

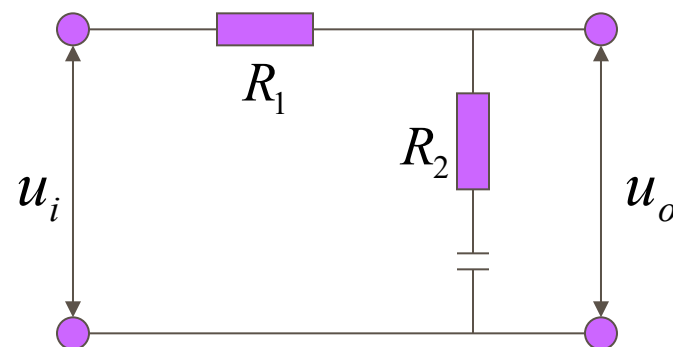


## 第二节 相位滞后校正



## 一、相位滞后校正装置

无源滞后校正装置：

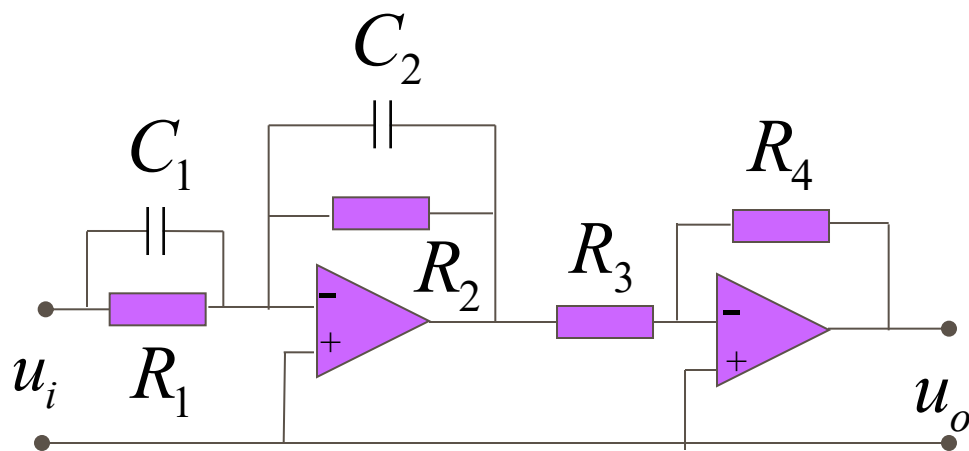


$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{u_o}{u_i} = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} \\ &= \frac{1 + R_2Cs}{1 + (R_1 + R_2)Cs} = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2}(R_1 + R_2)Cs}{1 + (R_1 + R_2)Cs} = \frac{1 + \beta Ts}{1 + Ts} \\ &= \beta \frac{s + \frac{1}{\beta T}}{s + \frac{1}{T}} \end{aligned}$$

$$\text{其中： } T = (R_1 + R_2)C, \quad \beta = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \beta < 1$$



有源滞后校正装置：



$$G_c(s) = \frac{u_o}{u_i} = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}}$$
$$= \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1}$$

