计算流体力学期末大作业

朱林-2200011028

2025 年 6 月 17 日

1 数理算法原理

1.1 问题描述

1.1.1 物理情形

Sod 激波管问题是一个一维理想气体流动问题：无限长管道中，初始时刻 $(t = 0)$ 在 $x = 0$ 处有一薄膜分隔两侧气体：

- 左侧 $(x < 0)$: 高压区，状态为 (ρ_L, u_L, p_L)
- 右侧 $(x > 0)$: 低压区，状态为 (ρ_R, u_R, p_R)

薄膜在 $t = 0^+$ 时刻瞬时破裂，两侧气体开始相互作用，产生复杂的波系结构。

1.1.2 标准初始条件

采用以下无量纲初始条件：

$$\begin{aligned} \text{左侧:} \quad & \rho_L = 1.0, u_L = 0.0, p_L = 1.0 \\ \text{右侧:} \quad & \rho_R = 0.125, u_R = 0.0, p_R = 0.1 \end{aligned}$$

1.2 控制方程

流动由一维欧拉方程描述：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial f(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix} \tag{2}$$

其中总能密度 $E = \rho e = \rho(C_v T + \frac{1}{2}u^2)$。

1.3 Riemann 问题精确解

1.3.1 波系结构

根据空气动力学知识，该 Sod 激波管中可能出现三种波：

- 激波：流体密度、速度、压力均发生突变，满足 Rankine-Hugoniot (R-H) 关系式。

- 接触间断：流体仅密度发生突变，速度与压力不变。
- 膨胀波（稀疏波）：一种等熵波，其内部物理量连续、光滑，头、尾物理量连续但导数不连续(弱间断)，且 Riemann 不变量不变。

