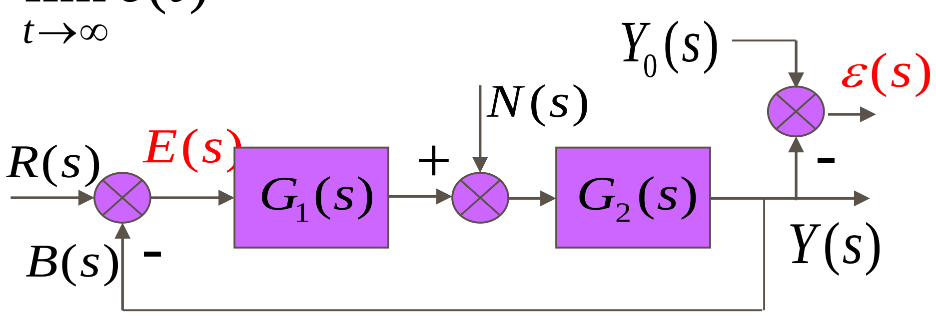
$$e(t)=r(t)-b(t)$$

系统稳态偏差：当t→∞时的系统偏差，用 e_{ss} 表示。即

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)$$

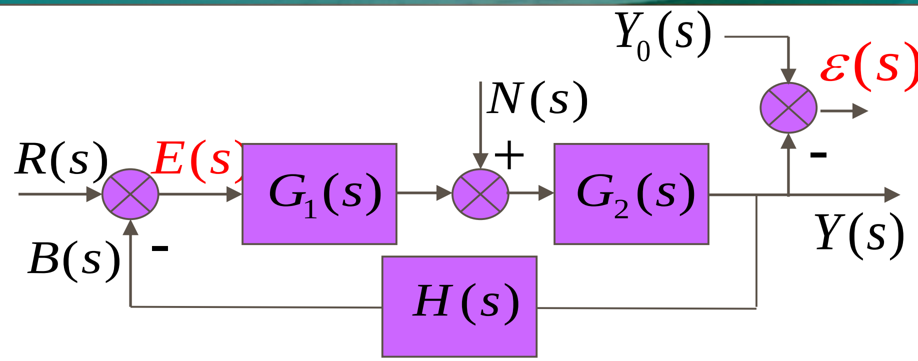
对单位反馈系统

给定作用 $r(t)$ 即为输出量的希望值，$r(t)=y_0(t)$，偏差等于误差，$\varepsilon(t)=e(t)$。



对非单位反馈系统

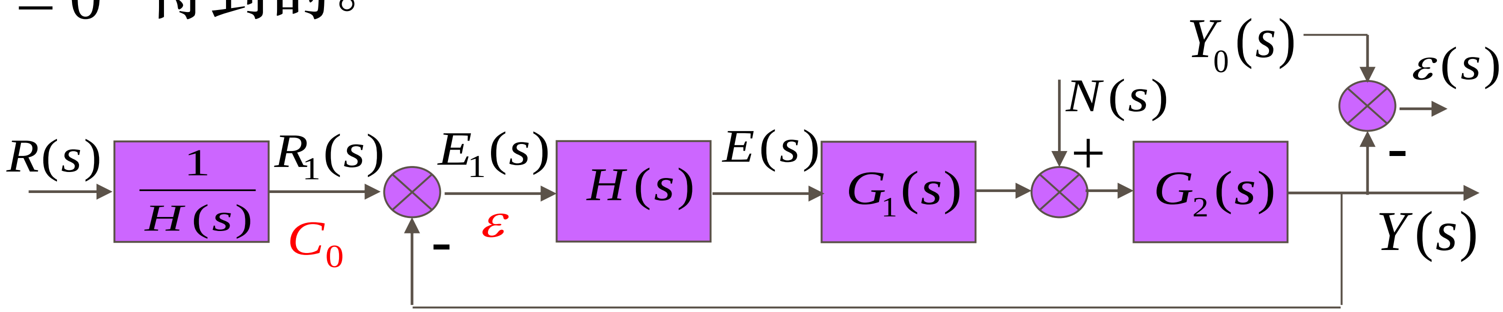
偏差不等于误差 $\varepsilon(t) \neq e(t)$



偏差和误差之间存在一定的关系：

$$E(s) = R(s) - B(s) = H(s)Y_0(s) - H(s)Y(s) = H(s)\varepsilon(s)$$

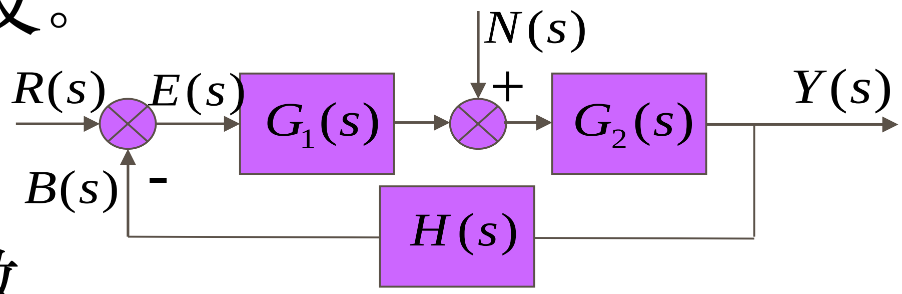
这里 $R(s) = H(s)Y_0(s)$ 是基于控制系统在理想工作情况下 $E(s) = 0$ 得到的。



误差就是指偏差；稳态误差就是指稳态偏差。

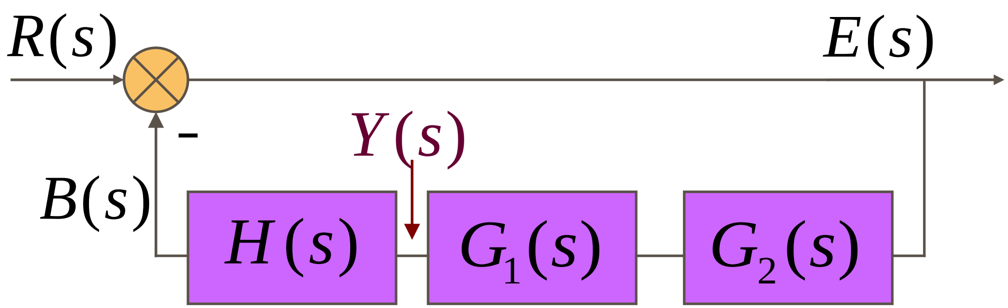
误差的定义相当于从系统输出端来定义的，在系统性能指标中经常使用，但在实际系统中有时无法量测，因而一般只有数学意义；

偏差的定义相当于从系统输入端来定义的，在实际系统中是可以量测的，具有一定的物理意义。



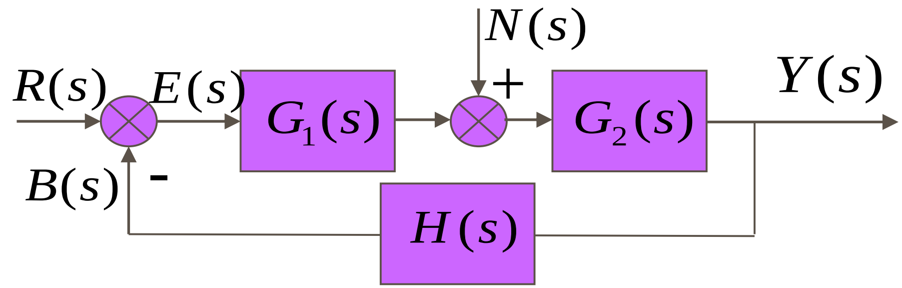
二、稳态误差的计算

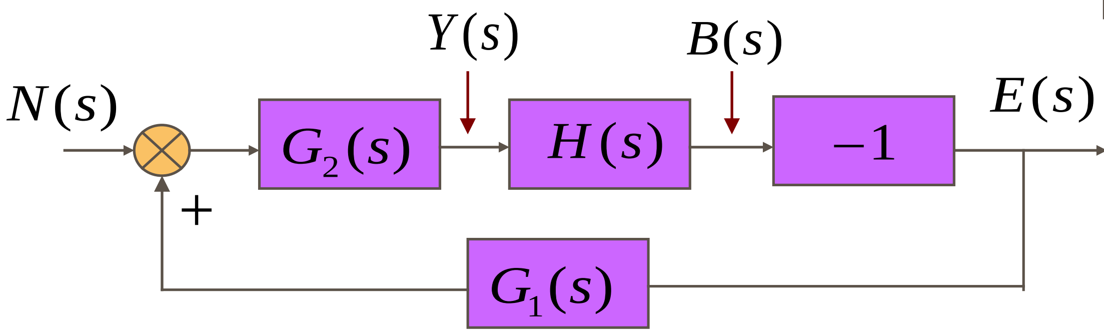
（1）给定作用下的偏差传递函数



$$\Phi_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

(2) 扰动作用下的偏差传递函数





$$\Phi_{NE}(s)=\frac{E(s)}{N(s)}=-\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

