



第三节 极坐标图



极坐标图也称奈奎斯特(Nyquist)图。它是在复平面上用一条曲线表示 ω 由 $0 \rightarrow \infty$ 时的频率特性。即用矢量 $G(j\omega)$ 的端点轨迹形成的图形。 ω 是参变量。在曲线上的任意一点可以确定对应该点频率的实频、虚频、幅频和相频特性。

极坐标图是以开环频率特性的实部为直角坐标横坐标，以其虚部为纵坐标，以 ω 为参变量画出幅值与相位之间的关系。

由于幅频特性是 ω 的偶函数，而相频特性是 ω 的奇函数，所以当 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 的频率特性曲线和 ω 从 $-\infty \rightarrow 0$ 的频率特性曲线是对称于实轴的。

极坐标图的优点是可在一张图上绘出整个频率域的频率响应特性；缺点是不能明显地表示出开环传递函数中每个典型环节的作用。

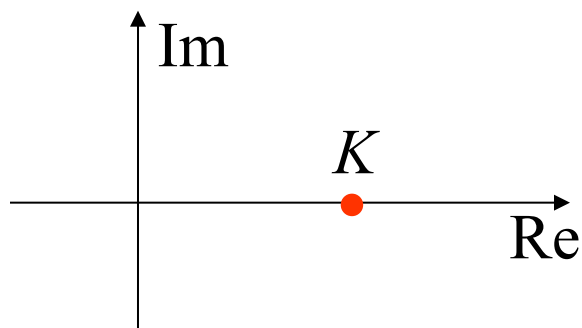


一、典型环节的极坐标图

1. 比例环节: $G(s) = K$; $G(j\omega) = K$

实频特性: $P(\omega) = K$; 虚频特性: $Q(\omega) = 0$;

幅频特性: $A(\omega) = K$; 相频特性: $\varphi(\omega) = 0$



比例环节的极坐标图为
实轴上的 K 点。



2. 积分环节的频率特性: $G(s) = \frac{K}{s}$

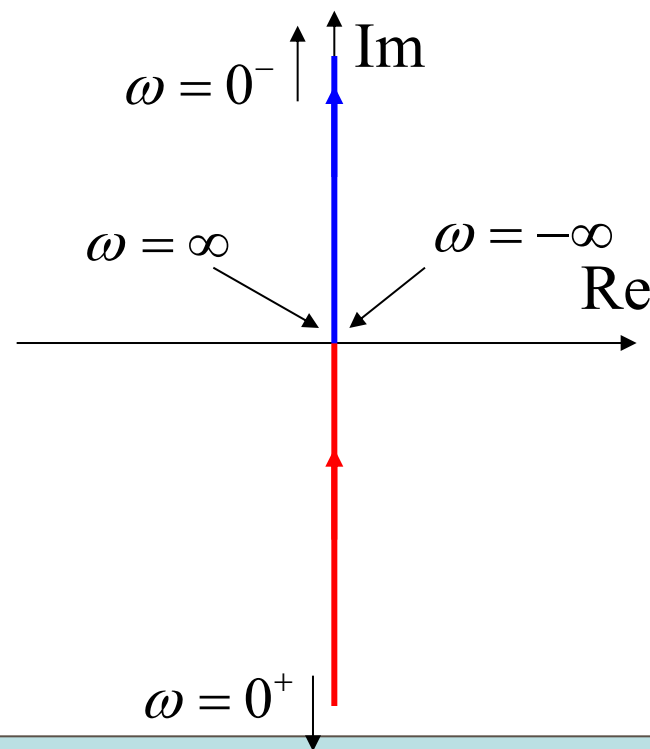
频率特性: $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = -j \frac{K}{\omega} = \frac{K}{\omega} e^{-\frac{\pi}{2}j}$

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega} \quad \varphi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{K}{\omega} / 0\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$P(\omega) = 0 \quad Q(\omega) = -\frac{K}{\omega}$$

积分环节的极坐标图为负虚轴。频率 ω 从 $0^+ \rightarrow \infty$ 特性曲线由虚轴的 $-\infty$ 趋向原点。

若考虑负频率部分，当频率 ω 从 $-\infty \rightarrow 0^-$ ，特性曲线由虚轴的原点趋向 $+\infty$ 。





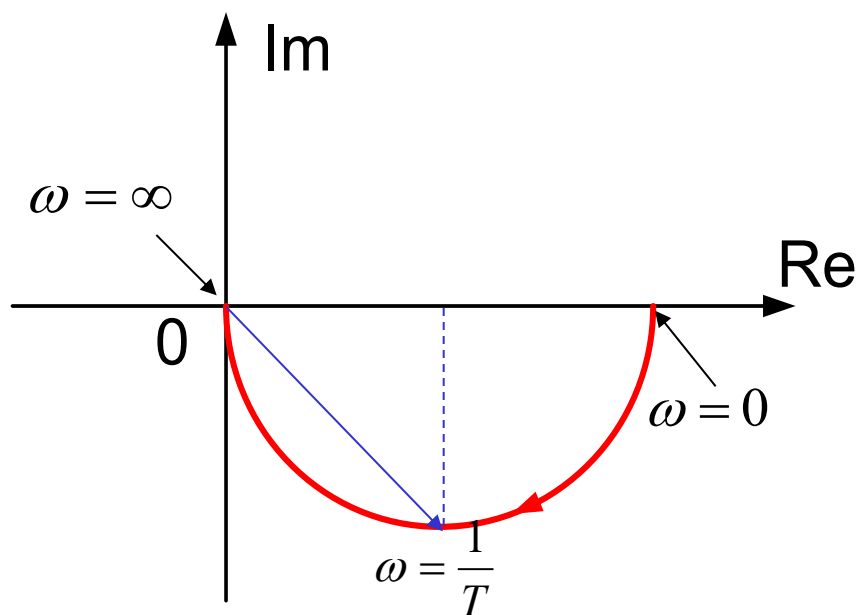
3. 惯性环节的频率特性:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega + 1}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\tan^{-1}T\omega$$

$$P(\omega) = \frac{K}{1 + T^2\omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-KT\omega}{1 + T^2\omega^2}$$



$$\omega = 0 \text{ 时: } A(0) = K, \quad \varphi(0) = 0$$

$$P(0) = K, \quad Q(0) = 0$$

$$\omega = \frac{1}{T} \text{ 时: } A\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{K}{\sqrt{2}}, \quad \varphi\left(\frac{1}{T}\right) = -45^\circ$$

$$P\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{K}{2}, \quad Q\left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{K}{2}$$

$$\omega = \infty \text{ 时: } A(\infty) = 0, \quad \varphi(\infty) = -90^\circ$$

$$P(\infty) = 0, \quad Q(\infty) = 0$$



极坐标图是一个圆，对称于实轴。证明如下：

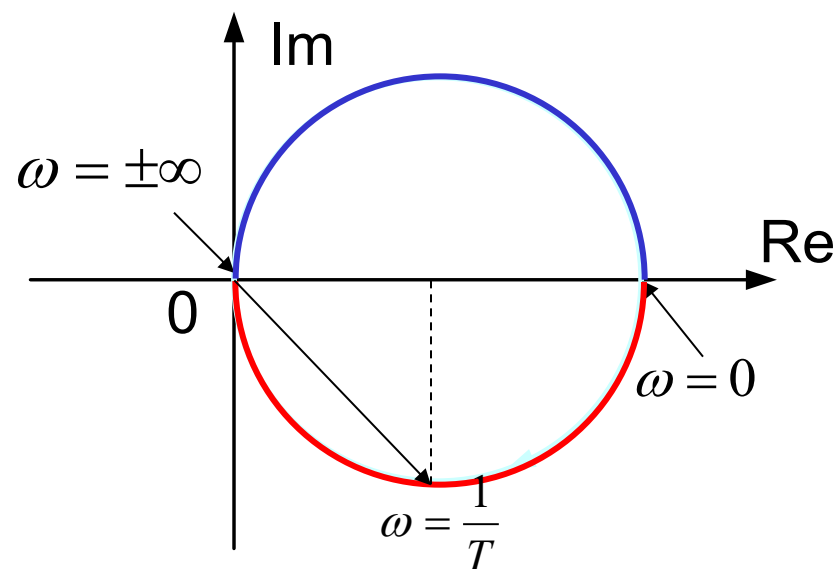
$$P(\omega) = \frac{K}{1 + T^2 \omega^2}$$

$$Q(\omega) = \frac{-KT\omega}{1 + T^2 \omega^2}$$

$$\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -T\omega$$

$$\therefore P = \frac{K}{1 + T^2 \omega^2} = \frac{K}{1 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2}$$

整理得： $\left(P - \frac{K}{2}\right)^2 + Q^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2$



下半个圆对应于正频率部分，而上半个圆对应于负频率部分。



4. 振荡环节的频率特性:
$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

讨论 $0 < \zeta < 1$ 时的情况。当 $K=1$ 时，频率特性为：

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1 - T^2\omega^2) + j2\zeta\omega T}$$

