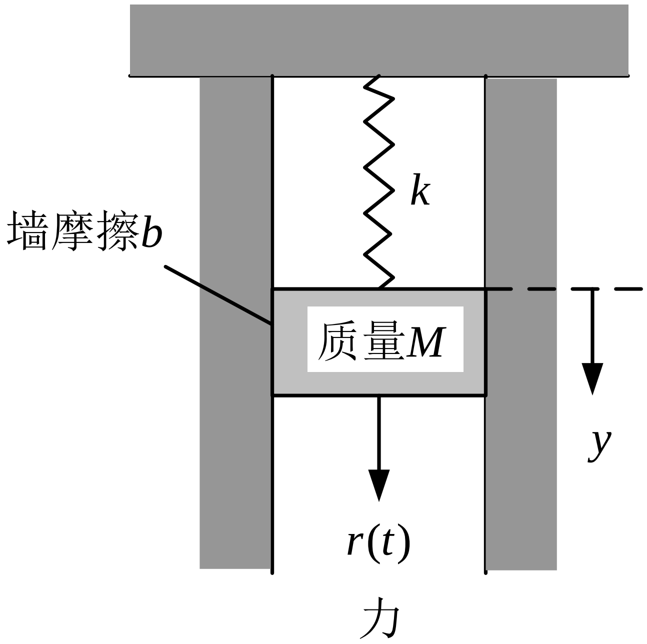
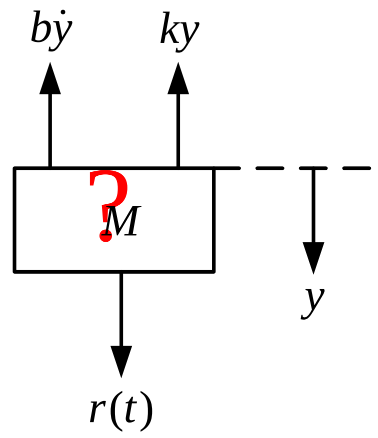
第2章 自动控制系统的数学模型

2.1 控制系统的微分方程

2.1.1 机械系统

1．质量、弹簧、阻尼器系统。假设壁摩擦为粘性摩擦，试建立系统的微分方程。





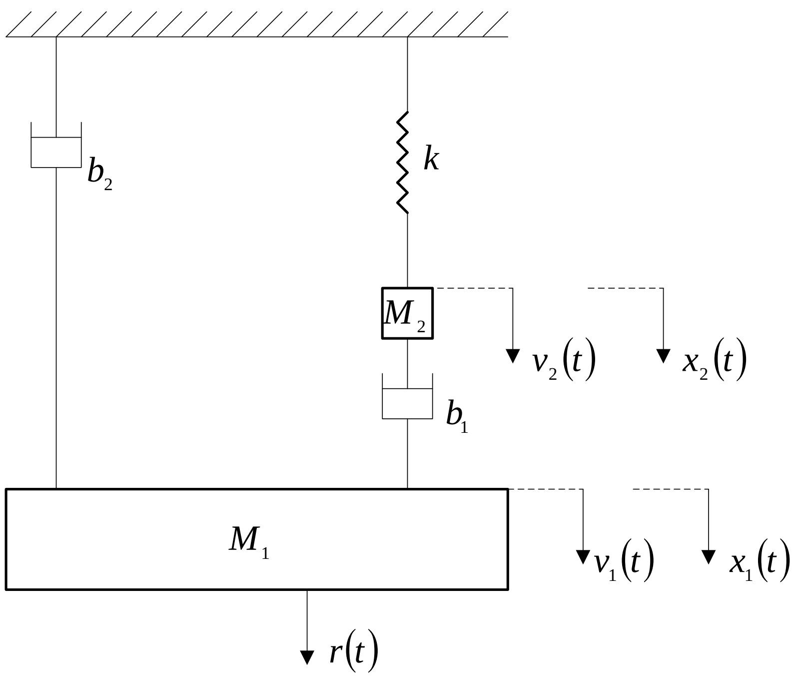
$$r(t)-b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-ky=M\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

?

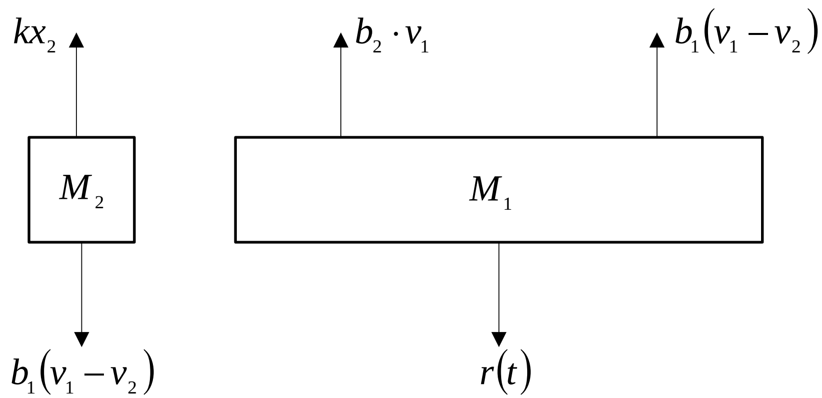
$$M\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ky=r(t)$$