(3) 给定和扰动同时作用下的偏差表达式

$$E(s)=\Phi_E(s)R(s)+\Phi_{NE}(s)N(s)$$

$$=\frac{R(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}+\frac{-G_2(s)H(s)N(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

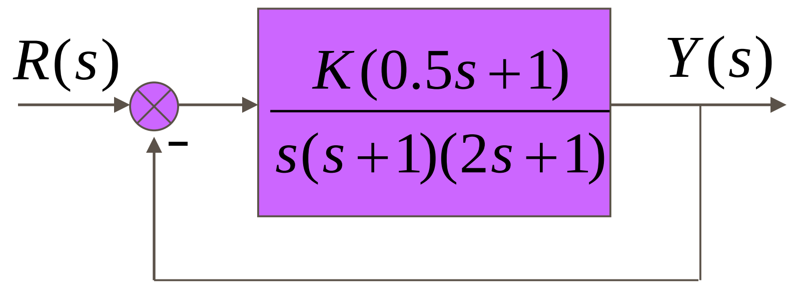
（4）对稳定的系统，可利用拉氏变换的终值定理计算稳态误差

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}+\lim_{s\to 0}\frac{-sG_2(s)H(s)N(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

终值定理要求 $f(t)$? 和 $\frac{df}{dt}$ 可拉氏变换；$\lim_{t\to\infty}f(t)$ 存在；并且除在原点处可以有极点外，$sF(s)$ 的所有极点都在s平面的左半开平面。

即只有稳定的系统，才可计算稳态误差。

例1 系统结构图如图所示，当输入信号为单位斜坡函数时，求系统在输入信号作用下的稳态误差；调整K值能使稳态误差小于0.1吗?



解：只有稳定的系统计算稳态误差才有意义；所以先判稳

系统特征方程为 $2s^3+3s^2+(1+0.5K)s+K=0$

由劳斯判据知稳定的条件为： $0<K<6$

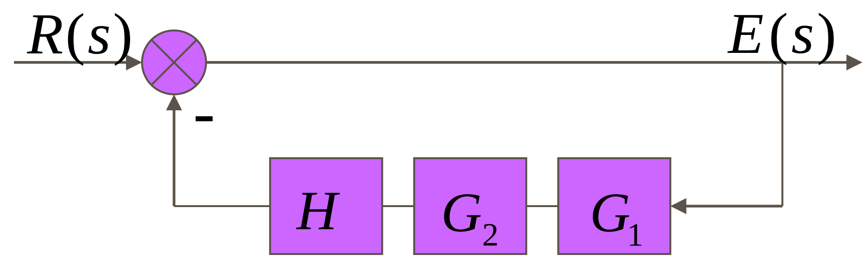
$$\Phi_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}=\frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1)+K(0.5s+1)}$$

$$R(s)=\frac{1}{s^2} \qquad E(s)=\frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1)+K(0.5s+1)}\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1)+K(0.5s+1)}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{1}{K}$$

由稳定的条件知： e_{ss} ? $>\frac{1}{6}$ 不能满足 $e_{ss}<0.1$ 的要求

三、给定输入作用下系统的误差分析



这时，不考虑扰动的影响。

可以写出系统的误差：

$$E(s)=\frac{1}{1+G_1G_2H}\cdot R(s)=\frac{1}{1+G_k}\cdot R(s)$$

$$e_{ssr}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_k(s)}$$

显然，e_{ssr}与输入和开环传递函数有关。

假设开环传递函数 $G_k(s)$ 的形式如下：

$$G_k(s)=\frac{K}{s^{\nu}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m_1}(\tau_i s+1)\prod_{k=1}^{m_2}(\tau_k s^2+2\zeta_k\tau_k s+1)}{\prod_{j=1}^{n_1}(T_j s+1)\prod_{l=1}^{n_2}(T_l s^2+2\zeta_l T_l s+1)}=\frac{K}{s^{\nu}}\cdot G_0(s)$$

$$G_k(s)=\frac{K}{s^{\nu}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m_1}(\tau_i s+1)\prod_{k=1}^{m_2}(\tau_k s^2+2\zeta_k\tau_k s+1)}{\prod_{j=1}^{n_1}(T_j s+1)\prod_{l=1}^{n_2}(T_l s^2+2\zeta_l T_l s+1)}=\frac{K}{s^{\nu}}\cdot G_0(s)$$

式中：$K-$开环放大系数；$\nu-$ 积分环节的个数；

$G_0(s)-$ 开环传递函数去掉积分和比例环节；

$$G_0(0)=1,\qquad m_1+2m_2=m,\qquad \nu+n_1+2n_2=n$$

$$e_{ssr}=\lim_{s\to0}\frac{sR(s)}{1+G_k(s)}=\lim_{s\to0}\frac{sR(s)}{1+\dfrac{K}{s^{\nu}}G_0(s)}=\lim_{s\to0}\frac{s^{\nu+1}R(s)}{s^{\nu}+K}$$

可见给定作用下的稳态误差与 **?** 有关；

与时间常数形式的开环增益有关；与积分环节的个数有关。

系统的无差度阶数（开环传递函数的型）

通常称开环传递函数中积分的个数为系统的无差度阶数，并将系统按无差度阶数进行分类。

当 $\nu = 0$，无积分环节，称为0型系统

当 $\nu = 1$，有一个积分环节，称为I型系统

当 $\nu = 2$，有二个积分环节，称为II型系统

$\cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots$

当 $\nu > 2$时，使系统稳定是相当困难的。因此除航天控制系统外，III型及III型以上的系统几乎不用。

- 当输入为 $R(s)=\dfrac{1}{s}$ 时（单位阶跃函数）

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G_k(s)}\times\frac{1}{s}=\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}G_k(s)}=\frac{1}{1+K_p}$$

式中：$K_p=\lim\limits_{s\to 0}G_k(s)$ 称为位置误差系数；

当 $\nu=0$ 时，$K_p=\lim\limits_{s\to 0}KG_0(s)=K$，　$\therefore e_{ssr}=\dfrac{1}{1+K}$

当 $\nu\geq 1$ 时，$K_p=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{K}{s^{\nu}}G_0(s)=\infty$，　$\therefore e_{ssr}=0$

K_p 的大小反映了系统在阶跃输入下的稳态精度。K_p 越大，e_{ss} 越小。所以说 K_p 反映了系统跟踪阶跃输入的能力。

在单位阶跃作用下，$\nu=0$ 的系统为有差系统，此时开环增益K越大稳态误差越小；$\nu\geq 1$ 的系统为无差系统。

- 当输入为$R(s)=\dfrac{1}{s^2}$时（单位斜坡函数）

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G_k(s)}\times\frac{1}{s^2}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}s\cdot G_k(s)}=\frac{1}{K_v}$$

式中：$K_v=\lim\limits_{s\to 0}s\cdot G_k(s)$ 称为速度误差系数；

当$\nu=0$时，$K_v=\lim\limits_{s\to 0}sKG_0(s)=0$，　$\therefore e_{ssr}=\infty$

当$\nu=1$时，$K_v=\lim\limits_{s\to 0}KG_0(s)=K$，　$\therefore e_{ssr}=\dfrac{1}{K}$

当$\nu\ge 2$时，$K_v=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{K}{s}G_0(s)=\infty$，　$\therefore e_{ssr}=0$

K_v的大小反映了系统在斜坡输入下的稳态精度。K_v越大，e_{ss}越小。所以说K_v反映了系统跟踪斜坡输入的能力。

根据K_v计算的稳态误差是系统在跟踪速度阶跃输入时位置上的误差。

- 当输入为 $R(s)=\dfrac{1}{s^3}$ 时（单位加速度函数）

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_k(s)}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}s^2\cdot G_k(s)}=\frac{1}{K_a}$$