当 $R_1 C_1 > R_2 C_2$ 超前校正网络

当 $R_1 C_1 < R_2 C_2$ 滞后校正网络



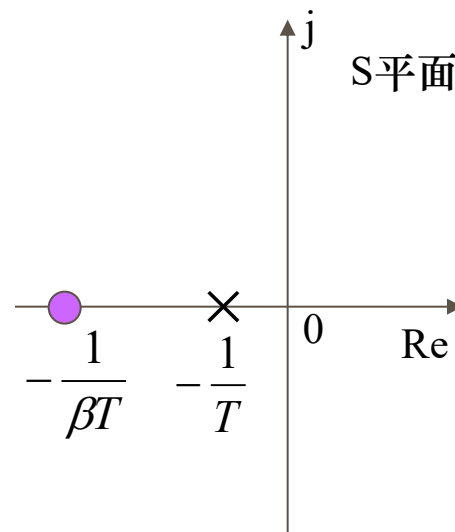
## 二、相位滞后校正网络的特性

$$G_c(s) = \frac{1 + \beta Ts}{1 + Ts}, \quad \beta < 1$$

### 1. 零极点分布图

它的零点在  $z = -\frac{1}{\beta T}$ ，极点在  $p = -\frac{1}{T}$ 。

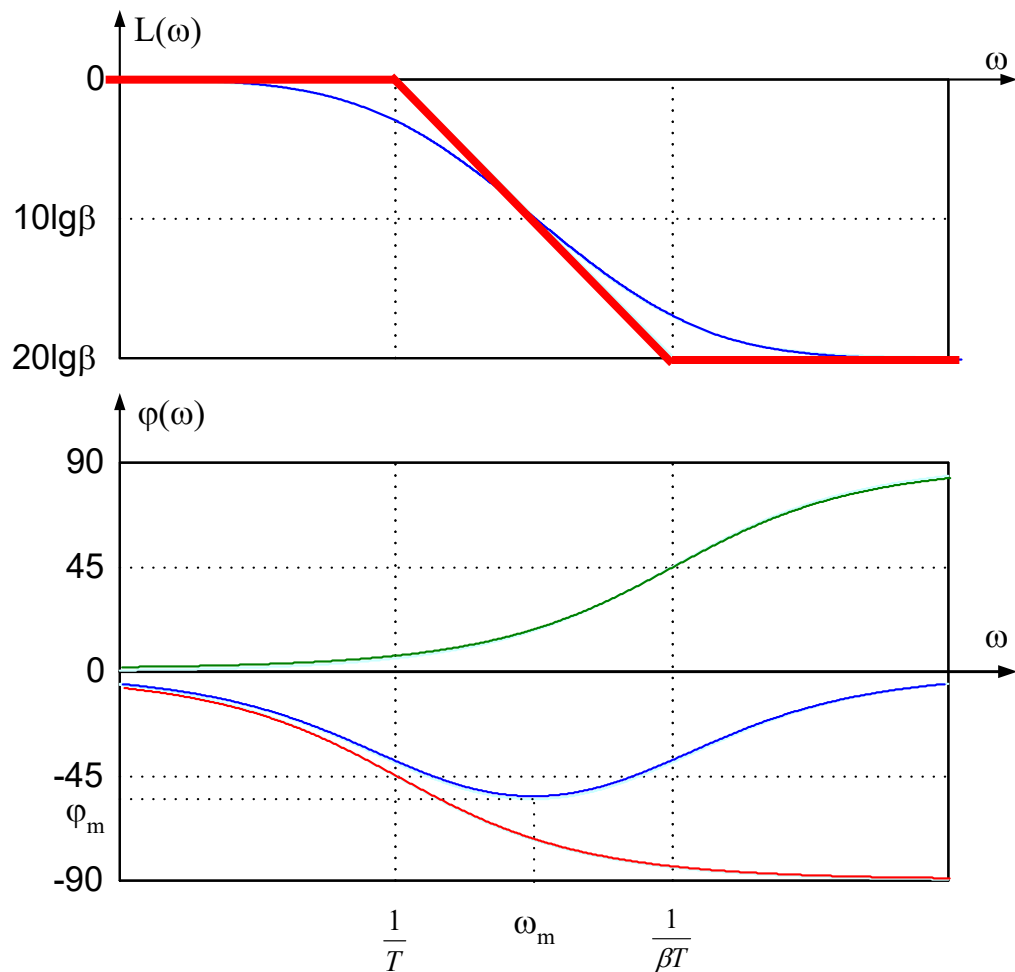
因  $\beta < 1$ ，所以在复平面上，极点总是在零点的右面。由于极点较零点更接近原点，对输入信号具有明显的积分作用。故相位滞后校正也称为积分校正。





## 2. Bode图

$$L(\omega) = 20\lg \sqrt{1 + (\beta T \omega)^2} - 20\lg \sqrt{1 + (T \omega)^2}$$

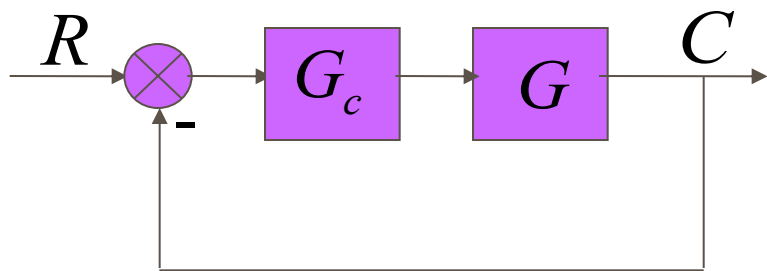


$$\varphi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \beta T \omega - \operatorname{tg}^{-1} T \omega$$