实频、虚频、幅频和相频特性分别为：

$$P(\omega) = \frac{1 - T^2\omega^2}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2 T^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-2\zeta\omega T}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2 T^2}$$

$$A(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2} = \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\zeta\omega T)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta\omega T}{1 - T^2\omega^2}$$



$$P(\omega) = \frac{1 - T^2 \omega^2}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}$$

$$Q(\omega) = \frac{-2\zeta \omega T}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\zeta \omega T)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \omega T}{1 - T^2 \omega^2}$$

当 $\omega = 0$ 时, $A(\omega) = 1, \varphi(\omega) = 0$

$$P(\omega) = 1, Q(\omega) = 0$$

当 $\omega = \frac{1}{T}$ 时, $A(\omega) = \frac{1}{2\zeta}, \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$;

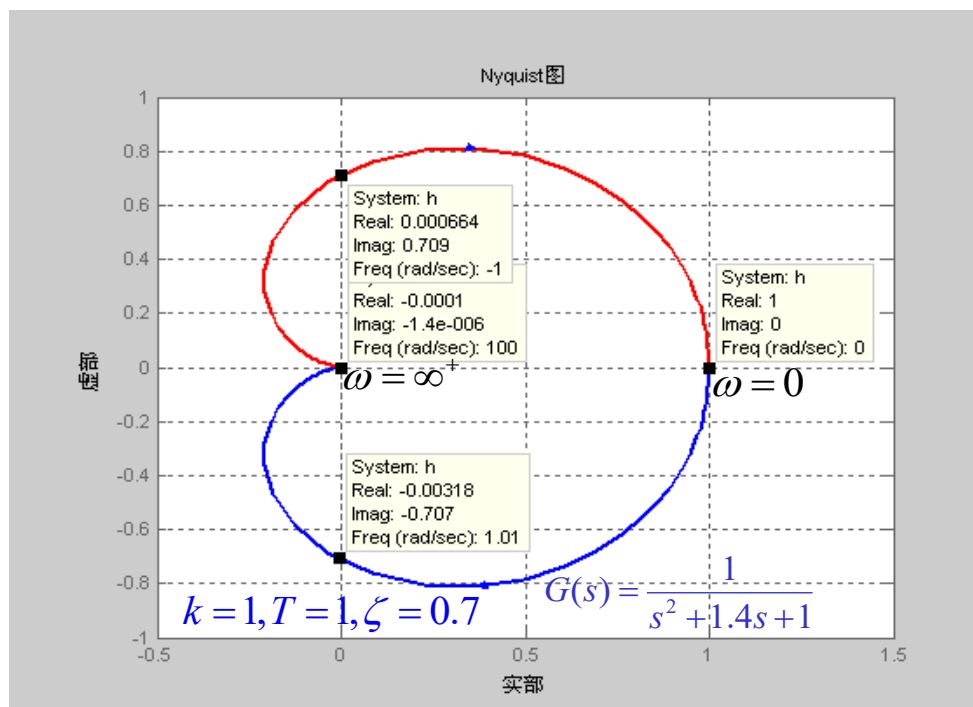
$$P(\omega) = 0, Q(\omega) = -\frac{1}{2\zeta}$$

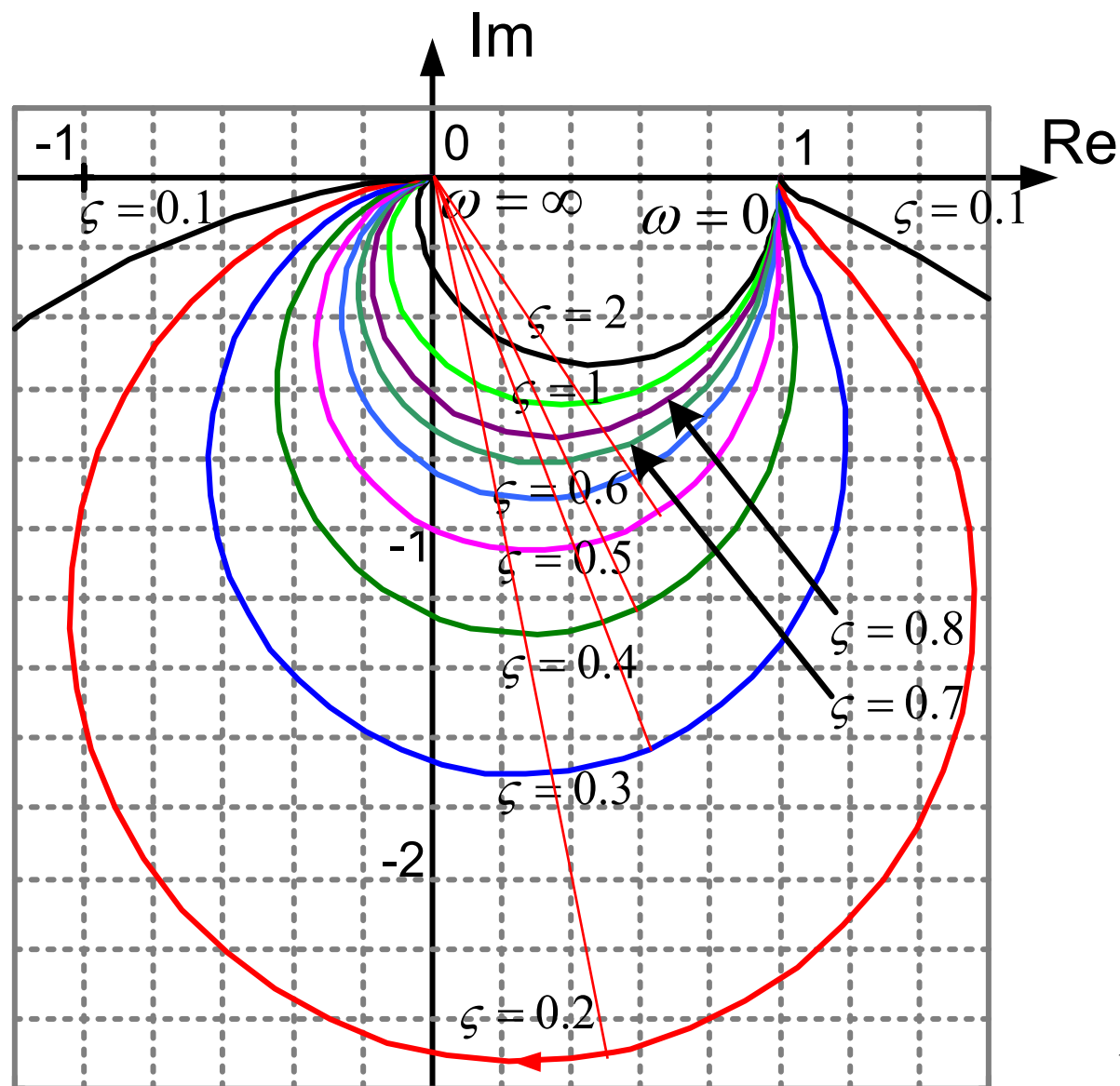
当 $\omega = \infty$ 时, $A(\omega) = 0, \varphi(\omega) = -\pi$

$$P(\omega) = 0, Q(\omega) = 0$$

当 $\omega \geq 0$ 时, $Q(\omega) \leq 0$, 曲线在3, 4象限; 当 $\omega < 0$ 时, 与之对称于实轴。

实际曲线还与阻尼系数有关。





由图可见无论是欠阻尼还是过阻尼系统，其图形的基本形状是相同的。

当过阻尼时，阻尼系数越大其图形越接近圆。

当 $\zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，
有谐振峰值。

$$\omega_p = \frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{T}$$

$$M_p = A(\omega_p) = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$



5. 微分环节的频率特性：

微分环节有三种：纯微分、一阶微分和二阶微分。传递函数分别为：

$$G(s) = s$$

$$G(s) = 1 + Ts$$

$$G(s) = T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1$$

频率特性分别为：

$$G(j\omega) = j\omega$$

$$G(j\omega) = 1 + jT\omega$$

$$G(j\omega) = 1 - T^2\omega^2 + j2\zeta\omega T$$

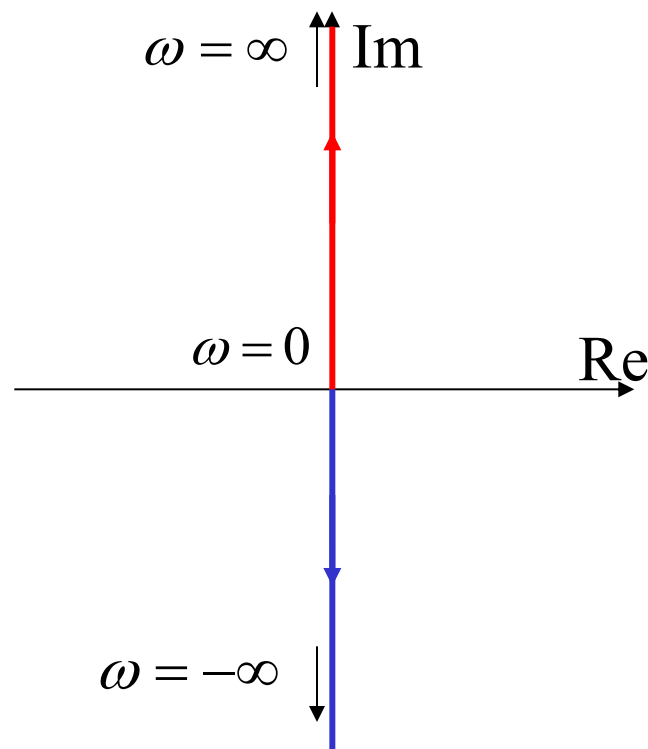


① 纯微分环节: $G(j\omega) = j\omega$

$$A(\omega) = \omega, \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \omega \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \end{cases}$$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = \omega$$