式中:$K_a=\lim\limits_{s\to 0}s^2G_k(s)$ 称为加速度误差系数;

当 $\nu=0,1$ 时，$K_a=\lim\limits_{s\to 0}s^{2-\nu}KG_0(s)=0,\qquad \therefore e_{ssr}=\infty$

当 $\nu=2$ 时，$K_a=\lim\limits_{s\to 0}KG_0(s)=K,\qquad \therefore e_{ssr}=\dfrac{1}{K}$

当 $\nu\geq 3$ 时，$K_a=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{K}{s}G_0(s)=\infty,\qquad \therefore e_{ssr}=0$

K_a 的大小反映了系统在抛物线输入下的稳态精度。K_a 越大，e_{ss} 越小。所以说 K_a 反映了系统跟踪抛物线输入的能力。

根据 K_a 计算的稳态误差是系统在跟踪加速度阶跃输入时位置上的误差。

当系统的输入信号由位置，速度和加速度分量组成时，即

当$r(t)=A+Bt+\frac{Ct^2}{2}$时，有$e_{ssr}=\frac{A}{1+K_p}+\frac{B}{K_v}+\frac{C}{K_a}$

小结:

① 给定作用下的稳态误差与外作用有关。对同一系统加入不同的输入，稳态误差不同。

② 与时间常数形式的开环增益有关；对有差系统，K↑，稳态误差↓，但同时系统的稳定性和动态特性变差。

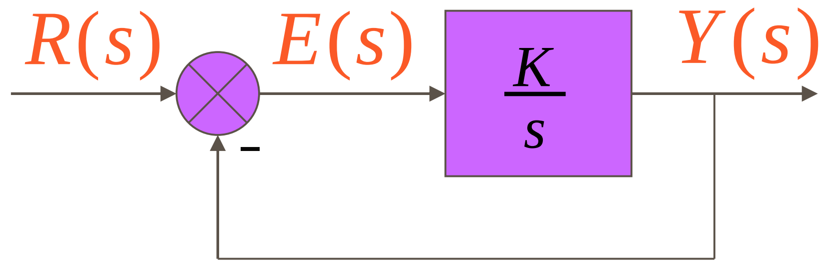
③ 与积分环节的个数有关。积分环节的个数↑，稳态误差↓，但同时系统的稳定性和动态特性变差。所以III型及III型以上的系统几乎不用。

由此可见对稳态误差的要求往往与系统的稳定性和动态特性的要求是矛盾的。

典型输入作用下的稳态误差

系统型别	静态误差系数			阶跃输入 $r(t)=A\cdot 1(t)$	斜坡输入 $r(t)=Bt$	抛物线输入 $r(t)=\frac{1}{2}Ct^2$
	K_p	K_v	K_a	位置误差 $e_{ss}=\frac{A}{1+K_p}$	速度误差 $e_{ss}=\frac{B}{K_v}$	加速度误差 $e_{ss}=\frac{C}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{A}{1+K}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{B}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{C}{K}$

典型一阶系统的稳态误差



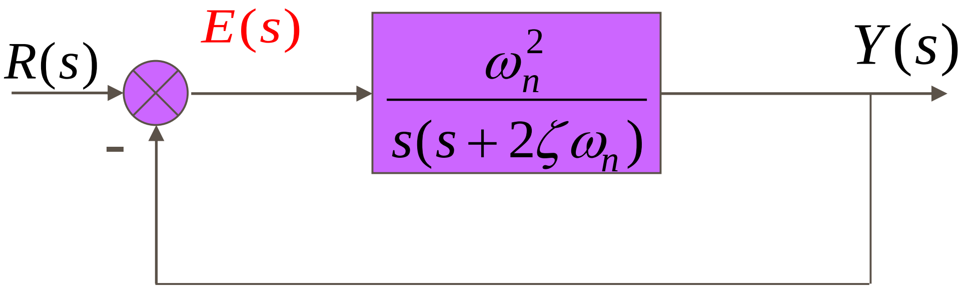
$$G_k(s)=\frac{K}{s}$$

$\nu=1,\quad K_p=\lim\limits_{s\to 0}G_k(s)=\infty$，阶跃输入时 $\quad e_{ssr1}=\dfrac{1}{1+K_p}=0$

$K_v=\lim\limits_{s\to 0}sG_k(s)=K$ 斜坡输入时 $\quad e_{ssr2}=\dfrac{1}{K_v}=\dfrac{1}{K}$

$K_a=\lim\limits_{s\to 0}s^2G_k(s)=0$，抛物线输入时 $\quad e_{ssr3}=\dfrac{1}{K_a}=\infty$

典型二阶系统的稳态误差



$$G_k(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

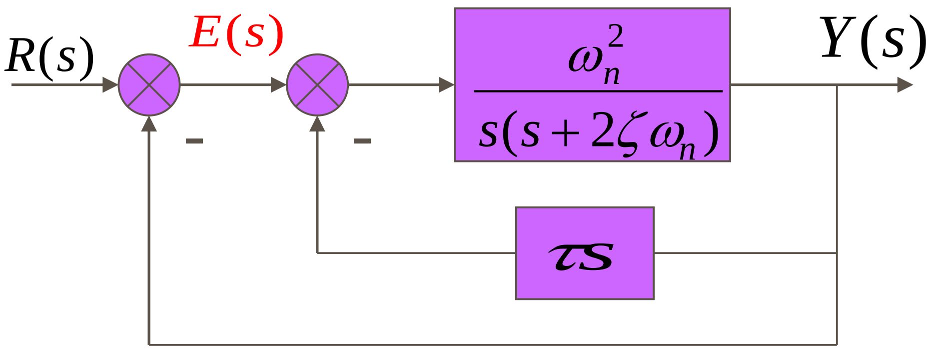
$\nu=1$， $K_p=\lim\limits_{s\to 0}G_k(s)=\infty$， 阶跃输入时 $e_{ssr1}=\frac{1}{1+K_p}=0$

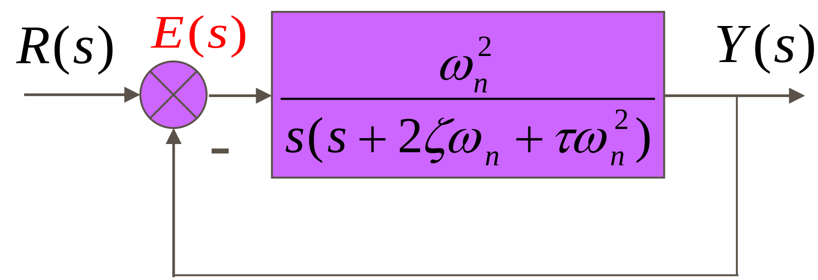
$K_v=\lim\limits_{s\to 0}sG_k(s)=\frac{\omega_n}{2\zeta}$ 斜坡输入时 $e_{ssr2}=\frac{1}{K_v}=\frac{2\zeta}{\omega_n}$

$K_a=\lim\limits_{s\to 0}s^2G_k(s)=0$， 抛物线输入时 $e_{ssr3}=\frac{1}{K_a}=\infty$

分别讨论速度反馈控制和比例微分控制对稳态误差的影响。

a. 输出量的速度反馈控制的稳态误差





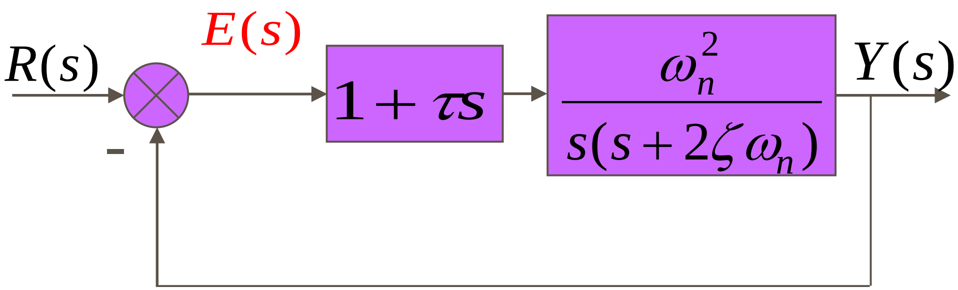
$$G_k(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n+\tau\omega_n^2)}$$

$\nu=1$, $K_p=\lim\limits_{s\to 0}G_k(s)=\infty$，阶跃输入时 $e_{ssr1}=\dfrac{1}{1+K_p}=0$

