

计算流体力学期末大作业

朱林-2200011028

2025 年 6 月 19 日

1 数理算法原理

1.1 问题描述

1.1.1 物理情形

Sod 激波管问题是一个一维理想气体流动问题：无限长管道中，初始时刻 ($t = 0$) 在 $x = 0$ 处有一薄膜分隔两侧气体：

- 左侧 ($x < 0$): 高压区，状态为 (ρ_L, u_L, p_L)
- 右侧 ($x > 0$): 低压区，状态为 (ρ_R, u_R, p_R)

薄膜在 $t = 0^+$ 时刻瞬时破裂，两侧气体开始相互作用，产生复杂的波系结构。

1.1.2 标准初始条件

采用以下无量纲初始条件：

左侧: $\rho_L = 1.0, u_L = 0.0, p_L = 1.0$

右侧: $\rho_R = 0.125, u_R = 0.0, p_R = 0.1$

1.2 控制方程

流动由一维欧拉方程描述：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial f(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中总能密度 $E = \rho e = \rho(C_v T + \frac{1}{2}u^2)$ 。

1.3 Riemann 问题精确解

1.3.1 波系结构

根据空气动力学知识，该 Sod 激波管中可能出现三种波：

- 激波：流体密度、速度、压力均发生突变，满足 Rankine-Hugoniot (R-H) 关系式。

- 接触间断：流体仅密度发生突变，速度与压力不变。
- 膨胀波（稀疏波）：一种等熵波，其内部物理量连续、光滑，头、尾物理量连续但导数不连续（弱间断），且 Riemann 不变量不变。

对于一维 sod 激波管问题，薄膜破裂后将形成向左传播的膨胀波、向右传播的接触间断和激波，如图1。这些波将流场划分为五个特征区域（如图2所示¹）：

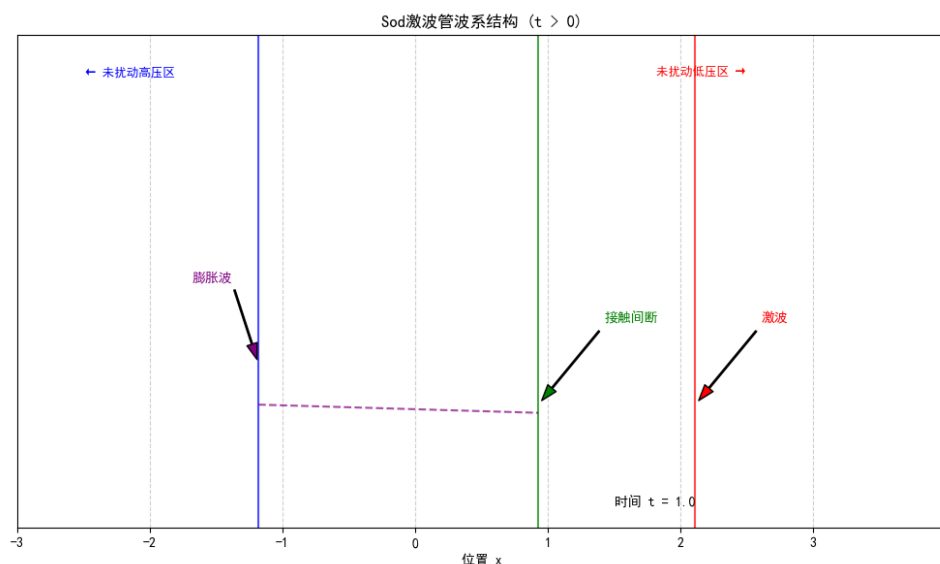


图 1: Sod 激波管典型波系结构 ($t > 0$)