2.1.1 机械系统

机械系统如图所示，$r(t)$为外力，M_1，M_2为质量，b_1 和 b_2为阻尼系数，k 为弹性系数。求以质量 M_1 的速度 v_1 和位移 x_1 为输出，$r(t)$ 为输入时的系统的微分方程。



机械系统



$$M_1\dot{v}_1 + b_1(v_1 - v_2) + b_2 v_1 = r$$

$$M_2\dot{v}_2 + kx_2 = b_1(v_1 - v_2)$$

Linearization

1. (x_0, y_0)

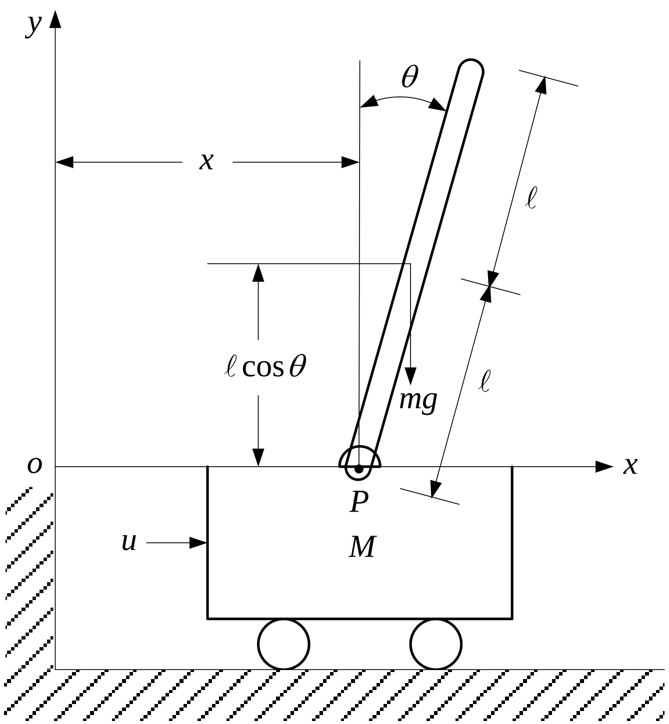
2. $$y = f(x) = f(x_0) + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_0}(x - x_0)^2 + \cdots$$

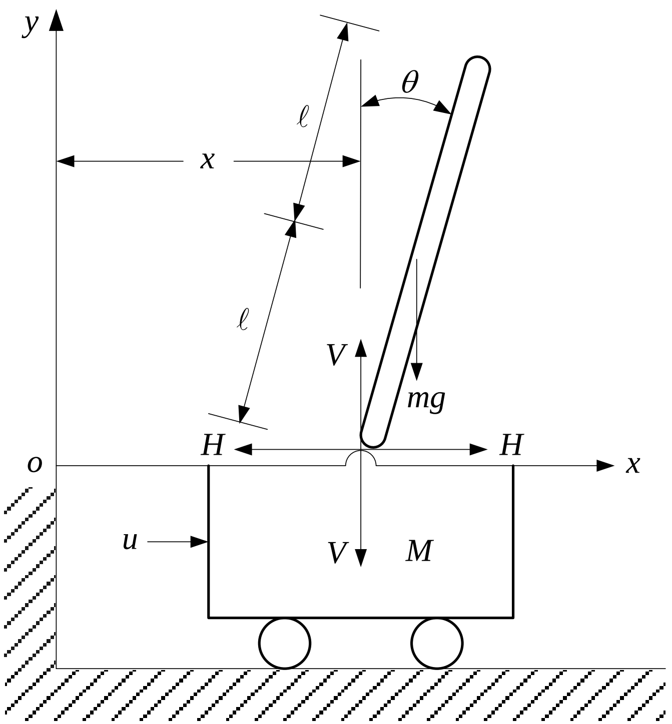
$$y = f(x_0) + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}(x - x_0)$$

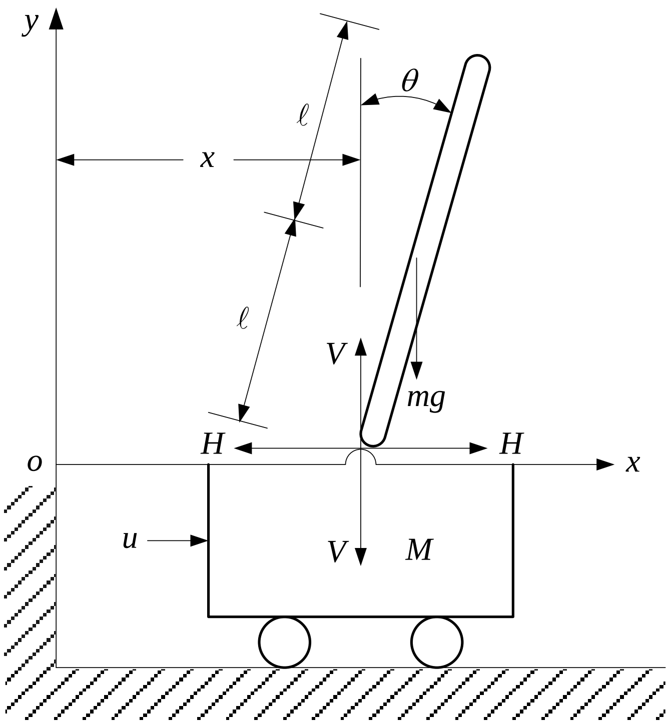
3. $$y - y_0 = k(x - x_0)$$

2.1.1 机械系统

2． 设有一倒立摆安装在带有电动机的驱动车上，控制力作用于小车上，假设摆杆的重心位于其几何中心，试求这个系统的微分方程。







各部分的微分方程:

$$I\ddot{\theta} = V\ell\sin\theta - H\ell\cos\theta$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x + \ell\sin\theta) = H$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\ell\cos\theta) = V - mg$$

$$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = u - H$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots \approx \theta$$

$$\cos\theta = 1 + \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \cdots \approx 1$$