$K_v=\lim\limits_{s\to 0}sG_k(s)=\boxed{\dfrac{\omega_n^2}{2\zeta\omega_n+\tau\omega_n^2}}$，斜坡输入时 $e_{ssr2}=\dfrac{1}{K_v}=\boxed{\tau+\dfrac{2\zeta}{\omega_n}}$

$K_a=\lim\limits_{s\to 0}s^2G_k(s)=0$，抛物线输入时 $e_{ssr3}=\dfrac{1}{K_a}=\infty$

b. 误差的比例+微分控制的稳态误差



$$G_k(s)=\frac{\omega_n^2(1+\tau s)}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

$\nu=1$，$K_p=\lim\limits_{s\to 0}G_k(s)=\infty$，阶跃输入时 $\quad e_{ssr1}=\dfrac{1}{1+K_p}=0$

$K_v=\lim\limits_{s\to 0}sG_k(s)=\boxed{\dfrac{\omega_n}{2\zeta}}$ 斜坡输入时 $\quad e_{ssr2}=\dfrac{1}{K_v}=\boxed{\dfrac{2\zeta}{\omega_n}}$

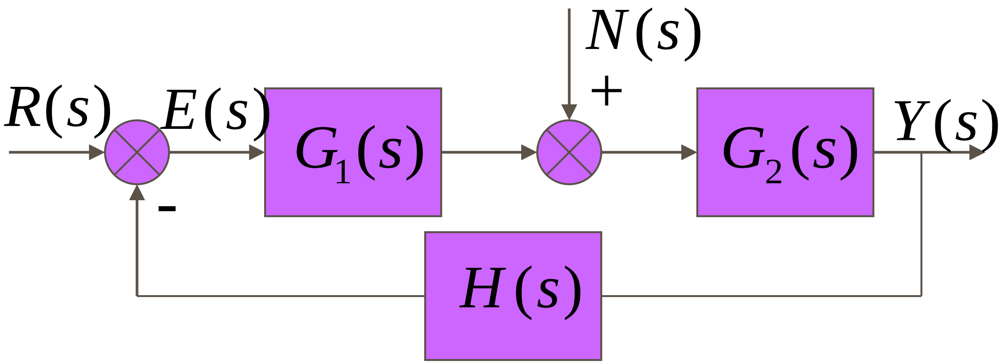
$K_a=\lim\limits_{s\to 0}s^2G_k(s)=0$，抛物线输入时 $\quad e_{ssr3}=\dfrac{1}{K_a}=\infty$

比例微分控制不改变原系统稳态误差，而测速反馈控制的稳态误差比原系统来得大。

四、扰动输入作用下系统的误差分析

通常，给定输入作用产生的误差为系统的给定误差，扰动作用产生的误差为扰动误差。

$R(s)=0, N(s)\neq 0$ 时产生的 $-Y(s)H(s)$ 称为扰动误差。



$$\frac{Y(s)}{N(s)}=\frac{G_2}{1+G_1G_2H}$$

$$Y(s)=\frac{G_2N(s)}{1+G_1G_2H}$$

$$E(s)=-Y(s)H(s)=-\frac{G_2H}{1+G_1G_2H}N(s)$$

$$\therefore e_{ssn}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\boxed{-\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{G_2H}{1+G_1G_2H}N(s)}$$

$$\therefore e_{ssn} = -\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{G_2H}{1+G_1G_2H}N(s) = -\lim_{s\to 0}\frac{sN(s)}{G_1}\cdot\frac{G_1G_2H}{1+G_1G_2H}$$

$$= -\lim_{s\to 0}\frac{sN(s)}{G_1}\cdot\frac{G_k}{1+G_k}$$

可见，e_{ssn} 不仅与 $G_k(s)$，$N(s)$ 有关，还与 $G_1(s)$ 有关（扰动点到偏差之间的那部分通道传递函数）。

$$G_k(s) = \frac{K}{s^{\nu}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m_1}(\tau_i s+1)\prod_{k=1}^{m_2}(\tau_k s^2+2\zeta_k\tau_k s+1)}{\prod_{j=1}^{n_1}(T_j s+1)\prod_{l=1}^{n_2}(T_l s^2+2\zeta_l T_l s+1)} = \frac{K}{s^{\nu}}\cdot G_0(s)$$

式中：$G_0(0)=1$

$$\therefore e_{ssn} = -\lim_{s\to 0} \frac{sN(s)}{G_1} \cdot \frac{\frac{K}{s^v}G_0}{1+\frac{K}{s^v}G_0} = \boxed{-\lim_{s\to 0} \frac{sN(s)}{G_1} \cdot \frac{K}{s^v + K}}$$

上式中 s^v 为开环传递函数所具有的积分环节个数。

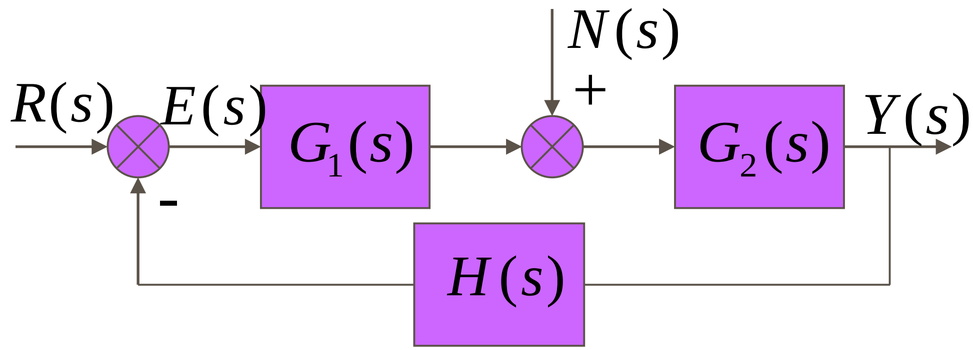
1. 当$v=0$，即开环传递函数中无积分环节，同时假设 $G_2(s)H(s)$ 无纯微分环节，因此$G_1(s)$中也无积分环节。

$$e_{ssn} = -\lim_{s\to 0} \frac{sN(s)}{G_1} \cdot \frac{K}{1+K}$$

此时在阶跃扰动输入时是有差系统，设 $G_1(s) = K_1 G_{10}(s)$，$G_{10}(0)=1$

$$G_{10}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m_{10}}(\tau_i s+1)\prod_{k=1}^{m_{20}}(\tau_k s^2 + 2\zeta_k \tau_k s+1)}{\prod_{j=1}^{n_{10}}(T_j s+1)\prod_{l=1}^{n_{20}}(T_l s^2 + 2\zeta_l T_l s+1)} \qquad e_{ssn} = -\frac{K}{K_1(1+K)}$$

2. 当$v>0$，即开环传递函数中有积分环节，但积分环节可在不同的地方。



$$e_{ssn}=-\lim_{s\to0}\frac{sN(s)}{G_1}\cdot\frac{K}{s^v+K}=-\lim_{s\to0}\frac{sN(s)}{G_1}\cdot\frac{K}{K}=\boxed{-\lim_{s\to0}\frac{sN(s)}{G_1}}$$

设 $G_1(s)=\frac{K_1}{s^u}G_{10}(s)$，$G_{10}(0)=1$ $\qquad e_{ssn}=-\lim_{s\to0}\frac{s^{u+1}N(s)}{K_1}$

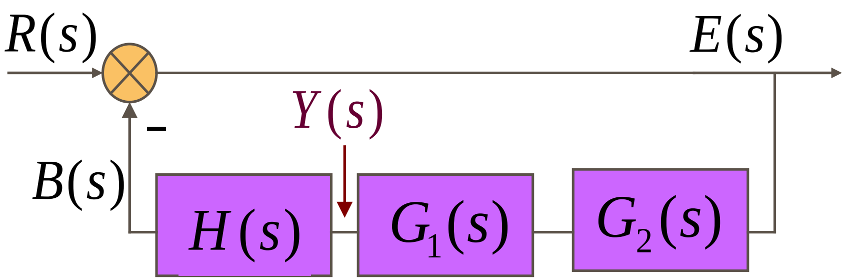
① 设 $u=0$ 即 $G_1(s)$无积分环节，在阶跃扰动作用下 $e_{ssn}=-\frac{1}{K_1}$

