第七节 闭环系统性能分析

利用频率特性分析系统的性能：

稳定性、稳态性能、瞬态性能

1. 频率尺度与时间尺度的反比关系

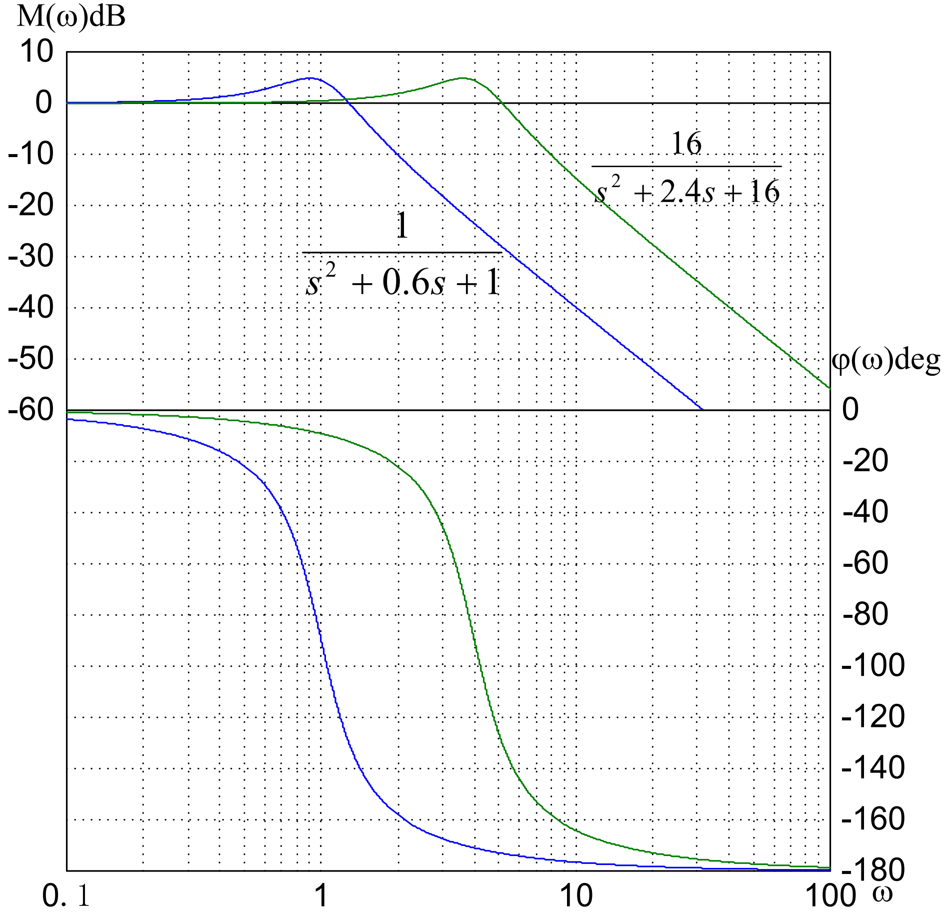
若两个系统的频率特性$\Phi_1(j\omega)$和$\Phi_2(j\omega)$有如下关系

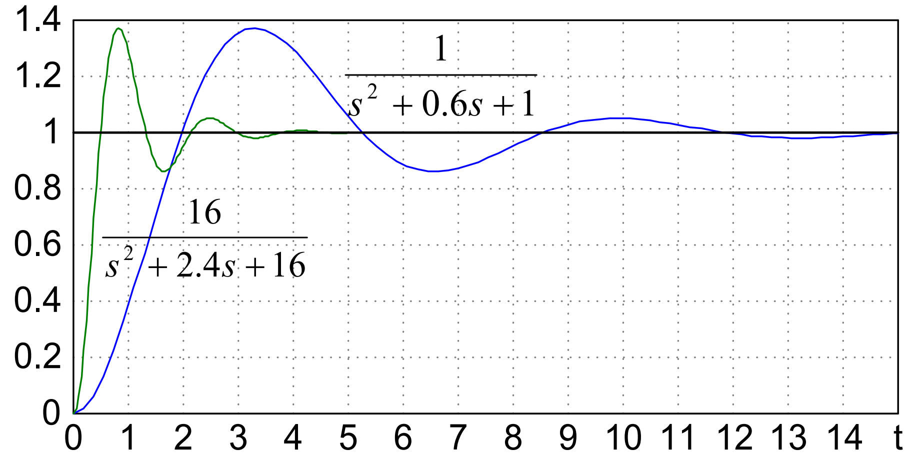
$$\Phi_1(j\omega)=\Phi_2(j\frac{\omega}{\alpha})\qquad \alpha>0$$

则两个系统的阶跃响应有如下关系

$$h_1(t)=h_2(\alpha t)$$

这个性质说明频率特性展宽多少倍，输出响应将加快多少倍。


M(ω)dB
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
$\frac{16}{s^2+2.4s+16}$
$\frac{1}{s^2+0.6s+1}$
φ(ω)deg
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
-180
0. 1
1
10
100
ω


1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
$\frac{1}{s^2+0.6s+1}$
$\frac{16}{s^2+2.4s+16}$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 t