2.1.1 机械系统

- 简化物理模型
- 列写控制系统各部分的微分方程
- 在平衡点附近线性化

各部分的微分方程：

$$I\ddot{\theta} = V\ell\sin\theta - H\ell\cos\theta$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x + \ell\sin\theta) = H$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\ell\cos\theta) = V - mg$$

$$M\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = u - H$$

线性化的方程：

$$I\ddot{\theta} = V\ell\theta - H\ell$$

$$m(\ddot{x} + \ell\ddot{\theta}) = H$$

$$V - mg = 0$$

系统的微分方程：

$$(M + m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} = u$$

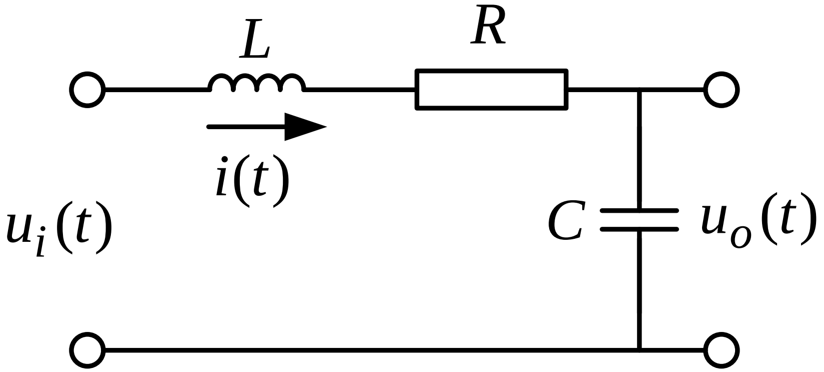
$$(I + m\ell^2)\ddot{\theta} + m\ell\ddot{x} = mg\ell\theta$$

2.1.2 电路系统

1．由电阻、电感和电容组成的无源网络如图所示，试列写以 u_i 为输入量，u_o 为输出量的网络微分方程。

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t+Ri(t)=u_{\mathrm{i}}(t)$$

$$u_{\mathrm{o}}(t)=\frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t$$

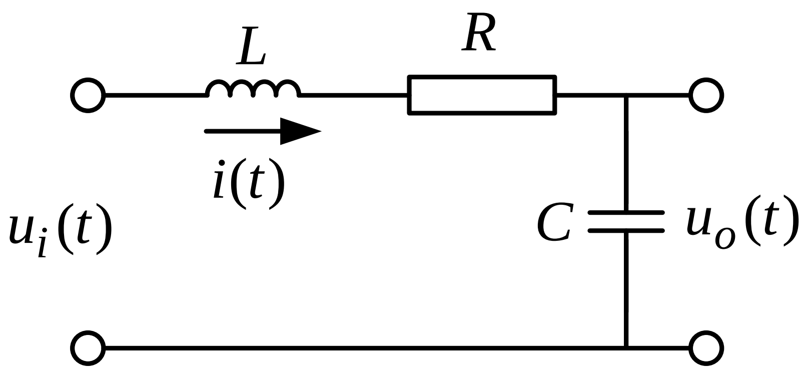


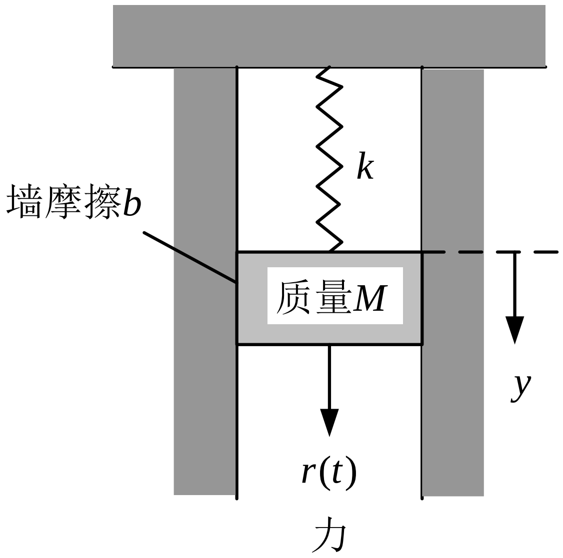
消去中间变量 $i(t)$，可得该无源网络的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}+u_{\mathrm{o}}(t)=u_{\mathrm{i}}(t)$$

2.1.2 电路系统

相似系统:



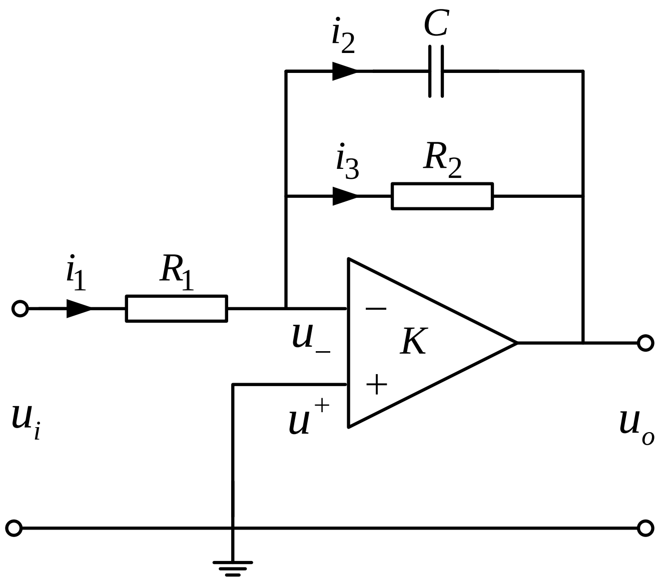


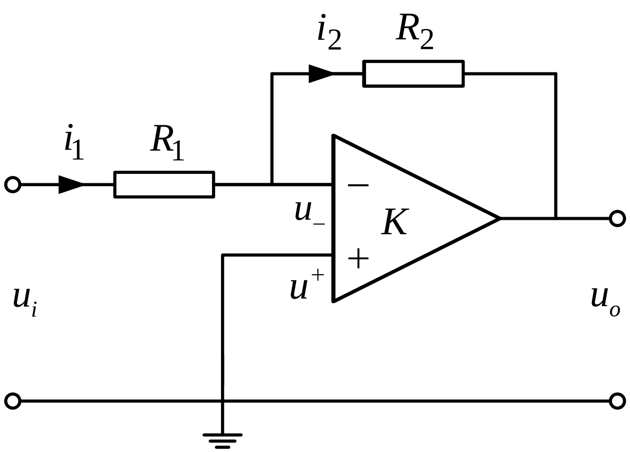
$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{o}(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{o}(t)}{\mathrm{d}t}+u_\mathrm{o}(t)=u_\mathrm{i}(t)$$

$$M\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ky=r(t)$$

2.1.2 电路系统

2． 一有源电路如图所示，试求其输出电压与输入电压之间的关系。





$$i_1 = i_2 + i_3 \qquad u_- = u_+ = 0$$

$$i_1 = \frac{u_\mathrm{i} - u_-}{R_1} \qquad i_2 = C\frac{\mathrm{d}(u_- - u_\mathrm{o})}{\mathrm{d}t} \qquad i_3 = \frac{u_- - u_\mathrm{o}}{R_2}$$

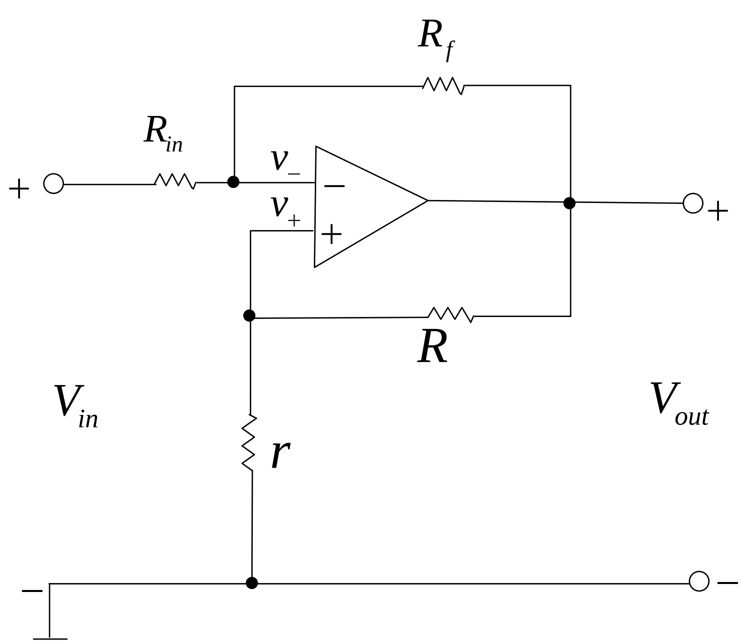
有源网络的微分方程为 $$-C\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{o}}{\mathrm{d}t} - \frac{u_\mathrm{o}}{R_2} = \frac{u_\mathrm{i}}{R_1}$$

2.1.2 电路系统

已知某运算放大器的输出分别反馈到放大器的正输入端和负输入端，如图所示。其中 $N=\dfrac{R_{in}}{R_{in}+R_f}$ 为负反馈率，$P=\dfrac{r}{r+R}$ 为正反馈率。