微分环节的极坐标图为正虚轴。频率 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 特性曲线由原点趋向虚轴的 $+\infty$ 。



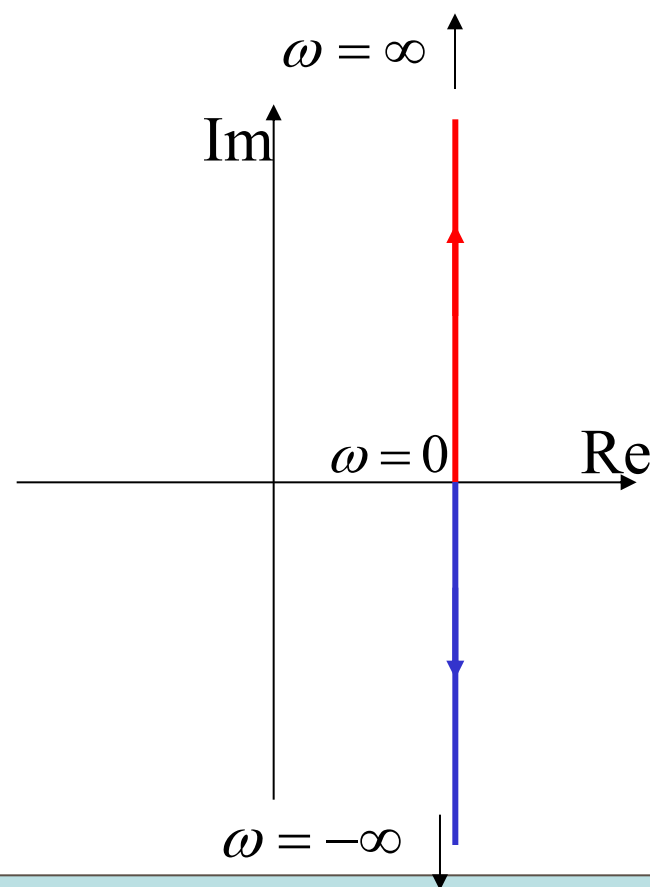


② 一阶微分： $G(j\omega) = 1 + jT\omega$

$$A(\omega) = \sqrt{1 + T^2\omega^2}, \quad \varphi(\omega) = \tan^{-1} T\omega$$

$$P(\omega) = 1, \quad Q(\omega) = T\omega$$

一阶微分环节的极坐标图
为平行于虚轴直线。
频率 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 特性曲线
相当于纯微分环节的特性
曲线向右平移一个单位。

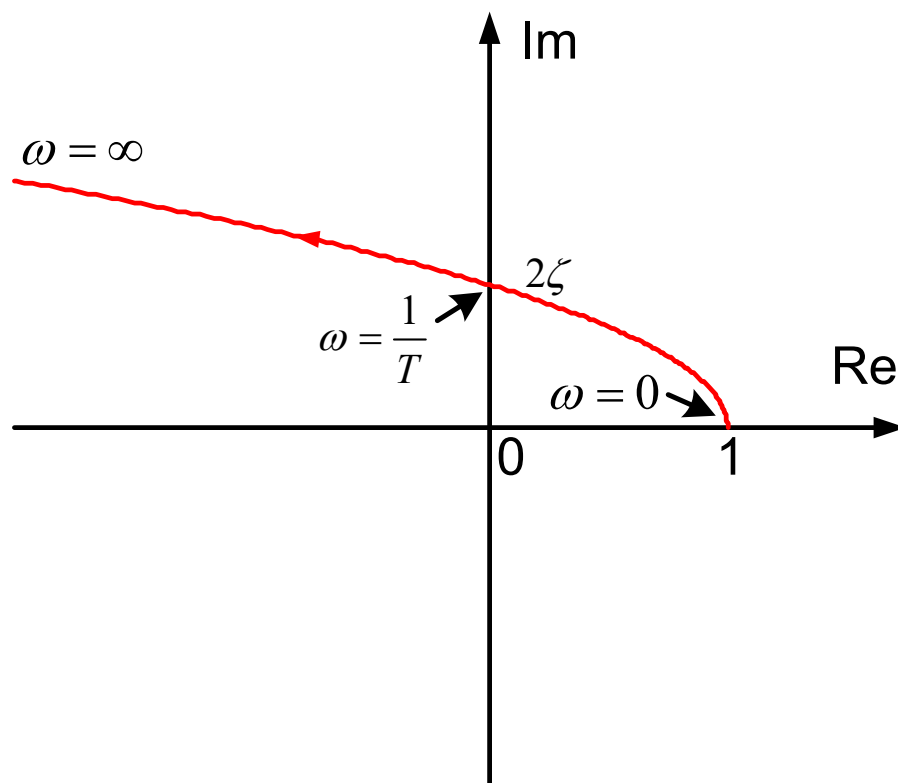




③ 二阶微分环节: $G(s) = T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1$

$$A(\omega) = \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\zeta \omega T)^2}, \quad \varphi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta \omega T}{1 - T^2 \omega^2}$$

$$P(\omega) = 1 - T^2 \omega^2, \quad Q(\omega) = 2\zeta \omega T$$





6. 延迟环节的频率特性:

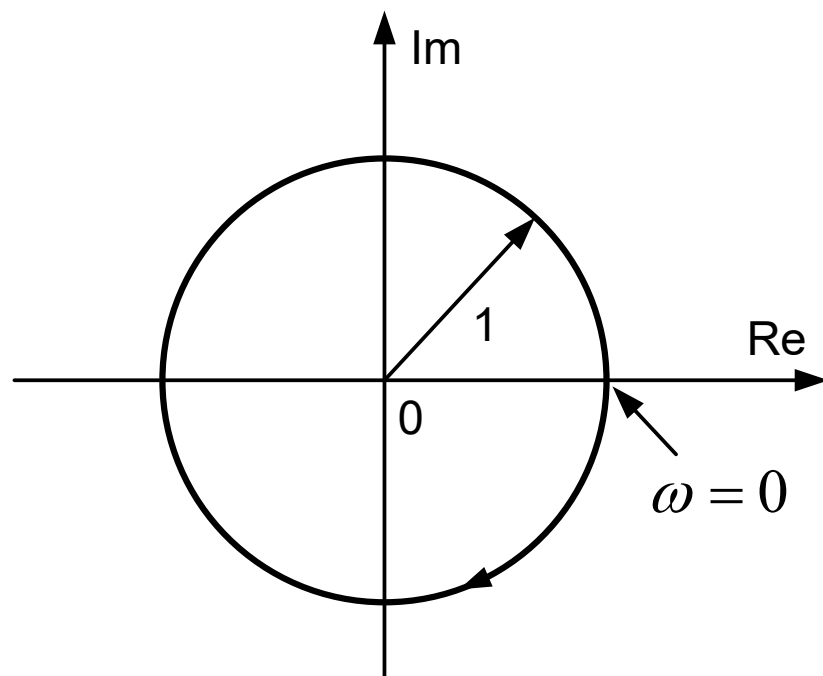
传递函数: $G(s) = e^{-\tau s}$

频率特性: $G(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$

幅频特性: $A(\omega) = 1$

相频特性:

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= -\omega\tau(\text{rad}) \\ &= -57.3\omega\tau(\text{deg})\end{aligned}$$



极坐标图是一个圆心在原点，半径为1的圆。



小 结

- ❑ 比例环节的极坐标图
- ❑ 积分环节的极坐标图
- ❑ 惯性环节的极坐标图——极坐标图为圆。
- ❑ 振荡环节的极坐标图
- ❑ 微分环节的极坐标图——有三种形式：纯微分、一阶微分和二阶微分。
- ❑ 延迟环节的极坐标图



二、增加零极点对极坐标图形状的影响

设 $G_1(s) = \frac{K}{T_1s + 1}$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}}$$