2. 频率特性与系统时域性能的关系

① 频率响应的低频区(远低于幅值穿越频率的区域)，表征了闭环系统的稳态特性；

② 频率响应的高频区(远高于幅值穿越频率的区域)，表征了闭环系统输出响应的起始部分；

③ 频率响应的中频区(靠近幅值穿越频率的区域)，表征了闭环系统的稳定性和瞬态性能。

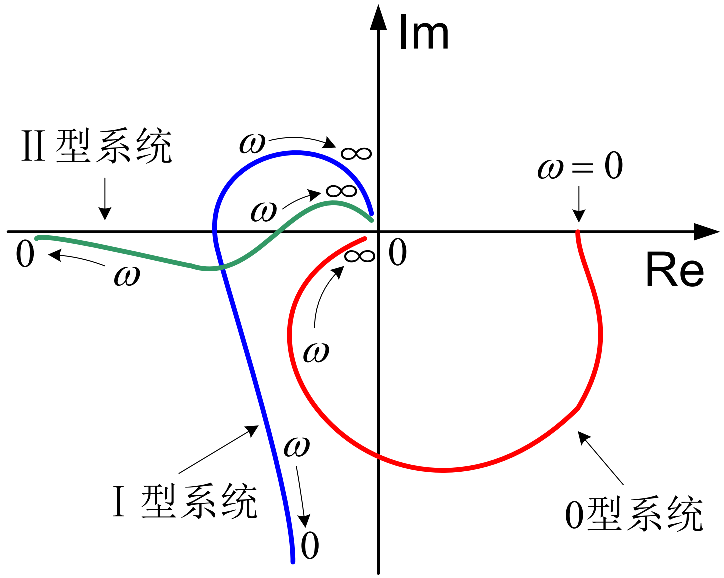
$$\left.\begin{array}{l}\text{闭环频率特性的}M_p\text{、}\omega_p\text{和}\omega_b\\ \text{开环频率特性的}\omega_c\text{、}\gamma\text{、}\omega_g\text{和}K_g(L_g)\end{array}\right\}\text{都是中频特性}$$

一、利用频率特性分析系统的稳态性能

如果通过频率特性曲线能确定系统的无差度阶数 ν（即积分环节的个数）和开环放大系数k的话，则可求得系统的稳态误差。

1. 利用开环频率特性分析系统的稳态性能

（1）由极坐标图分析系统的稳态性能



（2）由波德图分析系统的稳态性能

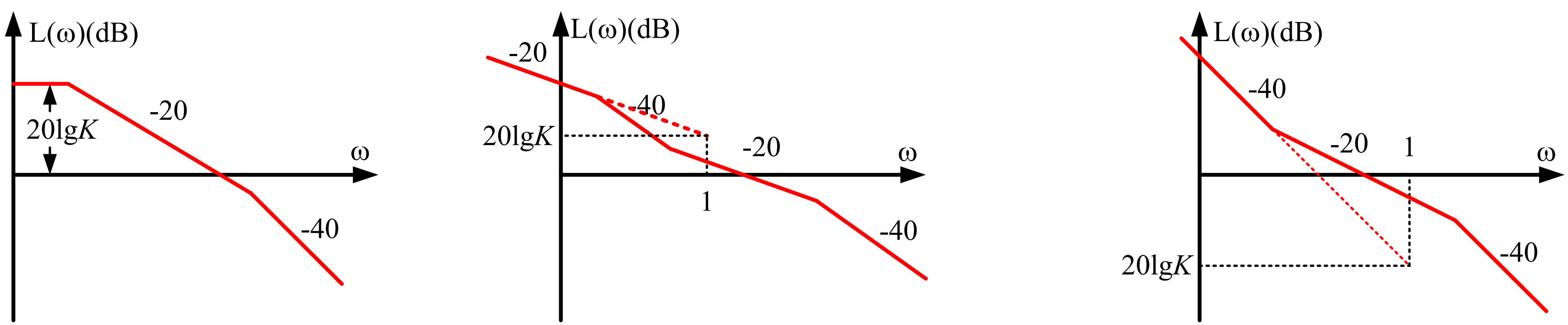
在波德图上，低频渐近线的斜率λ和ν的关系如下：

由$\lambda=-20\nu(dB/Dec)$,可求得ν值；也可由$\varphi(\omega)|_{\omega\to 0}=-\nu\cdot\dfrac{\pi}{2}$ ，求ν。

开环放大系数 k 的求法有两种：

① 低频渐近线为：$L_1(\omega)=20\log\left|\dfrac{k}{(j\omega)^{\nu}}\right|=20\log k-20\nu\log\omega$

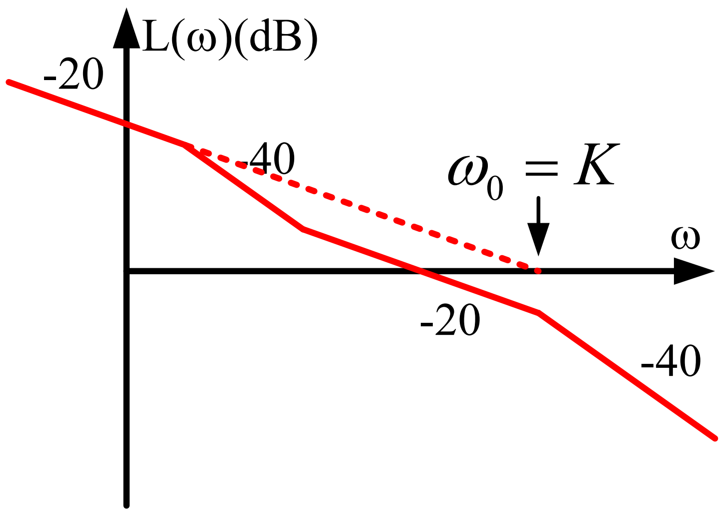
当$\omega=1$时，有：$L_1(1)=20\log k$ ，故：$k=10^{\frac{L_1(1)}{20}}$



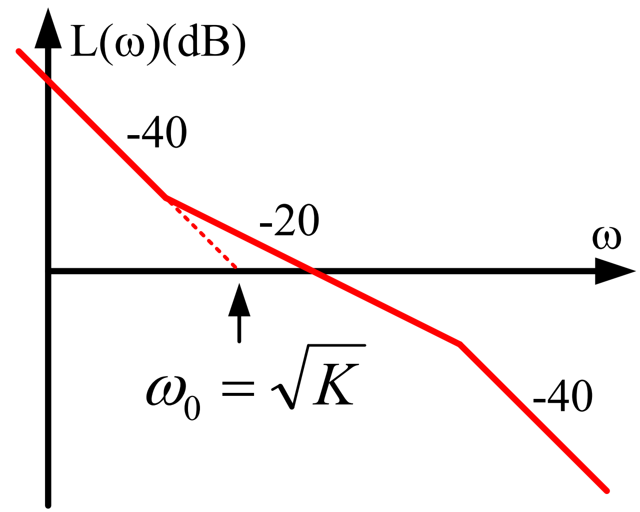
（a）0型系统　　（b） I 型系统　　（c） II 型系统

② 当$\nu \geq 1$时，k 也可由$L_1(\omega)$与横轴的交点ω_0来求。

$$\text{当}\ \omega=\omega_0\ \text{时}，L(\omega_0)=0，\text{有}：0=20\log k-20\nu\log\omega_0, \therefore k=\omega_0^{\ \nu}$$



