

第六节 根轨迹的应用

- ❖ 条件稳定系统的分析；
- ❖ 瞬态性能分析和开环系统参数的确定；
- ❖ 利用根轨迹求解代数方程的根；
- ❖ 对系统进行校正。

一、条件稳定系统的分析

[例4-11]: 设开环系统传递函数为: $G_k(s) = \frac{K_g(s^2 + 2s + 4)}{s(s+4)(s+6)(s^2 + 1.4s + 1)}$

试绘制根轨迹，并讨论使闭环系统稳定时 K_g 的取值范围。

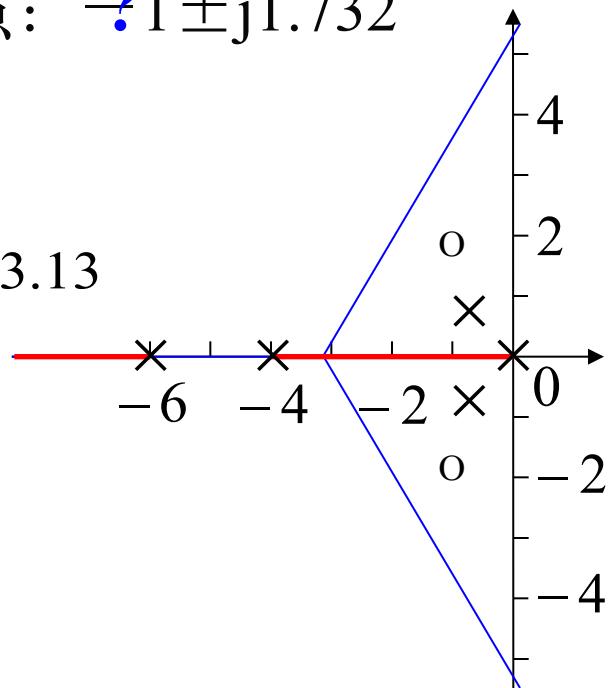
[解] 根据绘制根轨迹的步骤，可得：

- 开环极点: $0, -4, -6, -0.7 \pm j0.714$, 零点: $-1 \pm j1.732$
- 漐近线: 与实轴的交点:

$$-\sigma = \frac{\sum -p_i - \sum -z_i}{n-m} = \frac{-4 - 6 - 1.4 + 2}{3} = -3.13$$

倾角: $\theta = \frac{\pi(2k+1)}{n-m} = \pm \frac{\pi}{3}, \pi$

- 实轴上根轨迹区间: $(-\infty, -6], [-4, 0]$



分离会合点：

$$N(s) = s^2 + 2s + 4, \quad N'(s) = 2s + 2$$

$$D(s) = s^5 + 11.4s^4 + 39s^3 + 43.6s^2 + 24s$$

$$D'(s) = 5s^4 + 45.6s^3 + 117s^2 + 87.2s + 24$$

$$N'(s)D(s) - N(s)D'(s) = 3s^6 + 30.8s^5 + 127.4s^4 + 338.4s^3 + 531.2s^2 + 348.8s + 96 = 0$$

用Matlab可算出分离点 $s = -2.3557$; [另一根为 -5.1108 (略)]。

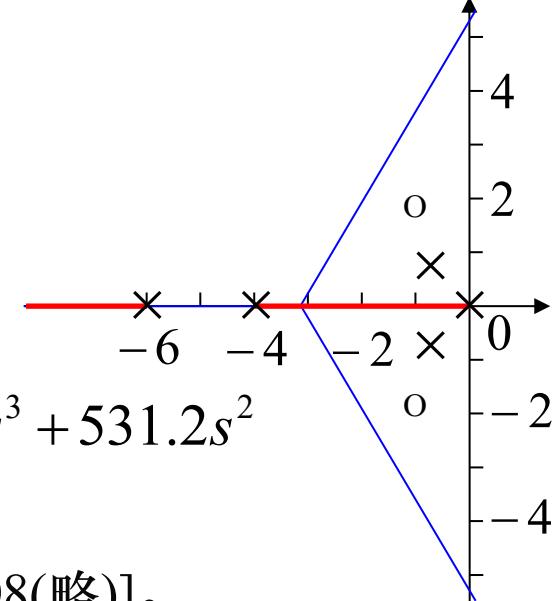
另外可以根据 $K_g = -\frac{D(s)}{N(s)}$ 求实轴分离点的近似值。

求出 $[-4, 0]$ 之间的增益如下表所示

s	0	-0.5	-1	-1.5	-2.0	-2.5	-3	-3.5	-4
K_{gd}	0	1.628	3	5.971	8.80	9.375	7.457	3.949	0

K_{gd} 的最大值为 9.375，这时 $s = -2.5$ ，是近似分离点。

$$\text{分离角: } \theta_d = \frac{\pi}{2}$$

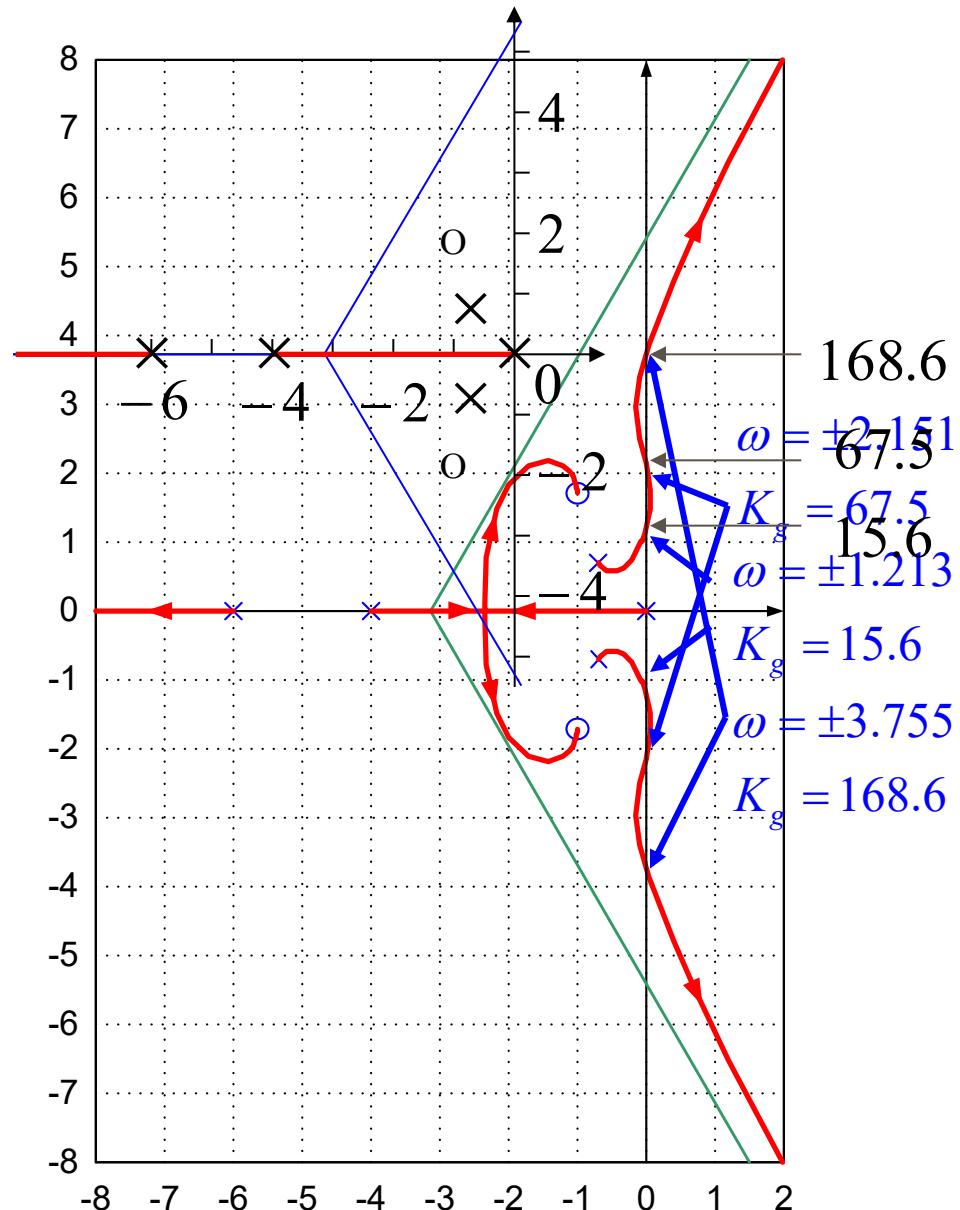


- 出射角: $\theta_c = \mp 55^\circ$
- 入射角: $\theta_r = \pm 103^\circ$
- 与虚轴的交点和对应的增益值:

$$\omega = \begin{cases} \pm 1.213 \\ \pm 2.151 \\ \pm 3.755 \end{cases} \quad k_{gp} = \begin{cases} 15.6 \\ 67.5 \\ 168.6 \end{cases}$$

画出根轨迹，如右图所示：

由图可知：当 $0 < K_g < 15.6$
和 $67.5 < K_g < 168.6$ 时，系统是
稳定的；
当 $K_g > 168.6$ 和 $15.6 < K_g < 67.5$
时，系统是不稳定的。