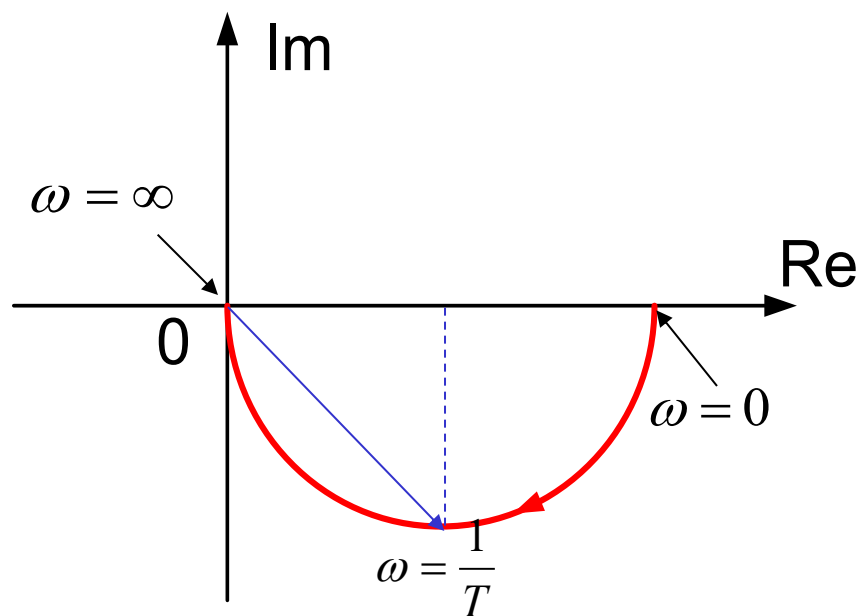
$$\varphi(\omega) = -\tan^{-1} T_1 \omega$$

$$P(\omega) = \frac{K}{1 + T_1^2 \omega^2}$$

$$Q(\omega) = \frac{-KT_1\omega}{1 + T_1^2 \omega^2}$$

当 $\omega = 0$ 时, $A(\omega) = K$, $\varphi(\omega) = 0$, $P(\omega) = K$, $Q(\omega) = 0$

当 $\omega = \infty$ 时, $A(\omega) = 0$, $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$, $P(\omega) = 0$, $Q(\omega) = 0$





1. 增加有限极点

设 $G_2(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T_1^2\omega^2} \sqrt{1 + T_2^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1}T_1\omega - \operatorname{tg}^{-1}T_2\omega$$

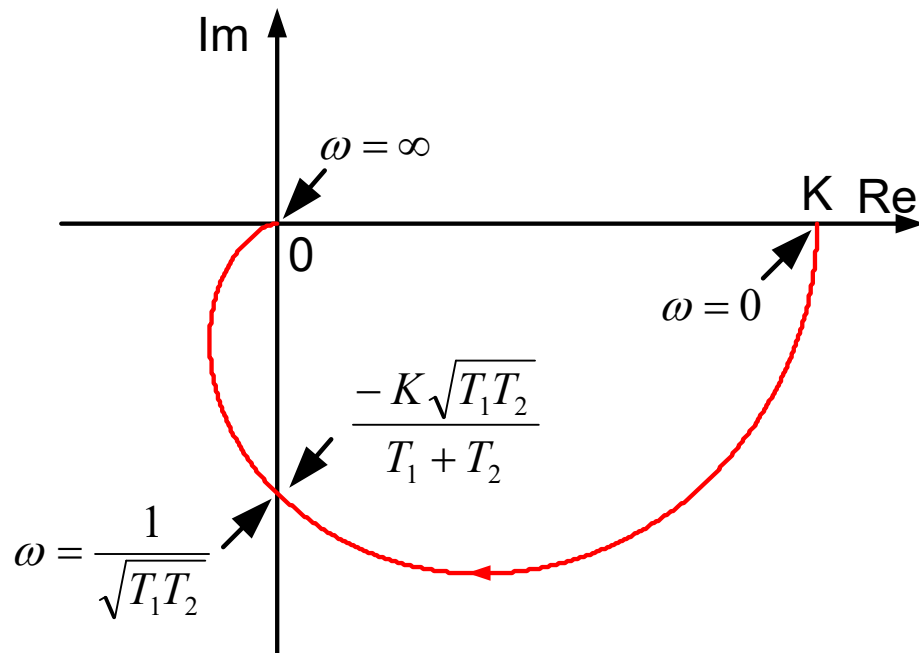
$$P(\omega) = \frac{K(1 - T_1T_2\omega^2)}{(1 + T_1^2\omega^2)(1 + T_2^2\omega^2)}$$

$$Q(\omega) = \frac{-K\omega(T_1 + T_2)}{(1 + T_1^2\omega^2)(1 + T_2^2\omega^2)}$$

当 $\omega = 0$ 时, $A(\omega) = K$, $\varphi(\omega) = 0$, $P(\omega) = K$, $Q(\omega) = 0$

当 $\omega = \infty$ 时, $A(\omega) = 0$, $\varphi(\omega) = -\pi$, $P(\omega) = 0$, $Q(\omega) = 0$

令 $P(\omega) = 0$, 解得 $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$, 此时 $Q(\omega) = \frac{-K\sqrt{T_1T_2}}{T_1 + T_2}$





设 $G_3(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2} \sqrt{1 + T_3^2 \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -tg^{-1}T_1\omega - tg^{-1}T_2\omega - tg^{-1}T_3\omega$$

$$P(\omega) = \frac{K[1 - \omega^2(T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)]}{(1 + T_1^2\omega^2)(1 + T_2^2\omega^2)(1 + T_3^2\omega^2)}$$

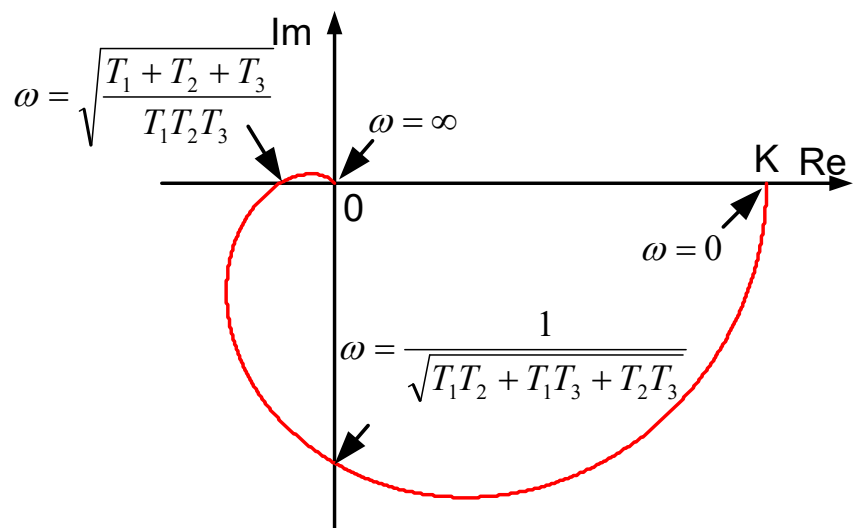
$$Q(\omega) = \frac{K\omega(\omega^2T_1T_2T_3 - T_1 - T_2 - T_3)}{(1 + T_1^2\omega^2)(1 + T_2^2\omega^2)(1 + T_3^2\omega^2)}$$