对于一维 sod 激波管问题，薄膜破裂后将形成向左传播的膨胀波、向右传播的接触间断和激波，如图1。这些波将流场划分为五个特征区域（如图2所示[1]）：

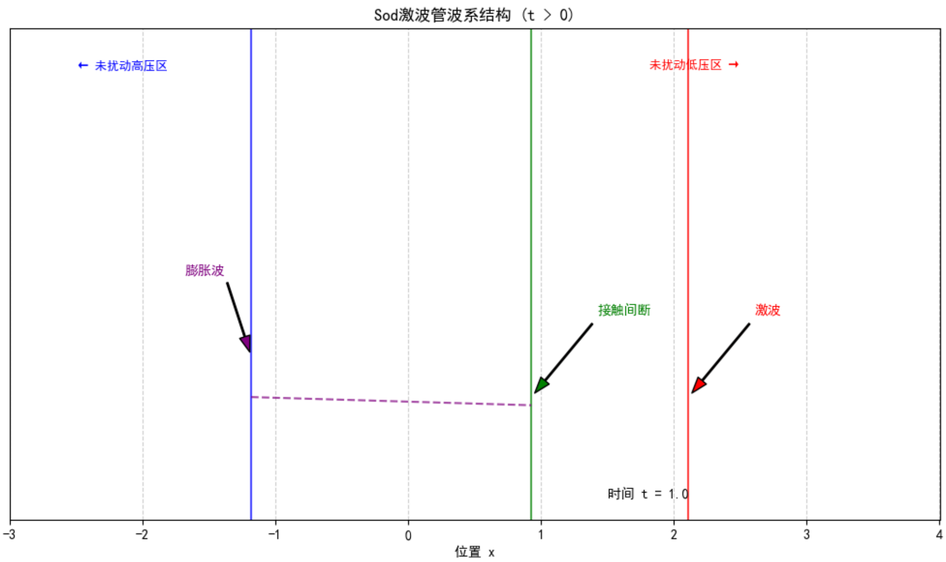

图 1: Sod 激波管典型波系结构（t>0）

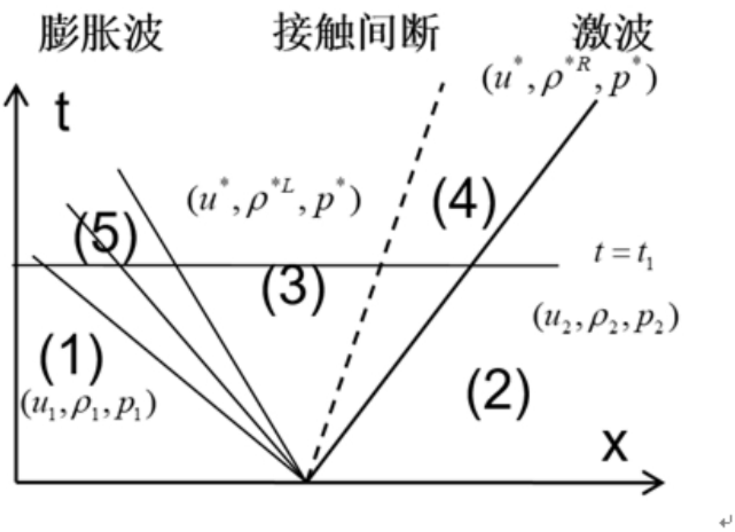

图 2: Sod 激波管典型波系结构

- **区域 1** 未扰动的左侧高压区，保持初始状态 (ρ_L, u_L, p_L)
- **区域 2** 未扰动的右侧低压区，保持初始状态 (ρ_R, u_R, p_R)

[1]url:https://blog.csdn.net/Nidebear/article/details/109300513

- **区域 3** 膨胀波后，状态为 (ρ_2, u^*, p^*)
- **区域 4** 接触间断与激波间均匀区，状态为 (ρ_3, u^*, p^*)
- **区域 5** 膨胀波内部

其中 u^* 和 p^* 为接触间断处的速度和压力，各波位置随时间线性变化：

$$x_{\text{left}} = -c_L t, \quad x_{\text{contact}} = u^* t, \quad x_{\text{shock}} = W_s t$$

W_s 为激波传播速度，$c_L = \sqrt{\gamma p_L/\rho_L}$ 为左侧声速。

1.3.2 解析解表达式

解析解通过求解以下方程组获得:

1-3 两区, 等熵关系式

$$\frac{p^*}{(\rho^{*L})^\gamma} = \frac{p_1}{(\rho_1)^\gamma} \tag{3}$$

$$u_1 + \frac{2c_1}{\gamma-1} = u^* + \frac{2c^L}{\gamma-1} \tag{4}$$

其中, $c^L = \sqrt{\gamma p^*/\rho^{*L}}$。

2-4 两区, 激波 R-H 关系式

$$\begin{cases} \rho_2\left(u_2 - Z_2\right) = \rho^{*R}\left(u^* - Z_2\right) \\ \rho_2 u_2\left(u_2 - Z_2\right) + p_2 = \rho^{*R} u^*\left(u^* - Z_2\right) + p^* \\ E_2\left(u_2 - Z_2\right) + u_2 p_2 = E^{*R}\left(u^* - Z_2\right) + p^* u^* \end{cases} \tag{5}$$

以上变量说明从略。综上 5 个方程、5 个未知数，故方程组可解，求解方法为联立以上两个方程组，解出 3、4 区内速度对压力的依赖关系，有

$$u^* = u_1 - f(p^*, p_1, \rho_1)$$

其中，满足

$$f(p^*, p_i, \rho_i) = \frac{2c_i}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p^*}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1\right] \tag{6}$$

注意到，激波、膨胀波前后速度-压力的依赖关系可写成统一的形式：

左波（激波或膨胀波）

$$u^* = u_1 - f(p^*, p_1, \rho_1)$$

右波（激波或膨胀波）

$$u^* = u_2 + f(p^*, p_2, \rho_2)$$

以上 u^*, p^* 表示 3、4 区内的速度与压力，其中

$$f(p^*, p_i, \rho_i) = \begin{cases} \frac{p^* - p_i}{\rho_i c_i\left[\frac{\gamma+1}{2\gamma}\left(\frac{p^*}{p_i}\right) + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\right]^{1/2}}, & p^* > p_i \\ \frac{2c_i}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p^*}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1\right], & p^* < p_i \end{cases} \tag{7}$$