条件稳定系统：参数在一定的范围内取值才能保证稳定的系统

例子：

- ❖ 开环非最小相位系统，其闭环系统的根轨迹必然有一部分在s的右半平面；
- ❖ 具有正反馈的环节。

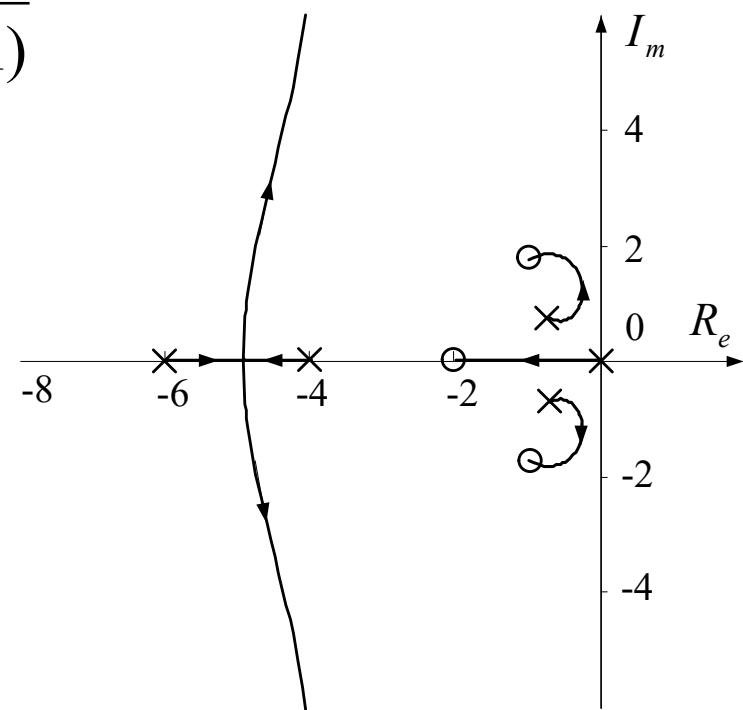
条件稳定系统的性能往往不能令人满意。在工程中，应注意参数的选择或通过适当的校正方法消除条件稳定问题。

适当调整系统的参数或在系统中增加合适的校正网络，可以消除条件稳定性问题。比如在系统的开环传递函数中增加一个零点，即增加一个比例微分环节，通常可使根轨迹向左方弯曲。在上例中，如果增加一个零点 -2 ，则开环传递函数成为

$$G_k(s) = \frac{k_g(s^2 + 2s + 4)(s + 2)}{s(s + 4)(s + 6)(s^2 + 1.4s + 1)}$$

根轨迹为：

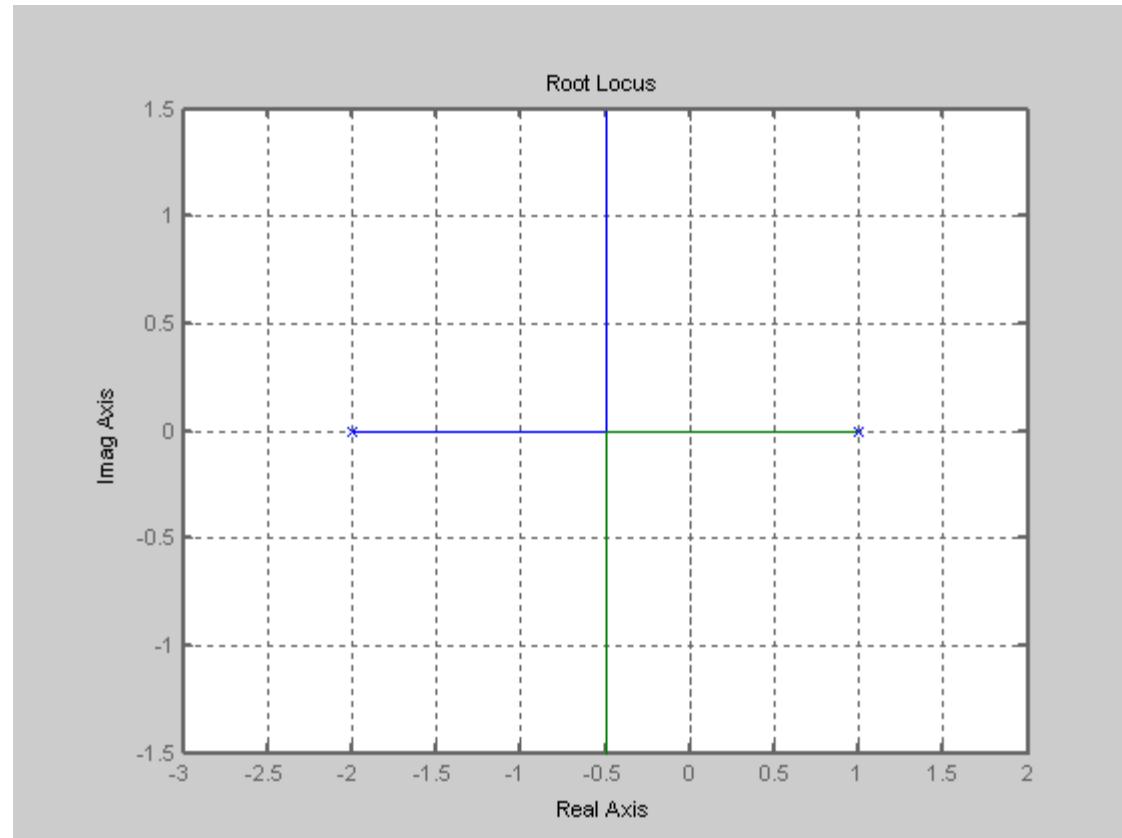
从稳定的角度看，开环系统增加了零点后，不论根轨迹增益取何值，闭环系统都是稳定的。



[例] 非最小相位系统: $G_k(s) = \frac{k_g}{(s-1)(s+2)}$, 试确定使系统稳定时的增益值。

[解]: 根轨迹如右:

有闭环极点在右半平面, 系统是不稳定的。显然稳定临界点在原点。该点的增益临界值为 k_{gp} 。



闭环特征方程为: $s^2 + s + k_g - 2 = 0$, 当 $s=0$ 时, $k_{gp} = 2$, 所以, 系统稳定的条件是: $k_g > 2$

二、瞬态性能分析和开环系统参数的确定

利用根轨迹可以清楚的看到开环根轨迹增益或其它开环系统参数变化时，闭环系统极点位置及其瞬态性能的改变情况。

以二阶系统为例：开环传递函数为

$$G_k(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

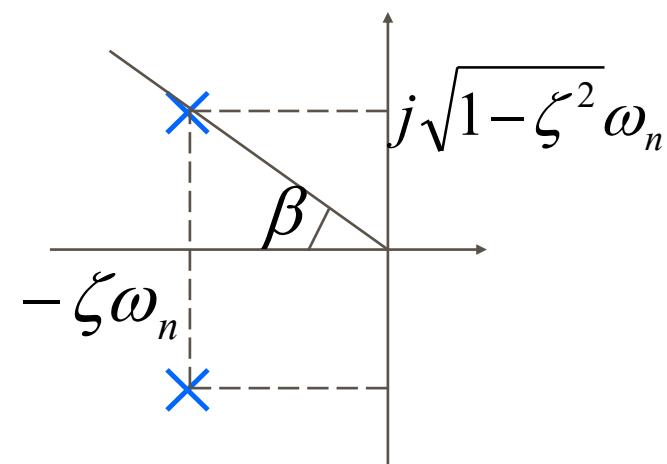
共轭极点为 $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$

在s平面上的分布如右图：

闭环极点的张角 β 为：

$$\cos \beta = \frac{\zeta\omega_n}{\sqrt{(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)^2 + (\zeta\omega_n)^2}} = \zeta, \therefore \beta = \cos^{-1} \zeta$$

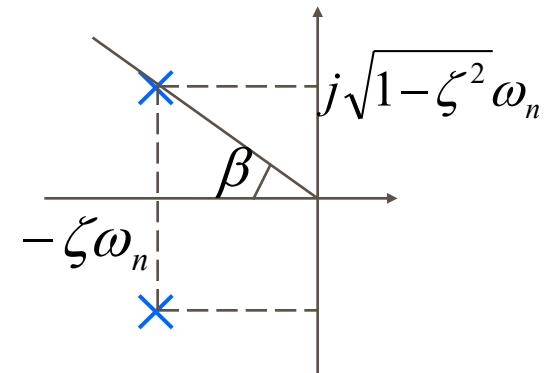
所以 β 称为阻尼角。斜线称为等阻尼线。



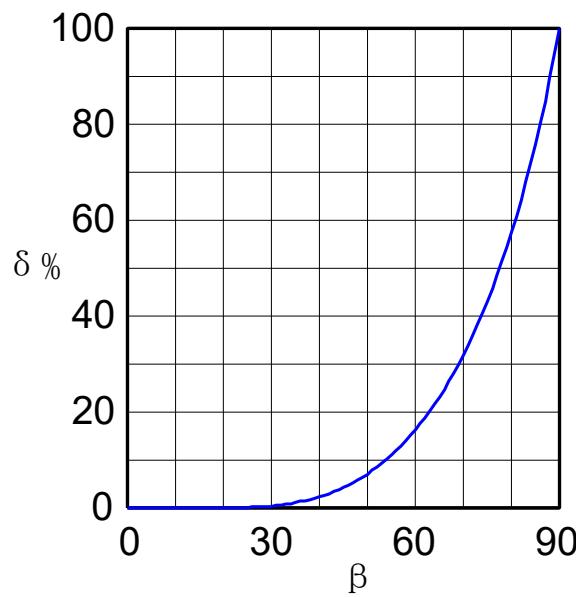
二阶系统性能指标与闭环极点的关系为：

$$\delta\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = e^{-\pi c \operatorname{tg} \beta} \times 100\%$$

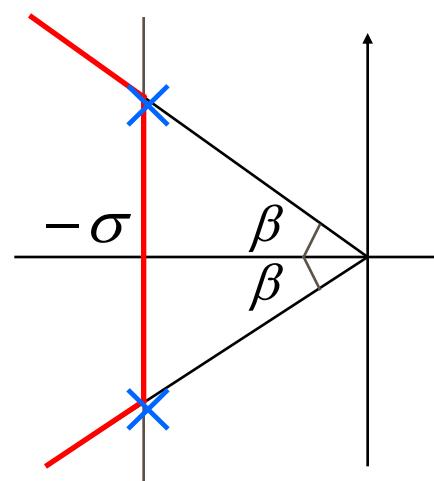
$$t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} = \frac{3}{\sigma} \quad (-\sigma \text{为极点实部})$$



$\delta\%$ 和 β 的关系如下图



若闭环极点落在下图中红线包围的区域中，有： $\delta\% \leq e^{-\pi c \operatorname{tg} \beta}$ 和 $t_s \leq \frac{3}{\sigma}$