频率特性的主要特点是：

- (1) 所有频率下相频特性为负值(滞后), 这点对系统的性能无好处, 但在实际校正中并不用这个特点
- (2) 当 $\beta$ 确定后, 在 $\omega > 1/(\beta T)$ 后的最大幅值衰减为 $L = 20\lg\beta$

### 三、基于频率响应法的滞后校正



图中， $G_c$ 为校正装置， $G$ 为对象。

利用频率响应法设计滞后校正装置的步骤如下：

- ① 求出满足稳态性能指标的开环增益 $K$ 值；
- ② 根据求出的 $K$ 值，画出校正前的Bode图，确定此时的幅值穿越频率 $\omega_{c1}$ 和相位裕量 $\gamma_1$ ；



- ③ 选择一新的幅值穿越频率点 $\omega_{c2}$ ，使得在 $\omega = \omega_{c2}$ 处原系统的相位滞后量为：

$$\varphi(\omega_{c2}) = -180^\circ + \gamma_0 + (5^\circ \sim 12^\circ)$$

此式实际就是由相角裕量定义式得到

$$\gamma_0 = 180^\circ + \varphi(\omega_{c2})$$

$\gamma_0$  为系统期望的相角裕量。

- ④ 求出校正网络中的 $\beta$ 值后,为使校正后系统的幅值穿越频率为 $\omega_{c2}$ ，必须把原系统在 $\omega_{c2}$ 的幅值 $L(\omega_{c2})$ 衰减到0dB，即当相位滞后校正网络起作用后应使得

$$20\lg \beta + L(\omega_{c2}) = 0 \quad 20\lg \beta = -L(\omega_{c2}) \quad \beta = 10^{\frac{-L(\omega_{c2})}{20}}$$



## ⑤ 选择校正网络零点

$$\frac{1}{\beta T} = \left(\frac{1}{2} \sim \frac{1}{10}\right) \omega_{c2}$$

理论上讲， $\frac{1}{\beta T}$  离开  $\omega_{c2}$  越远，相位滞后网络的相位滞后特性对系统的影响越小，因此  $\frac{1}{\beta T}$  选得越小越好。

另一方面，当  $\beta$  固定时， $\frac{1}{\beta T}$  越小，则要求  $T$  大，这给物理实现带来困难，因此一般将  $\frac{1}{\beta T}$  选在  $\omega_{c2}$  的  $\frac{1}{2} \sim \frac{1}{10}$  倍频处即可。

当  $\frac{1}{\beta T}$  确定后， $\frac{1}{T}$  也可确定，于是  $G_c(s) = \frac{1 + \beta Ts}{1 + Ts}$





- ⑥ 画出校正后的Bode图，确定此时的幅值穿越频率 $\omega_{c2}$ 和相位裕量 $\gamma_2$ ，校验系统的性能指标。一定要校验，不满足重做。
- ⑦ 求出网络参数。这步在实现中是必不可少的，但电路参数的选择有很多技巧，如不特别申明，可省略不做。



[例]已知一单位反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{2500K_g}{s(s+25)}$  。  
试设计一个相位滞后校正装置满足：

