



## 第三节

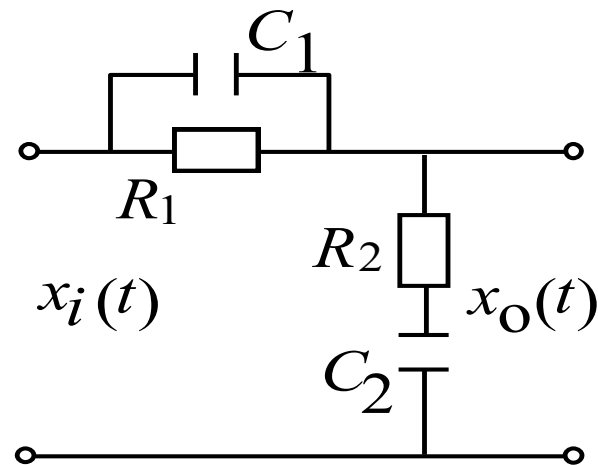
- ◆ 基于伯德图的滞后-超前校正
- ◆ PID控制器



## 基于伯德图的滞后-超前校正

### 1. 滞后-超前校正装置

$$G_c(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + C_1 s} + R_2 + \frac{1}{C_2 s}}$$
$$= \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1} = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2 + T_{12})s + 1}$$



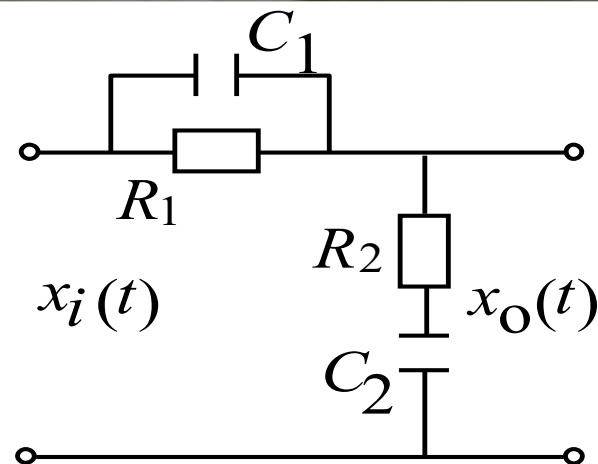
其中,  $T_1 = R_1 C_1, T_2 = R_2 C_2, T_{12} = R_1 C_2$ ; 一般取  $T_1 < T_2$



## 基于伯德图的滞后-超前校正

### 1. 滞后-超前校正装置

$$G_c(s) = \frac{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{T_1T_2s^2 + (T_1 + T_2 + T_{12})s + 1}$$



$G_c(s)$ 存在两个不等的负实数极点，那么它可以写为

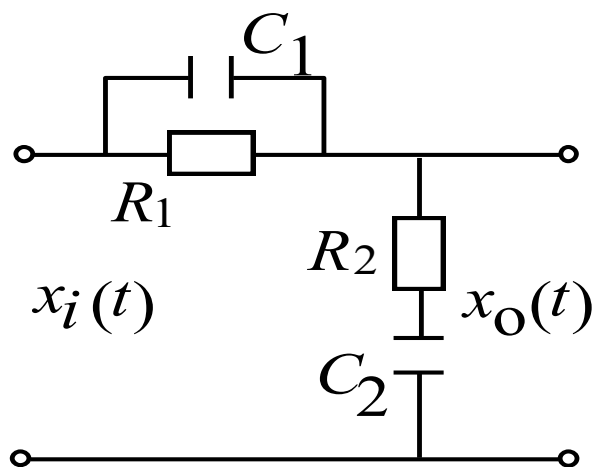
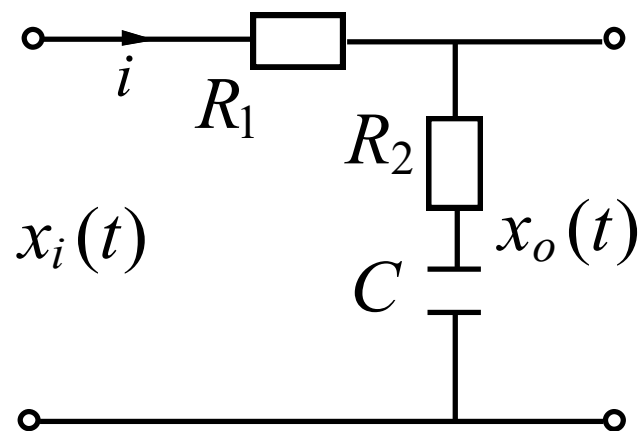
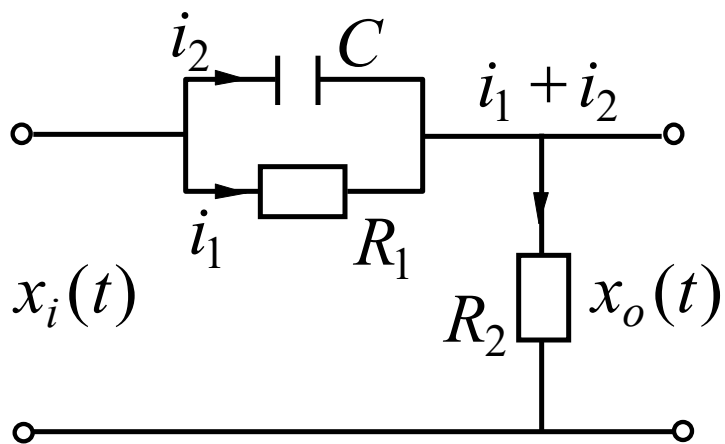
$$G_c(s) = \frac{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{(T_\alpha s + 1)(T_\beta s + 1)}, \text{ 其中 } \begin{cases} T_\alpha T_\beta = T_1 T_2 \\ T_\alpha + T_\beta = T_1 + T_2 + T_{12} \end{cases}$$

假设  $T_\alpha < T_\beta$ ,  $\frac{T_1}{T_\alpha} = \frac{T_\beta}{T_2} = \beta$ , 其中  $\beta > 1$ ,

$$G_c(s) \text{ 可表示为 } G_c(s) = \frac{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{(\frac{T_1}{\beta}s + 1)(T_2\beta s + 1)}$$

## 基于伯德图的滞后-超前校正

### 2. 校正装置比较





## 基于伯德图的滞后-超前校正

### 3. 滞后-超前校正环节的特性

$$G_c(s) = \frac{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{(\frac{T_1s}{\beta} + 1)(\beta T_2s + 1)}, \beta > 1$$

第一部分  $\frac{T_1s + 1}{\frac{T_1s}{\beta} + 1}, \beta > 1$  与超前校正对应,

第二部分  $\frac{T_2s + 1}{\beta T_2s + 1}, \beta > 1$  与滞后校正对应。



## 基于伯德图的滞后-超前校正

### 3. 滞后-超前校正环节的特性

$$G_c(s) = \frac{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{(\frac{T_1s}{\beta} + 1)(\beta T_2s + 1)}, \beta > 1$$

$$\text{幅频特性: } A(\omega) = \frac{\beta \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1} \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + \beta^2} \sqrt{\beta^2 T_2^2 \omega^2 + 1}}$$

$$\text{相频特性: } \varphi(\omega) = \text{tg}^{-1}(T_1\omega) - \text{tg}^{-1}(T_1\omega / \beta) + \text{tg}^{-1}(T_2\omega) - \text{tg}^{-1}(\beta T_2\omega)$$



## 基于伯德图的滞后-超前校正

### 3. 滞后-超前校正环节的特性

$$\varphi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1}(T_1\omega) - \operatorname{tg}^{-1}(T_1\omega / \beta) + \operatorname{tg}^{-1}(T_2\omega) - \operatorname{tg}^{-1}(\beta T_2\omega)$$