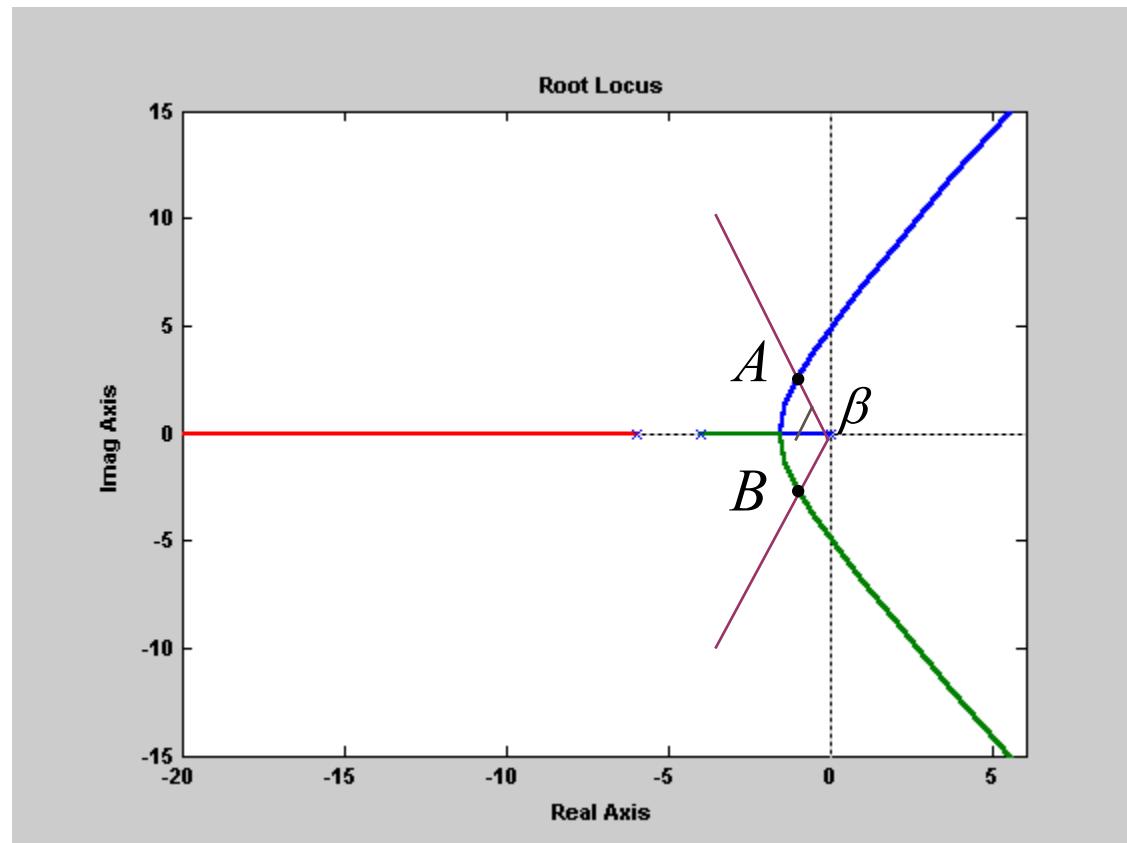


[例4-12]单位反馈系统的开环传递函数为： $G_k(s) = \frac{K_g}{s(s+4)(s+6)}$
 若要求闭环单位阶跃响应的最大超调量 $\delta\% \leq 18\%$ ，试确定开环放大系数。

[解]：首先画出根轨迹如图。

根据计算知道：根轨迹与虚轴的交点为 $\pm\sqrt{24}$ ，这时的临界增益 $K_{gp} = 240$

当 $K_g > 240$ 时，闭环系统不稳定。

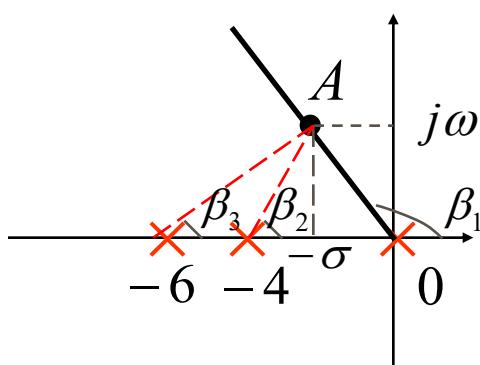


这是一个三阶系统，从根轨迹上看出，随着 K_g 的增加，主导极点越显著。所以可以用二阶系统的性能指标近似计算。

下面计算超调量和阻尼角的关系。由于：

$$\delta\% = e^{-\pi c t g \beta} \times 100\%, \quad \text{当 } \delta\% \leq 18\% \text{ 时解得: } \beta \leq 61.37^\circ$$

在根轨迹图上画两条与实轴夹角为 $\beta = 60^\circ$ 的直线，与根轨迹交于A、B两点。则A、B两点就是闭环共轭主导极点，这时系统的超调量小于18%。通过求A、B两点的坐标，可以确定这时的根轨迹增益 K_g ，进而求得开环放大系数K。



设A点坐标为: $-\sigma + j\omega$, 则:

$$\frac{\omega}{\sigma} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \quad (1)$$

相角条件为: $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi$

$$120^\circ + \tan^{-1} \frac{\omega}{4-\sigma} + \tan^{-1} \frac{\omega}{6-\sigma} = \pi \quad (2)$$

由(1), (2)式解得: $\sigma = 1.2, \omega = 2.1$ 共轭主导极点为: $s_{1,2} = -1.2 \pm j2.1$ 。

也可令 $s = x + \sqrt{3}xj$ 代入特征方程 $s^3 + 10s^2 + 24s + K_g = 0$

实部方程 $-8x^3 - 20x^2 + 24x + K_g = 0$ 解得: $x = -1.2, s = -1.2 \pm 2.1j$

虚部方程 $20\sqrt{3}x^2 + 24\sqrt{3}x = 0 \quad K_g = 43.776$

$$K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)$$

$$\prod_{j=1}^n (T_j s + 1)$$

□ 开环传递函数以 $G_k(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{\prod_{j=1}^n (T_j s + 1)}$ 的形式表示时, K 称为开环放大系数。

显然 K 与 K_g 的关系为: $K = \frac{K_g \prod z_i}{\prod p_j}$, 式中 p_j 不计为0极点。

所以, 开环放大系数: $K = \frac{43.776}{4 \times 6} = 1.824$

□ 由于闭环极点之和等于开环极点之和, 所以另一个闭环极点为: $s_3 = -7.6$ 。该极点是共轭复极点实部的6倍多。

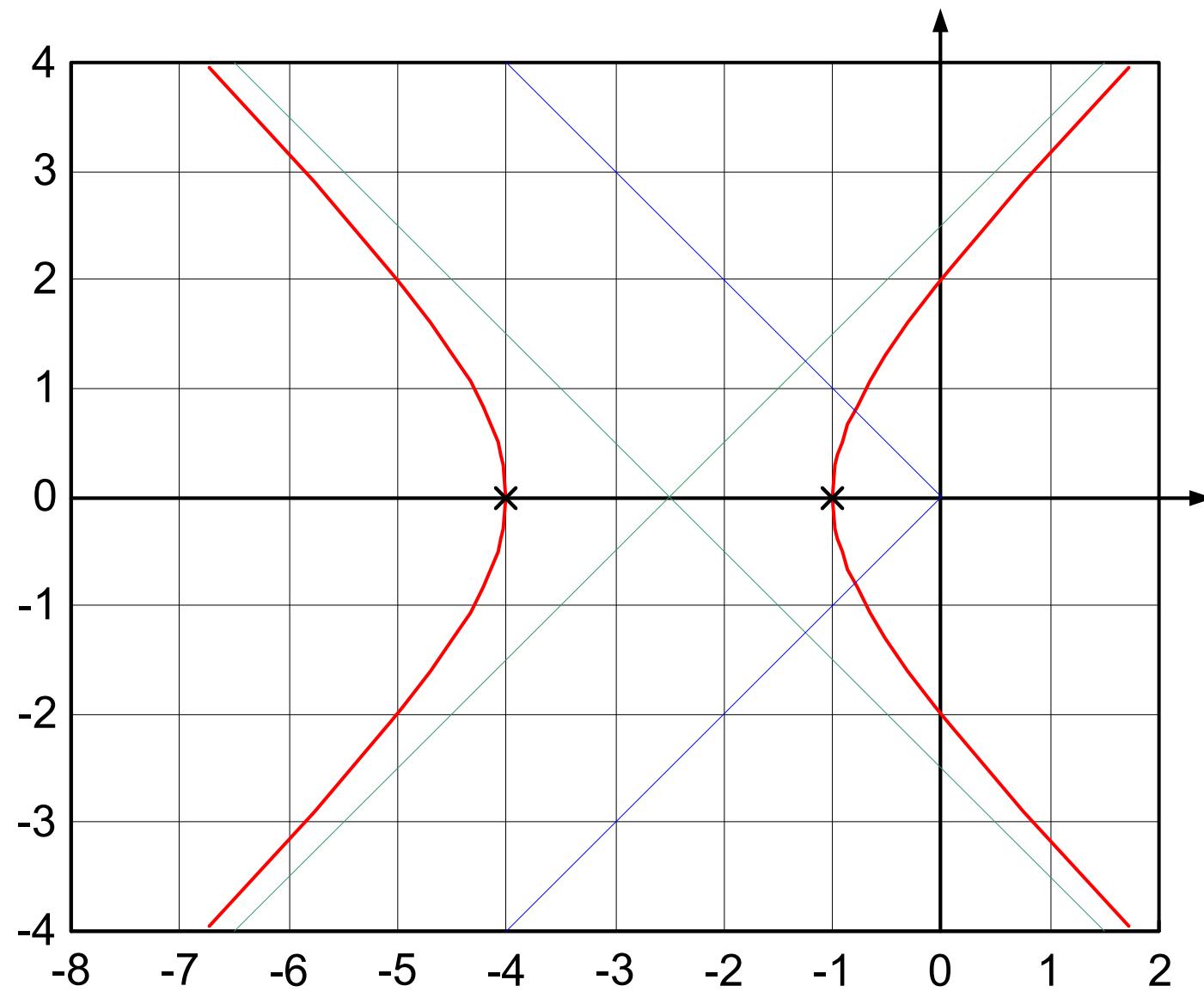
例：单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_k(s) = \frac{K_g}{(s+1)^2(s+4)^2}$$

1. 画出根轨迹
2. 能否通过选择 K_g 满足最大超调量 $\delta\% \leq 5\%$ 的要求？
3. 能否通过选择 K_g 满足调节时间 $t_s \leq 2$ 秒的要求？
4. 能否通过选择 K_g 满足位置误差系数 $K_p \geq 10$ 的要求？