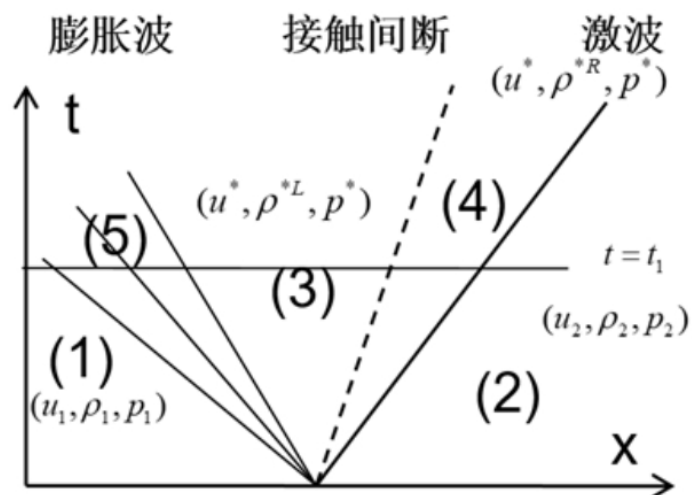


图 2: Sod 激波管典型波系结构

- 区域 1 未扰动的左侧高压区，保持初始状态 (ρ_L, u_L, p_L)
- 区域 2 未扰动的右侧低压区，保持初始状态 (ρ_R, u_R, p_R)

¹url:<https://blog.csdn.net/Nidebear/article/details/109300513>

- **区域 3** 膨胀波后, 状态为 (ρ_2, u^*, p^*)
- **区域 4** 接触间断与激波间均匀区, 状态为 (ρ_3, u^*, p^*)
- **区域 5** 膨胀波内部

其中 u^* 和 p^* 为接触间断处的速度和压力, 各波位置随时间线性变化:

$$x_{\text{left}} = -c_L t, \quad x_{\text{contact}} = u^* t, \quad x_{\text{shock}} = W_s t$$

W_s 为激波传播速度, $c_L = \sqrt{\gamma p_L / \rho_L}$ 为左侧声速。

1.3.2 解析解表达式

解析解通过求解以下方程组获得:

1-3 两区, 等熵关系式

$$\frac{p^*}{(\rho^* L)^\gamma} = \frac{p_1}{(\rho_1)^\gamma} \quad (3)$$

$$u_1 + \frac{2c_1}{\gamma - 1} = u^* + \frac{2c^L}{\gamma - 1} \quad (4)$$

其中, $c^L = \sqrt{\gamma p^* / \rho^{*L}}$ 。

2-4 两区, 激波 R-H 关系式

$$\begin{cases} \rho_2 (u_2 - Z_2) = \rho^{*R} (u^* - Z_2) \\ \rho_2 u_2 (u_2 - Z_2) + p_2 = \rho^{*R} u^* (u^* - Z_2) + p^* \\ E_2 (u_2 - Z_2) + u_2 p_2 = E^{*R} (u^* - Z_2) + p^* u^* \end{cases} \quad (5)$$

以上变量说明从略。综上 5 个方程、5 个未知数, 故方程组可解, 求解方法为联立以上两个方程组, 解出 3、4 区内速度对压力的依赖关系, 有

$$u^* = u_1 - f(p^*, p_1, \rho_1)$$

其中, 满足

$$f(p^*, p_i, \rho_i) = \frac{2c_i}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p^*}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] \quad (6)$$

注意到, 激波、膨胀波前后速度-压力的依赖关系可写成统一的形式:

左波 (激波或膨胀波)

$$u^* = u_1 - f(p^*, p_1, \rho_1)$$

右波 (激波或膨胀波)

$$u^* = u_2 + f(p^*, p_2, \rho_2)$$

以上 u^*, p^* 表示 3、4 区内的速度与压力, 其中

$$f(p^*, p_i, \rho_i) = \begin{cases} \frac{p^* - p_i}{\rho_i c_i \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{p^*}{p_i} \right) + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right]^{1/2}}, & p^* > p_i \\ \frac{2c_i}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p^*}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right], & p^* < p_i \end{cases} \quad (7)$$