- (1) 相位裕量大于  $45^\circ$  ；
- (2) 对单位速度函数输入，输出的稳态误差小于或等于  $0.01\text{rad}$ 。

[解]：① 对I型系统  $e_{ss} = R/K_v$ ，现  $R=1$

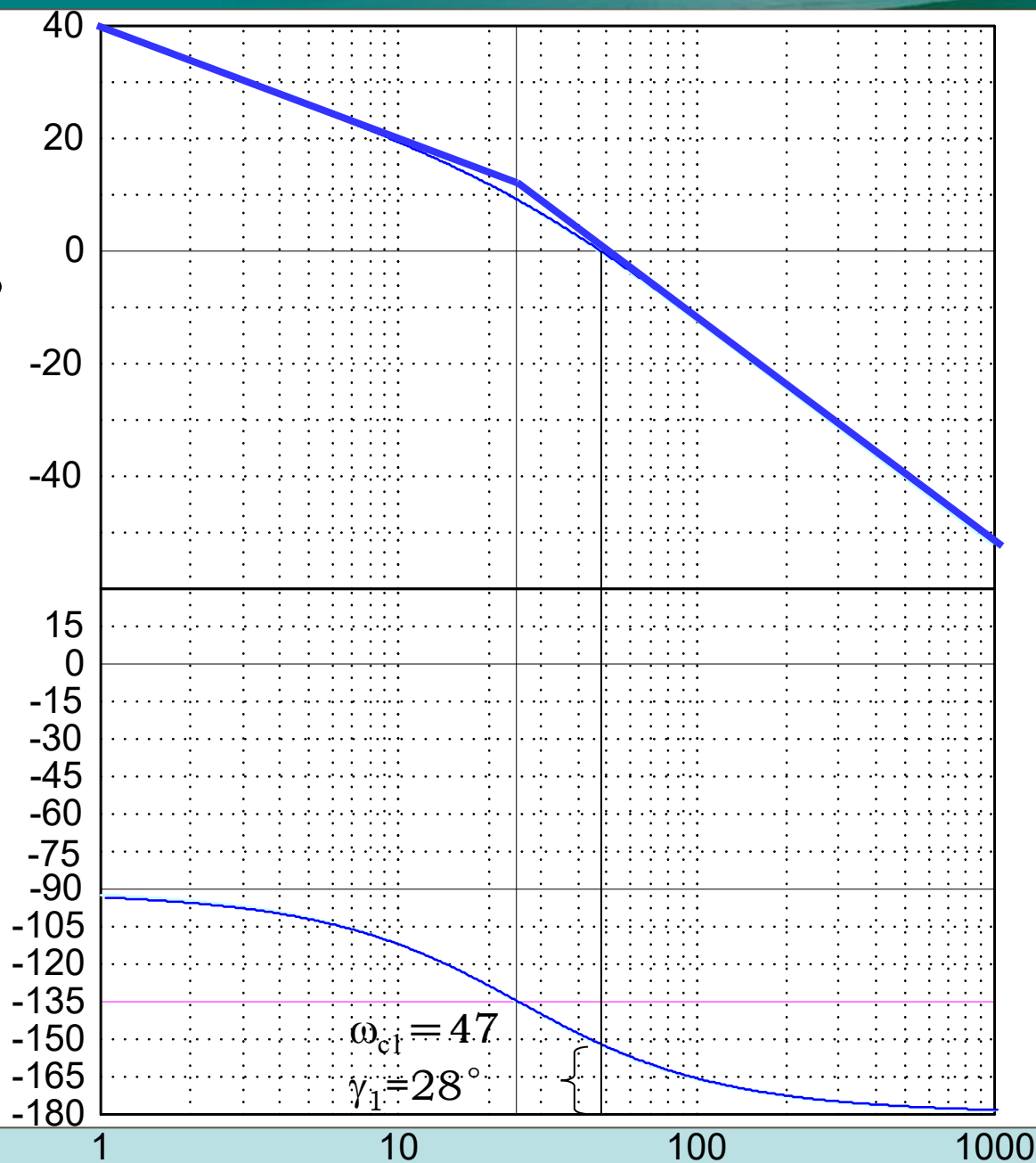
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_k(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2500K_g}{s(s+25)} = 100K_g$$

要求  $e_{ss} = \frac{1}{100K_g} \leq 0.01$ ，即  $K_g \geq 1$  取  $K_g = 1$

$$G(j\omega) = \frac{100}{j\omega(1+0.04\omega j)}$$



② 画出 $K_g=1$ 时未校正系统Bode图，  
确定此时的 $\omega_{c1}$ 和 $\gamma$ 。





- ③ 选择一新的幅值穿越频率点 $\omega_{c2}$ ，使得在 $\omega = \omega_{c2}$ 处原系统的相位滞后量为：

$$\varphi(\omega_{c2}) = -180^\circ + \gamma_0 + (5^\circ \sim 12^\circ) = -180^\circ + 45^\circ + 5^\circ = -130^\circ$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} 0.04\omega = -130^\circ$$

$$\operatorname{tg}^{-1} 0.04\omega = 40^\circ$$

$$\omega = 25 \operatorname{tg} 40^\circ \approx 21$$

- ④在 $\omega_{c2}=21$ ，原系统在 $\omega_{c2}$ 的幅值 $L(\omega_{c2})$

$$L(\omega_{c2}) = 20[\lg 100 - \lg \omega - \lg \sqrt{1 + (0.04\omega)^2}] \Big|_{\omega=21} = 11.2368$$