解：1. 画根轨迹

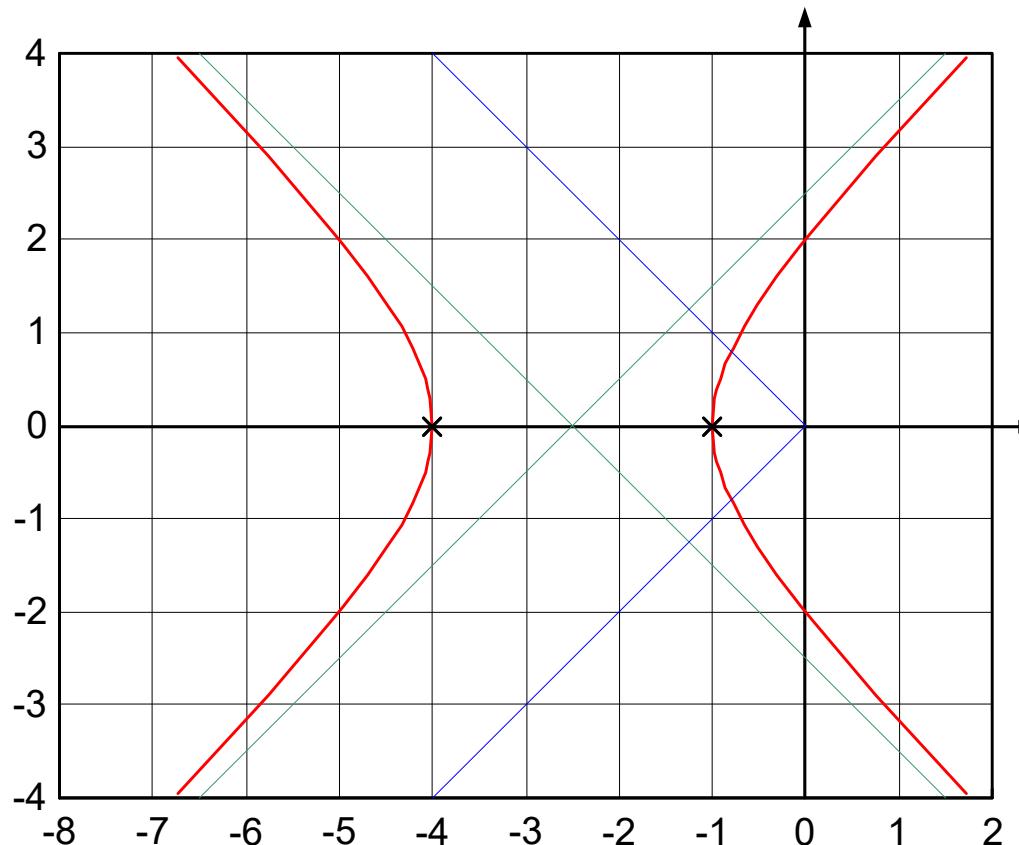
- ① 实轴无根轨迹
- ② 漐近线 $-\sigma = -2.5$, $\theta = 45^\circ, \pm 135^\circ$
- ③ 与虚轴交点 $\omega = \pm 2$, $K_{gp} = 100$



2. 能否通过选择 K_g 满足最大超调量 $\delta\% \leq 5\%$ 的要求?

当取阻尼角为 45° 的主导极点时， $\delta\% \leq 5\%$ 的要求。

由根轨迹可见阻尼角为 45° 的线与根轨迹相交，可求得主导极点为 $s = -0.8 + 0.8j$ ，另一对极点为 $s = -4.2 + 0.8j$ 相差5.25倍，满足主导极点的要求。



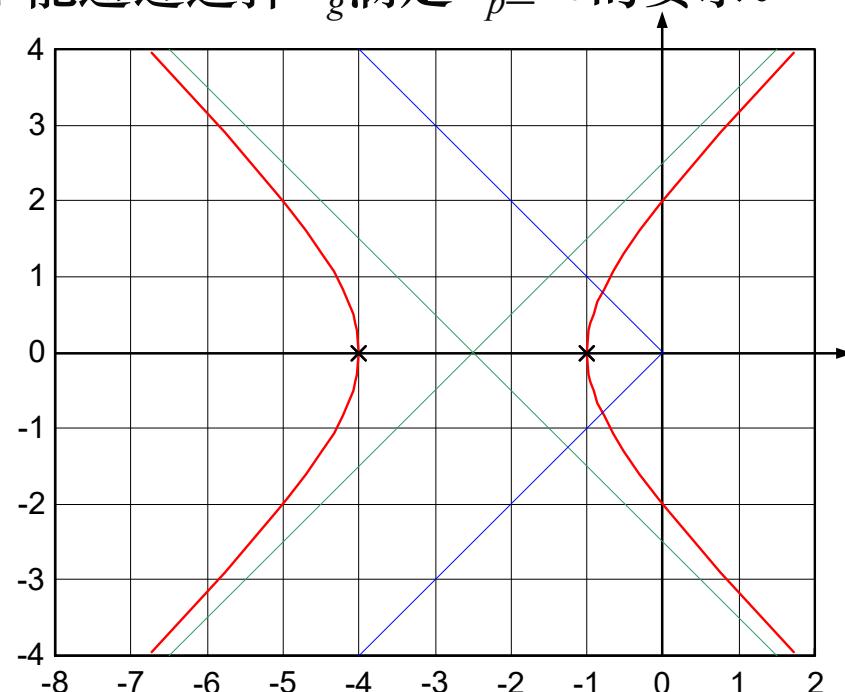
3. 能否通过选择 K_g 满足调节时间 $t_s \leq 2$ 秒的要求?

要求 $t_s \leq 2$ 秒, 即要求 $3/\sigma = 2$, $\sigma \geq 1.5$ 。由根轨迹可知主导极点的实部 ≤ 1 , 所以不能通过选择 K_g 满足 $t_s \leq 2$ 秒的要求。

4. 能否通过选择 K_g 满足位置误差系数 $K_p \geq 10$ 的要求? $G_k(s) = \frac{K_g}{(s+1)^2(s+4)^2}$

$$K_p = \lim_{s=0} G_k(s) = \frac{K_{gp}}{16} = 6.25$$

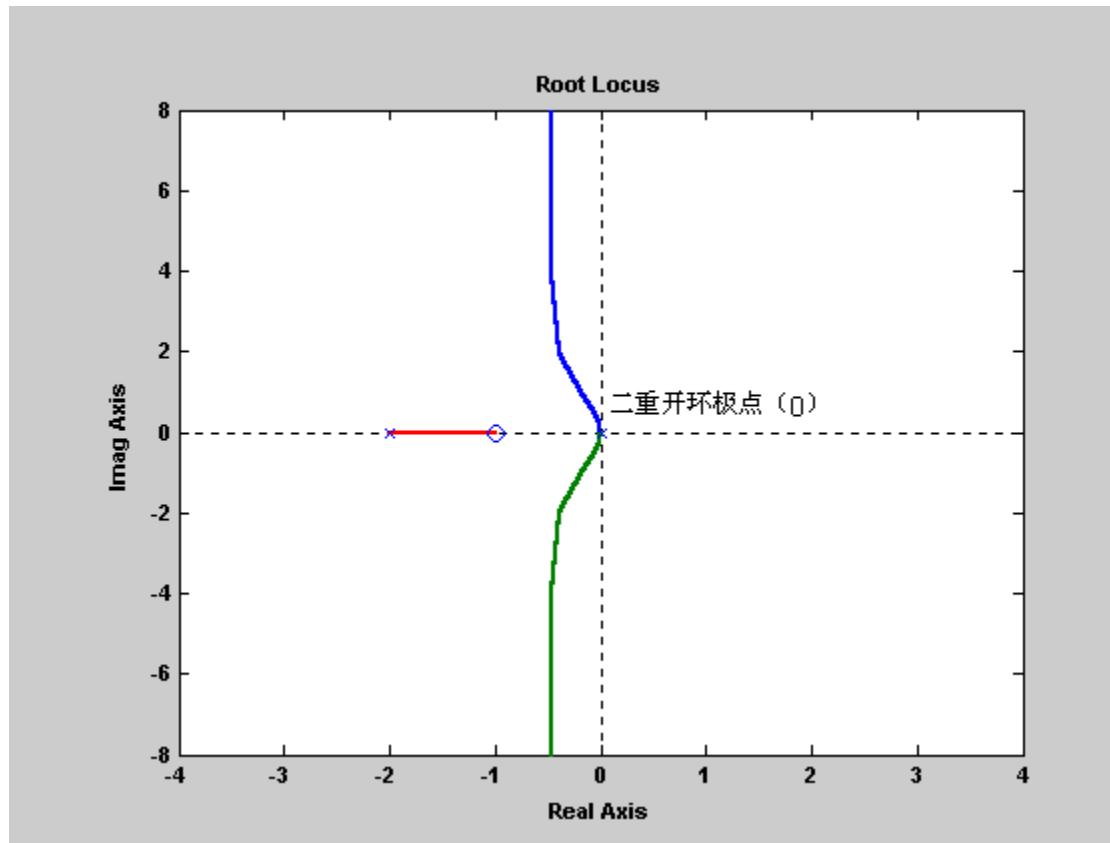
所以不能通过选择 K_g 满足 $K_p \geq 10$ 的要求。



问 题

1. 增加开环零点改变根轨迹，因而改变闭环极点。那么是否改变闭环零点？
2. 当两个系统的根轨迹相同并选择相同的闭环极点时，这两个系统的瞬态响应是否一样？

[例4-15]: 设系统A和B有相同的被控对象，且有相同的根轨迹，如下图所示。已知系统A有一个闭环零点，系统B没有闭环零点。试求系统A和B的开环传递函数和它们所对应的闭环方块图。



[解]: ①由于两系统的根轨迹完全相同，因而它们对应的开环传递函数和闭环特征方程式也完全相同。由上页图可知系统A和B的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{k(s+1)}{s^2(s+2)}$$

