计算流体力学期末大作业

朱林-2200011028

2025 年 6 月 17 日

1 数理算法原理

1.1 问题描述

1.1.1 物理情形

Sod 激波管问题是一个一维理想气体流动问题：无限长管道中，初始时刻 ($t = 0$) 在 $x = 0$ 处有一薄膜分隔两侧气体：

- 左侧 ($x < 0$): 高压区，状态为 (ρ_L, u_L, p_L)
- 右侧 ($x > 0$): 低压区，状态为 (ρ_R, u_R, p_R)

薄膜在 $t = 0^+$ 时刻瞬时破裂，两侧气体开始相互作用，产生复杂的波系结构。

1.1.2 标准初始条件

采用以下无量纲初始条件：

$$
\begin{aligned}
\text{左侧:} \quad & \rho_L = 1.0, u_L = 0.0, p_L = 1.0 \\
\text{右侧:} \quad & \rho_R = 0.125, u_R = 0.0, p_R = 0.1
\end{aligned}
$$

1.2 控制方程

流动由一维欧拉方程描述：

$$
\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial f(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \tag{1}
$$

$$
\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix} \tag{2}
$$

其中总能密度 $E = \rho e = \rho(C_v T + \frac{1}{2}u^2)$。

1.3 Riemann 问题精确解

1.3.1 波系结构

根据空气动力学知识，该 Sod 激波管中可能出现三种波：

- 激波：流体密度、速度、压力均发生突变，满足 Rankine-Hugoniot (R-H) 关系式。

- 接触间断：流体仅密度发生突变，速度与压力不变。
- 膨胀波（稀疏波）：一种等熵波，其内部物理量连续、光滑，头、尾物理量连续但导数不连续(弱间断)，且 Riemann 不变量不变。

对于一维 sod 激波管问题，薄膜破裂后将形成向左传播的膨胀波、向右传播的接触间断和激波，如图1。这些波将流场划分为五个特征区域（如图2所示）：

- **区域 1** 未扰动的左侧高压区，保持初始状态 (ρ_L, u_L, p_L)
- **区域 2** 膨胀波内部
- **区域 3** 膨胀波后，状态为 (ρ_2, u^*, p^*)
- **区域 4** 接触间断与激波间均匀区，状态为 (ρ_3, u^*, p^*)
- **区域 5** 未扰动的右侧低压区，保持初始状态 (ρ_R, u_R, p_R)

其中 u^* 和 p^* 为接触间断处的速度和压力，各波位置随时间线性变化：

$$x_{\text{left}} = -c_L t, \quad x_{\text{contact}} = u^* t, \quad x_{\text{shock}} = W_s t$$