$$20 \lg \beta = -L(\omega_{c2})$$

$$\beta = 10^{-\frac{L(\omega_{c2})}{20}} = 0.27426$$



## ⑤ 选择校正网络零点

$$\frac{1}{\beta T} = \frac{\omega_{c2}}{10} = 2.1$$

$$\beta T = 0.4762$$

$$\frac{1}{T} = \beta \frac{\omega_{c2}}{10} = 2.1\beta = 0.575946$$

$$T = 1.7363$$

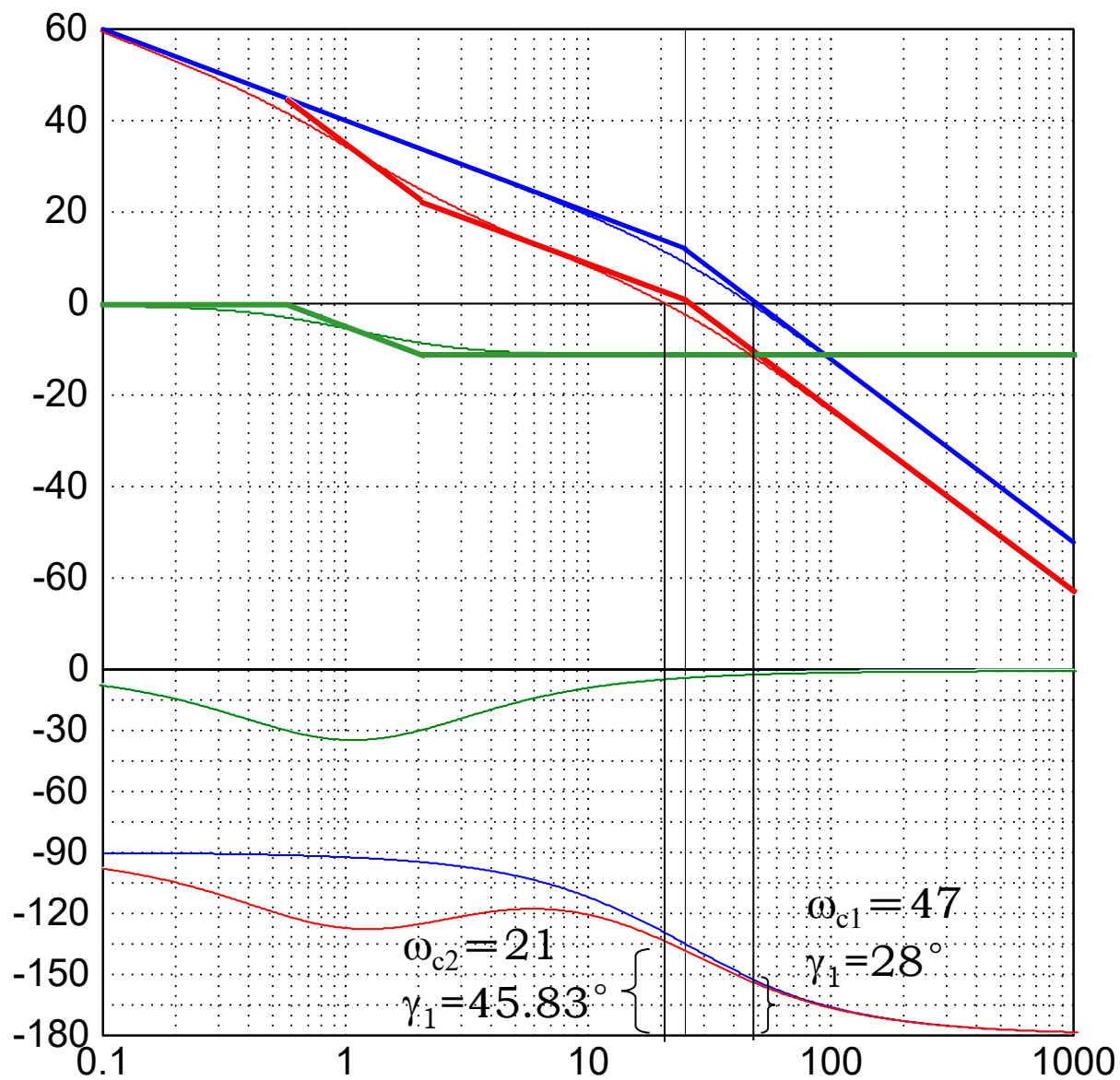
$$G_c(s) = \frac{1 + 0.4762s}{1 + 1.7363s}$$

$$G_k(s) = G_c(s)G(s) = \frac{100(1 + 0.4762s)}{s(1 + 0.04s)(1 + 1.7363s)} = \frac{685.65(s + 2.1)}{s(s + 25)(s + 0.575946)}$$