如果图中的运算放大器为非理想运放，实际模型可用如下两个表达式来描述：

$i_+ = i_- = 0 \quad V_{out} = \dfrac{10^7}{s+1}[V_+ - V_-]$ 试求该电路的微分方程。



$$V_{in} = R_{in} i + (V_- - V_+) + r\frac{V_{out}}{R+r}$$

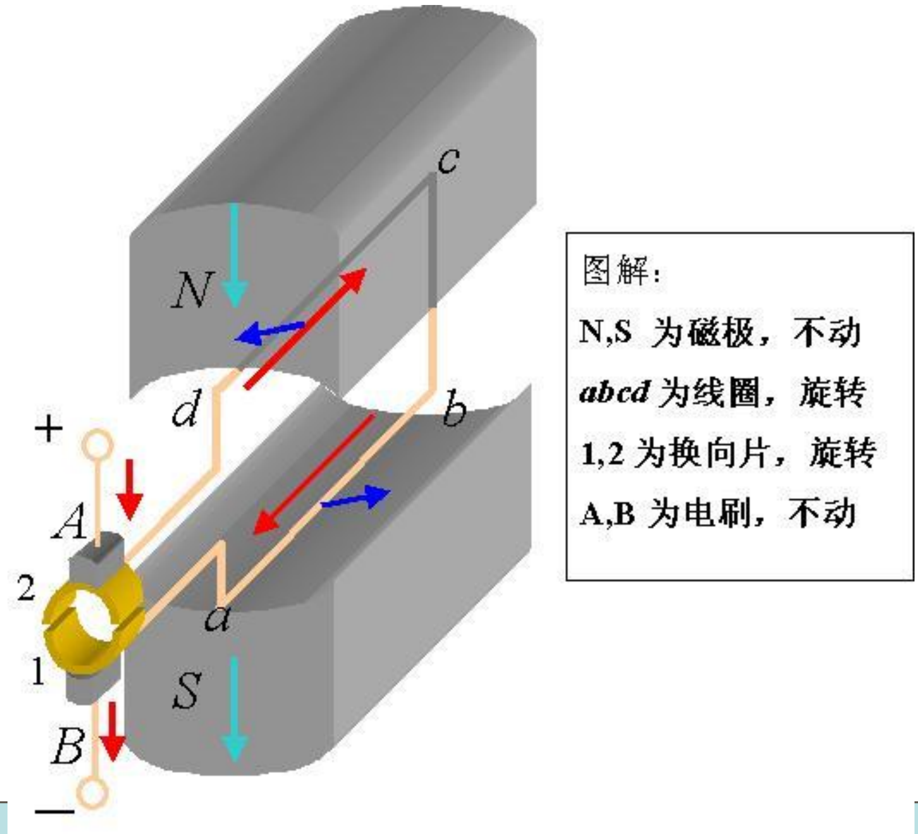
$$V_{in} = R_{in} i + R_f i + V_{out}$$

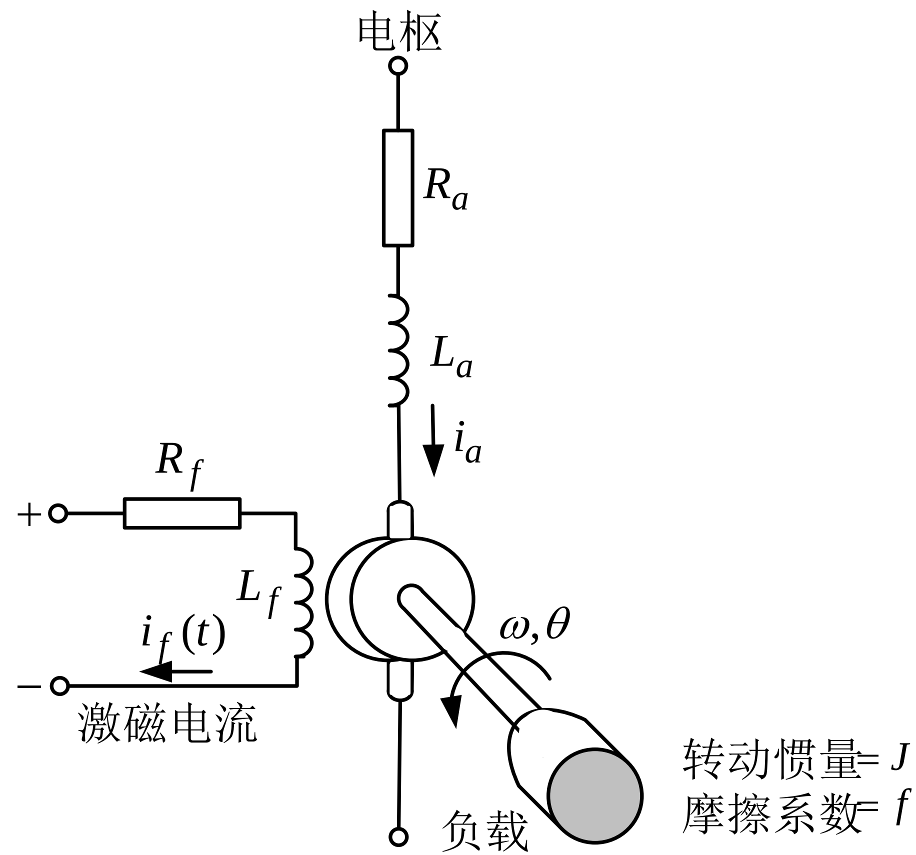
$$V_{out} = \frac{10^7}{s+1}(V_+ - V_-)$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{(1-N)10^7}{(P-N)10^7-(s+1)} = \frac{(N-1)10^7}{s+1+(N-P)10^7}$$