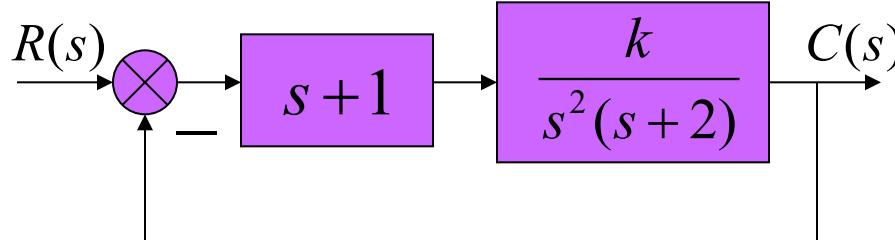
特征方程为： $D(s) = s^2(s+2) + k(s+1)$

② 系统A和B的闭环传递函数分别为：

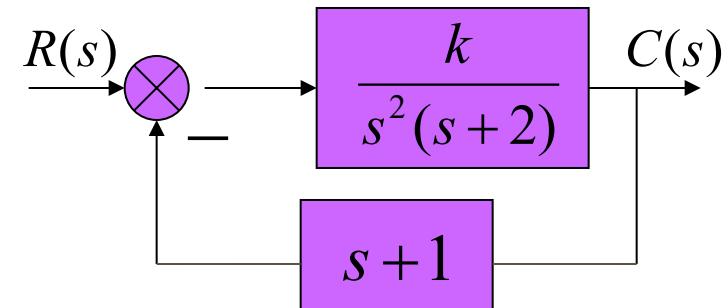
$$\begin{aligned} \phi_A(s) &= \frac{k(s+1)}{D(s)} = \frac{k(s+1)}{s^2(s+2) + k(s+1)} & \phi_B(s) &= \frac{k}{D(s)} = \frac{k}{s^2(s+2) + k(s+1)} \\ &= \frac{\frac{k(s+1)}{s^2(s+2)}}{1 + \frac{k(s+1)}{s^2(s+2)}} & &= \frac{\frac{k}{s^2(s+2)}}{1 + \frac{k(s+1)}{s^2(s+2)}} \end{aligned}$$

由此可知，系统A是一单位反馈系统，前向通路的传递函数为：

$\frac{k(s+1)}{s^2(s+2)}$ 。系统B的前向通路传递函数为： $\frac{k}{s^2(s+2)}$ ，反馈通路传递函数为： $(s+1)$ 。由于系统A和B有相同的被控对象，因此，系统的A的前向通路传递函数可写为： $(s+1) \cdot \frac{k}{s^2(s+2)}$ ，闭环方块图如下图 (a) 所示，系统B 的闭环方块图如下图 (b) 所示。



图(a) A系统



图(b) B系统

根轨迹相同的系统，开环传递函数和闭环极点都相同，但闭环零点却不一定相同。

三、利用根轨迹求解代数方程的根

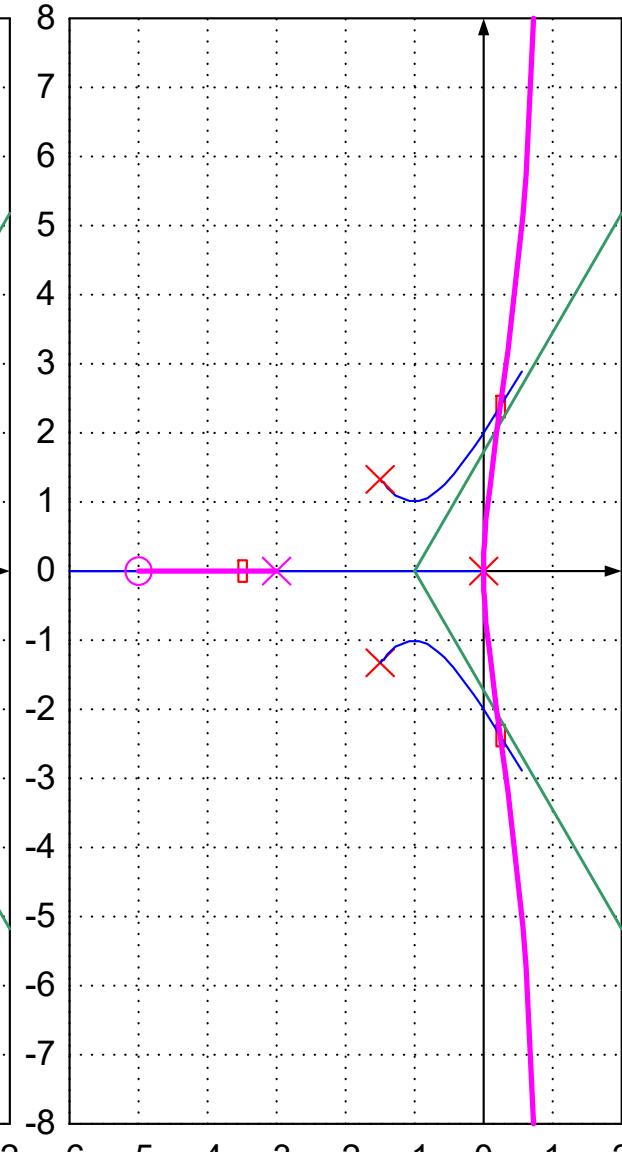
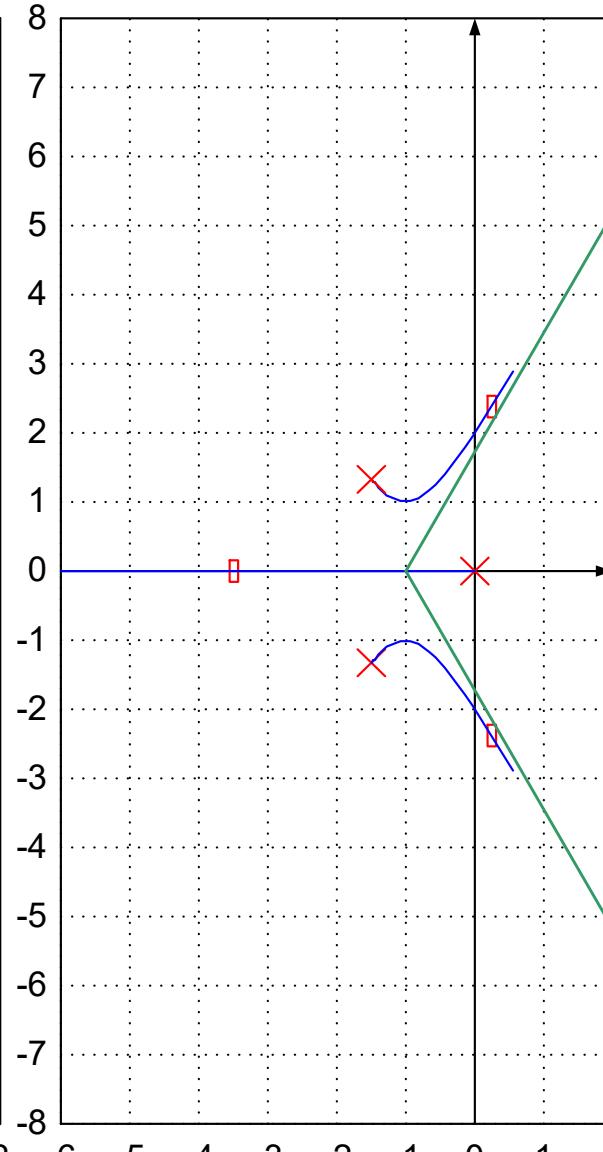
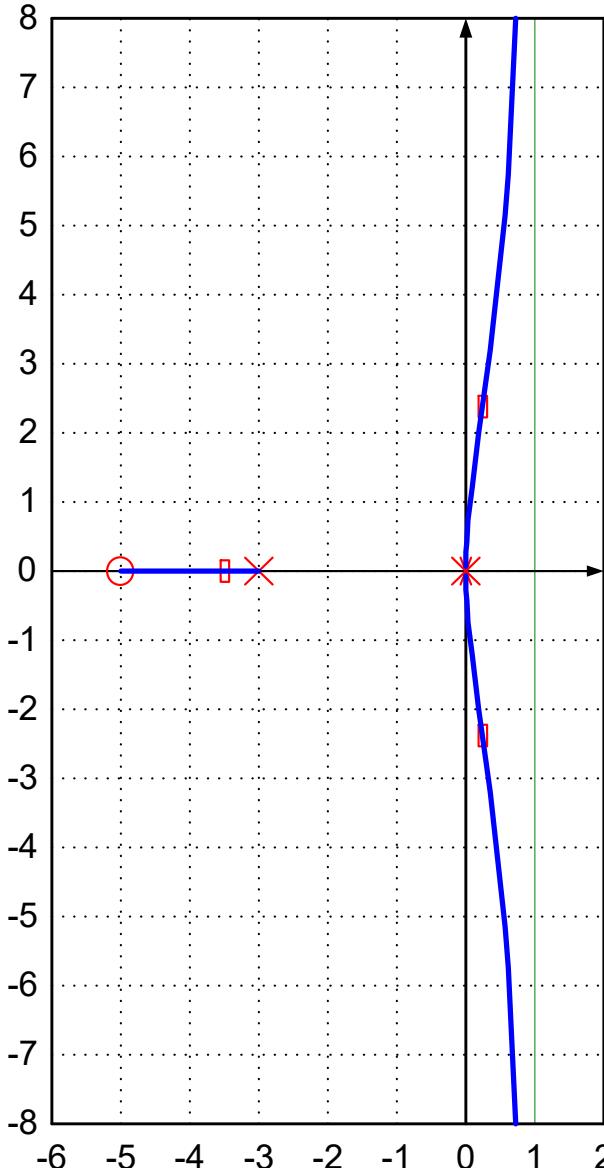
例 求如下代数方程的根

$$s^3 + 3s^2 + 4s + 20 = 0$$

解：为了将此题作为一个根轨迹问题来考虑，应将上式变换成根轨迹方程的形式。因式中无根轨迹增益，变换结果不唯一。

$$1 + \frac{4s + 20}{s^3 + 3s^2} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K_g(s + 5)}{s^3 + 3s^2} = 0 \quad (K_g = 4)$$

$$1 + \frac{20}{s^3 + 3s^2 + 4s} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K_g}{s^3 + 3s^2 + 4s} = 0 \quad (K_g = 20)$$