(a) Ⅰ型系统



(b) Ⅱ型系统

2. 利用闭环幅频特性的零频值 M(0) 分析系统的稳态性能

- 零频值 M(0)：闭环幅频特性的零频值

$$c(\infty)=\lim_{t\to\infty}c(t)=\lim_{s\to 0}s\,\Phi(s)\frac{1}{s}=\lim_{\omega\to 0}\left|\Phi(\omega)\right|=M(0)$$

系统的稳态误差为 $e_{ssr}=1-M(0)$

- 当ν=0时 $M(0)=\dfrac{K}{1+K}<1$ $e_{ssr}=1-M(0)=\dfrac{1}{1+K}$

K越大稳态误差越小，M(0)越接近于1

- 当ν>0时 $M(0)=1$ $e_{ssr}=1-M(0)=0$

所以对单位反馈系统而言，可根据闭环频率特性的零频值M(0)来确定系统的稳态误差。

二、利用频率特性分析系统的瞬态性能

频域性能指标与时域性能指标的关系

1. 时域性能指标

在时域分析中，性能指标一般是最大超调量δ%、调节时间t_s、峰值时间t_p等。

（1） 对一阶系统而言，性能指标只有t_s。

$$t_s \approx \begin{cases} 4T,\ \text{当}\ \Delta = 2\text{时} \\ 3T,\ \text{当}\ \Delta = 5\text{时} \end{cases}$$

（2） 对二阶系统而言，系统可根据阻尼系数ζ的不同分为：

① 无阻尼系统; ② 欠阻尼系统;

③ 临界阻尼系统; ④ 过阻尼系统;

② 对典型欠阻尼二阶系统而言，性能指标与系统的特征参数有关。欠阻尼二阶系统的特征参数是阻尼系数ζ和无阻尼震荡频率ω_n。

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=\frac{\pi}{\omega_d} \qquad \delta\%=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\%$$

$$t_s\approx\begin{cases}\dfrac{4}{\zeta\omega_n}, & \text{当}\ \Delta=2\text{时}\\[2ex] \dfrac{3}{\zeta\omega_n}, & \text{当}\ \Delta=5\text{时}\end{cases}$$

③ 对临界阻尼二阶系统而言，性能指标只有t_s。

$$t_s\approx\begin{cases}\dfrac{5.84}{\omega_n}, & \text{当}\ \Delta=2\text{时}\\[2ex] \dfrac{4.75}{\omega_n}, & \text{当}\ \Delta=5\text{时}\end{cases}$$

2. 频域性能指标

(1) 开环频率特性性能指标

幅值稳定裕度 $K_g(L_g)$

相角稳定裕度 γ

幅值穿越频率 ω_c

(2) 闭环频率特性性能指标

零频值 $M(0)$

谐振峰值M_p

谐振频率ω_p

系统带宽和带宽频率 ω_b

3. 典型二阶系统的频域指标与瞬态性能指标的关系

典型二阶系统开环传递函数为： $G_k(s)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+2\zeta\omega_n)}$

开环频率特性为： $G_k(j\omega)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{(j\omega)(j\omega+2\zeta\omega_n)}$

开环幅频特性为： $A(\omega)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{\sqrt{(\omega_n^{\ 2}-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}$

开环相频特性为： $\varphi(\omega)=-90^\circ-tg^{-1}\dfrac{\omega}{2\zeta\omega_n}=-180^\circ+tg^{-1}\dfrac{2\zeta\omega_n}{\omega}$

令A(ω)=1，可求得幅值穿越频率 $\omega_c=\omega_n\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}$

代入φ(ω)，得 $\varphi(\omega_c)=-180^\circ+tg^{-1}\dfrac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}}$

系统的相角裕量 $\gamma=tg^{-1}\dfrac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}}$

闭环传递函数为： $$\Phi(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$$

闭环频率特性为： $$\Phi(j\omega)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^{\ 2}}$$

幅频特性为： $$M(\omega)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{\sqrt{(\omega_n^{\ 2}-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}$$

令 $\dfrac{dM}{d\omega}=0$ ，可得当 $0<\zeta<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时

$$\omega_P=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$M_P=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

令 $M(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}M(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，可得带宽频率 ω_b