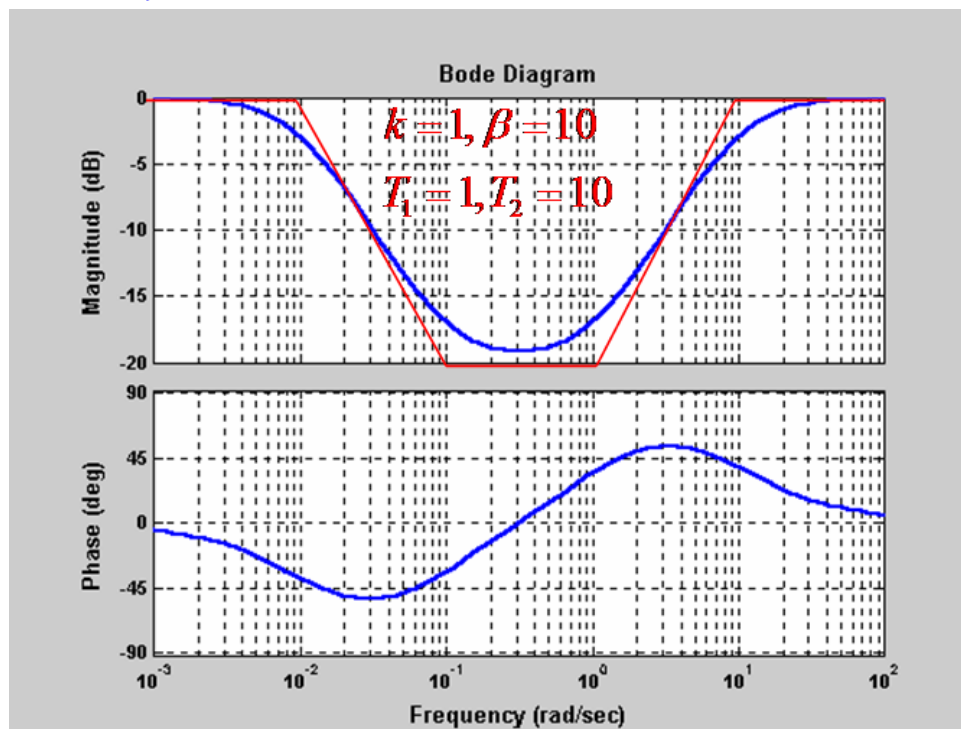
$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{(\beta - 1)T_1\omega}{\beta + (T_1\omega)^2} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{(\beta - 1)T_2\omega}{1 + \beta(T_2\omega)^2} \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{(\beta - 1)(\beta T_2\omega - T_1\omega)(T_1T_2\omega^2 - 1)}{[\beta + (T_1\omega)^2][1 + \beta(T_2\omega)^2] + (\beta - 1)^2 T_1T_2\omega^2}\end{aligned}$$

$$\text{当 } \omega = 1 / \sqrt{T_1T_2} \text{ 时, } \varphi(\omega) = 0$$



## 基于伯德图的滞后-超前校正

### 3. 滞后-超前校正环节的特性：伯德图



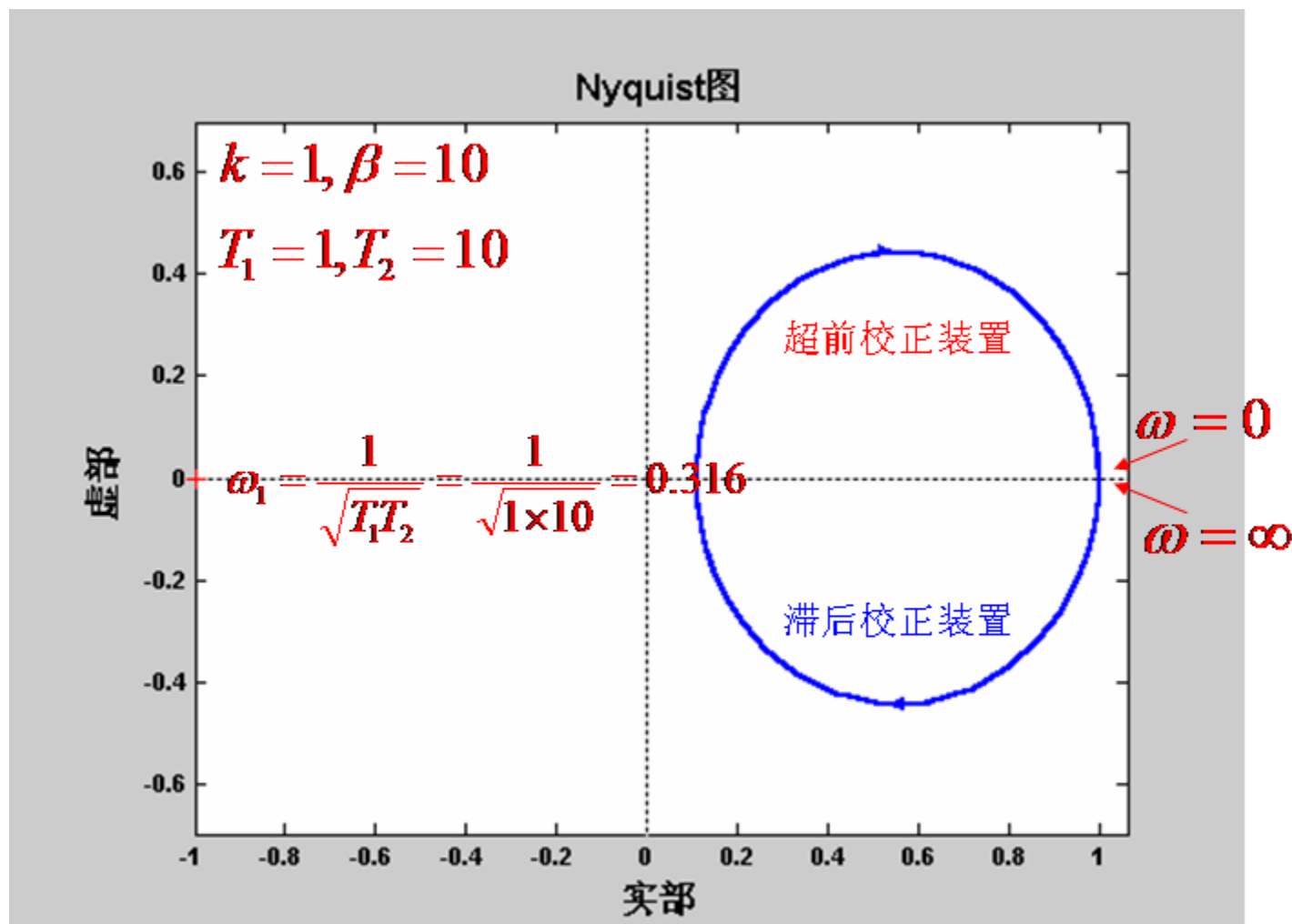
- 滞后在先，超前在后；
- 高频段、低频段增益均无衰减，而中频段衰减 $20\lg\beta$ ；
- 相频特性由负 $\rightarrow$ 正。





基于伯德图的滞后-超前校正

### 3. 滞后-超前校正环节的特性：极坐标图





## 基于伯德图的滞后-超前校正

### 4. 主要思想

- 利用滞后环节的幅值衰减特性，使得被校正系统的穿越频率提前，获得一部分相位裕量；
- 在新的穿越频率处，利用超前环节的相位超前特性，获得另一部分相位裕量。



## 基于伯德图的滞后-超前校正

### 4. 主要步骤

- ① 求出满足稳态性能指标的开环增益 $K$ 值；
- ② 根据求出的 $K$ 值，画出校正前的Bode图，确定此时的幅值穿越频率 $\omega_{c1}$ 和相位裕量 $r_1$ ；
- ③ 判断相位裕度是否满足要求，若满足则退出，若不满足，则判断是否可用单个超前或滞后环节校正；
- ④ 预选一新的幅值穿越频率 $\omega_{c2}$  ( $< \omega_{c1}$ )，计算对应的幅值 $L(\omega_{c2})$ 和相位，以及为满足相位裕度所需要的相位超前量  $\varphi_m$ ；
- ⑤ 确定滞后环节的零点： $\frac{1}{T_2} = (\frac{1}{2} \sim \frac{1}{10})\omega_{c2}$