此时，尽管开环传递函数有积分环节，在阶跃扰动作用下还是有差的。

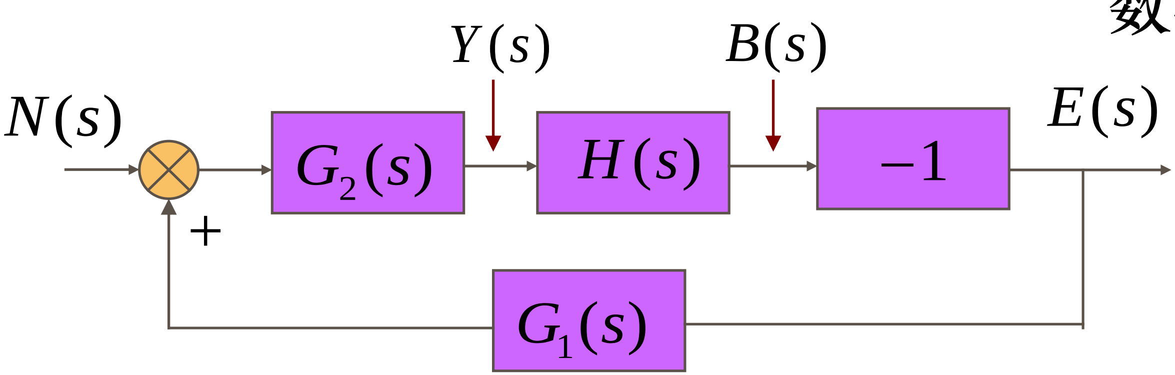
② 设 $u>0$即 $G_1(s)$有积分环节，在阶跃扰动作用下 $e_{ssn}=0$

若 $u=1$，在阶跃扰动作用下是无差的。若 $u=2$ 在斜坡扰动作用下也是无差的。 因此 $G_1(s)$ 环节中的积分环节决定了扰动作用下的无差度。

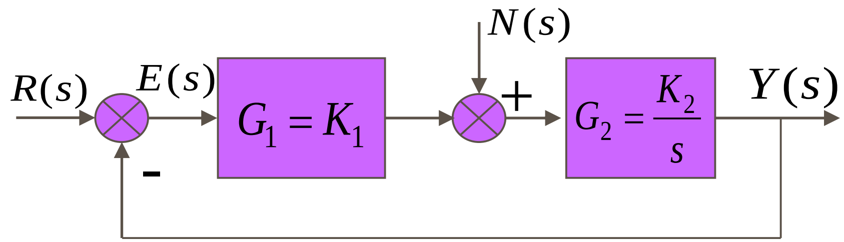
五、误差分析与反馈环节的关系



由图可见，不管是给定还是扰动作用产生的稳态误差，都与图中反馈环节中的积分环节的个数有关。



[例1]：系统结构图如图所示。



当 $r(t)=n(t)=1(t)$ 时，求系统的稳态误差 e_{ss}；若要求稳态误差为零，如何改变系统结构。

解：**稳定性判别**：因为系统是一阶系统，所以当K_1>0和K_2>0时，系统是稳定的。

该系统对给定输入而言属于I型系统。所以当给定输入为单位阶 跃函数时的稳态误差 $e_{ssr}=0$

但该系统对于扰动输入为单位阶跃函数时的稳态误差 e_{ssn} 并不等于零。根据前面的分析知，稳态误差与G_1中的增益和积分环节的个数有关。此时因G_1无积分环节，所以

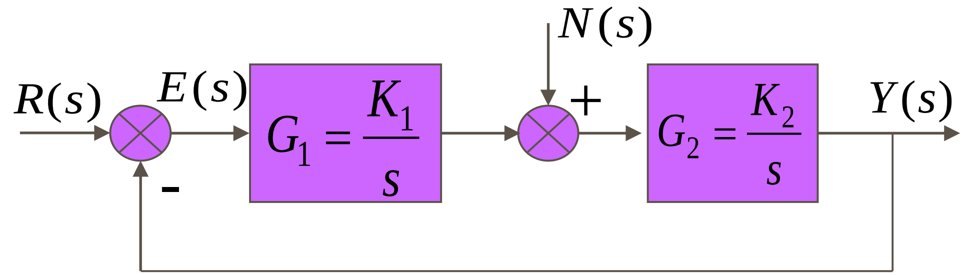
$$e_{ssn}=-\frac{1}{K_1}$$

也可这样求

$$e_{ssn}=\lim_{s\to 0} s\Phi_{NE}\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{-K_2}{s+K_1K_2}=-\frac{1}{K_1}$$

$$e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssn}=-\frac{1}{K_1}$$

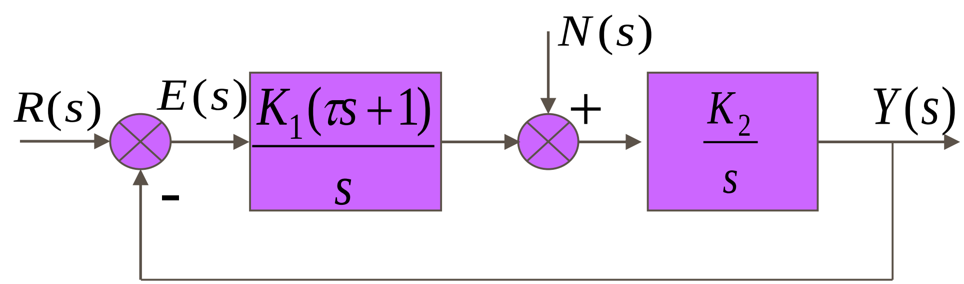
若想使稳态误差为零，则要求G_1中有积分环节，令



$$G_1=\frac{K_1}{s}$$

此时 $e_{ssn}=\lim\limits_{s\to 0} s\frac{-K_2/s}{1+K_1K_2/s^2}\frac{1}{s}=\lim\limits_{s\to 0}\frac{-K_2 s}{s^2+K_1K_2}=0$　　对不对?

由于此时系统的稳定性遭到破坏，成为结构不稳定系统，直接加一个积分环节是不可行的。若要使系统稳定，还必须在原G_1中引入比例+微分环节



$$G_1=\frac{K_1(\tau s+1)}{s}$$

$$\Phi=\frac{K_1K_2(\tau s+1)}{s^2+K_1K_2\tau s+K_1K_2}=0$$

当K_1>0，K_2>0，τ >0时系统稳定

由此可见当用 $G_1=\dfrac{K_1(\tau s+1)}{s}$ 时，才能在保证稳定的前提下使系统在阶跃扰动作用下的稳态误差为零。

?

$$G_1=\frac{K_1(\tau s+1)}{s}=K_1(\tau+\frac{1}{s})=K_1\tau+\frac{K_1}{s}$$

这个环节称为比例+积分环节或比例+积分控制器(PI控制器)。

$$G_1=\frac{K_1(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{s}=\frac{K_1+K_2 s+K_3 s^2}{s}=\frac{K_1}{s}+K_2+K_3 s$$

这个环节称为比例+积分+微分环节或比例+积分+微分控制器（PID控制器）。

所谓比例+积分(PI)或比例+积分+微分 (PID)控制器的作用就是在保证闭环系统稳定及动态特性的前提下提高系统的控制精度。

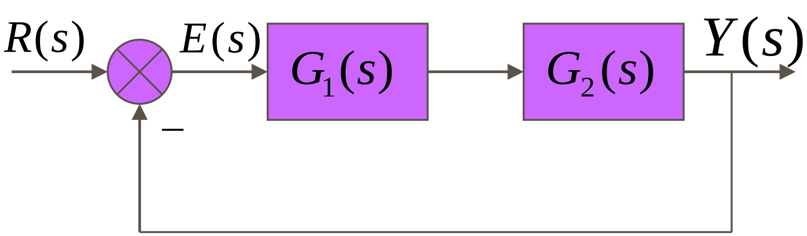
[结论]:

- 为了减少给定误差，可以增加前向通道上的积分环节个数或增大系统的开环放大系数。
- 为了减小扰动误差，可以增加偏差点到扰动作用点之间积分环节个数或放大系数。
- 放大系数不能任意放大，积分环节也不能太多（一般2个），否则系统将会不稳定。