$$\omega_b=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}$$

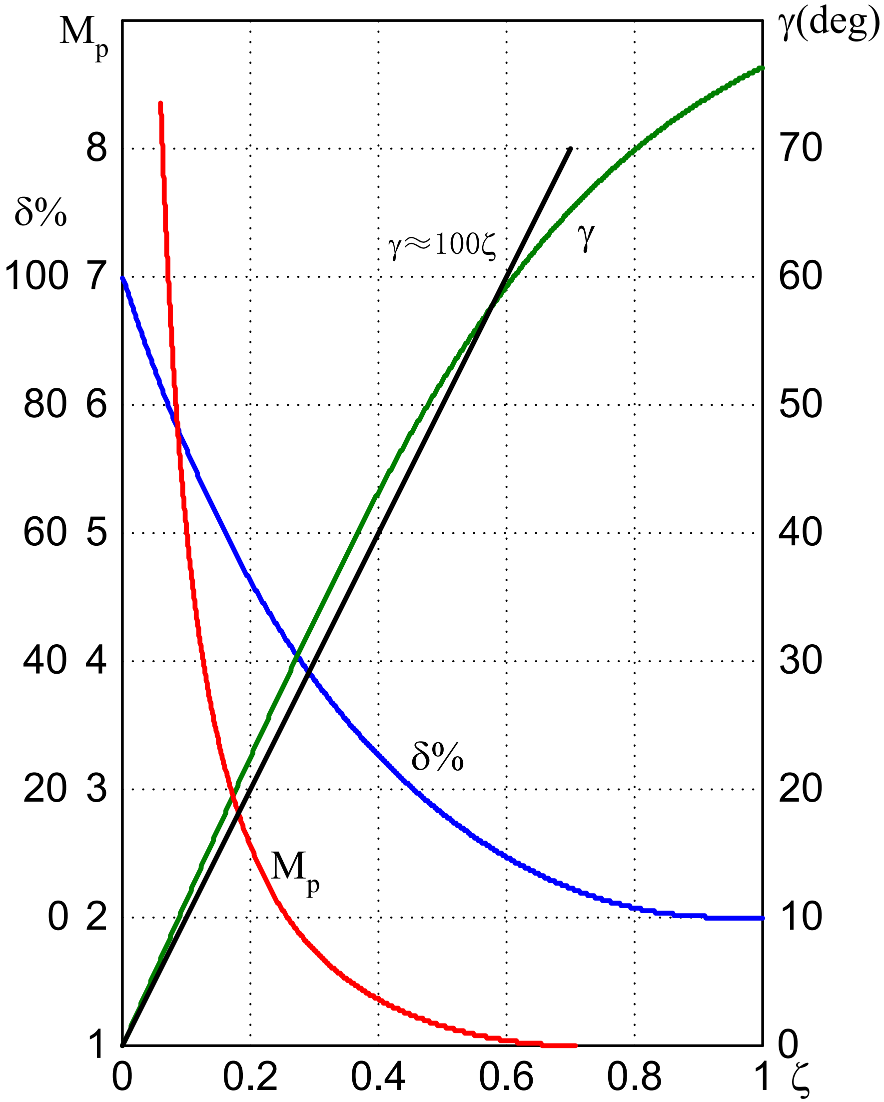
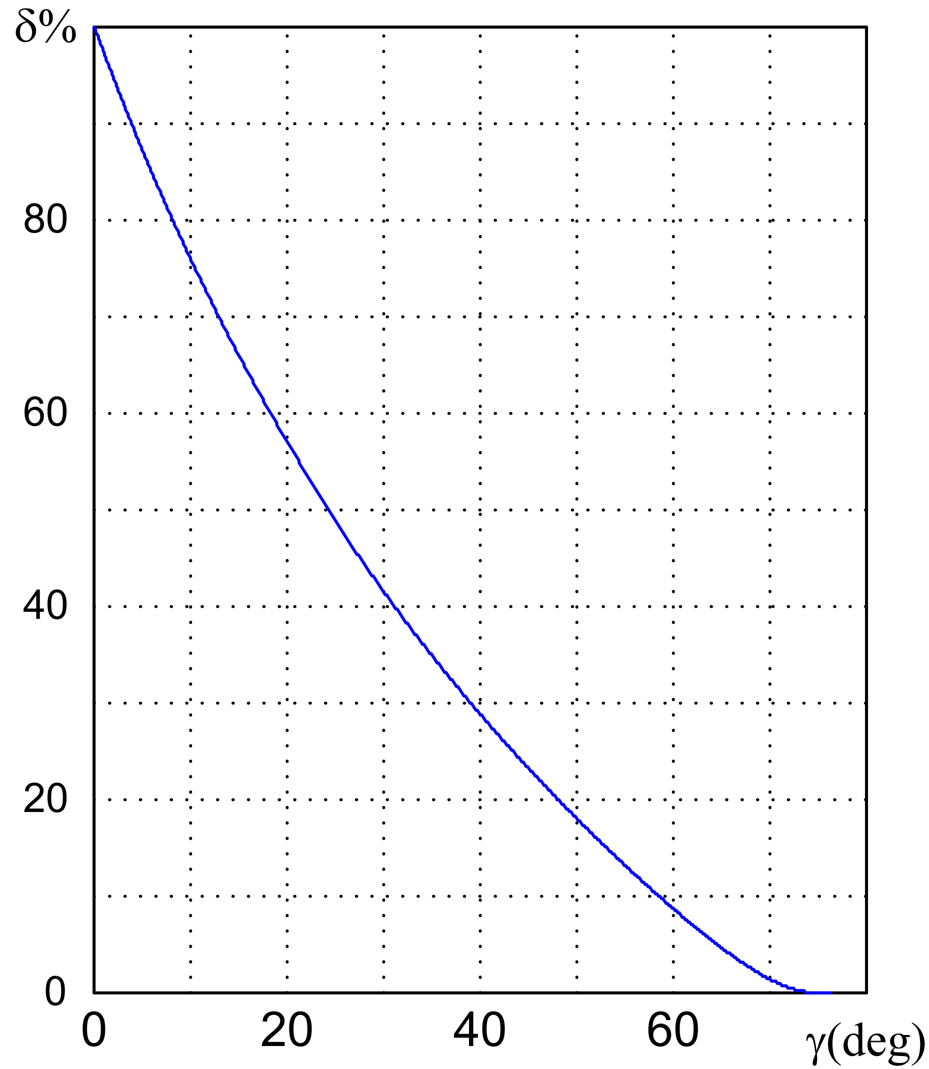
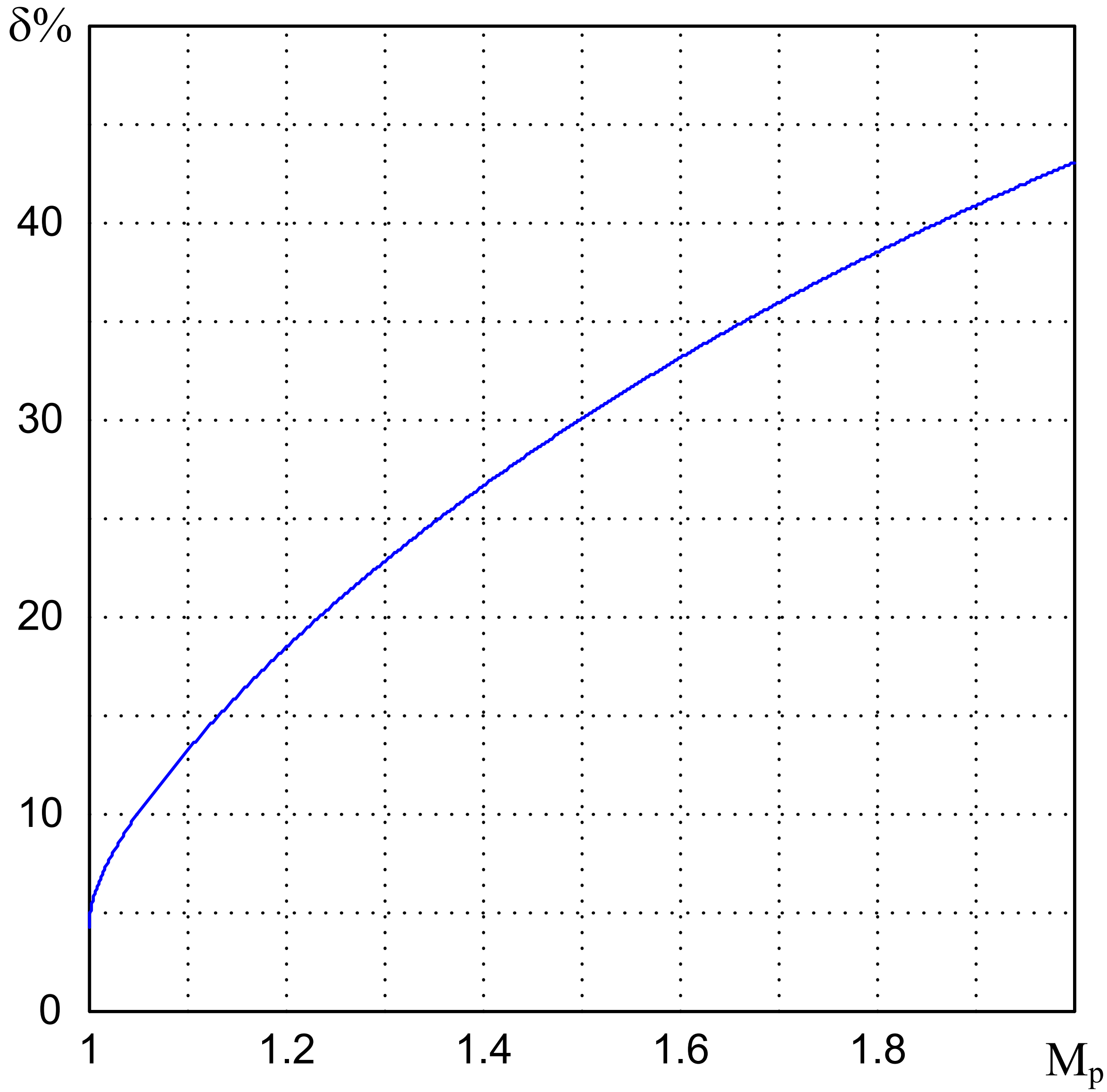