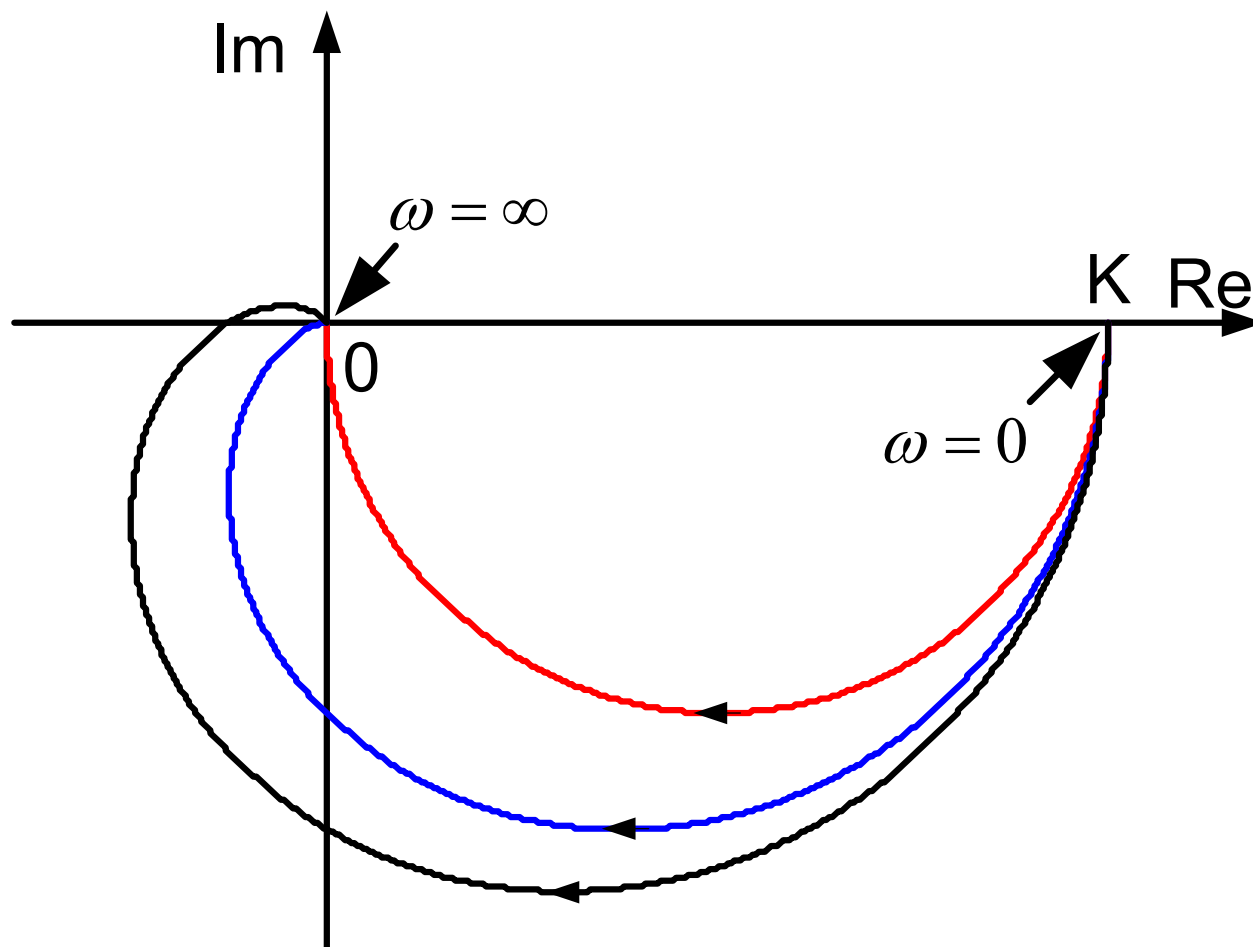
当 $\omega = 0$ 时, $A(\omega) = K$, $\varphi(\omega) = 0$, $P(\omega) = K$, $Q(\omega) = 0$

当 $\omega = \infty$ 时, $A(\omega) = 0$, $\varphi(\omega) = -\frac{3\pi}{2}$, $P(\omega) = 0$, $Q(\omega) = 0$

令 $P(\omega) = 0$, 解得 $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3}}$, 此时与虚轴相交;

令 $Q(\omega) = 0$, 解得 $\omega = 0$ 和 $\omega = \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1T_2T_3}}$, 此时与实轴相交;





结论：假如 $G(s)$ 增加 n 个有限负极点(时间常数形式)，则 $G(j\omega)$ 的极坐标图在 $\omega=0$ 时幅值不变；在 $\omega \rightarrow \infty$ 时顺时针转过 $n\pi/2$ (弧度)。



2. 增加在原点处的极点

设
$$G_4(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega\sqrt{1 + T_1^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1}T_1\omega$$

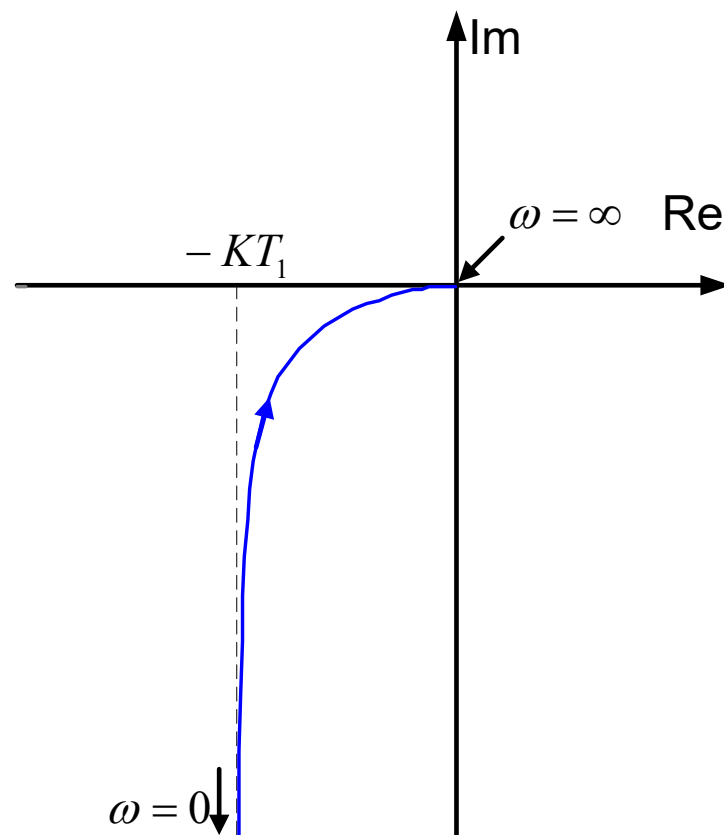
$$P(\omega) = \frac{-KT_1}{1 + T_1^2\omega^2}$$

$$Q(\omega) = \frac{-K}{\omega(1 + T_1^2\omega^2)}$$

当 $\omega = 0$ 时, $A(\omega) = \infty$, $\varphi(\omega) = -90^\circ$, $P(\omega) = -KT_1$, $Q(\omega) = -\infty$

当 $\omega = \infty$ 时, $A(\omega) = 0$, $\varphi(\omega) = -180^\circ$, $P(\omega) = 0$, $Q(\omega) = 0$

在 ω 取有限值时与坐标轴无交点。





设

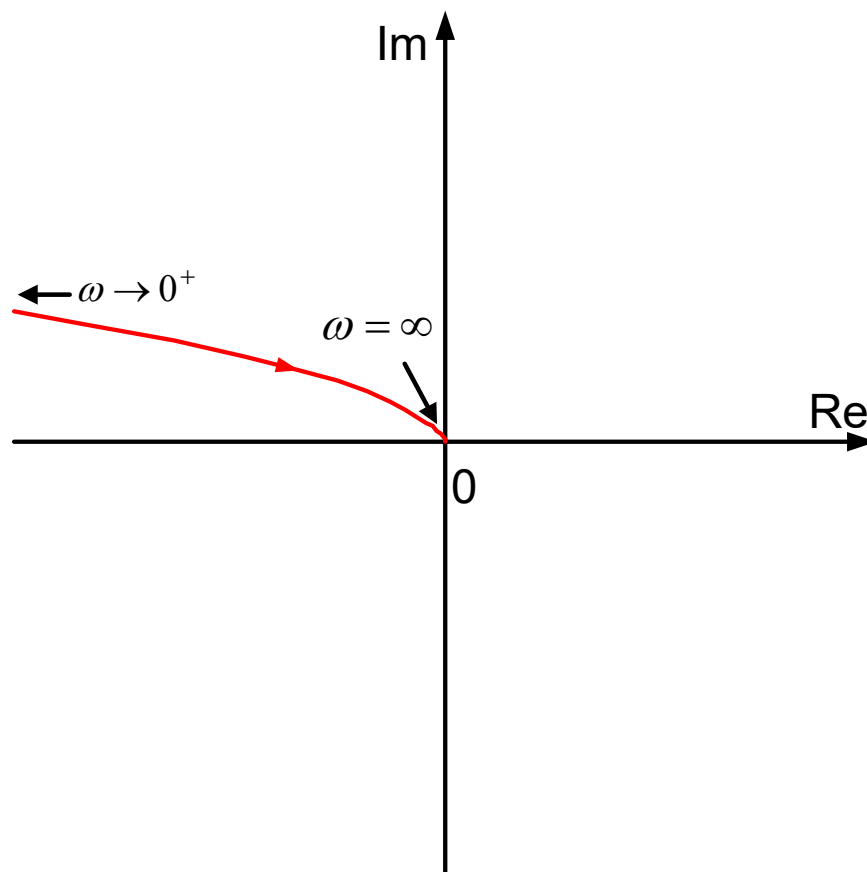
$$G_5(s) = \frac{K}{s^2(T_1s + 1)}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega^2 \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -180^\circ - \operatorname{tg}^{-1} T_1 \omega$$