2.1.3 机电系统

1．直流电动机，控制电压可以作用于激磁磁场，也可以作用于电枢两端。



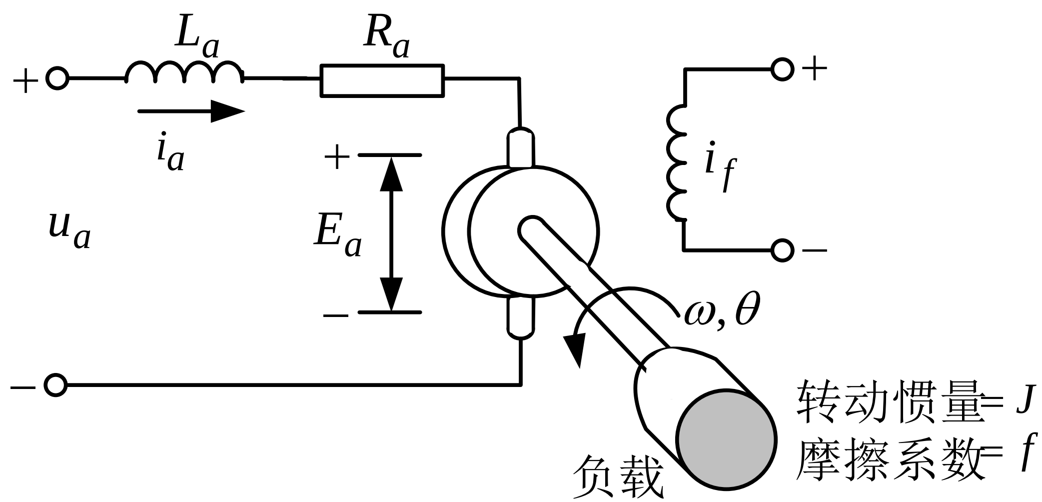


$$\Phi = k_f i_f$$

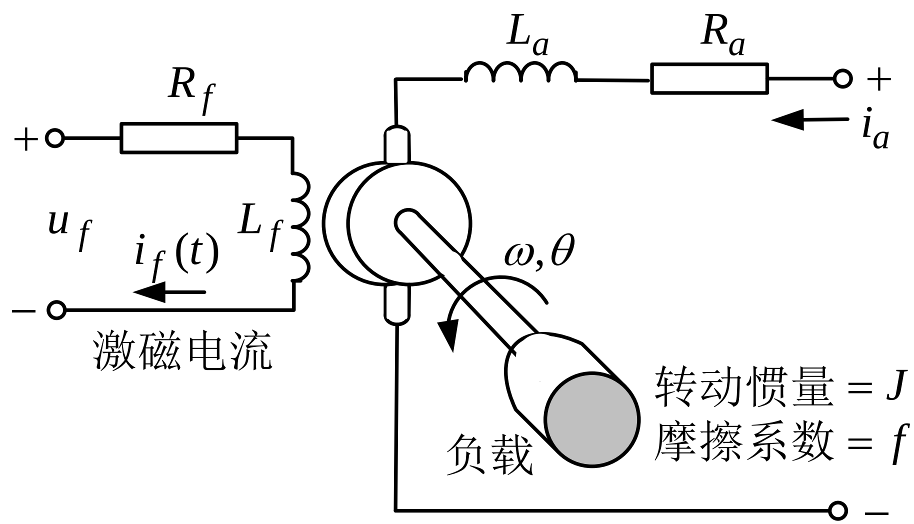
$$M = k_1 \Phi i_a(t) = k_1 k_f i_f(t) i_a(t)$$

2.1.3 机电系统

电枢控制式直流电动机：



磁场控制式直流电动机：

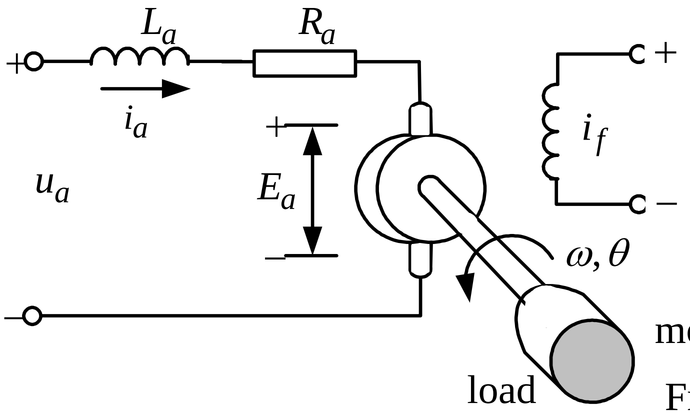


$$u_a(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + E_a$$

$$E_a = C_e \omega(t)$$

$$M(t) = C_m i_a(t)$$

$$J\frac{d\omega(t)}{dt} + f\omega(t) = M(t) - M_c(t)$$



$$L_a J \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + (L_a f + R_a J)\frac{d\omega(t)}{dt} + (R_a f + C_m C_e)\omega(t) =$$