图5-75　δ%、M_p和γ与ζ的关系



欠阻尼二阶系统的δ%与γ的关系

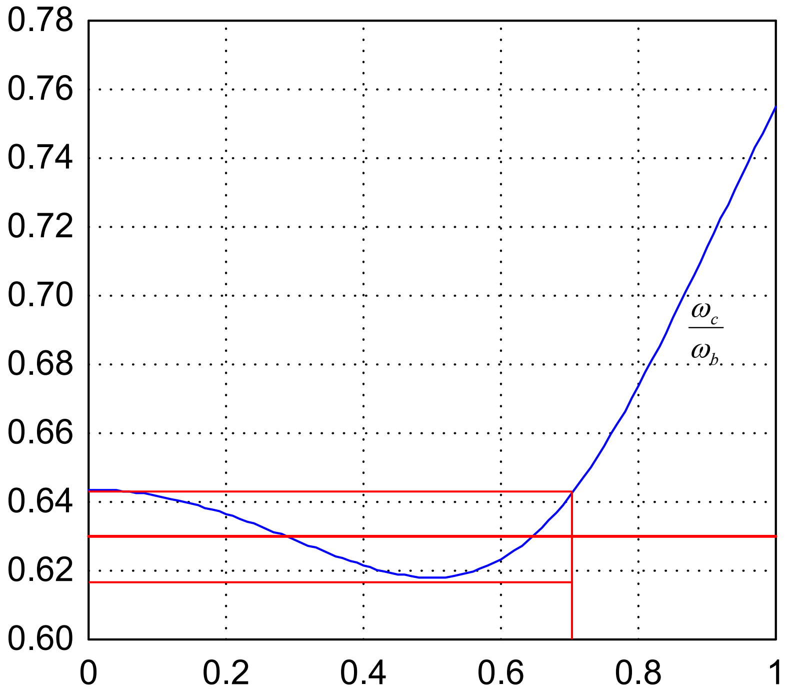


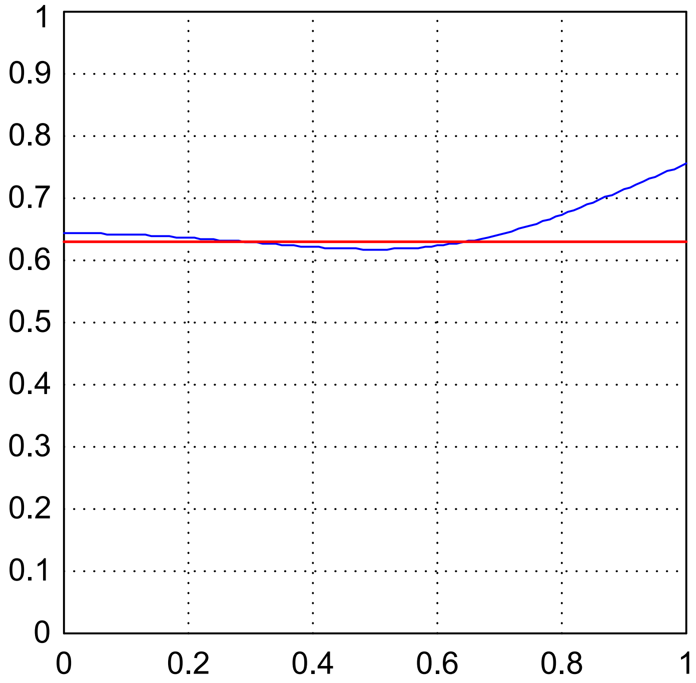
二阶系统δ%与M_p的关系曲线

$$\frac{\omega_c}{\omega_b}=\sqrt{\left(\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2\right)\left(\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}-1+2\zeta^2\right)}$$