## ⑥ 画出校正后的Bode图，确定此时的幅值穿越频率 $\omega_{c2}$ 和相位裕量 $\gamma_2$ ，校验系统的性能指标。此时

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \text{tg}^{-1} 0.04\omega - \text{tg}^{-1} 1.7363\omega + \text{tg}^{-1} 0.4762\omega$$

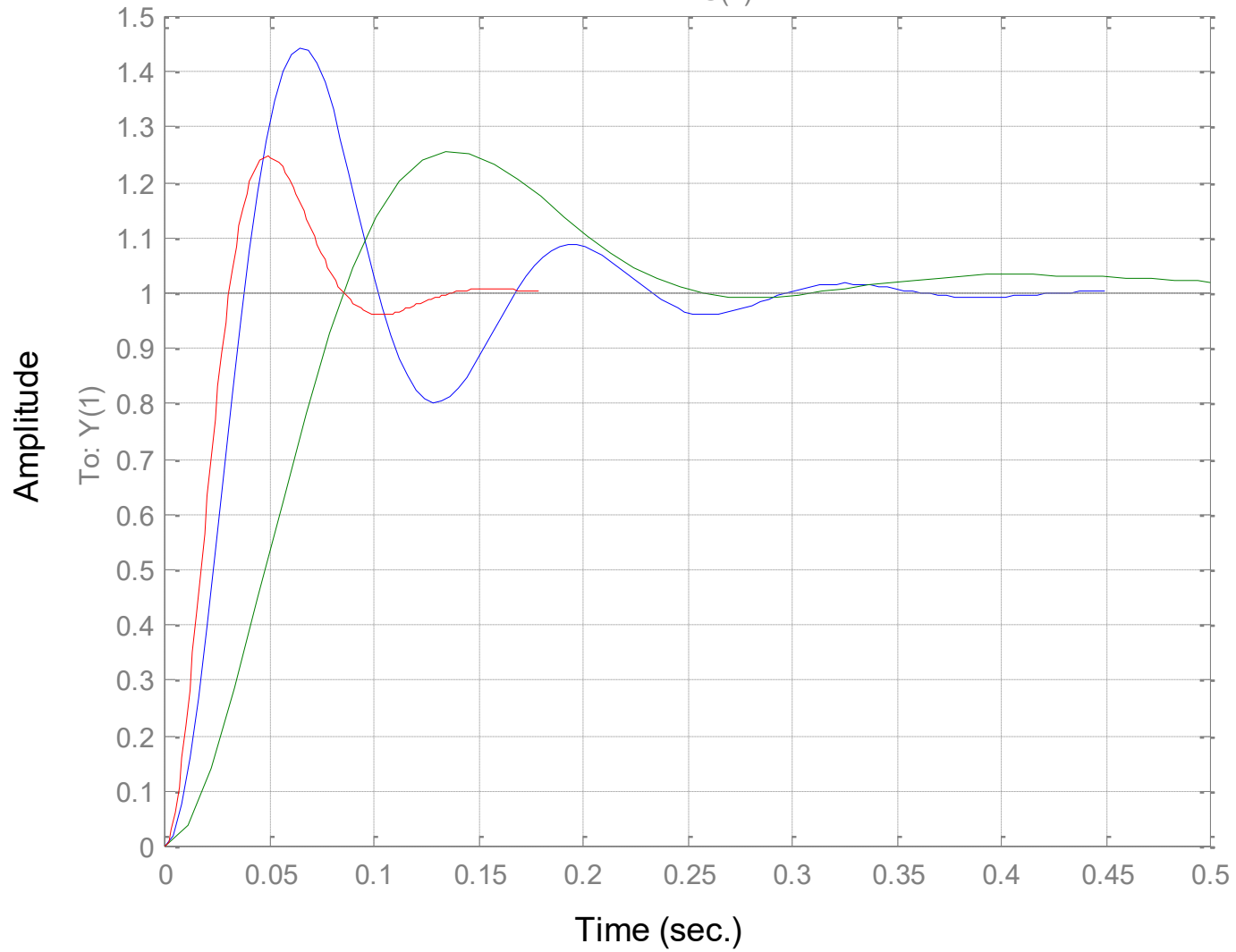
$$\varphi(21) = -134.17^\circ \quad \gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_{c2}) = 45.83^\circ$$