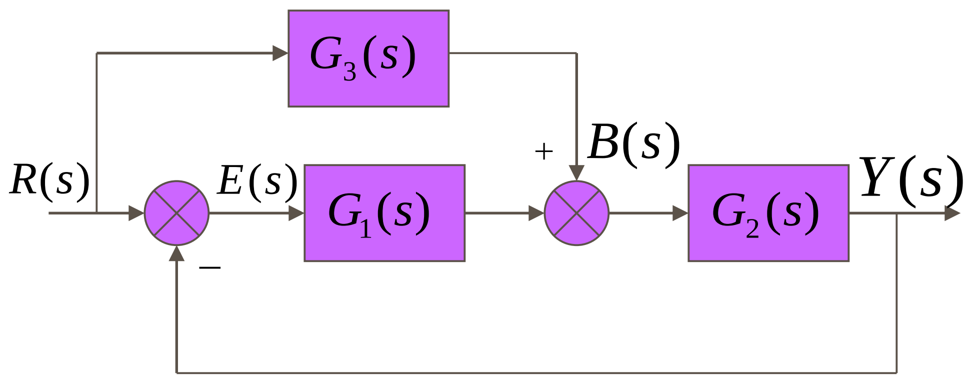
六、复合控制系统的误差分析

[复合控制系统]：在控制系统中引入与给定作用和扰动作用有关的附加控制可构成复合控制，可进一步减小给定误差和扰动误差。

1. 按给定作用补偿：



图(a)

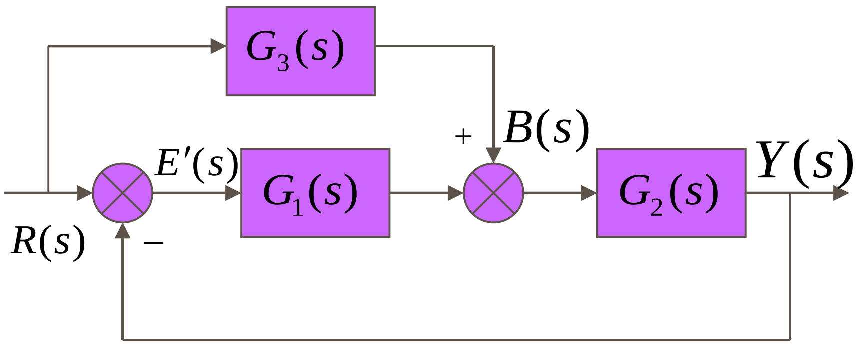


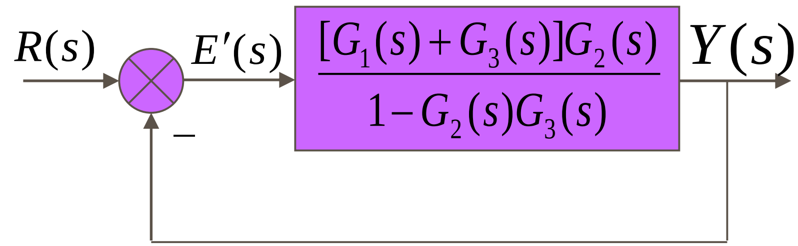
图(b)

在图(a)的基础上加上环节$G_3(s)$，就构成了顺馈控制系统。

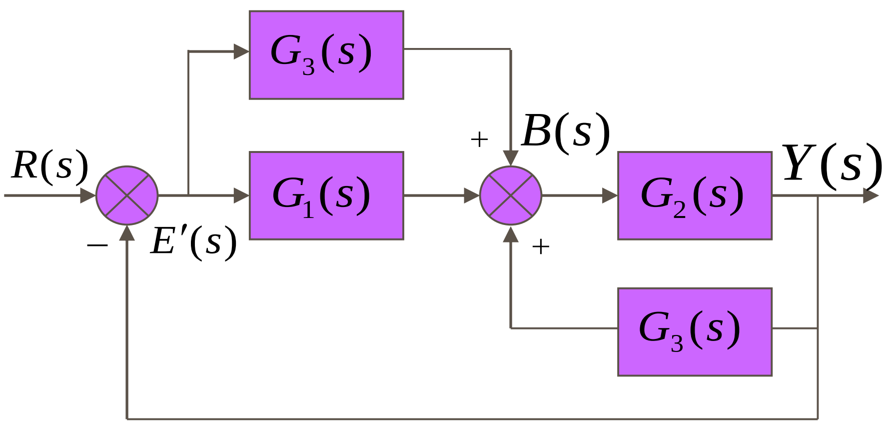
图(a)的误差：$E(s)=\dfrac{1}{1+G_1(s)G_2(s)}\cdot R(s)$

再来计算图(b)的误差函数 $E'(s)$。



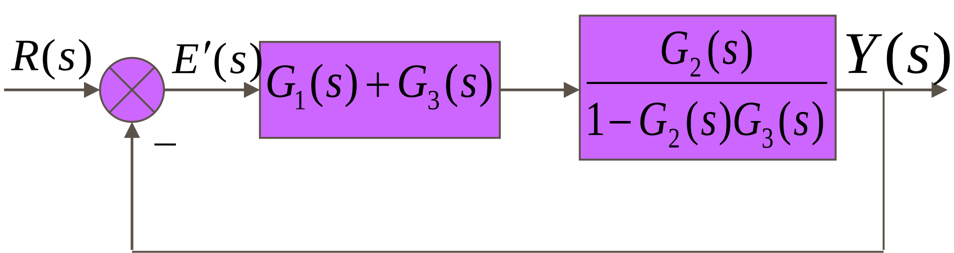


$$\frac{E'(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+\dfrac{[G_1(s)+G_3(s)]G_2(s)}{1-G_2(s)G_3(s)}}=\frac{1-G_2(s)G_3(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$



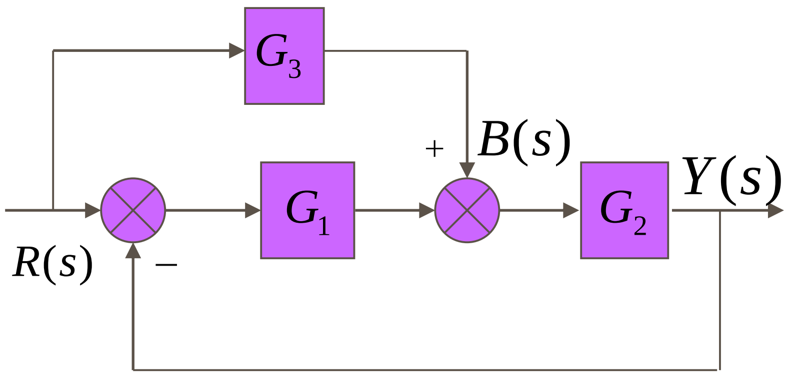
$$\therefore E'(s)=\frac{1-G_2G_3}{1+G_1G_2}\cdot R(s)$$

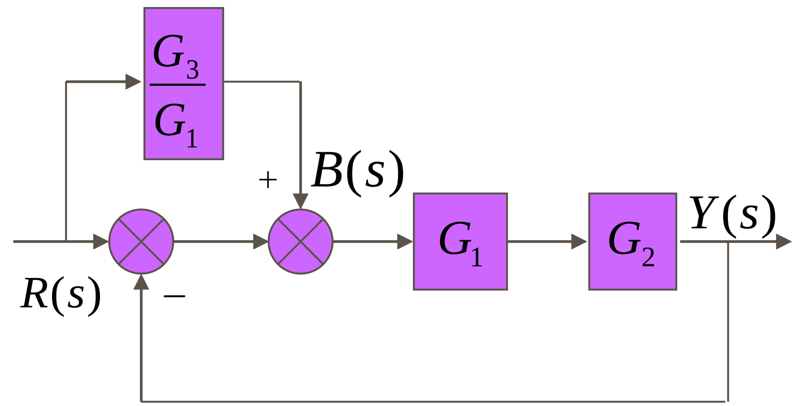
若满足 $G_3=\dfrac{1}{G_2}$ 则 $E'(s)=,0$

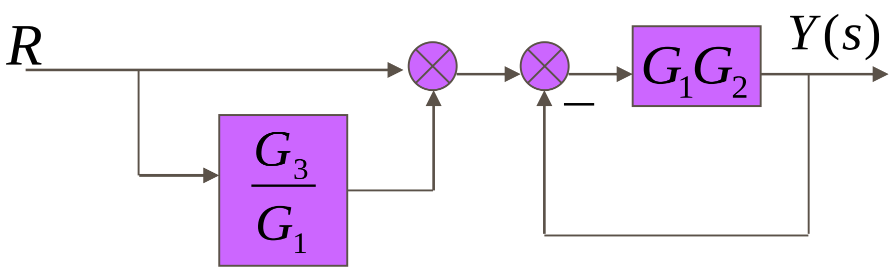


即由给定引起的稳态误差为零，输出完全复现给定输入。该式称为按给定作用实现完全不变性的条件。

由于这种补偿器的传递函数$G_3(s)$是在系统的回路之外，因此可以先设计系统的回路，保证其有较好的动态性能，然后再设计补偿器以提高系统对典型输入信号的稳态精度。