$\omega_c \approx 0.63\omega_b$

ζ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
γ	0	12	24	35	45	53	61	65.2	72	75	78
ω_c/ω_b	0.644	0.642	0.636	0.629	0.622	0.618	0.623	0.644	0.674	0.714	0.755

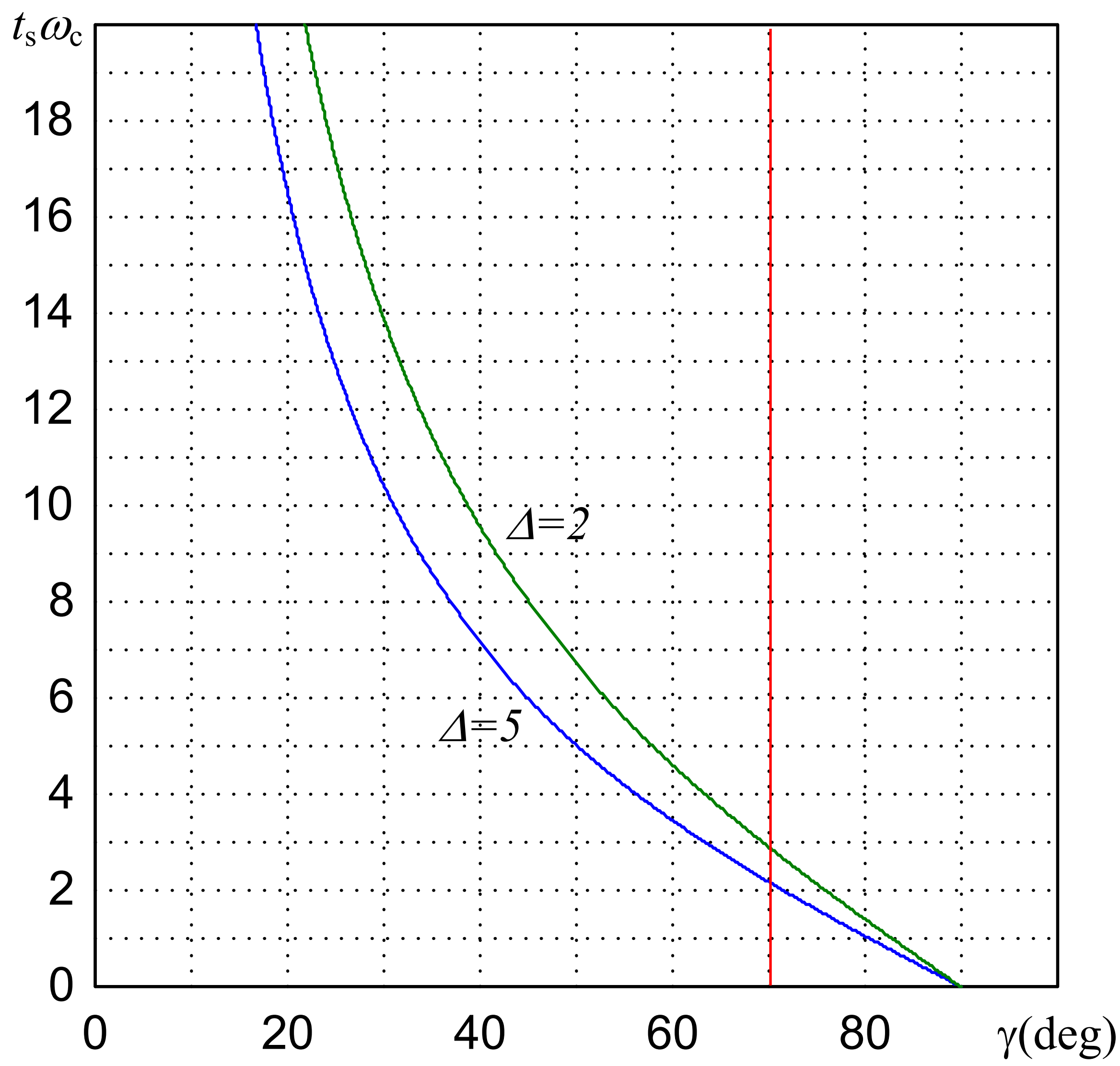




$$\begin{cases} \omega_c = \omega_n\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2} \\ tg\gamma = \dfrac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}} \end{cases} \Rightarrow \omega_c tg\gamma = 2\zeta\omega_n \qquad t_s \approx \begin{cases} \dfrac{8}{\omega_c tg\gamma}, & \text{当 } \Delta = 2\text{时} \\ \dfrac{6}{\omega_c tg\gamma}, & \text{当 } \Delta = 5\text{时} \end{cases}$$

ω_c与ω_b成正比；ω_b越高， ω_c也越高，在相角裕度固定的情况下，t_s越短。

如果两个系统具有相同的相角裕度，则它们的相对稳定性(或超调量)大致相同，此时响应的快速性与幅值穿越频率ω_c成正比(或调节时间与幅值穿越频率ω_c成反比)，ω_c越高，t_s越短。