小 结

□ 条件稳定系统的分析

— 临界稳定增益的确定；

□ 瞬态性能分析和开环系统参数的确定

— 阻尼角和等阻尼线；

— 超调量、调整时间与闭环极点的关系；

— 根据性能指标确定二阶及高阶系统的开环放大系数；

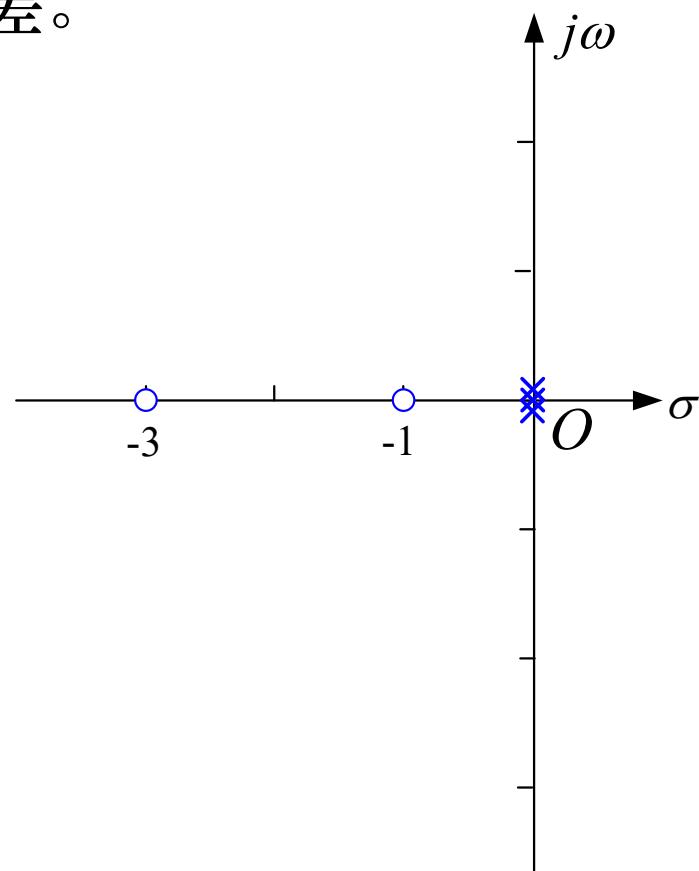
— 开环零、极点对根轨迹形状的影响。

□ 用Matlab绘制根轨迹的方法

例4-13. 已知系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{k(s+1)(s+3)}{s^3}$

- (1) 画出系统的根轨迹；
- (2) 计算使系统稳定的k值范围；
- (3) 计算系统对于斜坡输入的稳态误差。

[解]: (1) 画根轨迹:



□ 会合分离点：由方程 $\dot{N}(s)D(s) - N(s)\dot{D}(s) = 0$

得 $s^2 + 8s + 9 = 0$

解得 $s_{1,2} = -4 \pm 2.65$

$s_1 = -6.65$ 在根轨迹上，因此是会合点。

$s_2 = -1.35$ 不在根轨迹上，舍去。

□ 求出射角：利用辐角条件计算出射角，得 $\vartheta_1 = \pm 60^\circ, 180^\circ$

该系统有三条根轨迹，一条从原点起始，终止于开环零点-1处；另两条从原点以 $\pm 60^\circ$ 的出射角起始，分别终止于-3和无穷零点处。

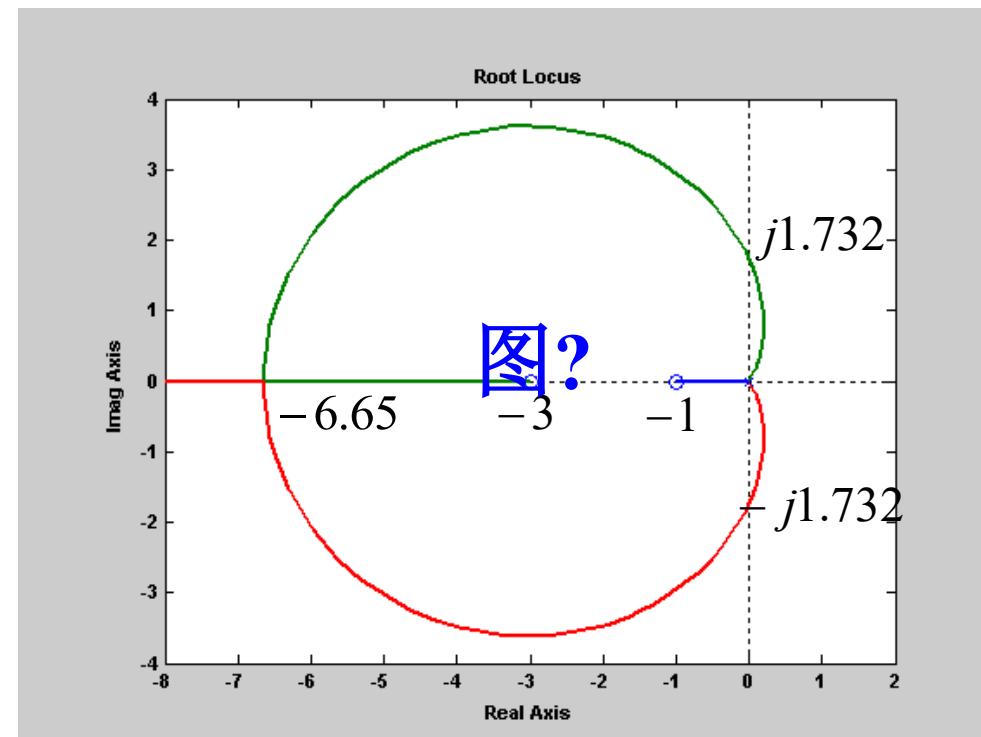
□ 求与虚轴交点

系统特征方程为 $s^3 + ks^2 + 4ks + 3k = 0$

劳斯表为

s^3	1	$4k$
s^2	k	$3k$
s^1	$4k - 3$	0
s^0	$3k$	

当 $k = \frac{3}{4}$ 时，由辅助方程 $ks^2 + 3k = 0$ ，可求出根轨迹与虚轴的交点为 $\pm j\sqrt{3}$ 。



$$G(s) = \frac{k(s+1)(s+3)}{s^3}$$

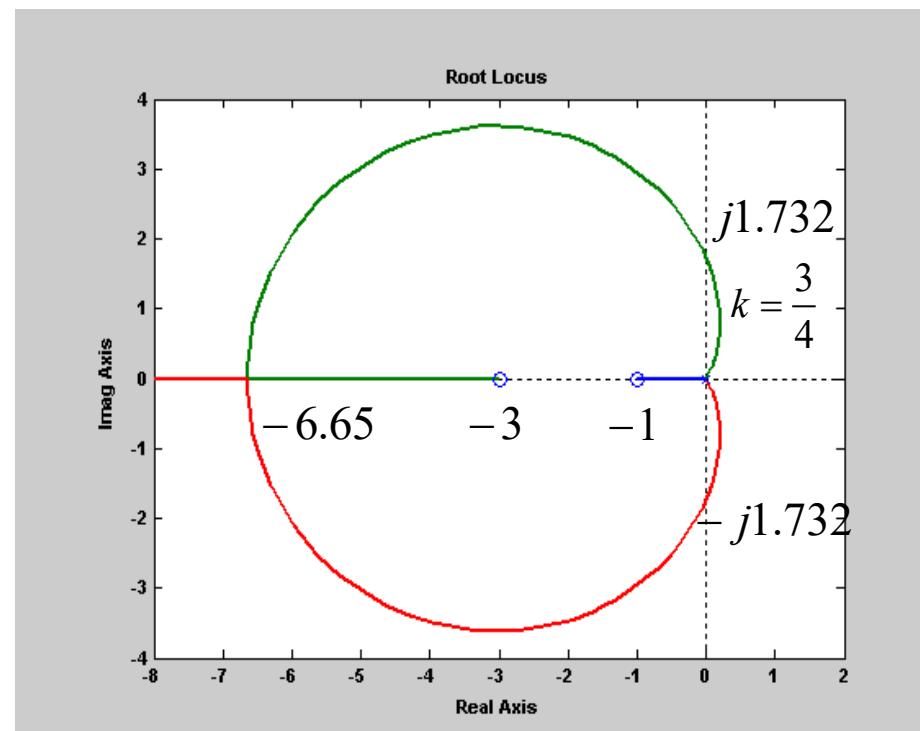
- (2) 计算使系统稳定的k值范围;
- (3) 计算系统对于斜坡输入的稳态误差

[解]:

(2) 由劳斯表可知，

当 $k > \frac{3}{4}$ 时，系统稳定。

(3) 系统含有三个积分环节，
对于斜坡输入的稳态误差为零。

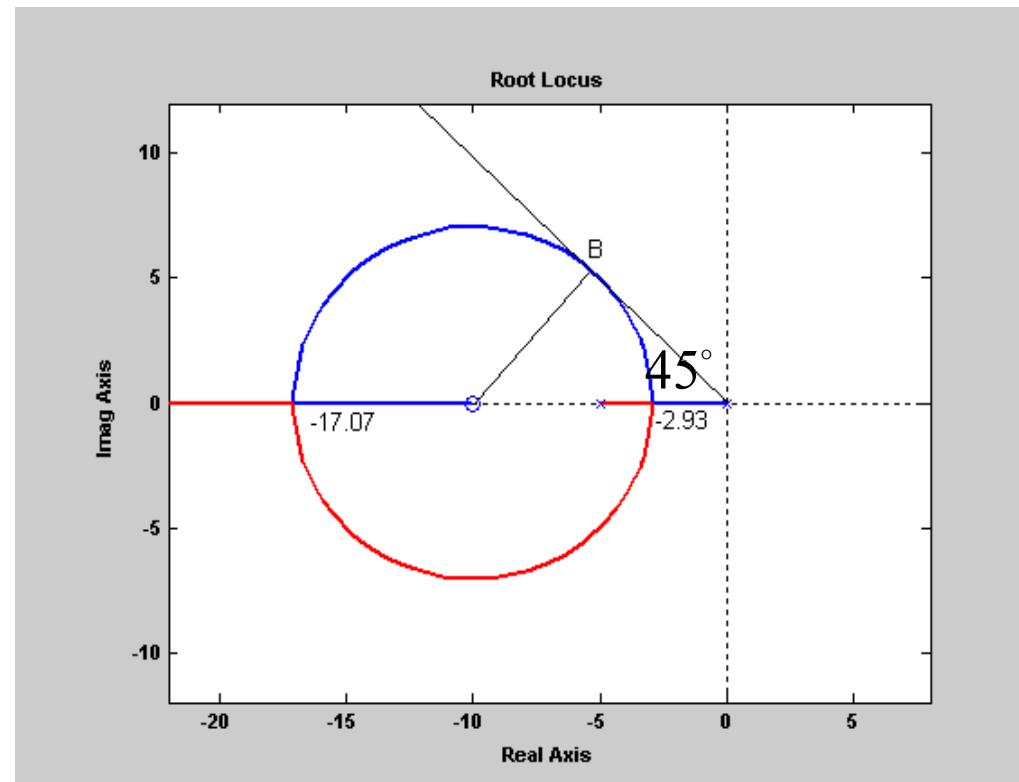


例4-14. 已知单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{k(s+10)}{s(s+5)}$