W_s 为激波传播速度，$c_L = \sqrt{\gamma p_L / \rho_L}$ 为左侧声速。

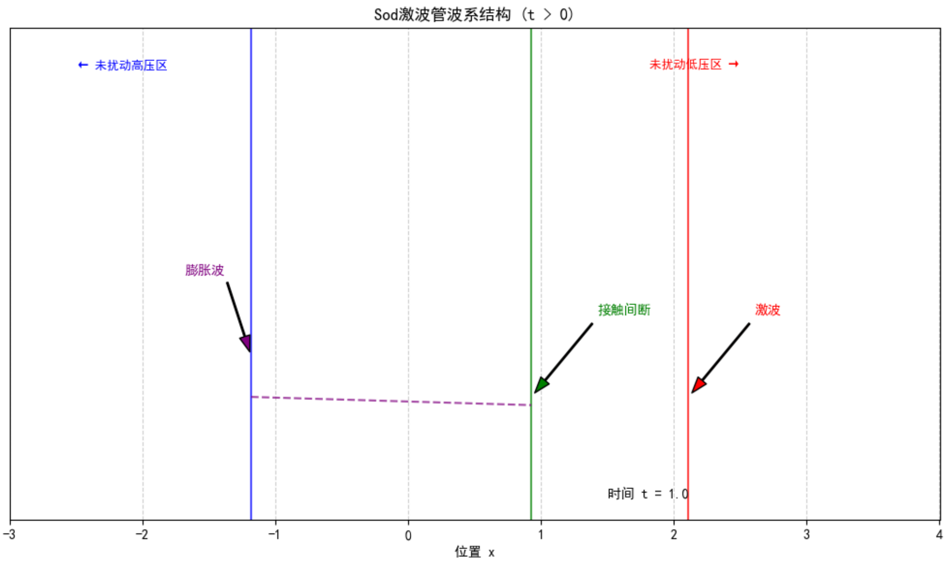

图 1: Sod 激波管典型波系结构（t>0）

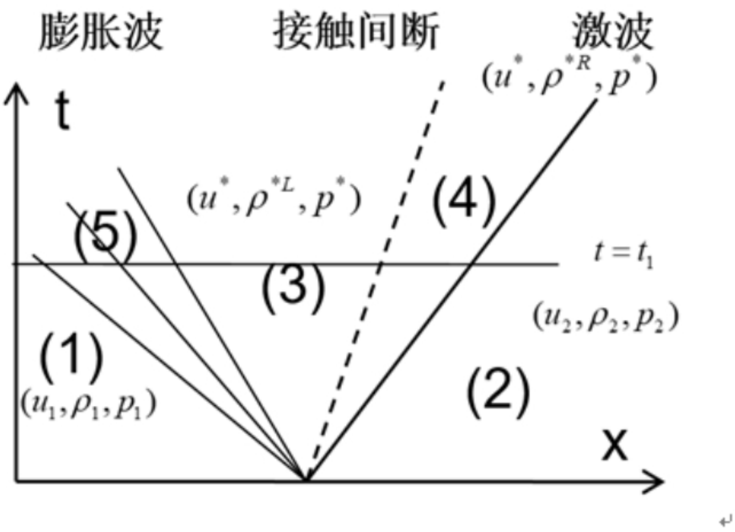

图 1 Sod 激波管的波系与分区

图 2: Sod 激波管典型波系结构

1.3.2 解析解表达式

解析解通过求解以下方程组获得:

1-3 两区, 等熵关系式

$$\frac{p^*}{(\rho^{*L})^\gamma} = \frac{p_1}{(\rho_1)^\gamma}$$

$$u_1 + \frac{2c_1}{\gamma - 1} = u^* + \frac{2c^L}{\gamma - 1}$$

其中, $c^L = \sqrt{\gamma p^* / \rho^{*L}}$。

2-4 两区, 激波 R-H 关系式

$$\begin{cases} \rho_2 (u_2 - Z_2) = \rho^{*R} (u^* - Z_2) \\ \rho_2 u_2 (u_2 - Z_2) + p_2 = \rho^{*R} u^* (u^* - Z_2) + p^* \\ E_2 (u_2 - Z_2) + u_2 p_2 = E^{*R} (u^* - Z_2) + p^* u^* \end{cases}$$

以上变量说明从略。综上 5 个方程、5 个未知数，故方程组可解，求解方法为联立以上两个方程组，解出 3、4 区内速度对压力的依赖关系，有

$$u^* = u_1 - f(p^*, p_1, \rho_1)$$

其中，满足

$$f(p^*, p_i, \rho_i) = \frac{2c_i}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p^*}{p_i} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} - 1 \right]$$

。

注意到，激波、膨胀波前后速度-压力的依赖关系可写成统一的形式：

左波（激波或膨胀波）

$$u^* = u_1 - f(p^*, p_1, \rho_1)$$

右波（激波或膨胀波）

$$u^* = u_2 + f(p^*, p_2, \rho_2)$$

以上 u^*, p^* 表示 3、4 区内的速度与压力，其中

$$f(p^*, p_i, \rho_i) = \begin{cases} \frac{p^* - p_i}{\rho_i c_i \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma}\left(\frac{p^*}{p_i}\right) + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\right]^{1/2}}, & p^* > p_i \\ \frac{2c_i}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p^*}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1\right], & p^* < p_i \end{cases}$$

求解上式可得到 3、4 区内的压力，然后可以解得速度和密度。

膨胀波内部 对于膨胀波内部物理量的计算，首先由波头传播速度 $u_1 - c_1$ 与波尾传播速度 $u^* - c^{*L}$ 可计算膨胀波的范围。在膨胀波区内，利用特征相容关系和等熵关系计算物理量，可利用简单波的特性来简化计算。以下直接给出各个物理量的计算表达式：

$$\begin{aligned} c(t, x) &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\left(u_1 - \frac{x}{t}\right) + \frac{2}{\gamma + 1} c_1 \\ u(x, t) &= c + x/t \\ p &= p_1 \left(c/c_1\right)^{2\gamma/\gamma - 1} \\ \rho &= \gamma p / c^2 \end{aligned}$$

综上所述，一维 Riemann 问题的精确解的求解思路与方程介绍完毕。本文 Sod 激波管参考精确解程序来自于 MATLAB 官方开源文档中的 sod 激波管的求解器 [1]。

1.4 数值计算方法

1.4.1 计算域与网格

针对 Sod 激波管问题, 选择对称计算域 $[-L, L]$ 以满足激波传播的物理需求... 网格收敛性分析需考察 $N = 100, 200, 400$ 等情形...