## 基于伯德图的滞后-超前校正

### 4. 主要步骤

- ⑥ 由相位超前量 $\varphi_m$  确定参数 $\beta$ : 
$$\beta = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}$$
- ⑦ 过点 $(w_{c2}, -L(w_{c2}))$ 作斜率为20dB/dec的直线，它与 $-20\lg \beta$ 线的交点即为转折频率 $1/T_1$ ；
- ⑧ 画出校正后系统的Bode图，计算实际的穿越频率和稳定裕量，检验性能指标，不满足则重做。



## 基于伯德图的滞后-超前校正

例子：

考虑一个单位反馈系统，其开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$

现在希望静态速度误差系数为10/s，相位裕量为50度，增益裕量大于或等于10dB，试设计一个校正装置。

解：1. 根据对静态速度误差系数的要求，得到

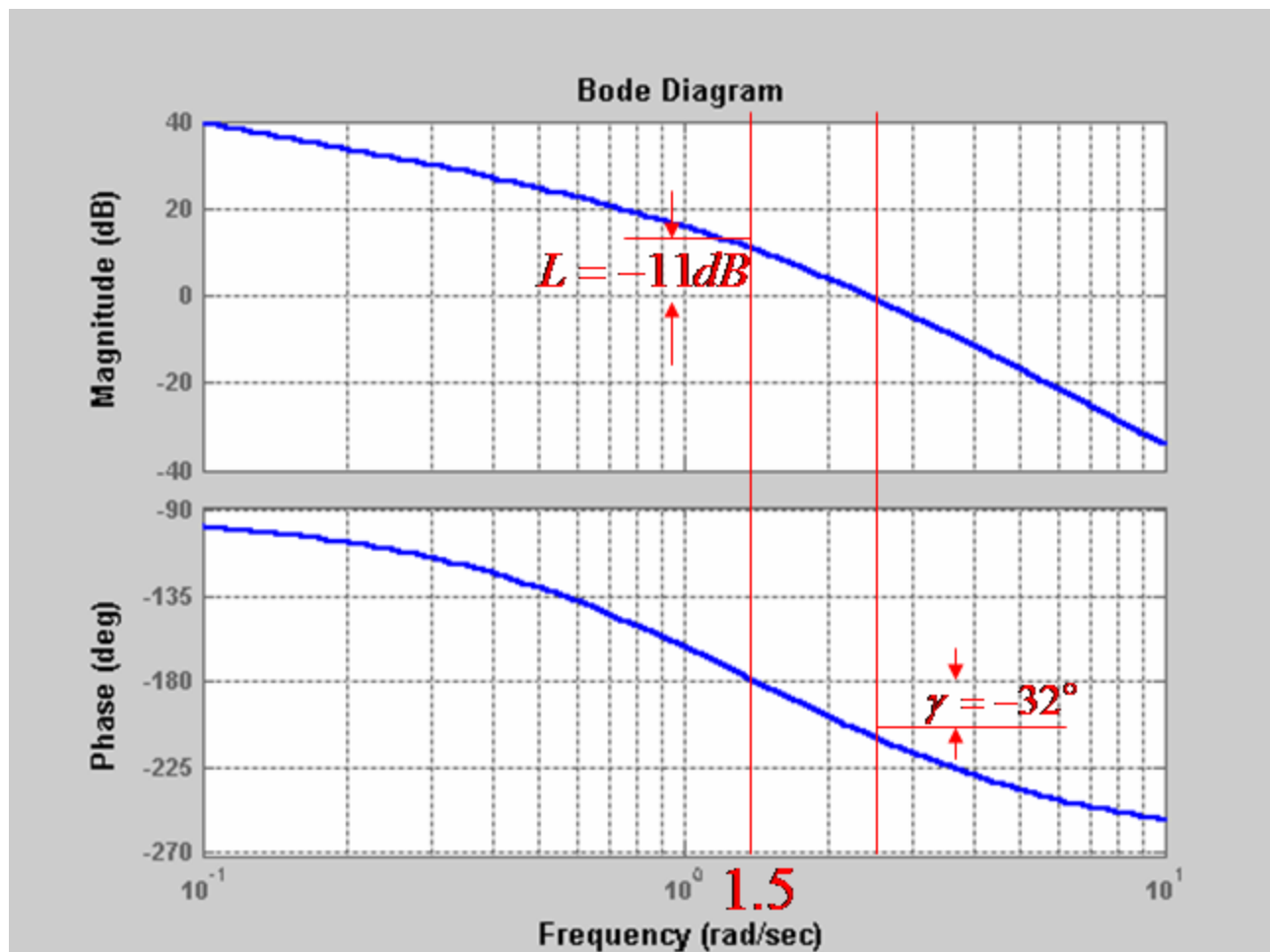
$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = \frac{k}{2} = 10$$

$$\therefore k = 20$$



## 基于伯德图的滞后-超前校正

2. 当 $k=20$ 时，画出未校正系统的伯德图：



未校正系统的相位裕量是-32度，增益裕量是-13分贝。表明系统是不稳定的。



## 基于伯德图的滞后-超前校正

### 3. 选择校正后系统的穿越频率：

从上页的伯德图上可以看出,当 $\omega=1.5\text{rad/s}$ 时,系统的相角为 $-180^\circ$ , 选择新穿越频率等于1.5弧度/秒较为方便, 在这里需要 $50^\circ$  的相位超前角。

4. 确定滞后-超前校正网络的相位滞后部分的转折频率。  
选择转折频率（相应于校正网络相位滞后部分的零点）在校正后系统的幅值穿越频率以下十倍频率处，即

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1.5}{10} = 0.15 \text{ 弧度/秒}$$

## 基于伯德图的滞后-超前校正

5. 由最大相位超前角  $\varphi_m$  确定参数  $\beta$  。

$$\sin \varphi_m = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$$

当  $\beta = 10$  时，有  $\varphi_m = 54.9^\circ$ 。由于这里需要  $50^\circ$  的相位裕量，所以  $\beta = 10$  满足要求。

于是，相位滞后部分的另一转折频率  $\frac{1}{\beta T_2}$  为  $0.015 \text{ rad/s}$ 。

滞后-超前网络相位滞后部分的传递函数为

$$\frac{1 + \frac{1}{0.15}s}{1 + \frac{1}{0.015}s} = \frac{1 + 6.67s}{1 + 66.7s}$$





## 基于伯德图的滞后-超前校正

### 6. 确定滞后-超前网络相位超前部分的传递函数

由于希望校正后系统的幅值穿越频率为 $\omega=1.5$ 弧度/秒,所以可以画出一条斜率为 $20\text{dB/dec}$ ,且通过 $(1.5\text{弧度/秒}, -13\text{dB})$ 点的直线;该直线与 $0$ 分贝及 $-20\text{dB}$ 线的交点就是所要求的转折频率。于是,相位超前部分的转折频率为 $0.7$ 弧度/秒和 $7$ 弧度/秒。



## 基于伯德图的滞后-超前校正

因此，滞后-超前校正网络相位超前部分的传递函数为

$$\frac{1 + \frac{1}{0.7}s}{1 + \frac{1}{7}s} = \frac{1 + 1.43s}{1 + 0.143s}$$

滞后-超前校正网络的传递函数为

$$G_c(s) = \left( \frac{1 + 1.43s}{1 + 0.143s} \right) \left( \frac{1 + 6.67s}{1 + 66.7s} \right)$$