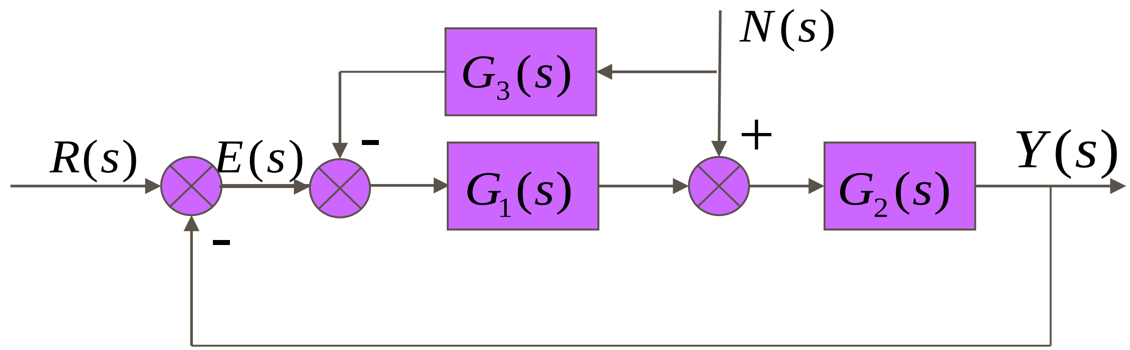


$$\Phi(s)=\frac{(G_1+G_3)G_2}{1+G_1G_2}$$

若满足$G_3=\dfrac{1}{G_2}$,则 $\Phi(s)=1$。

由上面分析可看出，按输入补偿的办法，实际上相当于将输入信号先经过一个环节，进行一下“整形”，然后再加给系统的回路，使系统既能满足动态性能的要求，又能保证高稳态精度。

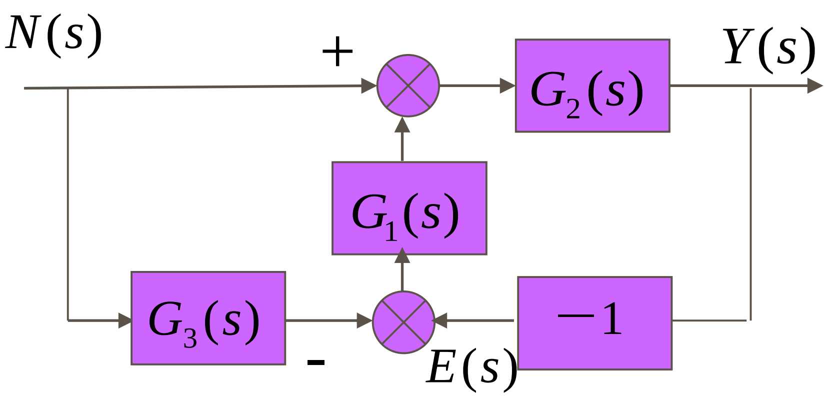
2. 按扰动作用补偿



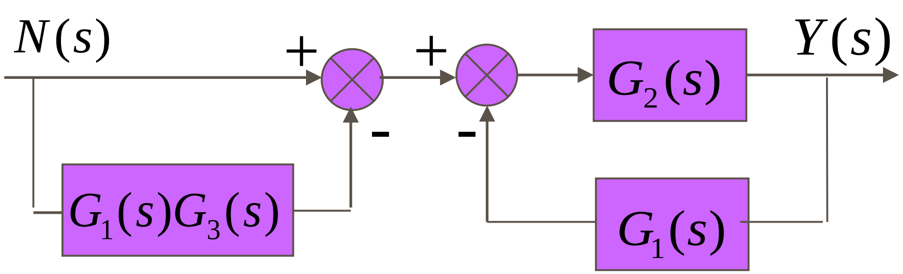
令 $R(s)=0$，由于是单位反馈系统，所以误差 $E(s)=-Y(s)$ 。

未加前馈时，$\Phi_N(s)=\dfrac{Y(s)}{N(s)}=\dfrac{G_2}{1+G_1G_2}$

$$E(s)=-Y(s)=-\frac{G_2}{1+G_1G_2}\cdot N(s)$$



$$Y'(s)=\frac{[1-G_1(s)G_3(s)]G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}\cdot N(s)$$

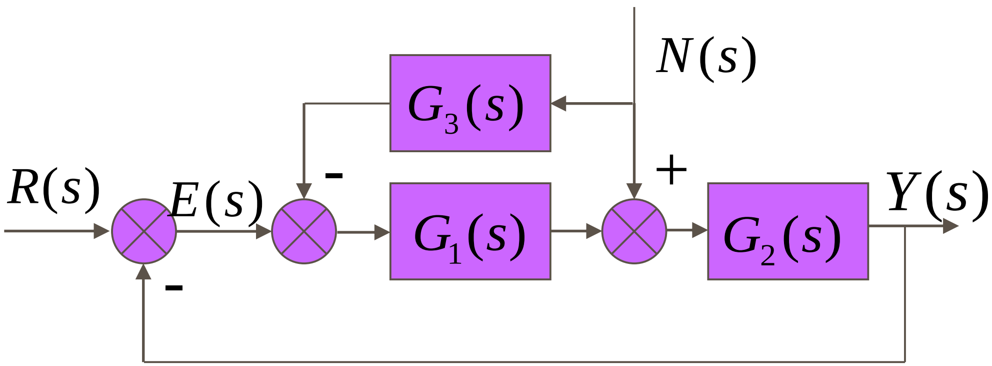


$$E'(s)=-Y'(s)$$

$$=-\frac{[1-G_1(s)G_3(s)]G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}\cdot N(s)$$

$$E'(s) = -Y'(s) = -\frac{[1 - G_1(s)G_3(s)]G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot N(s)$$

若$G_3(s) = \dfrac{1}{G_1(s)}$， 则$E'(s) = 0$,这个条件就是对扰动作用实现完全不变性的条件。即系统的输出完全不受扰动的影响。

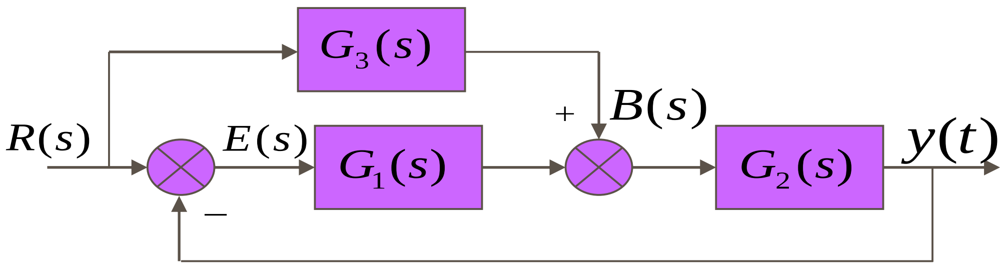


从结构图可看出，实际上是利用双通道原理使扰动信号经两条通道到达相加点时正好大小相等，方向相反。从而实现了干扰的全补偿。

但在实际的系统中，有时 $G_3(s) = \dfrac{1}{G_1(s)}$ 或 $\dfrac{1}{G_2(s)}$ 是难以实现的。

因为一般物理系统的传递函数分母的阶数总比分子的阶数高。可以采取近似的补偿，以减小给定或扰动引起的稳态误差。

[例3-10]如图所示的复合系统。$G_1(s)=\dfrac{K_1}{T_1s+1}$，$G_2(s)=\dfrac{K_2}{s(T_2s+1)}$ 顺馈补偿环节$G_3(s)=\tau_d s$。试求位置误差和速度误差。并讨论位置误差、速度误差与 τ_d的关系。



[解]：无补偿时误差为：

$$E(s)=\frac{1}{1+G_1G_2}R(s)$$

有补偿时误差为：

$$E(s)=\frac{1-G_2G_3}{1+G_1G_2}R(s)$$

- 位置误差：$r(t)=A\cdot 1(t),\ R(s)=\dfrac{A}{s}$

无补偿时，$e_{ssr}=\lim\limits_{s\to 0}sE(s)=\lim\limits_{s\to 0}s\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{K_1}{T_1s+1}\cdot\dfrac{K_2}{s(T_2s+1)}}\cdot\dfrac{A}{s}=0$