边界条件设置:

- 计算域边界 $x = \pm L$ 采用特征边界条件
- 边界值通过外推法处理: $U_0 = 2U_1 - U_2$, $U_{N+1} = 2U_N - U_{N-1}$
- 网格点 $i = 1$ 和 $i = N$ 分别对应 $x = -L + \Delta x/2$ 和 $x = L - \Delta x/2$

1.4.2 激波捕捉格式

1. TVD 格式 (Harten-Yee 迎风格式):

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x}\left(\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}\right)$$

数值通量构造:

$$\hat{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[f(U_L) + f(U_R) - \Phi_{i+1/2}(U_R - U_L)\right]$$

限制器函数:

$$\Phi(r) = \mathrm{minmod}(1, r) = \begin{cases} 0 & \text{if } r \le 0 \\ r & \text{if } 0 < r < 1 \\ 1 & \text{if } r \ge 1 \end{cases}, \quad r = \frac{U_i - U_{i-1}}{U_{i+1} - U_i}$$

2. 群速度控制格式 (GVC) 修正:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \approx \frac{\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}}{\Delta x} + \tau \Delta x^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$

三阶导数项离散修正 (迎风型):

$$\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_i \approx \begin{cases} \dfrac{2f_{i-3} - 9f_{i-2} + 18f_{i-1} - 11f_i}{\Delta x^3} & u \ge 0 \\ \dfrac{-11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3}}{\Delta x^3} & u < 0 \end{cases}$$

注: 根据局部流速方向选择迎风模板

1.4.3 数值通量计算方法

1. **通量向量分裂 (FVS - Steger-Warming 格式)** 特征分裂处理对流项:

$$f = f^+ + f^-, \quad f^\pm = A^\pm U$$

其中 $A^\pm = R\Lambda^\pm L$，特征值分解 $\Lambda = \mathrm{diag}(u, u+c, u-c)$，$\Lambda^\pm$ 取正负特征值部分。

2. **通量差分分裂 (FDS - Roe 格式)** 构造 Roe 平均矩阵 $\tilde{A}_{i+1/2}$:

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R}, \quad \tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$
$$\tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \tilde{c} = \sqrt{(\gamma - 1)\left(\tilde{H} - \frac{1}{2}\tilde{u}^2\right)}$$

数值通量计算:

$$\hat{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[f(U_L) + f(U_R)\right] - \frac{1}{2}|\tilde{A}_{i+1/2}|(U_R - U_L)$$

1.4.4 时间推进方法

采用三阶 TVD Runge-Kutta 方法离散时间项:

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U^n + \Delta t L(U^n) \\ U^{(2)} &= \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}U^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(U^{(1)}) \\ U^{n+1} &= \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}U^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(U^{(2)}) \end{aligned}$$

其中 $L(U)$ 为空间离散算子。时间步长由 CFL 条件约束:

$$\Delta t = \mathrm{CFL} \cdot \frac{\Delta x}{\max(|u| + c)}, \quad \mathrm{CFL} \in [0.3, 0.6]$$

三阶精度与 TVD 特性保证激波捕捉的数值稳定性。

AI 工具使用声明表

使用内容	工具名称	使用目的
hw2.tex 1-9 行、图片插入	Github Copilot	调整 pdf 格式，调用宏包，省略插入图片的重复性工作
main.py 6-15 行	DeepSeek	修正 matplotlib 中文显示问题
ReadMe.md 框架	DeepSeek	在 DeepSeek 的帮助下生成一个框架，在此基础上增加而来
.gitignore	Github Copilot	针对于 python 和 latex 的.gitignore 文件，完全由 Copilot 生成

参考文献

[1] Gogol. Sod shock tube problem solver, 2025. Accessed: 2025-06-17. URL: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/46311-sod-shock-tube-problem-solver.