(1) 画出系统的根轨迹; (2) 计算当增益k为何值时, 系统的阻尼比 ζ 是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 并求此时系统的闭环特征根; (3) 分析k对系统性能的影响, 并求系统最小阻尼比所对应的闭环极点。

□ 画根轨迹

分离(会合)点分别为-2.93和-17.07, 分离(会合)角为90度。根轨迹为圆, 如右图所示。



□ 当 $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，阻尼角 $\beta = 45^\circ$ ，表示 45° 角的直线为 OB，其方程为 $\sigma = \omega$ ，代入特征方程整理后得：

$$\sigma(5+k) + 10k + j(2\sigma^2 + 5\sigma + k\sigma) = 0$$

令实部和虚部分别为零，有

$$\begin{cases} \sigma(5+k) + 10k = 0 \\ 2\sigma + 5 + k = 0 \end{cases}$$

解得 $k = 5$, $\sigma = -5$

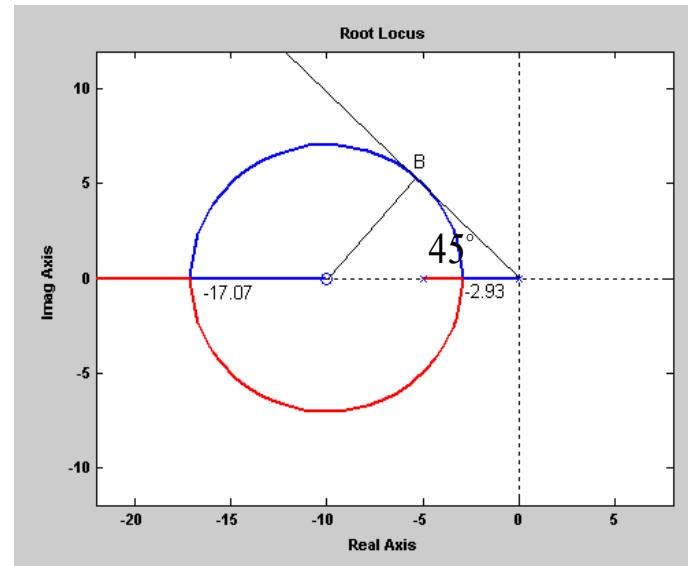
由图可知当 $k = 5$ 时直线 OB 与圆相切，系统的阻尼比 $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，特征根为 $-5 \pm j5$ 。

□ 对于分离点-2.93，由幅值条件可知

$$k_1 = \frac{2.93 \times |5 - 2.93|}{|10 - 2.93|} = 0.858$$

对于会合点-17.07，有

$$k_2 = \frac{17.07 \times |5 - 17.0|}{|10 - 17.07|} = 29.14$$



由根轨迹图可知，当 $0 < k < 0.858$ 时，闭环系统有一对不等的负实数极点，其瞬态响应呈过阻尼状态。

当 $0.858 < k < 29.14$ 时，闭环系统有一对共轭复数极点，其瞬态响应呈欠阻尼状态。

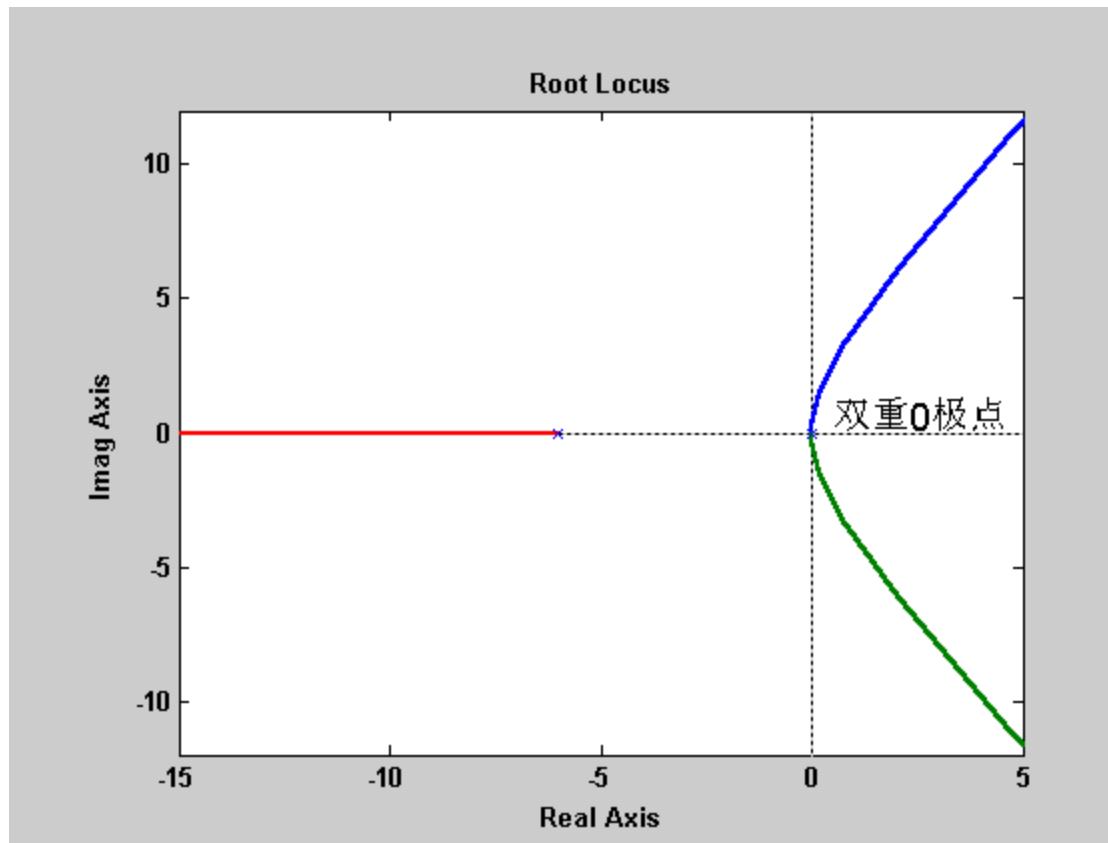
当 $29.14 < k < \infty$ 时，闭环系统又有一对不等的负实数极点，瞬态响应又呈过阻尼状态。

- 由坐标原点作根轨迹圆的切线，此切线就是直线OB，直线OB与负实轴夹角的余弦就是系统的最小阻尼比，由上可知，此时系统的闭环极点为 $-5 \pm j5$ 。



[例4-16]: 已知单位反馈系统的根轨迹如下图所示。

- (1) 写出该系统的闭环传递函数;
- (2) 试用适当的方法使系统在任意K值时均处于稳定的状态。



[解]: ① 由根轨迹图知系统的开环传递函数为: $G(s) = \frac{k}{s^2(s+6)}$
单位反馈系统的闭环传递函数为:

$$\phi(s) = \frac{k}{s^2(s+6)+k} = \frac{k}{s^2 + 6s + k}$$

② 当在系统中加入比例微分控制时, 开环传递函数增加了一个零点, 此时: $G(s) = \frac{k(s+a)}{s^2(s+6)}$

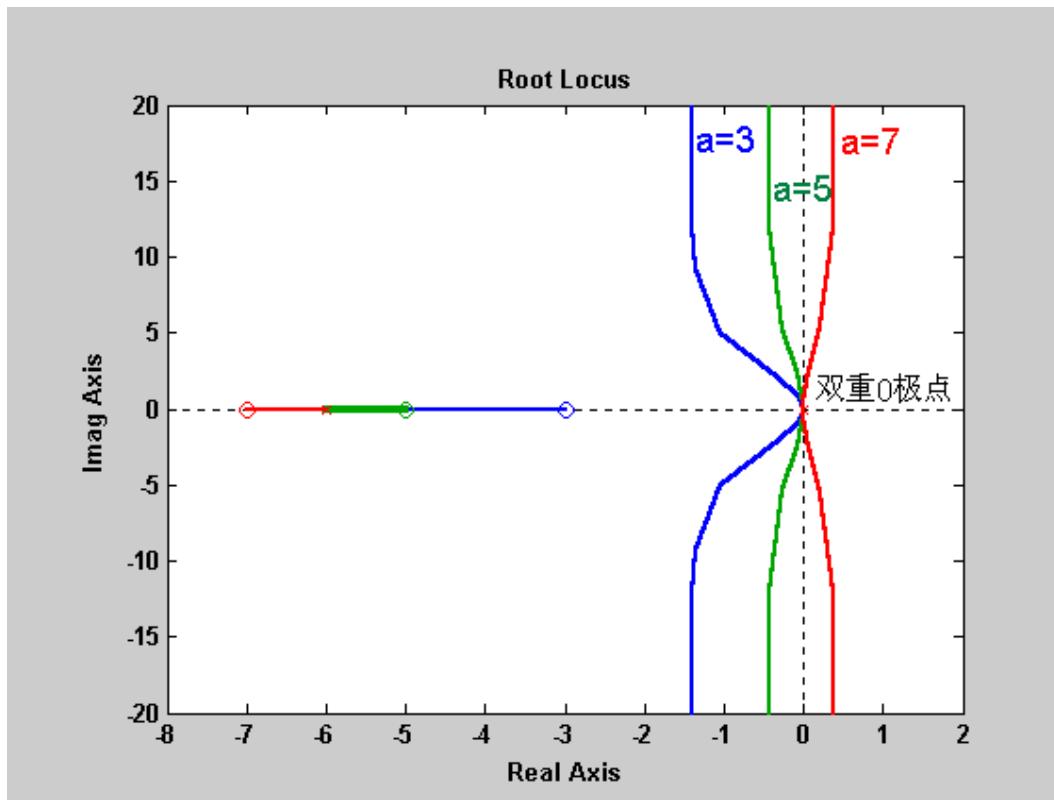
这时渐近线与实轴的夹角为: $\pm 90^\circ$, 只要渐近线与负实轴相交, 系统的根轨迹就在左半 S 平面。因此有:

$$-\sigma_a = \frac{-6+a}{2} < 0, \text{ 所以 } 0 < a < 6.$$

提示:

① 加入比例微分控制后, 系统增加了开环零点。② 在系统中加入零点后, 将使根轨迹左移, 有利于系统的稳定性。

从下图可以看出：a越小，根轨迹越左，稳定性越好。a<6时，根轨迹全部在s左半平面。a=6时，根轨迹有一部分在虚轴上。a>6时，根轨迹有一部分在s右半平面。



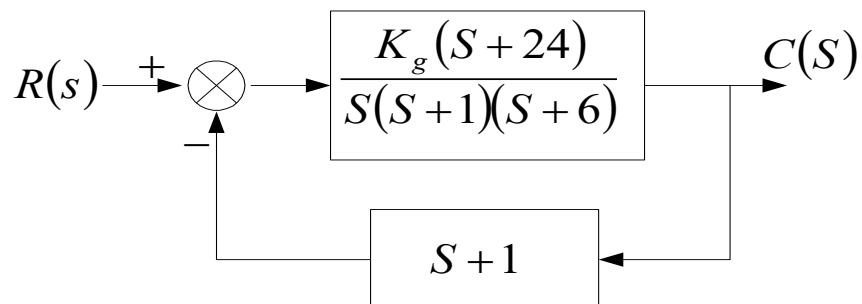
```

clear all;
num1=[0 0 1 3];
den1=[1 6 0 0];
num2=[0 0 1 5];
den2=[1 6 0 0];
num3=[0 0 1 7];
den3=[1 6 0 0];
h1=tf(num1,den1);
h2=tf(num2,den2);
h3=tf(num3,den3);
rlocus(h1,h2,h3)

```

例 已知控制系统如图所示

- (1) 绘制系统的根轨迹，并确定 $K_g = 6$ 时的闭环极点；
- (2) 画出 $K_g = 6$ 时单位阶跃响应的草图；并估算闭环系统的超调量 $\delta\%$ 和调整时间 t_s 。



解：

$$1. \quad G_K(s) = \frac{Kg(s+24) \cdot (s+1)}{s(s+1)(s+6)} = \frac{(s+1) \cdot Kg(s+24)}{(s+1) \cdot s(s+6)}$$

绘制根轨迹步骤：

(1) 开环零点： $s_1 = -1, s_2 = -24$

开环极点： $s_1 = 0, s_2 = -1, s_3 = -6$

(2) 实轴上的根轨迹为： $(-\infty, -24], [-6, 0]$

(3) 漐近线： $-\sigma = \frac{-6 - (-24)}{1} = 18, \quad \varphi = \frac{(2K+1)\pi}{1} = \pi$

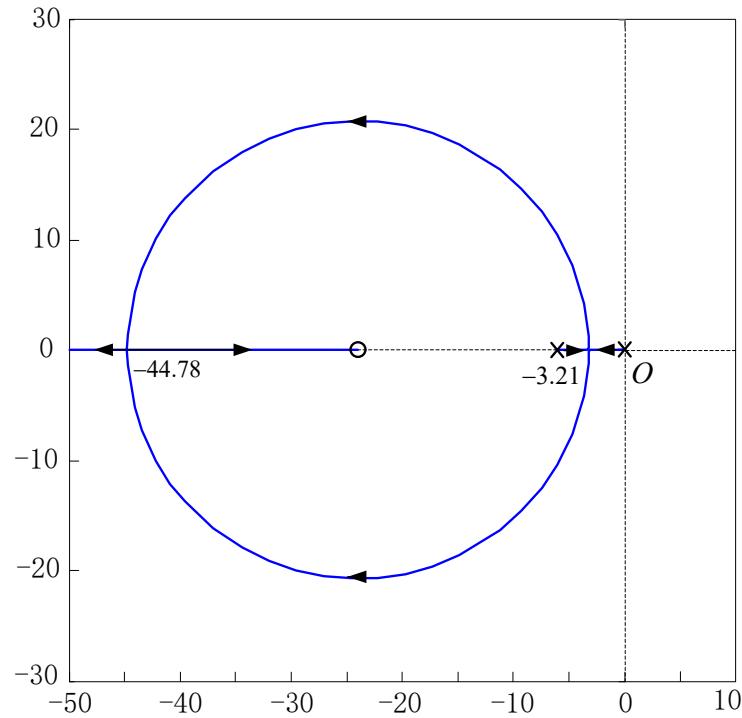
(4) 分离点： $P'(s)Q(s) - P(s)Q'(s) = 0$

$$s(s+6) - (s+24)(s+6+s) = s^2 + 6s - (s+24)(2s+6) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{解得: } s_{1,2} &= \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 144 \times 4}}{2} \\
 &= \frac{-48 \pm \sqrt{1728}}{2} \\
 &= \frac{-48 \pm 41.57}{2} \\
 &= -3.21, -44.78
 \end{aligned}$$

s_1 为分离点, s_2 为会合点

分离角为 $\pm 90^\circ$, 会合角也为 $\pm 90^\circ$, 根轨迹如图所示:



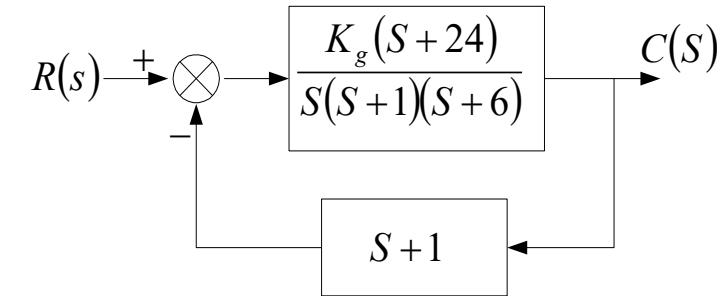
当 $K_g = 6$ 时，特征方程为 $1 + G_K(s) = 0$
 即 $1 + \frac{6 \times (s+24)}{s(s+6)} = 0, s^2 + 6s + 6s + 24 = 0$

整理后有 $s^2 + 12s + 144 = 0$ 其解为：

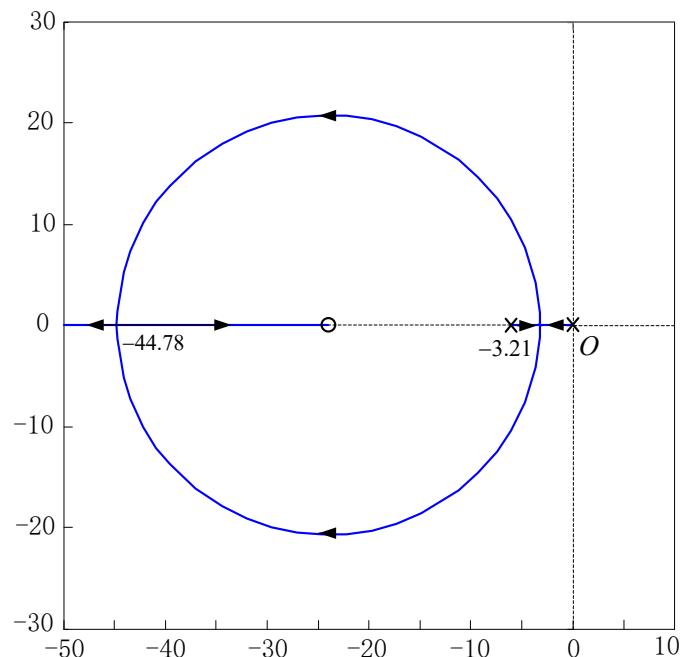
$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \times 144}}{2} \\ &= -6 \pm j\sqrt{3 \times 144}/2 \\ &= -6 \pm j6\sqrt{3} \end{aligned}$$

所以，当 $K_g = 6$ 时，闭环极点为？

$$-6 + j6\sqrt{3}, -6 - j6\sqrt{3}, -1_0$$

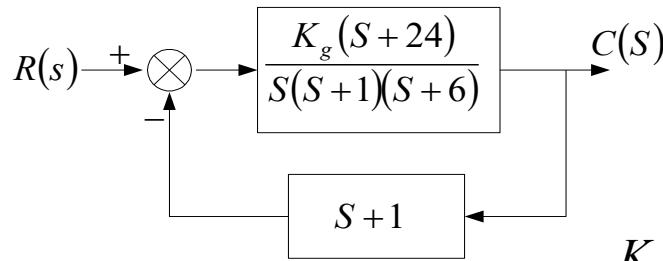


求 $K_g = 6$ 时的闭环极点



解：

2. 画出 $K_g = 6$ 时单位阶跃响应的草图；并估算闭环系统的超调量 $\delta\%$ 和调整时间 t_s 。



$$\text{当 } K_g = 6 \text{ 时, 有 } \Phi(s) = \frac{\frac{K_g(s+24)}{s(s+1)(s+6)}}{1 + \frac{K_g(s+24)}{s(s+6)}} = \frac{K_g(s+24)}{(s+1)(s^2 + 6s + K_g s + 24K_g)} = \frac{6(s+24)}{(s+1)(s^2 + 12s + 144)}$$

由于 $s+1$ 为闭环主导极点，所以可将系统降为一阶系统。

$$\Phi(s) = \frac{\left(1 + \frac{1}{24}s\right) \frac{6 \times 24}{144}}{(s+1)\left(1 + \frac{12}{144}s + \frac{1}{144}s^2\right)} = \frac{1}{s+1}$$

闭环系统无超调量，调整时间为 $3T = 3$ 秒。

单位阶跃响应曲线