有补偿时，$e'_{ssr}=\lim\limits_{s\to 0}sE(s)=\lim\limits_{s\to 0}s\cdot\dfrac{1-\dfrac{K_2}{s(T_2s+1)}\tau_d s}{1+\dfrac{K_1}{T_1s+1}\cdot\dfrac{K_2}{s(T_2s+1)}}\cdot\dfrac{A}{s}=0$

- 速度误差：$r(t)=Bt, R(s)=\dfrac{B}{s^2}$

无补偿时， $e_{ssr}=\lim\limits_{s\to 0} sE(s)=\lim\limits_{s\to 0} s\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{K_1}{T_1s+1}\cdot\dfrac{K_2}{s(T_2s+1)}}\cdot\dfrac{B}{s^2}=\dfrac{B}{K_1K_2}$

有补偿时，

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1-\dfrac{K_2}{s(T_2s+1)}\tau_d s}{1+\dfrac{K_1}{T_1s+1}\cdot\dfrac{K_2}{s(T_2s+1)}}\cdot\frac{B}{s^2}=\frac{(1-K_2\tau_d)B}{K_1K_2}$$

分析：

1. 当 $\tau_d=0$ 时，没有顺馈补偿，速度误差等于 $e_{ssr}=\dfrac{B}{K_1K_2}$ 。
2. 当 $0<\tau_d<\dfrac{1}{K_2}$ 时，还有速度误差，但比补偿前要小。
3. 当 $\tau_d=\dfrac{1}{K_2}$ 时，速度误差为零，实现了完全补偿。这是一种近似不变性，相当于等效单位反馈系统的无差度阶数提高到2。这种近似不变性较易实现。

此时闭环传递函数为:

$$\Phi(s)=\frac{[G_1(s)+G_3(s)]G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}\qquad =\frac{K_2[K_1+\tau_d s(T_1s+1)]}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}$$

设等效单位反馈系统的开环传递函数为 $G_k(s)$,令 $\Phi(s)=\dfrac{G_k(s)}{1+G_k(s)}$

$$G_k(s)=\frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)}=\frac{K_2[K_1+\tau_d s(T_1s+1)]}{s(T_1s+1)(T_2s+1-K_2\tau_d)}$$

可见当$\tau_d=\dfrac{1}{K_2}$时，等效单位反馈系统的无差度阶数提高到2。

若根据按给定作用实现完全不变性的条件，则要求

$G_3=\dfrac{1}{G_2}=\dfrac{s(T_2s+1)}{K_2}$ ，这显然比 $G_3=\tau_d s=\dfrac{s}{K_2}$ 难于实现。

4. 当 $\tau_d>\dfrac{1}{K_2}$ 时，速度误差为负，过度补偿。表示输出量大于要求值。

七、动态误差系数

前面讨论的误差系数都称为静态误差系数，它们分别针对输入为阶跃函数、斜坡函数和抛物线函数而言的。其特点是对于一个给定系统只有一个系数为有限值，其它系数不是零就是无穷大。因而，通过静态误差系数求得的稳态误差或是零，或是有限非零值，或是无穷大，而不反映误差与时间的关系。

下面介绍的动态误差系数法，可以研究输入信号几乎为任意时间函数时的系统稳态误差与时间的关系，因此动态误差系数又称广义误差系数。

现只考虑给定作用与偏差之间的误差传递函数

$$\Phi_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_k}$$

考虑到$t\to\infty$时的情况，也就是$s\to 0$的情况。将误差传递函数在s=0的邻域内展开成泰勒级数

$$\Phi_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{k_0}+\frac{1}{k_1}s+\frac{1}{k_2}s^2+\cdots$$

其中： $$\frac{1}{k_0}=\frac{1}{1+G_k(s)}\bigg|_{s=0}$$

$$\frac{1}{k_1}=\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{1+G_k(s)}\right]\bigg|_{s=0}$$

$$\frac{1}{k_2}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{1+G_k(s)}\right]\bigg|_{s=0}$$

……

于是 $$E(s)=\frac{1}{k_0}R(s)+\frac{1}{k_1}sR(s)+\frac{1}{k_2}s^2R(s)+\cdots$$

这个级数的收敛域是$s=0$的邻域，相当于$t\to\infty$时的情况。求拉氏反变换，可得$t\to\infty$时误差函数的表达式

$$\lim_{t\to\infty}e(t)=\frac{1}{k_0}r(t)+\frac{1}{k_1}\frac{dr(t)}{dt}+\frac{1}{k_2}\frac{d^2r(t)}{dt^2}+\cdots$$

可见，$t\rightarrow\infty$时的误差函数的表达式与输入函数及其各阶导数有关。仿照静态误差系数的定义,可定义动态误差系数如下:

k_0 —动态位置误差系数

k_1 —动态速度误差系数

k_2 —动态加速度误差系数

应当指出，这里所谓“动态”两字的含义是指这种方法可以完整描述系统稳态误差$e_{ss}(t)$随时间变化的规律，而不是指误差信号中的瞬态分量$e_{ts}(t)$随时间变化的情况，即不应包含的误差信号中随时间趋于零的分量。此外上面给出的误差级数仅在$t\rightarrow\infty$时成立，因此如果输入信号r(t)中包含有随时间趋于零的分量，则这些分量不应包含在稳态误差级数表达式中的输入函数及其各阶导数之内。

动态误差系数的另一种求法

将误差传递函数写成s有理分式形式，利用长除法得到各动态误差系数。

$$G_k(s)=\frac{K}{s^{\nu}}\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+...+b_1 s+1}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+...+a_1 s+1}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_k(s)}$$

$$=\frac{s^{\nu}(a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+...+a_1 s+1)}{s^{\nu}(a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+...+a_1 s+1)+K(b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+...+b_1 s+1)}$$

当v=0时

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1+a_1 s++a_2 s^2...+a_{n-1}s^{n-1}+a_n s^n}{(1+K)+(a_1+b_1 K)s+(a_2+b_2 K)s^2+...}$$

$$\frac{1}{k_0}=\frac{1}{1+K}\qquad \frac{1}{k_1}=\frac{K(a_1-b_1)}{(1+K)^2}\qquad \frac{1}{k_2}=\frac{(a_2-b_2)K}{(1+K)^3}+\frac{a_1(b_1-a_1)K}{(1+K)^3}+\frac{b_1(b_1-a_1)K^2}{(1+K)^3}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{s^{\nu}(a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+1)}{s^{\nu}(a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+1)+K(b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+1)}$$

当v=1时

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{s+a_1 s^2++a_2 s^3\ldots+a_{n-1}s^n+a_n s^{n+1}}{K+(b_1K+1)s+(b_2K+a_1)s^2+\ldots}$$

$$\frac{1}{k_0}=0 \qquad \frac{1}{k_1}=\frac{1}{K} \qquad \frac{1}{k_2}=\frac{a_1-b_1}{K}-\frac{1}{K^2}$$

当v=2时

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{s^2+a_1 s^3++a_2 s^4\ldots+a_{n-1}s^{n+1}+a_n s^{n+2}}{K+b_1Ks+(b_2K+1)s^2+\ldots}$$

$$\frac{1}{k_0}=0 \qquad \frac{1}{k_1}=0 \qquad \frac{1}{k_2}=\frac{1}{K^2}$$

小 结

- 系统误差、稳态误差的定义
- 给定输入作用下系统的误差分析

  —系统的型

  —位置误差系数，速度误差系数，加速度误差系数
- 扰动输入作用下系统的误差分析
- 给定输入和扰动作用同时存在系统的误差分析

  —系统的总稳态误差等于给定误差和扰动误差的迭加（误差点定义在同一点）
- 复合控制系统的误差分析

  —按给定作用的补偿 —按扰动作用的补偿

第三章总结

- **稳定性**

  与闭环极点位置有关，相当于与系统的结构和参数有关；与输入无关。

- **瞬态响应及动态性能指标**

  与闭环传递函数的极点和零点的位置有关，输入一般为阶跃函数。

- **稳态性能**

  与时间常数形式开环传递函数中的积分环节及增益有关；与输入作用的形式有关；与输入作用的类型有关；