$$C_m u_a(t) - L_a \frac{dM_c(t)}{dt} - R_a M_c(t)$$

$$L_{\mathrm{a}} \approx 0$$

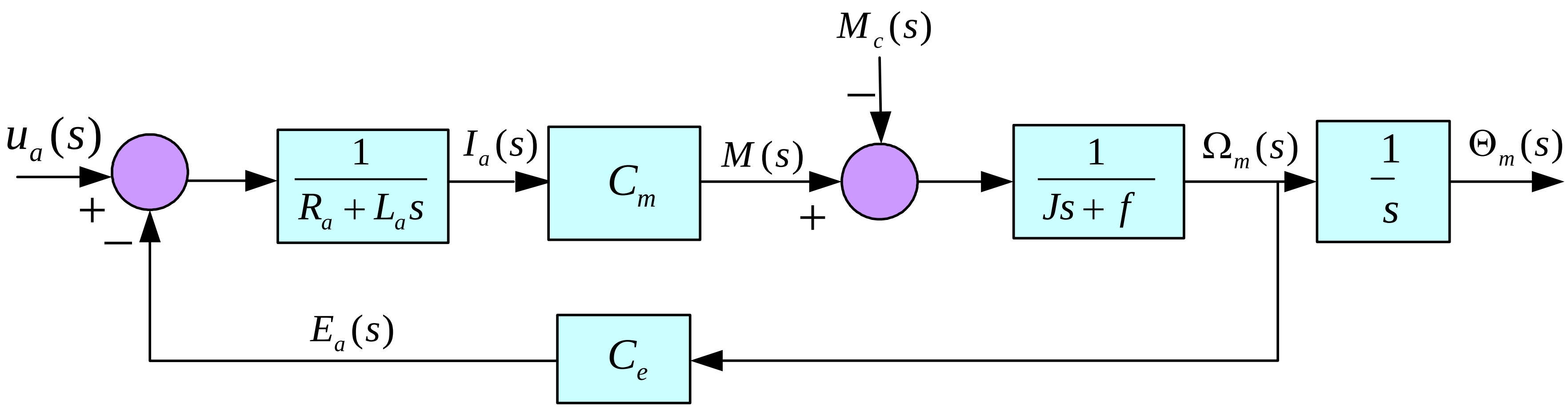
$$T_m \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = K_1 u_a(t) - K_2 M_c(t)$$

$$C_e \omega(t) = u_a(t)$$

$$C_e \omega(t) = u_a(t) \Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{C_e} \int u_a(t) dt$$

$$u_a(t) = L_a \frac{\mathrm{d}i_a(t)}{\mathrm{d}t} + R_a i_a(t) + E_a \qquad M(t) = C_m i_a(t)$$

$$E_a = C_e \omega(t) \qquad J\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} + f\omega(t) = M(t) - M_c(t)$$

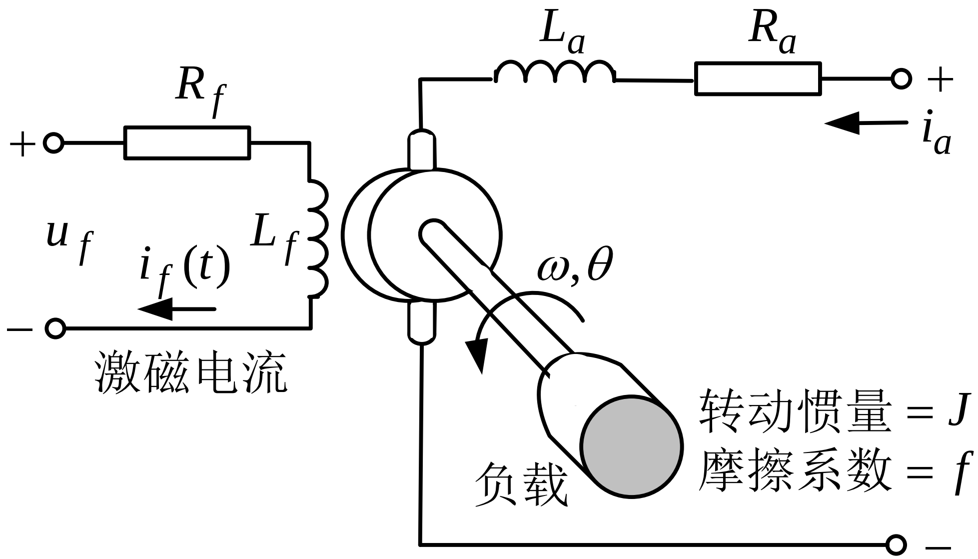


$$L_a J\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \left(L_a f + R_a J\right)\frac{d\omega(t)}{dt} + \left(R_a f + C_m C_e\right)\omega(t) =$$

