计算流体力学期末大作业

朱林-2200011028

2025 年 6 月 14 日

1　数理算法原理

1.1　问题描述

1.1.1　物理情形

Sod 激波管问题是一个一维理想气体流动问题：无限长管道中，初始时刻 $(t=0)$ 在 $x=0$ 处有一薄膜分隔两侧气体：

- 左侧 $(x<0)$: 高压区，状态为 (ρ_L, u_L, p_L)
- 右侧 $(x>0)$: 低压区，状态为 (ρ_R, u_R, p_R)

薄膜在 $t=0^+$ 时刻瞬时破裂，两侧气体开始相互作用，产生复杂的波系结构。

1.1.2　标准初始条件

采用以下无量纲初始条件：

$$\begin{aligned} \text{左侧:} \quad & \rho_L = 1.0, u_L = 0.0, p_L = 1.0 \\ \text{右侧:} \quad & \rho_R = 0.125, u_R = 0.0, p_R = 0.1 \end{aligned}$$

1.2　控制方程

流动由一维欧拉方程描述：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial f(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E+p) \end{bmatrix} \tag{2}$$

其中总能密度 $E = \rho e = \rho(C_v T + \frac{1}{2}u^2)$。

1.3　Riemann 问题精确解

通过查阅资料，Sod 激波管问题的精确解可以通过黎曼问题的解法得到。该问题的解由四个区域组成，分别对应不同的流动状态和波系结构。

1.3.1 波系结构

薄膜破裂后，将产生以下三种波结构：

1. **膨胀波（稀疏波）**：向左传播进入高压区（$x < 0$）
2. **接触间断**：向右传播的分界面，分隔原始左右侧气体
3. **激波**：向右传播进入低压区（$x > 0$）

这些波将流场划分为四个特征区域（如图1所示）：

- **区域 1** $(x < x_{\text{left}})$：未扰动的左侧高压区，保持初始状态 (ρ_L, u_L, p_L)
- **区域 2** $(x_{\text{left}} < x < x_{\text{contact}})$：膨胀波后均匀区，状态为 (ρ_2, u^*, p^*)
- **区域 3** $(x_{\text{contact}} < x < x_{\text{shock}})$：接触间断与激波间均匀区，状态为 (ρ_3, u^*, p^*)
- **区域 4** $(x > x_{\text{shock}})$：未扰动的右侧低压区，保持初始状态 (ρ_R, u_R, p_R)

其中 u^* 和 p^* 为接触间断处的速度和压力，各波位置随时间线性变化：

$$x_{\text{left}} = -c_L t, \quad x_{\text{contact}} = u^* t, \quad x_{\text{shock}} = W_s t$$

W_s 为激波传播速度，$c_L = \sqrt{\gamma p_L / \rho_L}$ 为左侧声速。

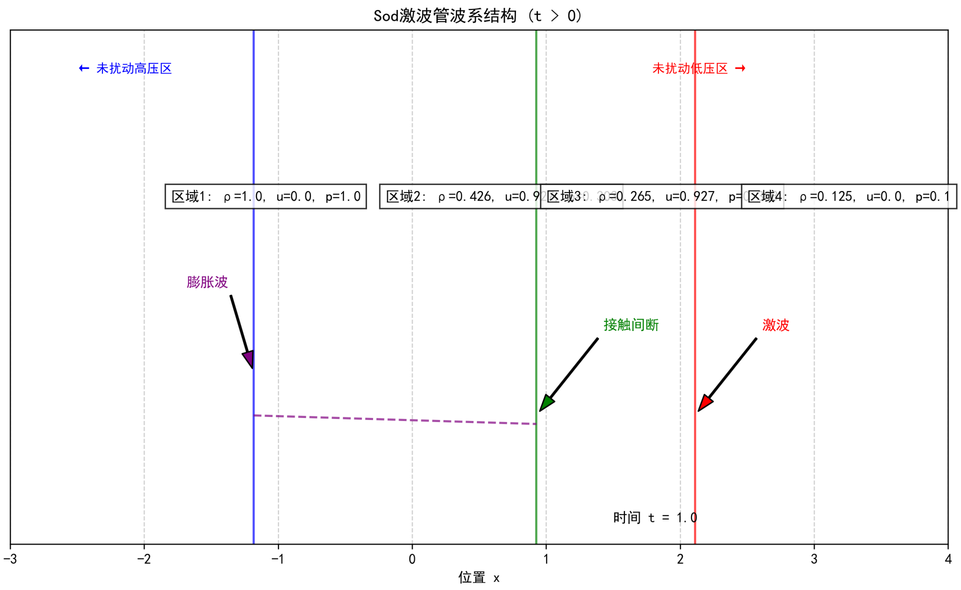

图 1: Sod 激波管典型波系结构（t>0）

1.3.2 解析解表达式

解析解通过求解以下方程组获得：

1. **膨胀波区（稀疏波，$x/t \in [-c_L, u^* - c_2]$）**等熵流动关系：

$$\begin{aligned}
u &= \frac{2}{\gamma+1}\left(c_L + \frac{x}{t}\right) \\
c &= c_L - \frac{\gamma-1}{2}u \\
\rho &= \rho_L\left(\frac{c}{c_L}\right)^{2/(\gamma-1)} \\
p &= p_L\left(\frac{c}{c_L}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)}
\end{aligned}$$