$$P(\omega) = \frac{-K}{\omega^2 (1 + T_1^2 \omega^2)}$$

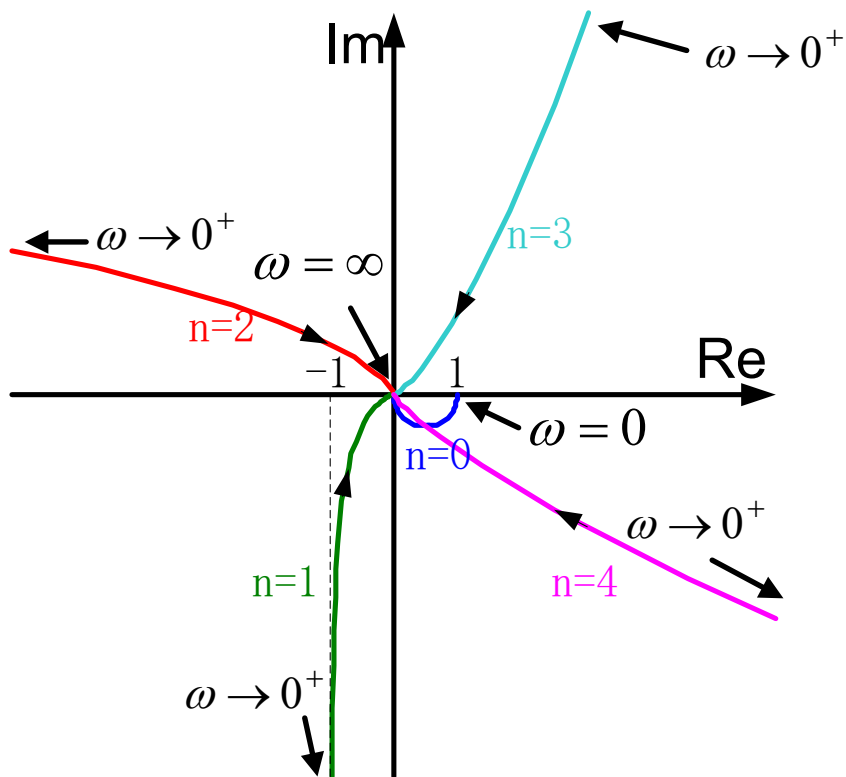
$$Q(\omega) = \frac{KT_1}{\omega(1 + T_1^2 \omega^2)}$$



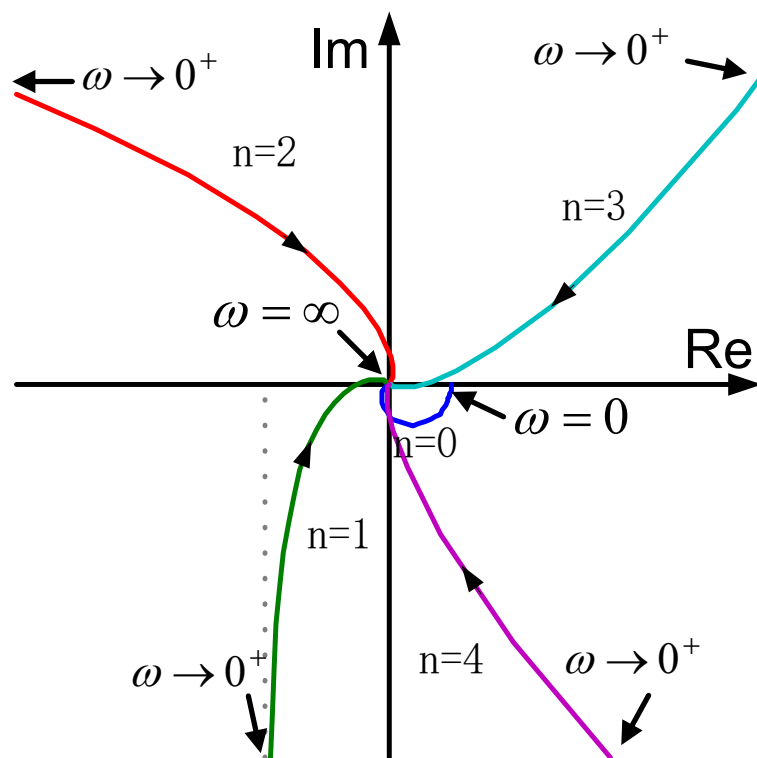
当 $\omega = 0$ 时, $A(\omega) = \infty$, $\varphi(\omega) = -180^\circ$, $P(\omega) = -\infty$, $Q(\omega) = \infty$

当 $\omega = \infty$ 时, $A(\omega) = 0$, $\varphi(\omega) = -270^\circ$, $P(\omega) = 0$, $Q(\omega) = 0$

在 ω 取有限值时与坐标轴无交点。



$\frac{K}{s^n(s+1)}$ 的极坐标图



$\frac{K}{s^n(s+1)^2}$ 的极坐标图

结论：假如 $G(s)$ 乘上因子 $1/s^n$ ，则 $G(j\omega)$ 的极坐标图顺时针转过 $n\pi/2$ (弧度)。并且只要在原点处存在极点，极坐标图在 $\omega=0$ 的幅值为无穷大。



3. 增加有限零点

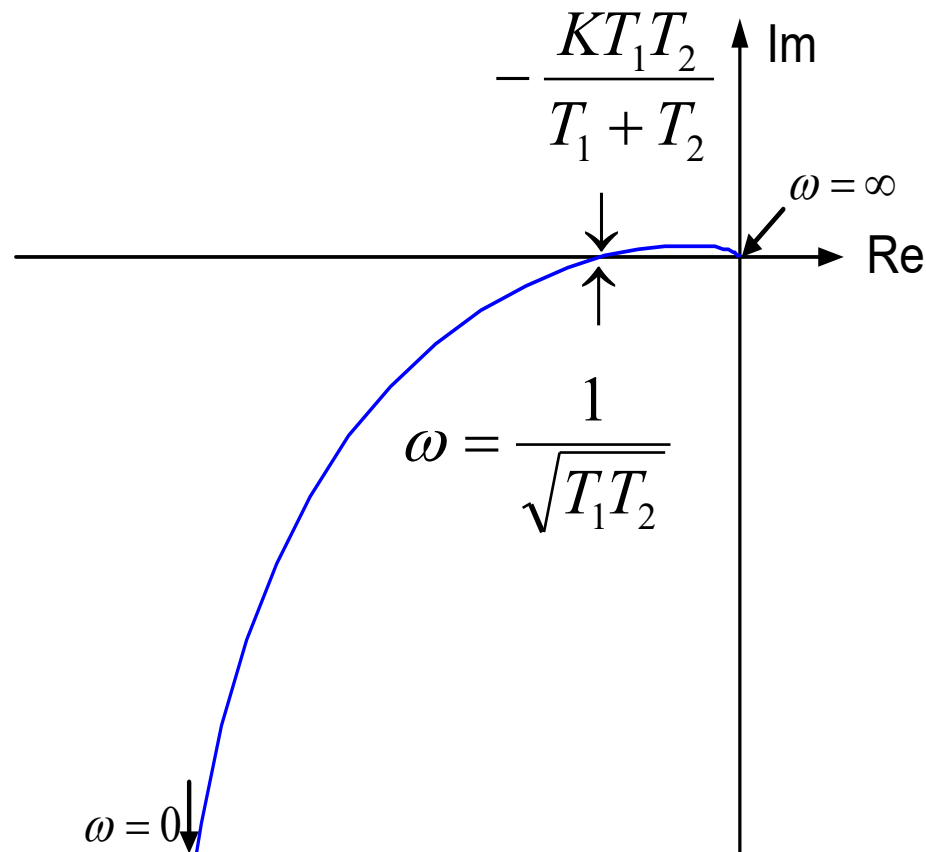
设 $G_5(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} T_1 \omega - \operatorname{tg}^{-1} T_2 \omega$$

$$P(\omega) = \frac{-K(T_1 + T_2)}{(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)}$$

$$Q(\omega) = \frac{-K(1 - T_1 T_2 \omega^2)}{\omega(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)}$$



当 $\omega = 0$ 时, $A(\omega) = \infty$, $\varphi(\omega) = -90^\circ$, $P(\omega) = -K(T_1 + T_2)$, $Q(\omega) = -\infty$

当 $\omega = \infty$ 时, $A(\omega) = 0$, $\varphi(\omega) = -270^\circ$, $P(\omega) = 0$, $Q(\omega) = 0$

令 $Q(\omega) = 0$, 解得与实轴交点 $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$, 交点 $P(\omega) = \frac{-KT_1 T_2}{T_1 + T_2}$



设 $G_5(s) = \frac{K(T_d s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$

$$A(\omega) = \frac{K\sqrt{1 + T_d^2 \omega^2}}{\omega\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}\sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} T_d \omega - 90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} T_1 \omega - \operatorname{tg}^{-1} T_2 \omega$$

$$P(\omega) = \frac{-K(T_1 + T_2 - T_d + \omega^2 T_1 T_2 T_d)}{(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)}$$

$$Q(\omega) = \frac{-K[1 - \omega^2(T_1 T_2 - T_1 T_d - T_2 T_d)]}{\omega(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)}$$

当 $\omega = 0$ 时, $A(\omega) = \infty$, $\varphi(\omega) = -90^\circ$, $P(\omega) = -K(T_1 + T_2 - T_d)$, $Q(\omega) = -\infty$

当 $\omega = \infty$ 时, $A(\omega) = 0$, $\varphi(\omega) = -180^\circ$, $P(\omega) = 0$, $Q(\omega) = 0$