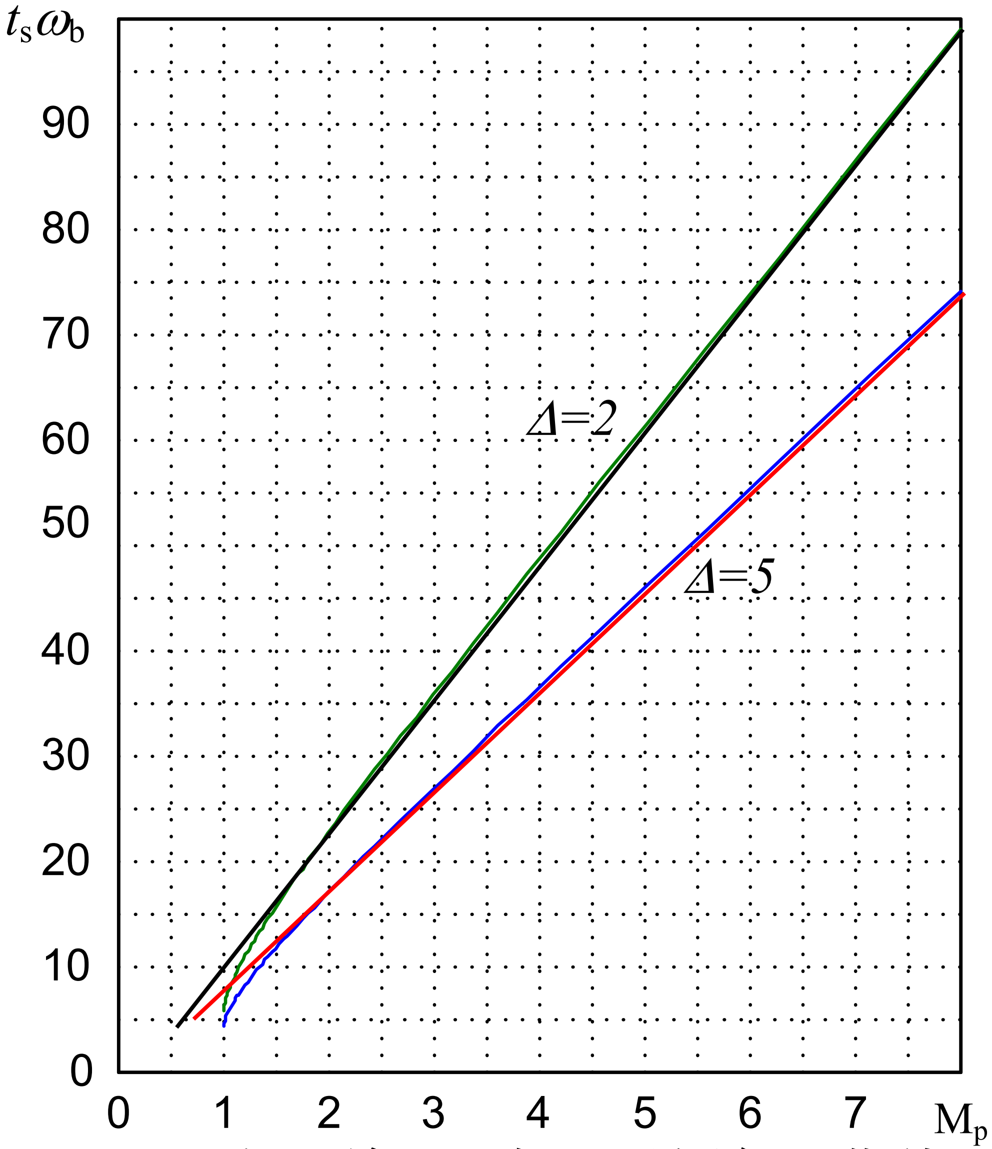
欠阻尼二阶系统的$t_s\omega_c$与γ的关系曲线

$$t_s \approx \begin{cases} \dfrac{4}{\zeta\omega_n}, & \text{当 } \Delta = 2\text{时} \\ \dfrac{3}{\zeta\omega_n}, & \text{当 } \Delta = 5\text{时} \end{cases}$$

$$\omega_b = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}$$

$$\omega_b t_s = \begin{cases} \dfrac{4}{\zeta}\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}} \\ \dfrac{3}{\zeta}\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}} \end{cases}$$