求解上式可得到 3、4 区内的压力, 然后可以解得速度和密度。

膨胀波内部 对于膨胀波内部物理量的计算, 首先由波头传播速度 $u_1 - c_1$ 与波尾传播速度 $u^* - c^{*L}$ 可计算膨胀波的范围。在膨胀波区内, 利用特征相容关系和等熵关系计算物理量, 可利用简单波的特性来简化计算。以下直接给出各个物理量的计算表达式:

$$\begin{aligned} c(t, x) &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(u_1 - \frac{x}{t} \right) + \frac{2}{\gamma + 1} c_1 \\ u(x, t) &= c + x/t \\ p &= p_1 (c/c_1)^{2\gamma/\gamma-1} \\ \rho &= \gamma p / c^2 \end{aligned}$$

综上所述, 一维 Riemann 问题的精确解的求解思路与方程介绍完毕。本文 Sod 激波管参考精确解程序来自于 GitLab 上的项目 simple shock tube calculator [1]。

1.4 数值计算方法

1.4.1 计算域与网格

计算域设置为 $x \in [-5, 5]$, 时间计算域为 $t \in [0, 2.0]$, 该范围足以捕捉 Sod 问题中激波、接触间断和膨胀波的完整演化过程。空间离散采用均匀网格划分, 网格间距 Δx 由计算域长度和网格数动态确定。时间步长 Δt 根据 CFL 条件自适应调整:

$$\Delta t = \text{CFL} \cdot \frac{\Delta x}{\max(|u| + c)} \quad (8)$$

边界条件采用无反射处理:

$$\begin{aligned} U_0 &= U_1 \\ U_{N+1} &= U_N \end{aligned}$$

此边界处理可有效抑制数值反射, 确保波系在计算域内自由传播。网格收敛性研究表明, 接触间断分辨率对网格依赖性显著, 需足够细密的网格才能准确捕捉密度突变特征。

1.4.2 激波捕捉格式

1. TVD 格式: TVD (总变差递减) 格式通过限制器函数控制空间离散的振荡特性, 其核心原理为:

$$\phi(r) = \max[0, \min(1, r)] \quad (r = \text{梯度比}) \quad (9)$$

采用 MUSCL (单调上游中心格式) 重构框架, 通过斜率限制实现: 1. 单元界面状态线性重构: $U_{i+1/2} = U_i + \frac{\phi}{2} \Delta U$ 2. 通量计算采用 Riemann 求解器 3. 时间推进使用三阶 Runge-Kutta 该格式在激波附近自动降阶, 保持单调性但引入数值耗散, 对接触间断分辨率有限。

2. 群速度控制: 群速度控制 (GVC) 格式通过修正通量抑制高频振荡, 其物理基础为:

$$F^{\text{GVC}} = (1 - \alpha) F^{\text{high}} + \alpha F^{\text{low}} \quad (10)$$

核心计算步骤: 1. 计算特征速度 λ_k 及其空间梯度 2. 构建控制因子 α , 正比于特征速度变化率 3. 混合高精度通量与低耗散通量当检测到特征速度剧烈变化 (激波区域) 时, 自动增强耗散项抑制非物理振荡, 光滑区域保持高阶精度。

3. WENO 格式： 加权本质无振荡（WENO）格式采用自适应模板选择策略：

$$F_{i+1/2} = \sum_k \omega_k F_k \quad (11)$$

数值实现要点：1. 构建多个候选插值模板（左偏、中心、右偏）2. 计算各模板光滑指示器 β_k ： $\beta_k \propto \sum (\Delta^l U)^2$ 3. 设计非线性权重 $\omega_k \sim 1/(\beta_k + \epsilon)^p$ 4. 加权组合各模板通量该格式在间断附近自动选择最光滑模板，保持高阶精度的同时实现本质无振荡，对膨胀波分辨率尤为优越。