令 $Q(\omega) = 0$ ，解得与实轴交点 $\omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2 - T_1 T_d - T_2 T_d}$

注意与实轴交点有交点的条件为： $T_1 T_2 - T_1 T_d - T_2 T_d > 0$

$$T_d(T_1 + T_2) < T_1 T_2 \quad \Rightarrow \quad T_d < \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

交点为 $P(\omega) = -K(\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - T_d)$

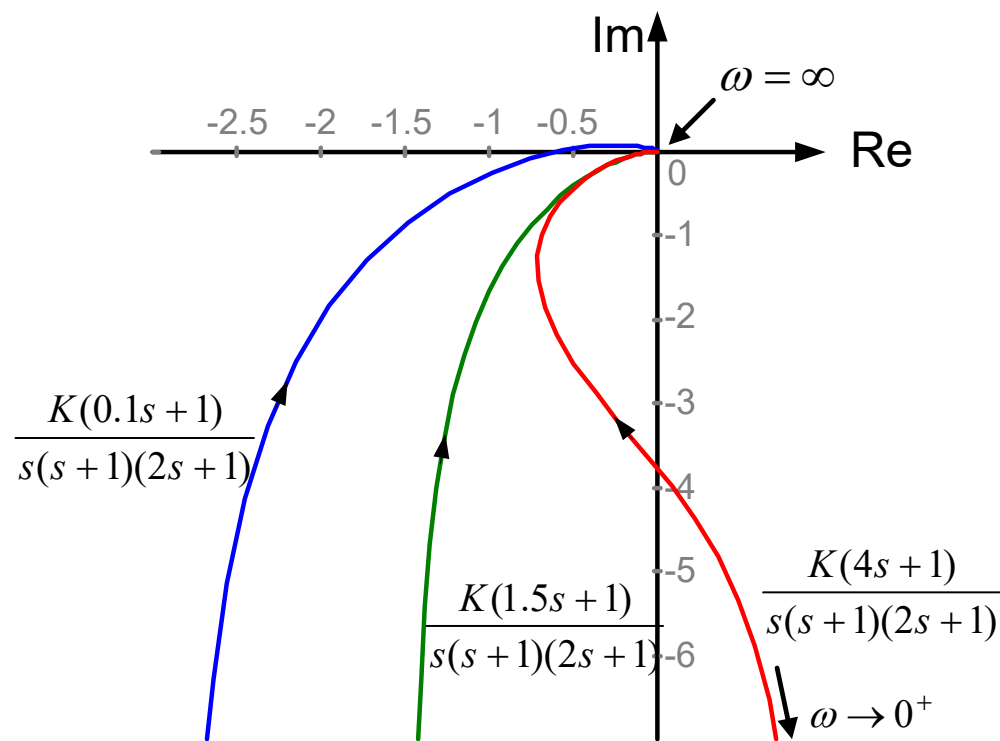
与没有零点的极坐标图比较知：交点更靠近原点，且当 $\omega \rightarrow \infty$ 时，极坐标图趋于原点时的相角为 -180° 。



若 $T_d \geq \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$ ，则极坐标图与实轴无交点。

另外令 $P(\omega) = 0$ ，解得与虚轴交点 $\omega^2 = \frac{T_d - (T_1 + T_2)}{T_1 T_2 T_d}$

即当 $T_d > (T_1 + T_2)$ 时极坐标图将与虚轴相交。





三、开环系统极坐标频率特性的绘制（绘制奈氏图）

开环系统的频率特性或由典型环节的频率特性组合而成，或是一个有理分式，不论那种形式，都可由下面的方法绘制。

[绘制方法]:

❑ 将开环系统的频率特性写成 $P(\omega) + jQ(\omega)$ 或 $A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ 的形式，根据不同的 ω 算出 $P(\omega), Q(\omega)$ 或 $A(\omega), \varphi(\omega)$ 可在复平面上得到不同的点并连之为曲线。（手工画法）。

实际绘图时极坐标图画的都是近似曲线。具体来讲是根据幅频特性和相频特性确定起点(对应 $\omega=0$)和终点(对应 $\omega=\infty$)；根据实频特性和虚频特性确定与坐标轴的交点；然后按 ω 从小到大的顺序用光滑曲线连接即可。必要时可再求一些中间的点帮助绘图

❑ 使用MATLAB工具绘制。

极坐标图的特点是除增益以外的部分决定极坐标图的形状，而增益决定图形的大小。



四、最小相位系统频率特性的特点

频率特性可表示为：

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\nu} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (1 + \tau_i \omega j)}{\prod_{j=1}^{n-\nu} (1 + T_j \omega j)}$$

其相角为：

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^m \operatorname{tg}^{-1} \tau_i \omega - \nu \frac{\pi}{2} - \sum_{j=1}^{n-\nu} \operatorname{tg}^{-1} T_j \omega$$

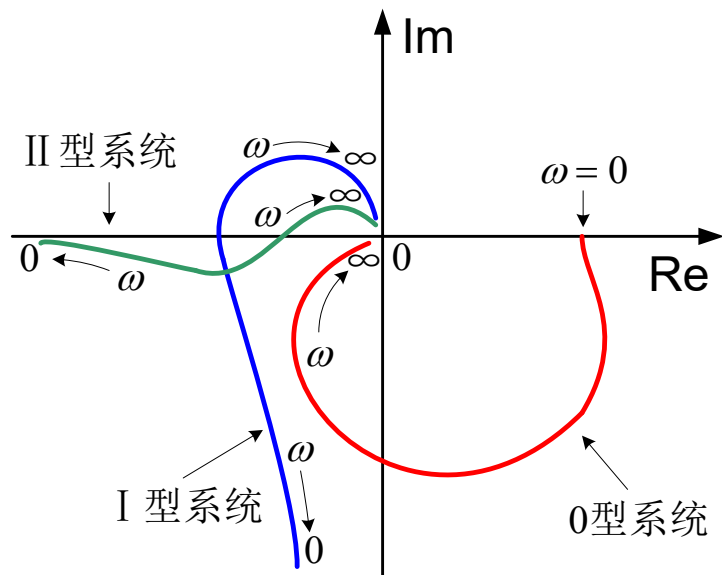
当 $\omega = 0$ 时， $\varphi(0) = -\nu \frac{\pi}{2}$ ， $G(0) = \frac{K}{(j\omega)^\nu} \Big|_{\omega=0}$

当 $\omega = \infty$ 时， $\varphi(\infty) = m \frac{\pi}{2} - \nu \frac{\pi}{2} - (n - \nu) \frac{\pi}{2} = -(n - m) \frac{\pi}{2}$ ，

$$G(j\omega) \Big|_{\omega=\infty} = 0, (\text{若 } n > m)$$

显然，低频段的频率特性与系统型数有关，高频段的频率特性与 $n-m$ 有关。

下图为0型、I型和II型系统在低频和高频段频率特性示意图：

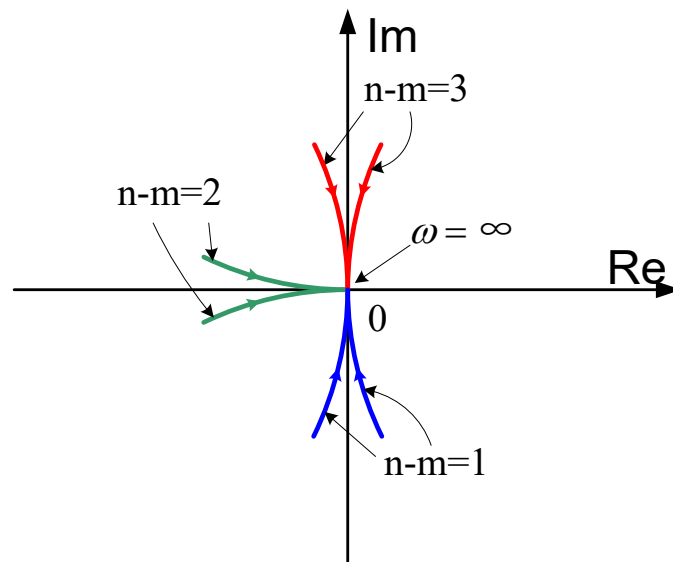


低频段频率特性

0型: $\varphi(0) = 0, |G(0)| = K$

I型: $\varphi(0) = -\frac{\pi}{2}, |G(0)| = \infty$

II型: $\varphi(0) = -\pi, |G(0)| = \infty$



高频段频率特性

$n-m=1$ 时, $\varphi(\infty) = -\frac{\pi}{2}$

$n-m=2$ 时, $\varphi(\infty) = -\pi$

$n-m=3$ 时, $\varphi(\infty) = -\frac{3\pi}{2}$

至于中频部分, 可计算一些特殊点的来确定。如与坐标轴的交点等。



五、非最小相位系统频率特性的特点

传递函数可表示为：

$$G(j\omega) = \pm \frac{N(s)}{D(s)} \frac{\prod_{i=1}^{m-l} (1 - \tau_i s)}{\prod_{j=1}^{n-v} (1 - T_j s)}$$