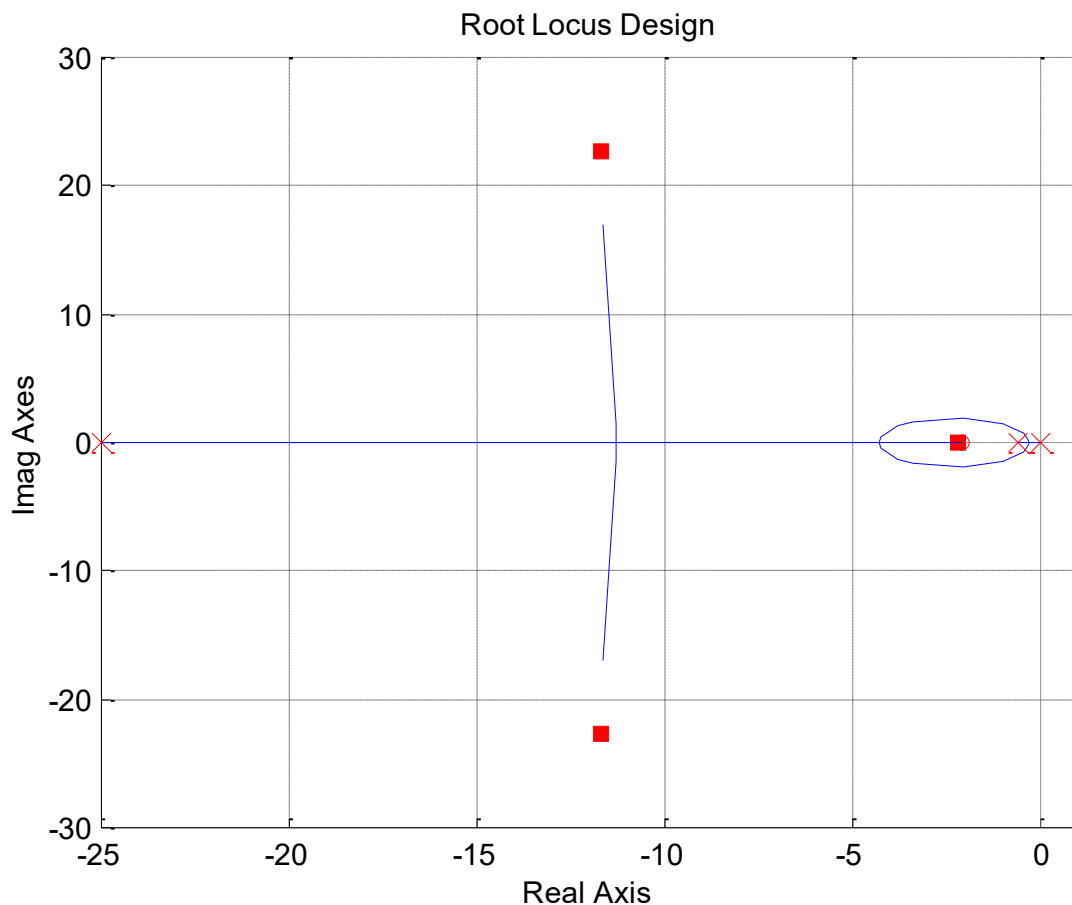




## Step Response

From: U(1)