1.4.3 数值通量计算方法

1. FVS (通量矢量分裂) 通量矢量分裂的核心思想是将 Euler 通量分解为正向传播和逆向传播分量：

$$f(U) = f^+(U) + f^-(U) \quad (12)$$

计算原理：1. 基于局部特征速度进行通量分裂：

$$f^\pm = \frac{1}{2}(f(U) \pm \alpha U) \quad (13)$$

其中 α 为最大特征速度 2. Steger-Warming 分裂方案：

$$f^\pm = \frac{1}{2}(\rho u \pm \rho|u|) + \dots \quad (14)$$

3. 界面通量计算：

$$f_{i+1/2} = f^+(U_L) + f^-(U_R) \quad (15)$$

该格式结构简单但引入数值耗散，特别适合激波捕捉，但接触间断分辨率有限。

2. FDS (通量差分裂) 通量差分裂方法基于 Riemann 问题精确解思想：

$$f_{i+1/2} = \frac{1}{2}[f(U_L) + f(U_R)] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \alpha_k |\lambda_k| r_k \quad (16)$$

计算步骤：1. 计算界面左右状态 U_L, U_R 2. 构造 Jacobian 矩阵 $A = \partial f / \partial U$ 3. 特征分解： $A = R \Lambda L$ 4. 计算波强度 $\alpha = L \cdot (U_R - U_L)$ 5. 组装通量：

$$f_{i+1/2} = \frac{1}{2}[f(U_L) + f(U_R)] - \frac{1}{2} R |\Lambda| L \Delta U \quad (17)$$

Roe 格式作为典型 FDS 方法，在光滑区域保持高精度，但需熵修正避免激波后振荡。

1.4.4 时间推进格式

采用三阶 Runge-Kutta 方法离散时间项，其 Butcher 表为：

0			
1/2	1/2		
1	-1	2	
	1/6	2/3	1/6

计算流程：

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t \mathcal{L}(U^n) \quad (18)$$

$$U^{(2)} = \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}U^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t \mathcal{L}(U^{(1)}) \quad (19)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}U^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t \mathcal{L}(U^{(2)}) \quad (20)$$

其中 $\mathcal{L}(U)$ 为空间离散算子。此格式具有：1. 三阶时间精度 2. 强稳定性保持 (SSP) 特性 3. 大时间步长稳定性 4. 与高精度空间格式良好兼容

1.4.5 附加题：特征重构方法在 FVS 框架中的应用

特征重构方法的核心思想是将守恒变量投影到特征空间进行处理，其数学基础为：

$$W = L \cdot U, \quad L = \text{左特征矩阵} \quad (21)$$

在 FVS 框架中的实施步骤：

1. 局部特征分解：

$$A = \frac{\partial f}{\partial U} = R \Lambda L \quad (22)$$

其中 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_k)$ 为特征值矩阵

2. 特征变量投影：

$$W_L = L \cdot U_L, \quad W_R = L \cdot U_R \quad (23)$$

3. 特征空间重构：

$$W_{i+1/2}^L = \text{Recon}(W_{i-1}, W_i, W_{i+1}) \quad (24)$$

$$W_{i+1/2}^R = \text{Recon}(W_i, W_{i+1}, W_{i+2}) \quad (25)$$

采用 WENO/TVD 等重构技术

4. 物理空间恢复：

$$U_{i+1/2}^L = R \cdot W_{i+1/2}^L, \quad U_{i+1/2}^R = R \cdot W_{i+1/2}^R \quad (26)$$

5. FVS 通量计算：

$$f_{i+1/2} = f^+(U_{i+1/2}^L) + f^-(U_{i+1/2}^R) \quad (27)$$

AI 工具使用声明表

使用内容	工具名称	使用目的
hw2.tex 1-9 行、图片插入	Github Copilot	调整 pdf 格式，调用宏包，省略插入图片的重复性工作
main.py 6-15 行	DeepSeek	修正 matplotlib 中文显示问题
ReadMe.md 框架	DeepSeek	在 DeepSeek 的帮助下生成一个框架，在此基础上增加而来
.gitignore	Github Copilot	针对于 python 和 latex 的.gitignore 文件，完全由 Copilot 生成

参考文献

- [1] fantaz. Simple shock tube calculator, 2021. Accessed: 2025-06-17. URL: https://gitlab.com/fantaz/simple_shock_tube_calculator.