$$M_P = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$



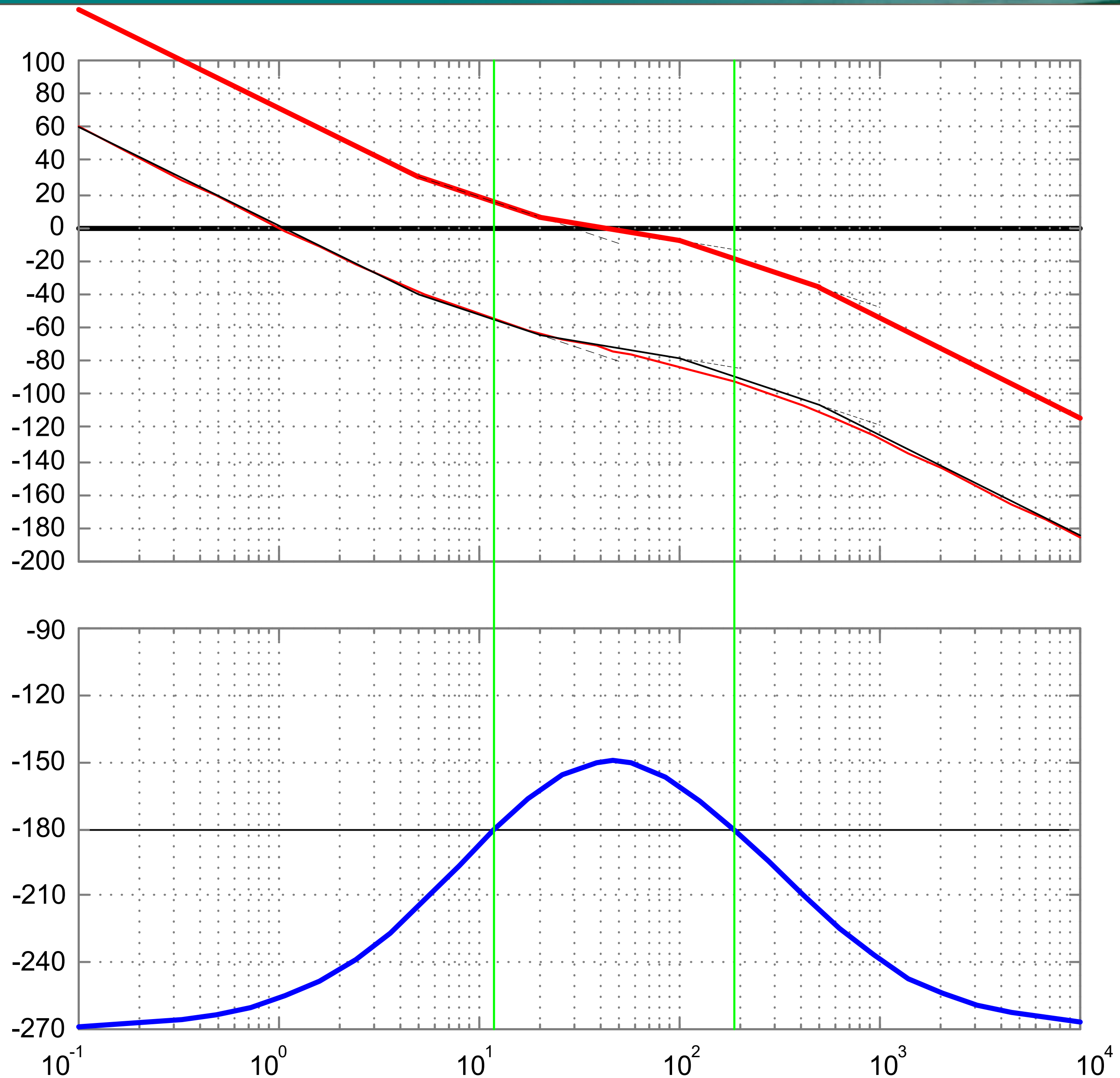
二阶系统$\omega_b t_s$与M_p的关系曲线

例：一系统的开环传递函数为

$$G_K(s)=\frac{K(1+0.2s)(1+0.05s)}{s^3(1+0.01s)(1+0.002s)}$$

$$L(\omega)=20\lg K+20\lg\sqrt{1+(0.2\omega)^2}+20\lg\sqrt{1+(0.05\omega)^2}$$
$$-60\lg\omega-20\lg\sqrt{1+(0.01\omega)^2}-20\lg\sqrt{1+(0.002\omega)^2}$$

$$\varphi(\omega)=tg^{-1}0.2\omega+tg^{-1}0.05\omega-270^\circ-tg^{-1}0.01\omega-tg^{-1}0.002\omega$$


100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
-180
-200
-90
-120
-150
-180
-210
-240
-270
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}

$$G_K(s)=\frac{K(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$$

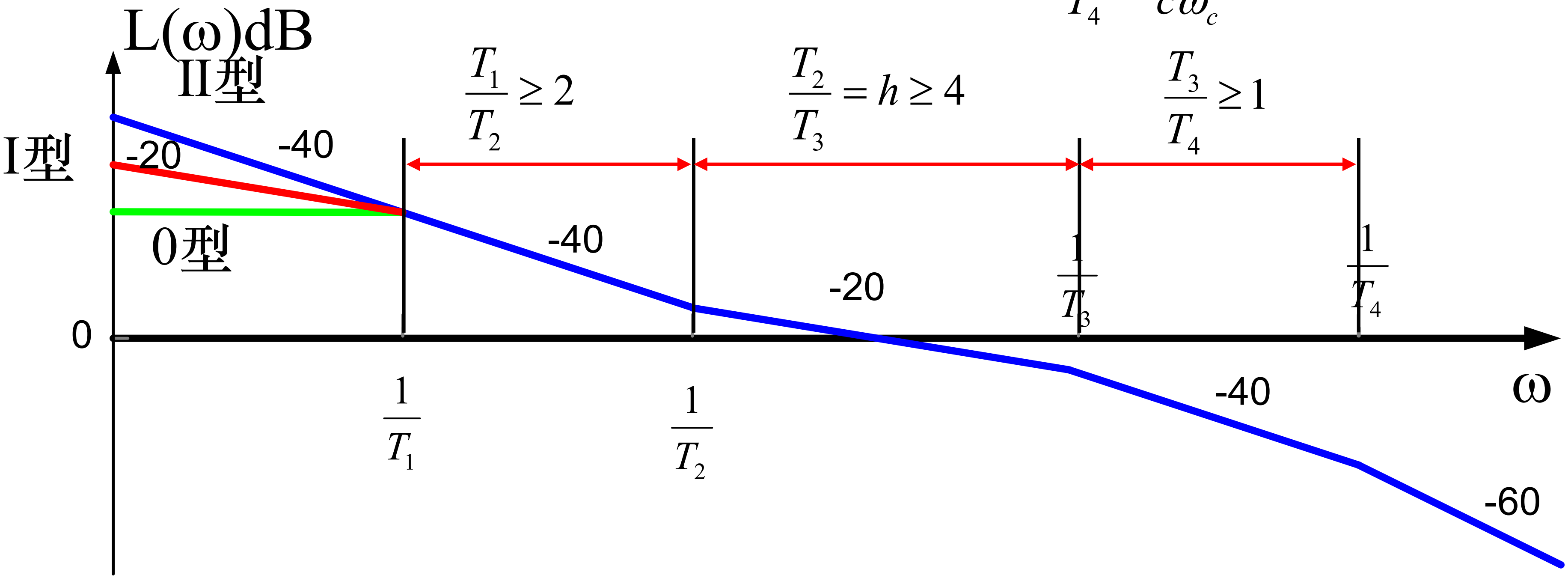
$$G_K(s)=\frac{K(\frac{a}{\omega_c}s+1)}{s(\frac{ab}{\omega_c}s+1)(\frac{1}{c\omega_c}s+1)(\frac{1}{cd\omega_c}s+1)}$$

当$a\geq2$，$b\geq2$，$c\geq2$，$d\geq1$时

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{ab}{\omega_c}\times\frac{\omega_c}{a}=b\geq2$$

$$\frac{T_2}{T_3}=\frac{a}{\omega_c}\times c\omega_c=ac=h\geq4$$

$$\frac{T_3}{T_4}=\frac{1}{c\omega_c}\times cd\omega_c=d\geq1$$



当$a \geq 2$，$b \geq 2$，$c \geq 2$，$d \geq 1$，闭环系统性能可用下式估计

$$t_s \approx (6 \sim 8)\frac{1}{\omega_c} \qquad \delta \approx \frac{64+16h}{h-1}$$

式中h为中频段宽度，$h = \dfrac{T_2}{T_3}$

开、闭环频率性能指标有如下关系

$$\gamma = \sin^{-1}\frac{h-1}{h+1} \qquad M_p = \frac{h+1}{h-1} \qquad h = \frac{M_p+1}{M_p-1} \qquad M_p = \frac{1}{\sin\gamma}$$

闭环系统性能也可用下式估计

$$\delta\% \approx 0.16 + 0.4(M_p - 1) \qquad 1 \leq M_p \leq 1.8$$

$$t_s \approx \frac{k\pi}{\omega_c}$$

$$k = 2 + 1.5(M_p - 1) + 2.5(M_p - 1)^2 \qquad 1 \leq M_p \leq 1.8$$