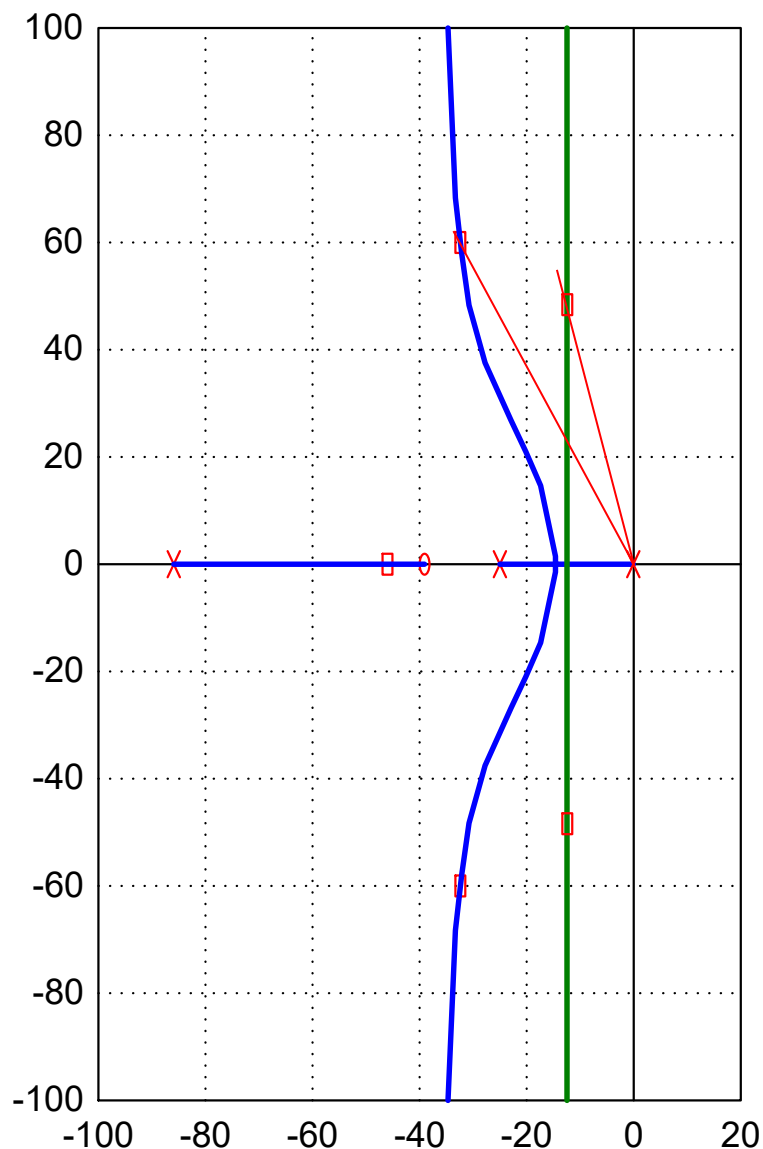




校正前闭环极点为  $s_{1,2} = -12.5 \pm 48.4j$ ,  $\zeta = 0.25$

校正后闭环极点为  $s_{1,2} = -11.6773 \pm 22.6232j$ ,  $s_3 = -2.2214$ ,  
 $z = -2.1$ ,  $\zeta = 0.459$





校正前闭环极点为

$$s_{1,2} = -12.5 \pm 48.4j, \\ \zeta = 0.25$$

校正后闭环极点为

$$s_{1,2} = -32.4815 \pm 60.0354j, \\ s_3 = -46.037, \\ \zeta = 0.476$$



## 四、相位滞后校正对系统的影响和限制

### 1. 影响：

- ① 从Bode图看系统的幅值穿越频率 $\omega_c$ 减小了，对应 $\omega_b$ 减小
- ② 幅频特性在 $\omega_c$ 附近的斜率减小了，即曲线平坦了；
- ③ 改善了系统的相位裕量 $\gamma$ 和增益裕量 $K_g$ ，提高了系统的相对稳定性；
- ④ 减小了系统的最大超调量，但上升时间等增大；
- ⑤ 本身对系统的稳态误差没有影响，但由于对中高频段幅值的衰减，所以可以提高低频段的幅值，提高稳态性能。

### 2. 限制：

当系统在低频段相频特性上找不到满足系统相位裕量点时，不能用相位滞后校正。



## 五、相位超前和相位滞后校正小结

1. 相位超前校正通过在幅值穿越频率点附近，提供一个相位超前量而使系统的相位裕量满足要求；相位滞后校正通过对中频及高频幅值衰减的特性，使幅值穿越频率向低频方向移动，同时使中频及高频的相位特性基本不变，从而使系统的相位裕量满足要求。
2. 相位超前校正可使幅频特性在中高频有所提升，因此带宽总大于原系统；而滞后校正的中频及高频衰减使带宽变窄。因此，对于同一系统，超前校正的带宽总大于滞后校正的带宽。若希望一个宽的带宽及快的响应，应采用超前校正。然而，宽的带宽意味着高频增益的增大，使噪声信号得以通过，在需要抑制干扰及噪声的情况下，应采用滞后校正。



3. 超前校正通常用来改善稳定裕量；滞后校正通常用来改善系统的稳态性能。由于降低了高频增益，系统的总增益可以增大，所以低频增益可以增加，故改善了稳态精度（降低了稳态误差）。此外，系统中包含的任何高频噪音，都可以得到衰减。
4. 超前校正需要有一个附加的增益增量，以补偿超前网络本身的衰减。