2. **接触间断条件**（$x = u^* t$）压力与速度连续：

$$p_2 = p_3 = p^*, \quad u_2 = u_3 = u^*$$

3. **激波关系**（Rankine-Hugoniot 条件）

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_3}{\rho_R} &= \frac{(\gamma+1)p^* + (\gamma-1)p_R}{(\gamma-1)p^* + (\gamma+1)p_R} \\
u^* &= u_R + \frac{c_R}{\gamma}\left(\frac{p^*}{p_R} - 1\right)\sqrt{\frac{2\gamma}{(\gamma+1)p^*/p_R + (\gamma-1)}}
\end{aligned}$$

4. **膨胀波与接触间断衔接**

$$u^* = u_L + \frac{2c_L}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{p^*}{p_L}\right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)}\right]$$

其中 γ 为比热比（空气取 1.4）。通过数值求解上述非线性方程组可得 p^* 和 u^*，进而确定全场解。

作为黎曼问题的最简单形式，Sod 激波管是理解更复杂流动机理的基础，同时常用于计算流体中作为典型案例检验算法和格式。

1.4 数值计算方法

1.4.1 计算域与网格

针对 Sod 激波管问题，选择对称计算域 $[-L, L]$ 以满足激波传播的物理需求。考虑无量纲化处理，定义计算域为 $[-1, 1]$，满足 $L = 1$，时间计算域 $t \in [0, T]$，其中 T 由流场演化决定（通常 $T = 0.2$ 可达稳定）。采用均匀网格离散：

$$\Delta x = \frac{2L}{N}, \quad x_i = -L + \left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

其中 N 为网格单元数，采用半整数索引避免边界处理。网格收敛性分析需考察 $N = 100, 200, 400$ 等情形，重点关注激波、接触间断和膨胀波区的分辨率。

1.4.2 激波捕捉格式

为精确捕捉激波管中的复杂波系，采用以下三类激波捕捉格式：

1. **TVD 格式 (Harten-Yee 迎风格式)** 总变差减小 (TVD) 格式保证解在激波处无振荡：

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x}\left(\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}\right)$$

数值通量构造：

$$\hat{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[f(U_L) + f(U_R) - \Phi_{i+1/2}(U_R - U_L)\right]$$

限制器函数 Φ 选用 minmod 限制器：

$$\Phi(r) = \max\left[0, \min(1, r)\right], \quad r = \frac{U_i - U_{i-1}}{U_{i+1} - U_i}$$

2. **群速度控制格式 (GVC)** 修正通量导数抑制高波数振荡：

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \approx \frac{\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}}{\Delta x} + \tau \Delta x^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$

其中 τ 为控制参数，三阶导数项离散为：

$$\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_i \approx \frac{-f_{i-2} + 3f_{i-1} - 3f_i + f_{i+1}}{\Delta x^3}$$

3. **WENO 格式 (五阶 WENO-JS)** 加权本质无振荡格式构造：

$$\hat{f}_{i+1/2} = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_k q_k$$

光滑指示器 β_k 计算：

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{13}{12}(f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i)^2 + \frac{1}{4}(f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i)^2 \\
\beta_1 &= \frac{13}{12}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(f_{i-1} - f_{i+1})^2 \\
\beta_2 &= \frac{13}{12}(f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2})^2
\end{aligned}$$

非线性权重 $\omega_k = \frac{\alpha_k}{\sum \alpha_k}$，$\alpha_k = \frac{d_k}{(\beta_k + \epsilon)^2}$

1.4.3 数值通量计算方法

1. **通量向量分裂 (FVS - Steger-Warming 格式)** 特征分裂处理对流项：

$$f = f^+ + f^-, \quad f^\pm = A^\pm U$$

其中 $A^\pm = R\Lambda^\pm L$，特征值分解 $\Lambda = \mathrm{diag}(u, u+c, u-c)$，$\Lambda^\pm$ 取正负特征值部分。

2. **通量差分分裂 (FDS - Roe 格式)** 构造 Roe 平均矩阵 $\tilde{A}_{i+1/2}$：

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R}, \quad \tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

$$\tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \tilde{c} = \sqrt{(\gamma - 1)\left(\tilde{H} - \frac{1}{2}\tilde{u}^2\right)}$$

数值通量计算：

$$\hat{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[f(U_L) + f(U_R)\right] - \frac{1}{2}|\tilde{A}_{i+1/2}|(U_R - U_L)$$

1.4.4 时间推进方法

采用三阶 TVD Runge-Kutta 方法离散时间项：

$$
\begin{aligned}
U^{(1)} &= U^n + \Delta t L(U^n) \\
U^{(2)} &= \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}U^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(U^{(1)}) \\
U^{n+1} &= \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}U^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(U^{(2)})
\end{aligned}
$$

其中 $L(U)$ 为空间离散算子。时间步长由 CFL 条件约束：

$$
\Delta t = \mathrm{CFL} \cdot \frac{\Delta x}{\max(|u| + c)}, \quad \mathrm{CFL} \in [0.3, 0.6]
$$

三阶精度与 TVD 特性保证激波捕捉的数值稳定性。

A AI 工具使用声明表

使用内容	工具名称	使用目的
hw2.tex 1-9 行、图片插入	Github Copilot	调整 pdf 格式，调用宏包，省略插入图片的重复性工作
main.py 6-15 行	DeepSeek	修正 matplotlib 中文显示问题
ReadMe.md 框架	DeepSeek	在 DeepSeek 的帮助下生成一个框架，在此基础上增加而来
.gitignore	Github Copilot	针对于 python 和 latex 的.gitignore 文件，完全由 Copilot 生成