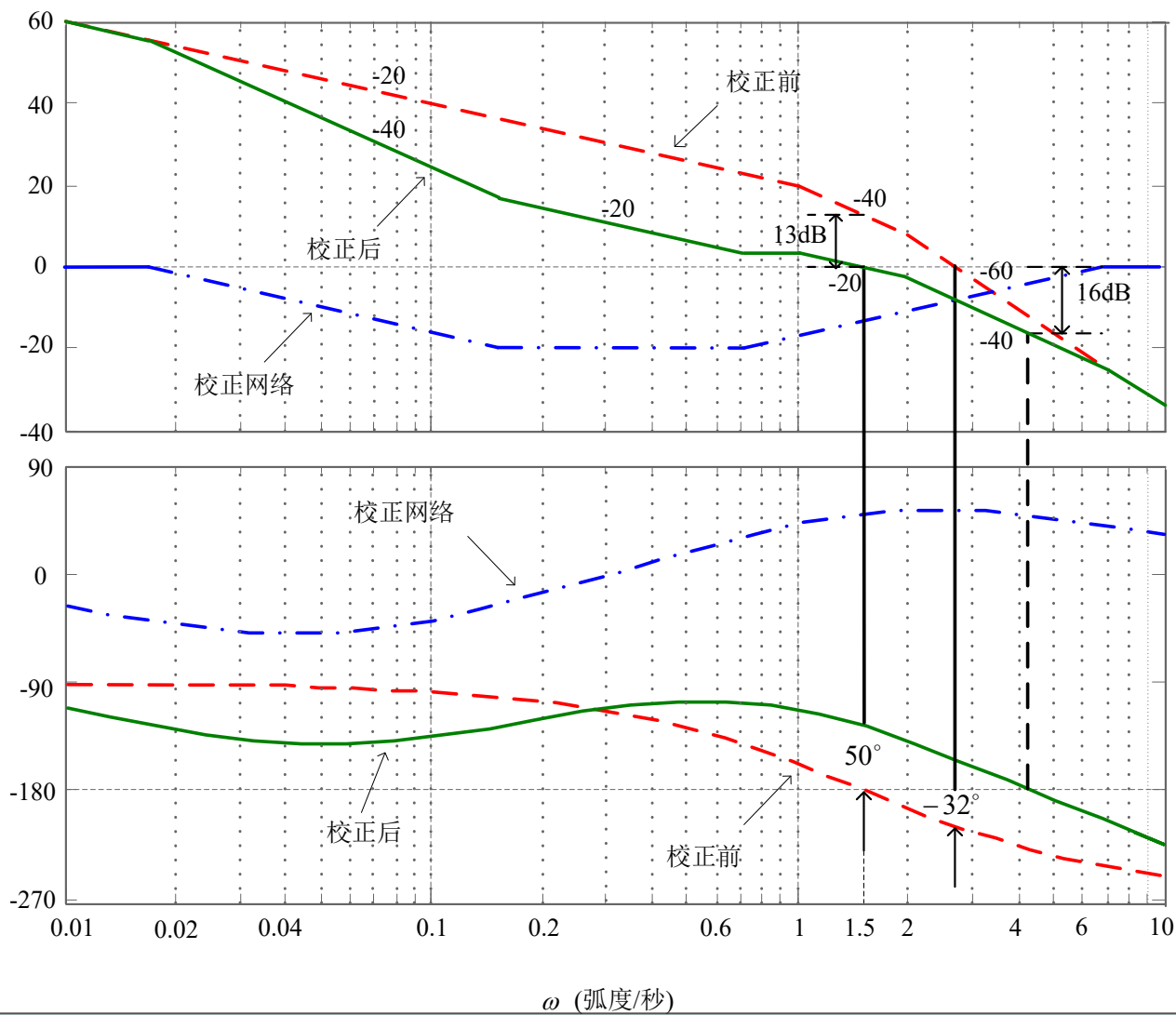
## 基于伯德图的滞后-超前校正

校正后系统的传递函数为

$$G_c(s)G(s) = \frac{10(1 + 1.43s)(1 + 6.67s)}{s(1 + 0.143s)(1 + 66.7s)(1 + s)(1 + 0.5s)}$$



## 基于伯德图的滞后-超前校正





## 概述

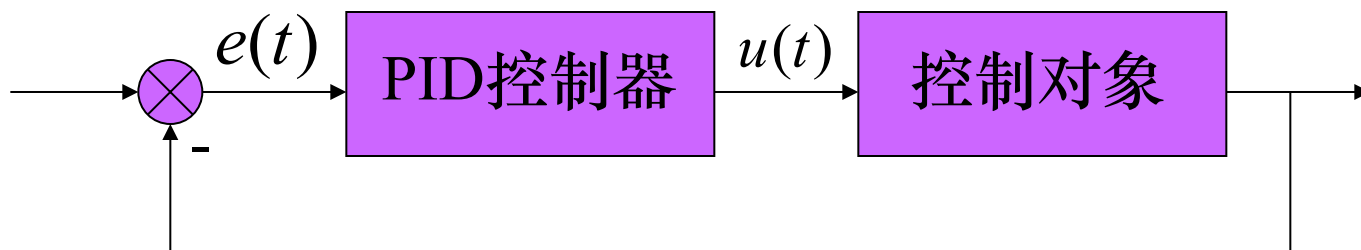
在当今应用的工业控制器中，半数以上采用了PID或变形PID控制方案。PID控制器分为模拟和数字控制器两种。模拟PID控制器通常是电子、气动或液压型的，数字PID控制器是由计算机实现的。

大多数PID控制器的参数是现场调节的。PID控制的价值取决于它对于大多数控制系统广泛的适应性。也就是说，PID控制器现在还大量地在工业现场使用着。虽然在许多给定的情况下还不能提供最佳控制。

什么是PID控制？它是比例、积分和微分控制的简称。即：  
Proportional-Integral-Differential Controller



下图表示了一种控制对象的PID控制。它是串联在系统的前向通道中的，这是一种最常见的形式。



PID控制器的时域表达式为：

$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

式中， $u(t)$ 是PID控制器的输出信号， $e(t)$ 是PID控制器的输入信号，也就是系统的误差信号。 $K_p$ 称为比例系数， $T_i$ 、 $T_d$ 分别称为积分和微分时间常数。

PID控制器又称为比例+积分+微分控制器。



## PID控制器对控制系统的作用：

1. 比例部分：增加比例系数可加快系统的响应速度，减小稳态误差；但会使超调量增大，系统的稳定性下降。
2. 积分部分：积分时间常数越小，积分作用越强。积分控制作用可以消除系统的稳态误差；但积分作用太大，会使系统的稳定性下降。
3. 微分部分：微分时间常数越大，微分作用越强。微分作用能够反映误差信号的变化速度。误差信号变化速度越大，微分作用越强，从而有助于减小振荡，增加系统的稳定性。但是。微分作用对高频噪声信号（不管幅值大小）很敏感。如果系统存在高频小幅值的噪音，则它形成的微分作用可能会很大，这是不希望出现的。