$$C_m u_a(t) - L_a\frac{dM_c(t)}{dt} - R_a M_c(t)$$

2.1.3 机电系统

磁场控制式直流
电动机微分方程为



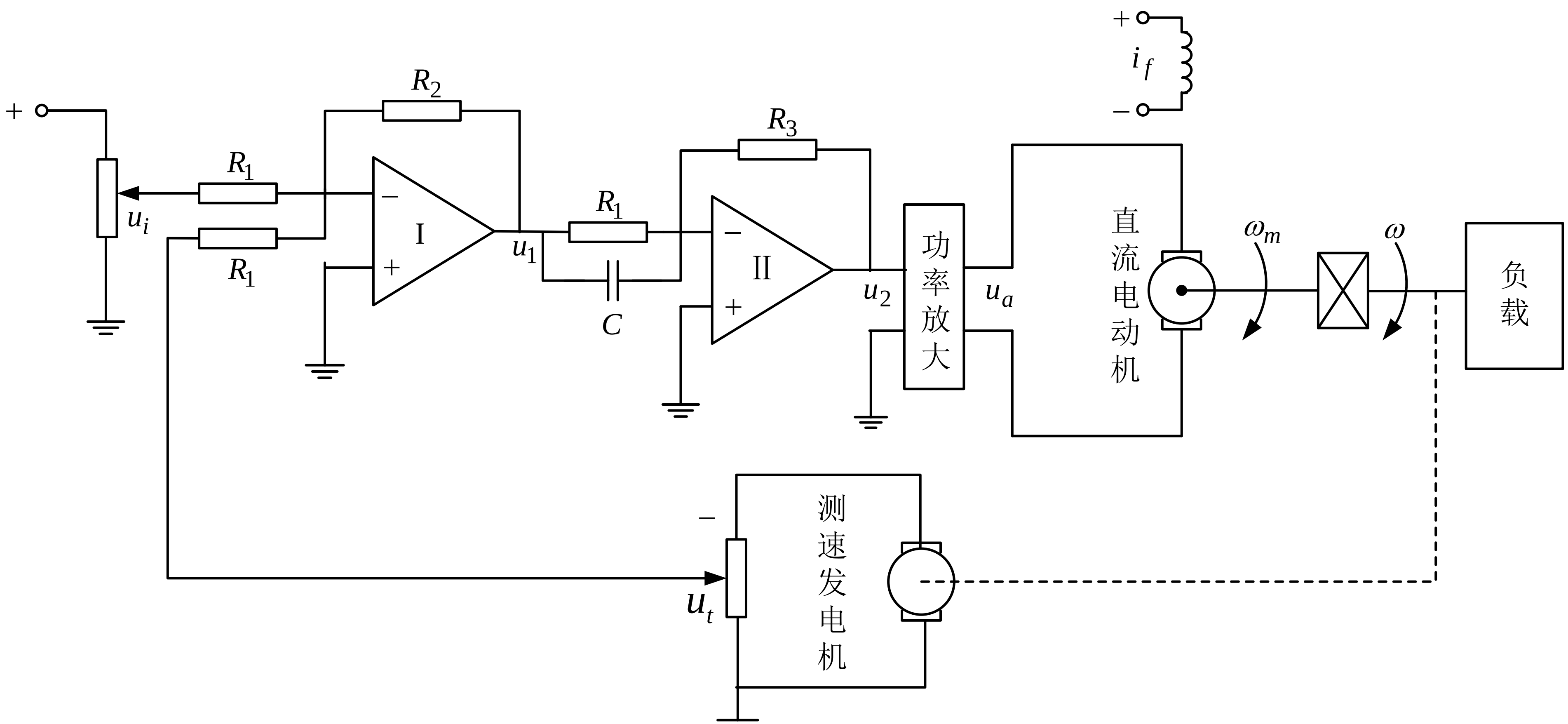
$$L_f J \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \left(L_f f + R_f J\right)\frac{d\omega(t)}{dt} + R_f f\omega(t) = k_m u_f(t)$$

$$-L_f \frac{dM_c(t)}{dt} - R_f M_c(t)$$

$$L_f J \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \left(L_f f + R_f J\right)\frac{d\omega(t)}{dt} + R_f f\omega(t) = k_m u_f(t)$$

2.1.3 机电系统

2．试列写下图所示的速度控制系统以转速为输出量，给定电压为输入量的微分方程。



2.1.3 机电系统

各部分的微分方程为

$$u_1 = -K_1(u_i - u_t) = -K_1 u_e$$

$$u_2 = -K_2\left(\tau \frac{du_1}{dt} + u_1\right)$$

$$u_a = K_3 u_2$$

$$T_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_m u_a - K_c M_c$$

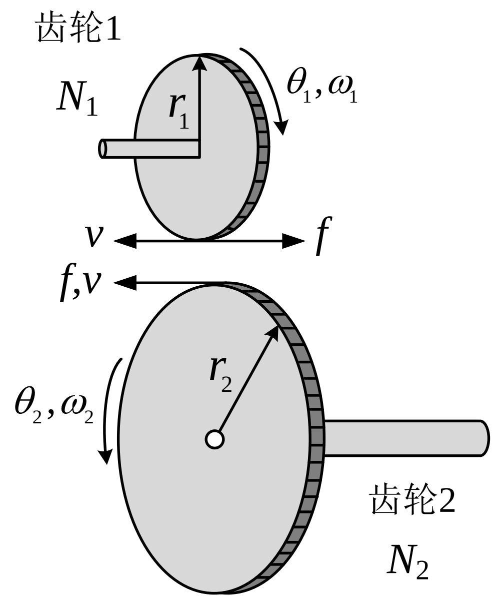
$$\omega = \frac{1}{K'}\omega_m$$

$$u_t = K_t \omega$$

速度控制系统的微分方程为

$$T'_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = K'_g \frac{du_i}{dt} + K_g u_i - K'_c M_c$$

齿轮系的运动传递



咬合齿轮的线速度相同:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 = v$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_1}$$