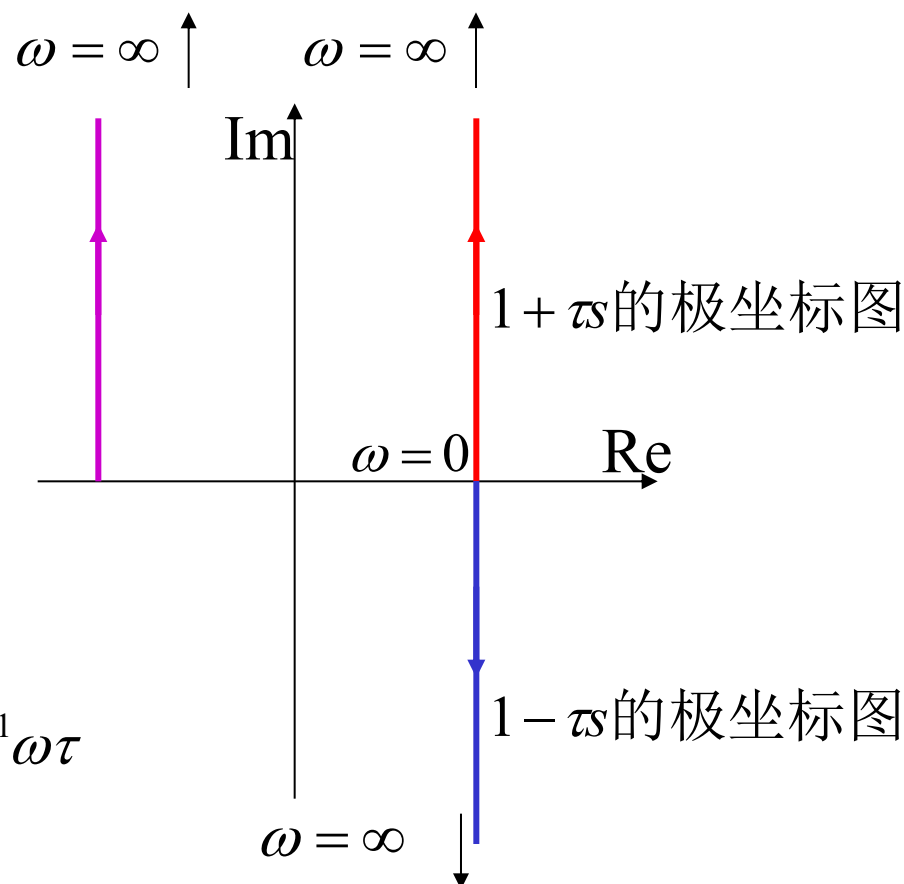
1. $G(s) = 1 - \tau s$

$$G(j\omega) = 1 - j\omega\tau$$

$$P(\omega) = 1, \quad Q(\omega) = -\omega\tau$$

$$A(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad \varphi(\omega) = -\tan^{-1} \omega\tau$$

$\tau s - 1$ 的极坐标图

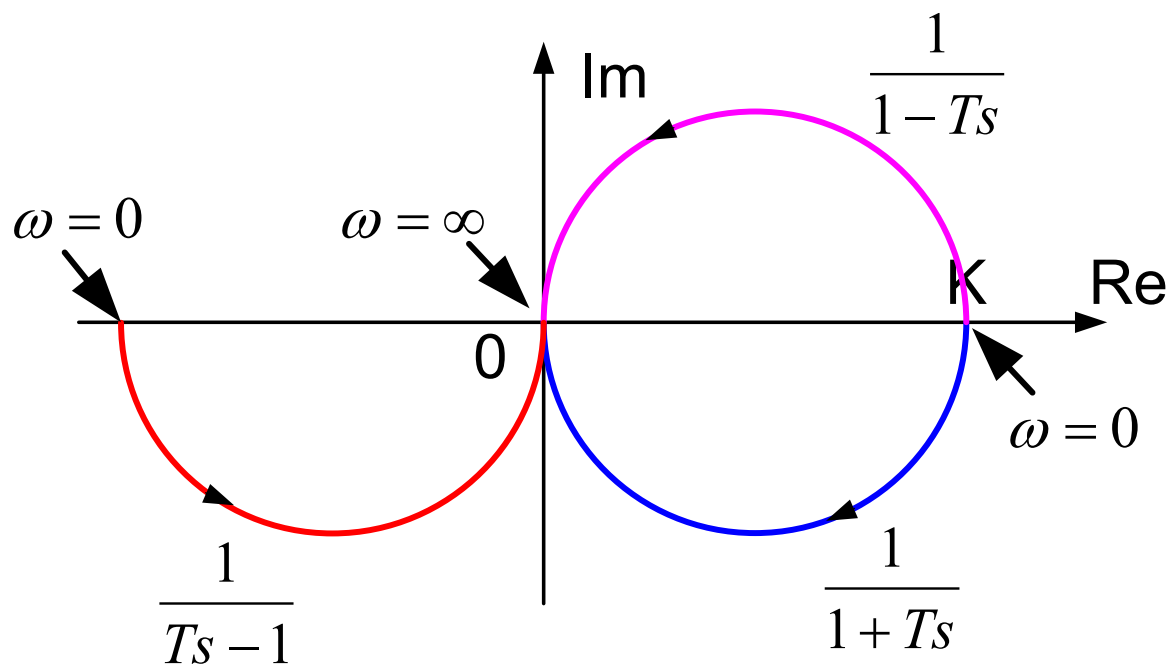




$$2. \quad G(s) = \frac{1}{1 - Ts} \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 - j\omega T}$$

$$P(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2}, \quad Q(\omega) = \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad \varphi(\omega) = \tan^{-1} \omega T$$





例：已知开环传递函数为 $G(s) = \frac{1 - T_2 s}{s(1 + T_1 s)}$ ，画极坐标图。

解： $G(j\omega) = \frac{1 - j\omega T_2}{j\omega(1 + j\omega T_1)} = \frac{-\omega(T_1 + T_2) + j(\omega^2 T_1 T_2 - 1)}{\omega(1 + \omega^2 T_1^2)}$

$$P(\omega) = \frac{-(T_1 + T_2)}{1 + \omega^2 T_1^2} \quad Q(\omega) = \frac{\omega^2 T_1 T_2 - 1}{\omega(1 + \omega^2 T_1^2)}$$

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}} \quad \varphi(\omega) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} T_1 \omega - \operatorname{tg}^{-1} T_2 \omega$$

当 $\omega = 0$ 时， $A(\omega) = \infty$ ， $\varphi(\omega) = -90^\circ$ ， $P(\omega) = -(T_1 + T_2)$ ， $Q(\omega) = -\infty$

当 $\omega = \infty$ 时， $A(\omega) = 0$ ， $\varphi(\omega) = -270^\circ$ ， $P(\omega) = 0$ ， $Q(\omega) = 0$

令 $Q(\omega) = 0$ ，解得与实轴交点 $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$ ，交点 $P(\omega) = -T_2$

对比考虑 $G(s) = \frac{1 + T_2 s}{s(1 + T_1 s)}$ 的极坐标图。

$$\text{此时: } G(j\omega) = \frac{1 + j\omega T_2}{j\omega(1 + j\omega T_1)} = \frac{\omega(T_2 - T_1) - j(\omega^2 T_1 T_2 + 1)}{\omega(1 + \omega^2 T_1^2)}$$

$$P(\omega) = \frac{T_2 - T_1}{1 + \omega^2 T_1^2}$$

$$Q(\omega) = -\frac{\omega^2 T_1 T_2 + 1}{\omega(1 + \omega^2 T_1^2)}$$

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} T_1 \omega + \operatorname{tg}^{-1} T_2 \omega$$

当 $\omega = 0$ 时, $A(\omega) = \infty$, $\varphi(\omega) = -90^\circ$, $P(\omega) = T_2 - T_1$, $Q(\omega) = -\infty$

当 $\omega = \infty$ 时, $A(\omega) = 0$, $\varphi(\omega) = -90^\circ$, $P(\omega) = 0$, $Q(\omega) = 0$

此时与虚轴无交点, 但当 $T_1 > T_2$ 时, 渐近线在第三象限; 而当 $T_2 > T_1$ 时, 渐近线在第四象限。



例

$$G_1(s) = \frac{1-s}{s(1+2s)}$$

$$G_2(s) = \frac{1+s}{s(1+2s)}$$

$$G_3(s) = \frac{1+2s}{s(1+s)}$$

对比考虑 $G(s) = \frac{T_2s - 1}{s(1 + T_1s)}$

的极坐标图。

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1}T_1\omega + 180^\circ - \operatorname{tg}^{-1}T_2\omega$$

$$\varphi(\omega) = 90^\circ - \operatorname{tg}^{-1}T_1\omega - \operatorname{tg}^{-1}T_2\omega$$

$$G_4(s) = \frac{s-1}{s(1+2s)}$$