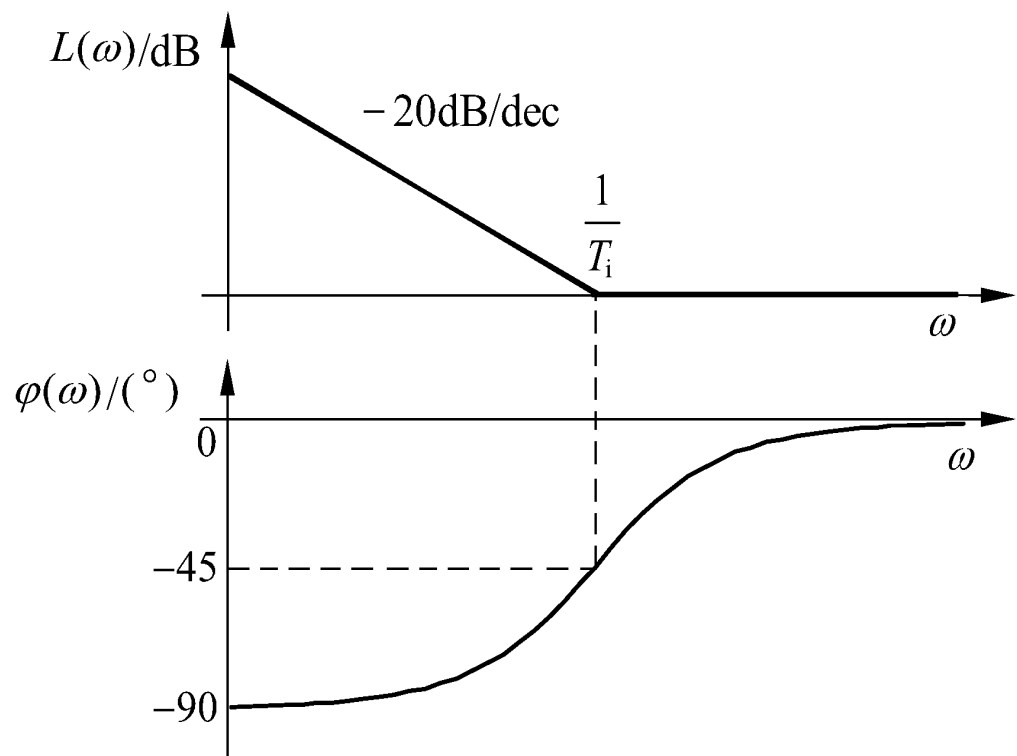


## 4. 比例积分(PI)控制器

其传递函数为

$$G_c(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

比例积分控制器是一种滞后校正装置。



PI控制器在零频率处具有无穷大增益，因而改善了系统稳态性能。

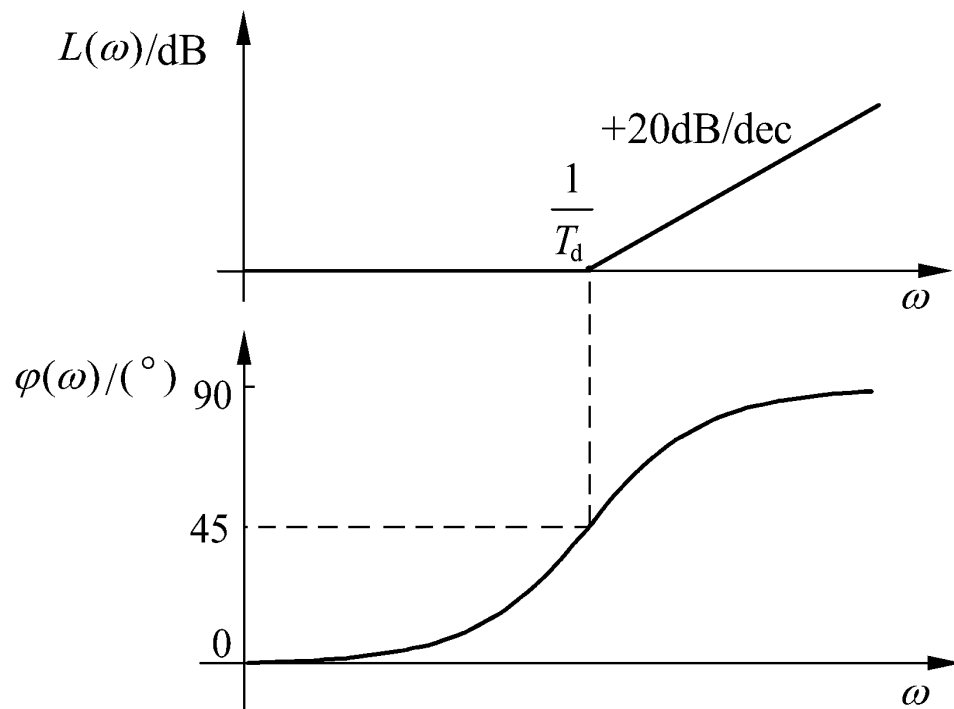


## 5. 比例微分(PD)控制器

其传递函数为

$$G_c(s) = k_p (1 + T_d s)$$

PD控制器是超前校正装置的一种简化形式。



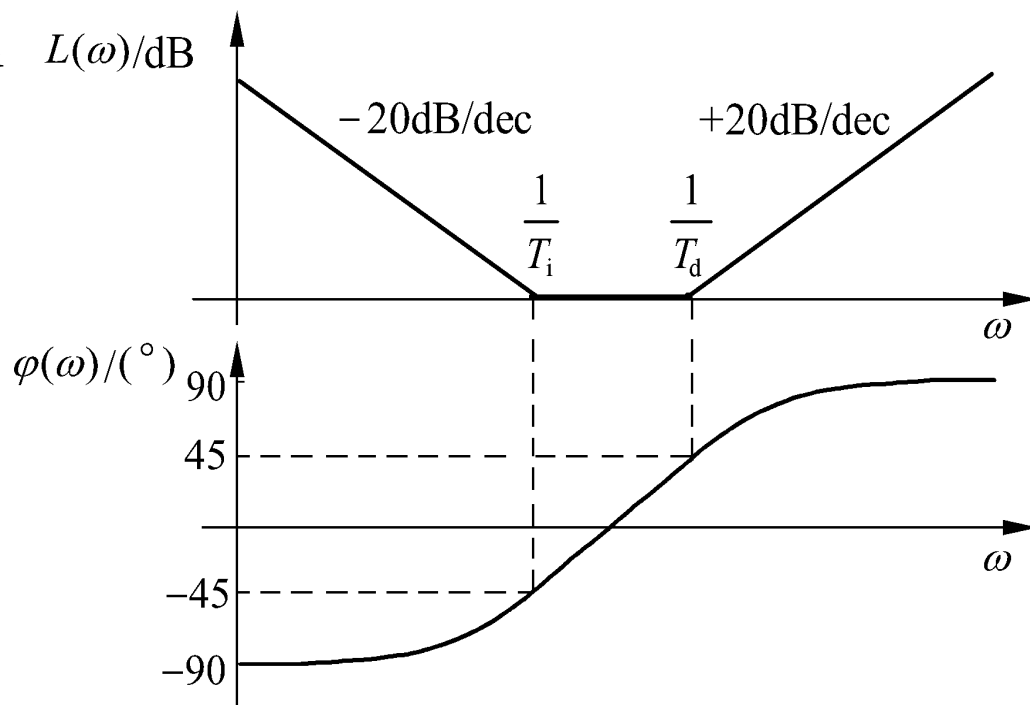
利用PD控制器提供的相位超前，使系统的相位裕度增大。而且，由于校正后系统的幅值穿越频率 $\omega_c$ 增大，系统的响应速度变快了。



## 6. 比例积分微分(PID)控制器

$$G_c(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

PID控制器是一种  
滞后-超前校正装置



在低频区，主要是PI控制器起作用，用以提高系统型别，消除或减小稳态误差；在中、高频区，主要是PD控制器起作用，用以增大幅值穿越频率和相位裕度，提高系统的响应速度。因此，PID控制器可以全面地提高系统的性能。



## PID控制器参数与系统时域性能指标间的关系

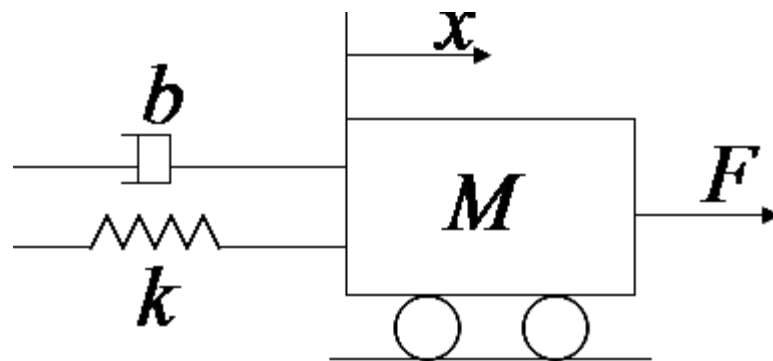
参数名称	上升时间	超调量	调节时间	稳态误差
$K_p \uparrow$	减小	增大	微小变化	减小
$K_i(1/T_i) \uparrow$	减小	增大	增大	消除
$K_d(T_d) \uparrow$	微小变化	减小	减小	与 $K_p \uparrow$ 有关

**PID控制器参数选择的次序：**①比例系数；②积分系数；③微分系数。



例：考虑我们熟悉的质量-弹簧-阻尼系统。其中外力 $F$ 为输入，位移 $x$ 为输出。参数为： $M=1\text{kg}$ ， $b=10\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}$ ， $k=20\text{N}/\text{m}$ ， $F=1$ 。试设计不同的P、PD、PI、PID控制器，使输出曲线满足：

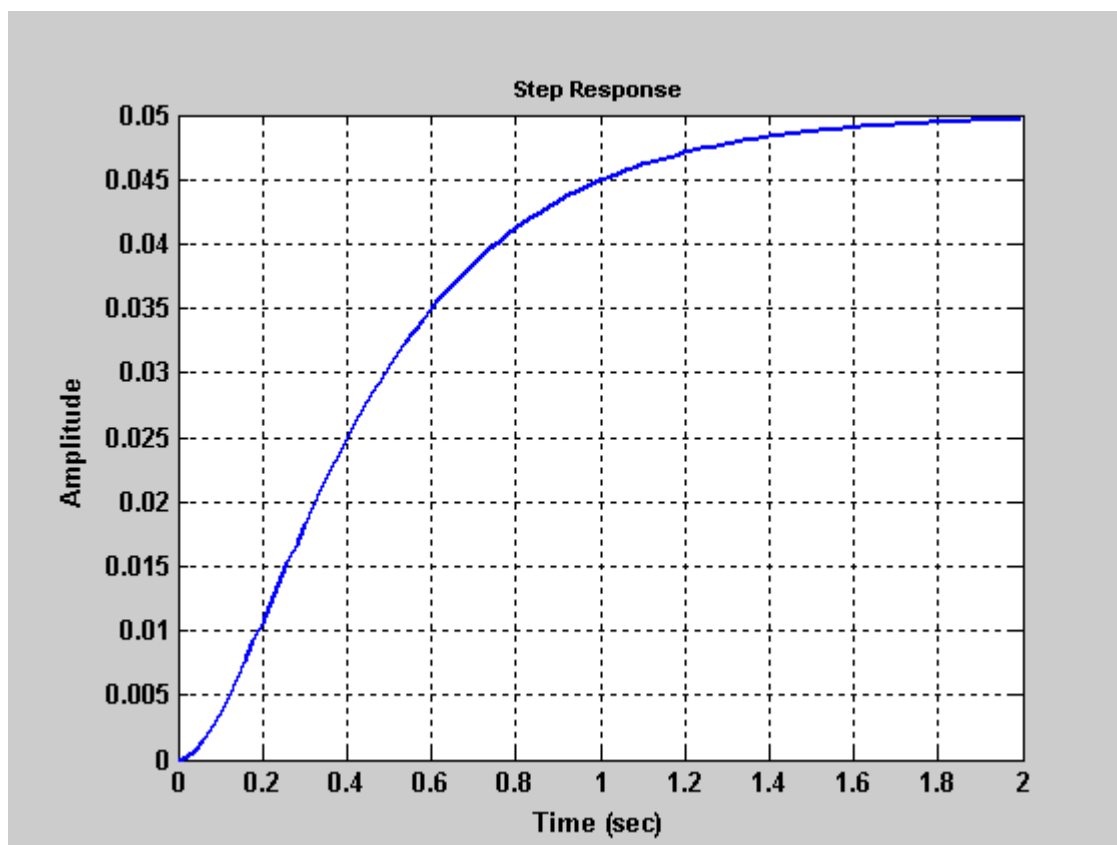
- 位移稳态值为1；
- 较小的上升时间和过度过程时间；
- 较小的超调量；
- 静态误差为零。





解：求出系统的闭环传递函数为：
$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k} = \frac{1}{s^2 + 10s + 20}$$

- 求解未加入任何校正装置的系统的阶跃响应



`clear all;`

`num=[0 0 1];`

`den=[1 10 20];`

`h=tf(num,den);`

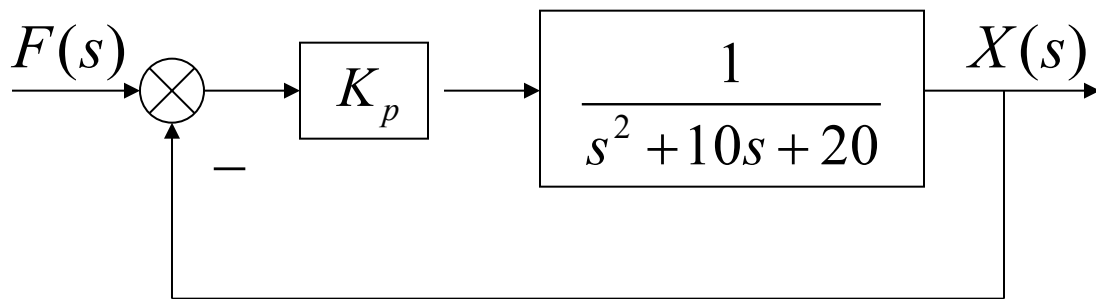
`step(h)`

显然，响应速度太慢，稳态误差太大了。不能满足要求。可考虑使用P控制。

- 比例控制器 (P) 控制器设计:

增加比例系数 $K_p$ 可以降低稳态误差, 减小上升时间和过渡时间, 因此首先选择比例控制, 也就是在系统串联一个比例放大器。

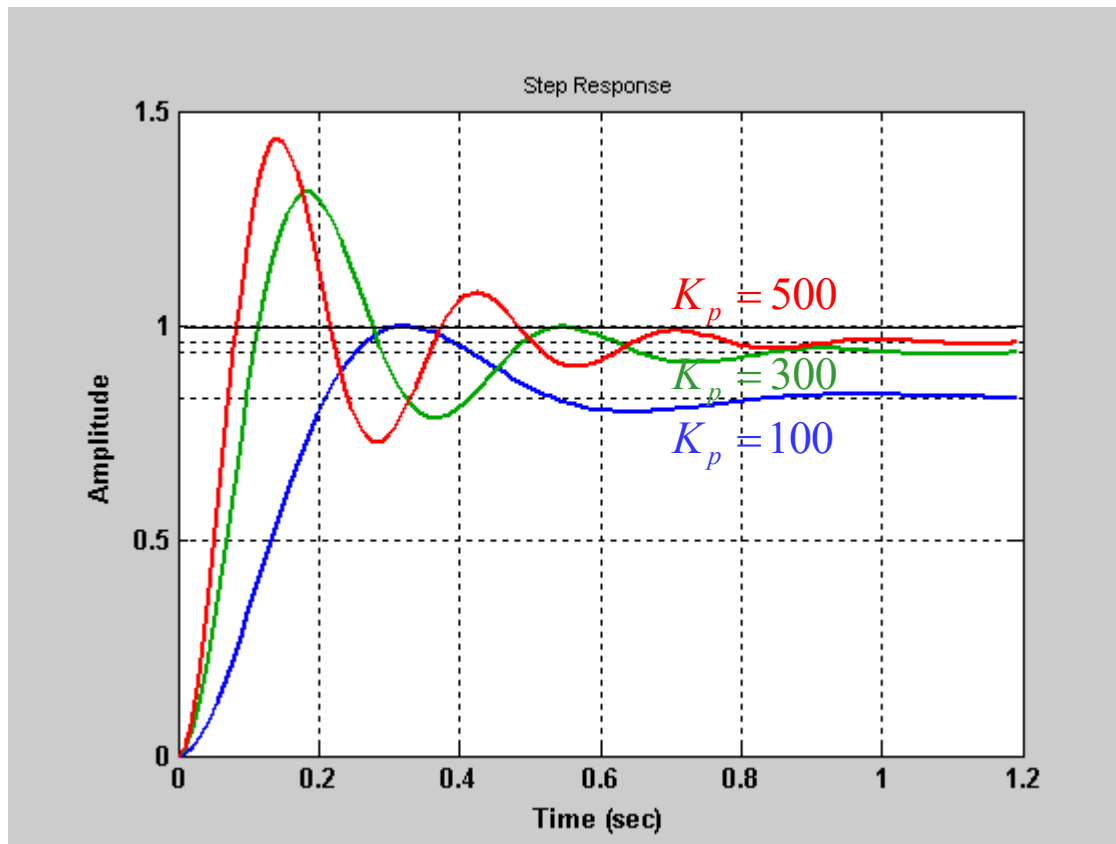
把原始的系统看作开环系统, 加入比例控制器, 并构成闭环系统。闭环系统的结构图和传递函数分别为:



$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K_p}{s^2 + 10s + (20 + K_p)}$$



加入比例控制器后的阶跃响应曲线图如下：



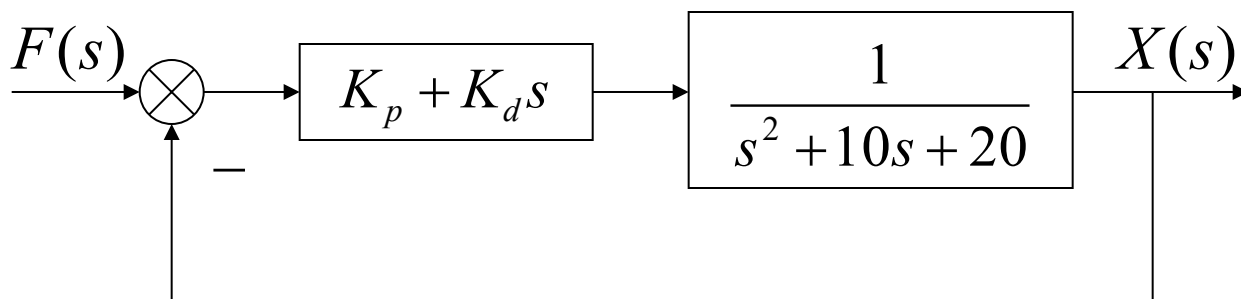
```
num1=[0 0 100];  
den1=[1 10 20+100];  
num2=[0 0 300];  
den2=[1 10 20+300];  
num3=[0 0 500];  
den3=[1 10 20+500];  
h1=tf(num1,den1);  
h2=tf(num2,den2);  
h3=tf(num3,den3);  
step(h1,h2,h3)
```

从上图可以看出：随着比例系数 $K_p$ 的增加，响应速度越来越快，稳态误差越来越小，但不能完全消除。超调量越来越大。可以考虑采用比例加微分控制器来减小超调量。

- 比例+微分 (PD) 控制器设计:

增加微分系数 $K_d$ 可以降低超调量, 减小过渡时间, 对上升时间和稳态误差影响不大。因此可以选择比例微分控制, 也就是在系统中串联一个比例放大器和一个微分器。

把原始的系统看作开环系统, 加入比例微分控制器, 并构成闭环系统。闭环系统的结构图和传递函数分别为:

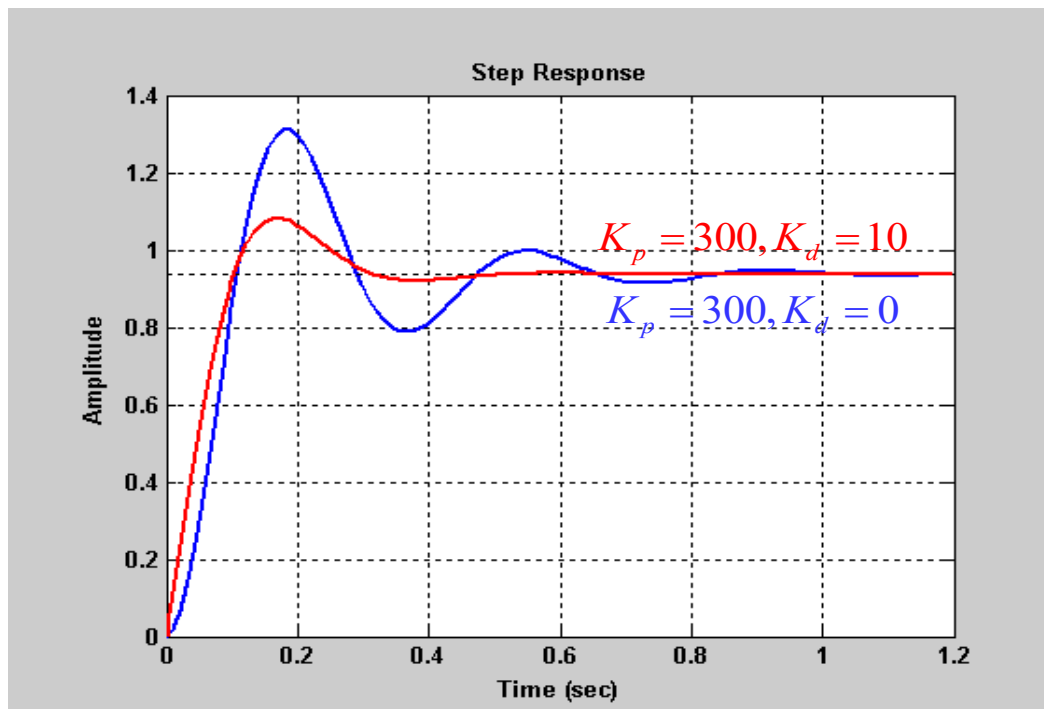


$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K_d s + K_p}{s^2 + (10 + K_d)s + (20 + K_p)}$$





选择 $K_p=300$ ,  $K_d=10$ , 加入比例微分控制器后的阶跃响应曲线图如下（红线表示使用微分控制，蓝线表示未使用微分控制）：



```
clear all;  
num1=[0 0 300];  
den1=[1 10 20+300];  
num2=[0 10 300];  
den2=[1 10+10 20+300];  
h1=tf(num1,den1);  
h2=tf(num2,den2);  
t=0:0.01:1.2;  
step(h1,h2)
```

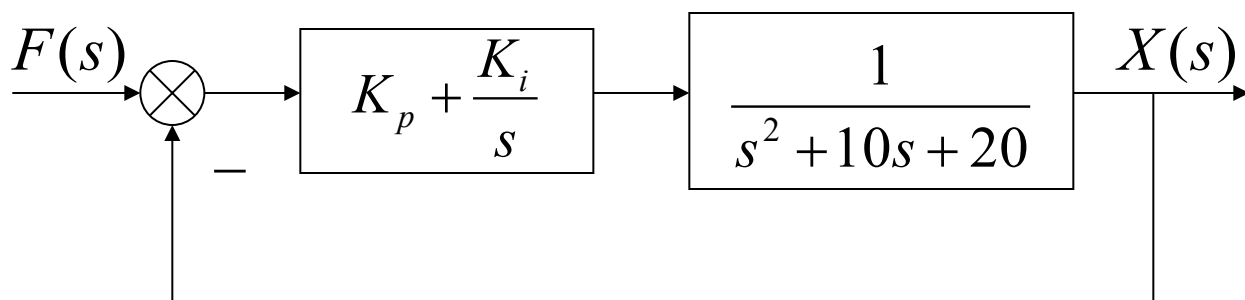
从上图可以看出：加入微分控制后，在其它控制参数不变的情况下，系统超调量下降很多，振荡次数明显减少，其它性能指标不变。现在的问题是稳态误差不为零，可用积分控制来解决。



- 比例+积分 (PI) 控制器设计:

为了消除稳态误差, 考虑选择比例积分控制, 也就是在系统中串联一个比例放大器和一个积分器。

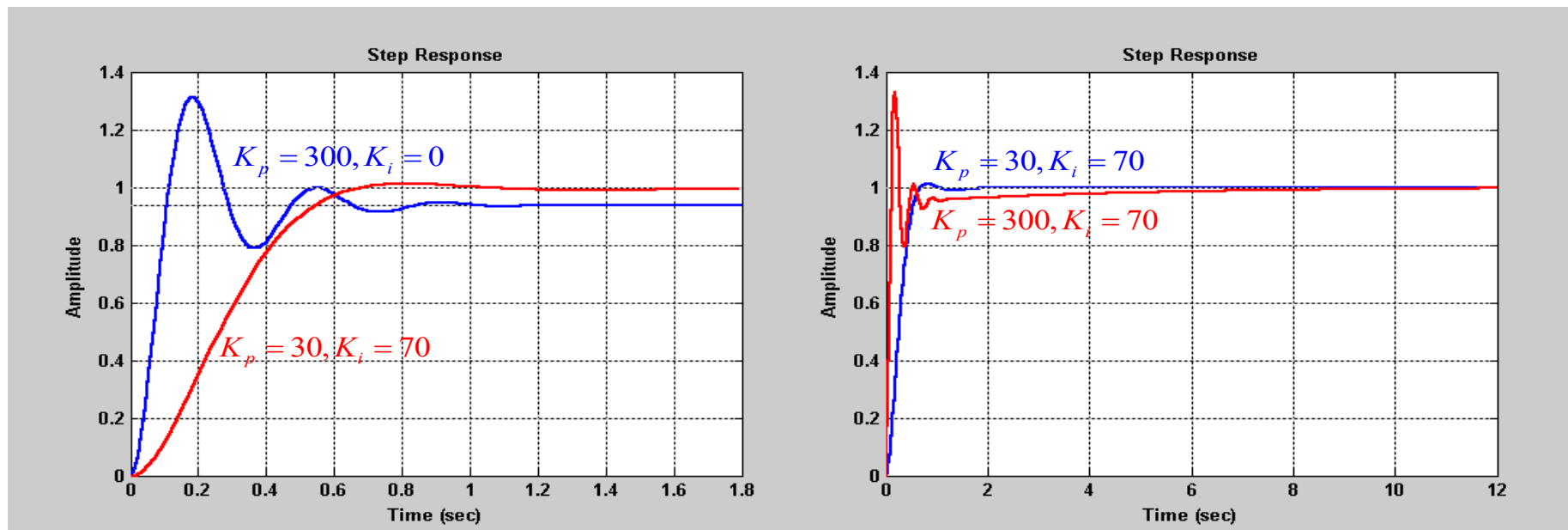
把原始的系统看作开环系统, 加入比例积分控制器, 并构成闭环系统。闭环系统的结构图和传递函数分别为:



$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K_p s + K_i}{s^3 + 10s^2 + (20 + K_p)s + K_i}$$



考虑到加入积分作用会影响稳定性，因此，加入积分作用时，要减小比例作用。加入比例积分控制器后的阶跃响应曲线图如下：

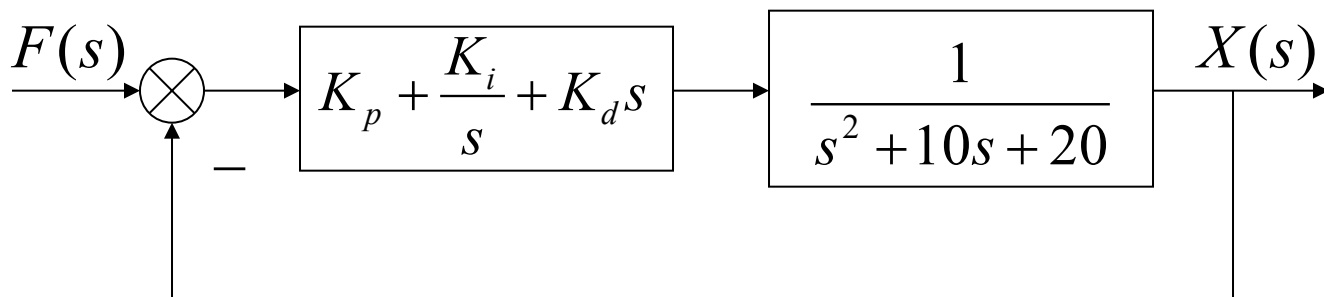


左图显示了未加入和加入积分作用时的单位阶跃响应曲线。加入积分作用时，需减小比例作用。右图显示了不减小比例作用时的结果。加入积分作用的缺点：增加调整时间，降低快速性。优点：消除稳态误差。如果希望系统各方面的性能指标都达到满意的程度，一般要采取PID控制。

- 比例+积分+微分（PID）控制器设计：

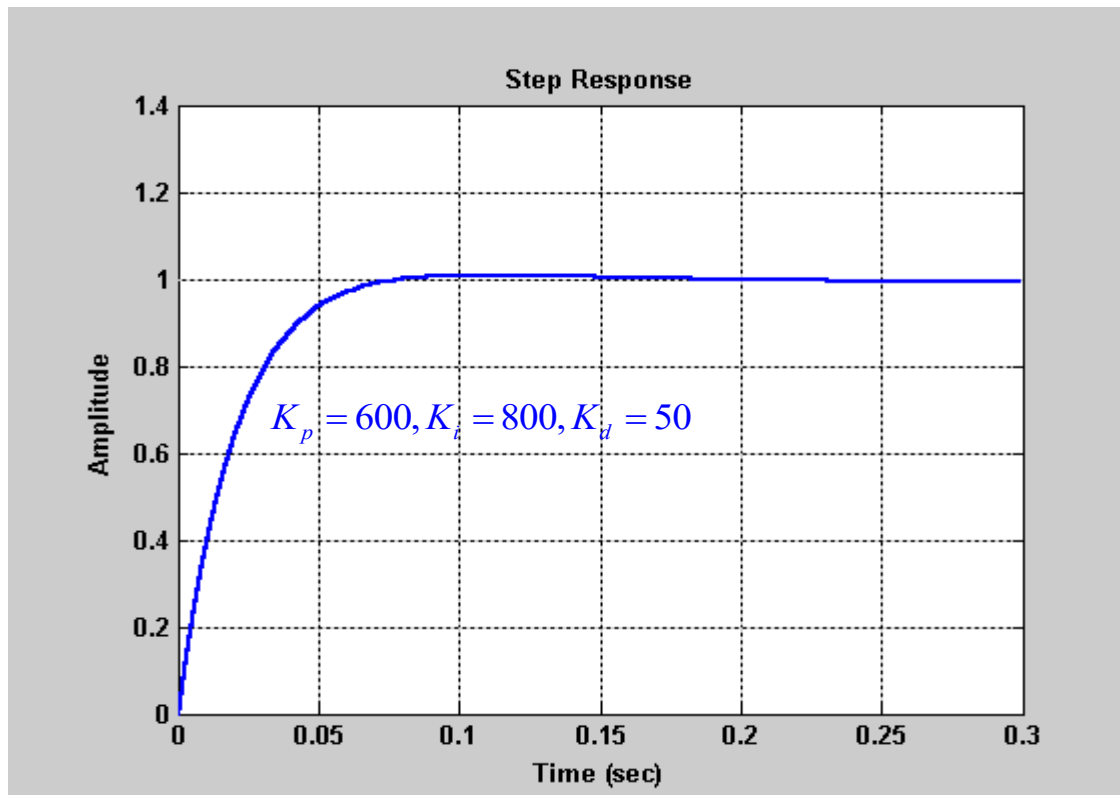
对于很多实际系统，采用PID控制一般都能取得满意的效果。PID控制器的三个参数选择采用试凑法或一些经验公式获得。

把原始的系统看作开环系统，加入比例积分微分控制器，并构成闭环系统。闭环系统的结构图和传递函数分别为：



$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s^3 + (10 + K_d)s^2 + (20 + K_p)s + K_i}$$

加入比例积分微分控制器后的阶跃响应曲线图如下：



```
clear all;  
Kp=600;  
Ki=800;%Ki=1/Ti  
Kd=50; %Kd=1/Td  
num=[0 Kd Kp Ki];  
den=[1 10+Kd 20+Kp Ki];  
h=tf(num,den);  
step(h)
```

可见，系统的性能指标已经相当好了。应当注意的是，PID控制器的三个参数的选择不是唯一的。PID控制器的控制效果能够达到满意的结果，但不一定获得最优的结果。



## 小 结

- PID控制器的时域表达式
- PID控制器的传递函数
- PID控制器三个参数对系统性能指标的影响