求解上式可得到 3、4 区内的压力，然后可以解得速度和密度。

膨胀波内部 对于膨胀波内部物理量的计算，首先由波头传播速度 $u_1 - c_1$ 与波尾传播速度 $u^* - c^{*L}$ 可计算膨胀波的范围。在膨胀波区内，利用特征相容关系和等熵关系计算物理量，可利用简单波的特性来简化计算。以下直接给出各个物理量的计算表达式：

$$
\begin{aligned}
&c(t,x) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(u_1 - \frac{x}{t}\right) + \frac{2}{\gamma+1}c_1 \\
&u(x,t) = c + x/t \\
&p = p_1\left(c/c_1\right)^{2\gamma/\gamma-1} \\
&\rho = \gamma p/c^2
\end{aligned}
$$

综上所述，一维 Riemann 问题的精确解的求解思路与方程介绍完毕。本文 Sod 激波管参考精确解程序来自于 MATLAB 官方开源文档中的 sod 激波管的求解器 [1]。

1.4 数值计算方法

1.4.1 计算域与网格

计算域设置为 $x \in [-5, 5]$，时间计算域为 $t \in [0, 2.0]$，该范围足以捕捉 Sod 问题中激波、接触间断和膨胀波的完整演化过程。空间离散采用均匀网格划分，网格间距 Δx 由计算域长度和网格数动态确定。时间步长 Δt 根据 CFL 条件自适应调整：

$$
\Delta t = \mathrm{CFL} \cdot \frac{\Delta x}{\max(|u| + c)} \tag{8}
$$

边界条件采用无反射处理：

$$
\begin{aligned}
U_0 &= U_1 \\
U_{N+1} &= U_N
\end{aligned}
$$

此边界处理可有效抑制数值反射，确保波系在计算域内自由传播。网格收敛性研究表明，接触间断分辨率对网格依赖性显著，需足够细密的网格才能准确捕捉密度突变特征。

1.4.2 激波捕捉格式

1. TVD 格式： TVD（总变差递减）格式通过限制器函数控制空间离散的振荡特性，其核心原理为：

$$
\phi(r) = \max[0, \min(1, r)] \quad (r = \text{梯度比}) \tag{9}
$$

采用 MUSCL（单调上游中心格式）重构框架，通过斜率限制实现：1. 单元界面状态线性重构：$U_{i+1/2} = U_i + \frac{\phi}{2}\Delta U$ 2. 通量计算采用 Riemann 求解器 3. 时间推进使用三阶 Runge-Kutta 该格式在激波附近自动降阶，保持单调性但引入数值耗散，对接触间断分辨率有限。

2. 群速度控制： 群速度控制（GVC）格式通过修正通量抑制高频振荡，其物理基础为：

$$
F^{\mathrm{GVC}} = (1-\alpha)F^{\mathrm{high}} + \alpha F^{\mathrm{low}} \tag{10}
$$

核心计算步骤：1. 计算特征速度 λ_k 及其空间梯度 2. 构建控制因子 α，正比于特征速度变化率 3. 混合高精度通量与低耗散通量当检测到特征速度剧烈变化（激波区域）时，自动增强耗散项抑制非物理振荡，光滑区域保持高阶精度。

3. WENO 格式: 加权本质无振荡（WENO）格式采用自适应模板选择策略：

$$F_{i+1/2} = \sum_k \omega_k F_k \tag{11}$$

数值实现要点：1. 构建多个候选插值模板（左偏、中心、右偏）2. 计算各模板光滑指示器 β_k：$\beta_k \propto \sum(\Delta^l U)^2$ 3. 设计非线性权重 $\omega_k \sim 1/(\beta_k + \epsilon)^p$ 4. 加权组合各模板通量该格式在间断附近自动选择最光滑模板，保持高阶精度的同时实现本质无振荡，对膨胀波分辨率尤为优越。

1.4.3 数值通量计算方法

1. FVS (通量矢量分裂) 通量矢量分裂的核心思想是将 Euler 通量分解为正向传播和逆向传播分量：

$$f(U) = f^+(U) + f^-(U) \tag{12}$$

计算原理：1. 基于局部特征速度进行通量分裂：

$$f^\pm = \frac{1}{2}(f(U) \pm \alpha U) \tag{13}$$

其中 α 为最大特征速度 2. Steger-Warming 分裂方案：

$$f^\pm = \frac{1}{2}\left(\rho u \pm \rho|u|\right) + \cdots \tag{14}$$

3. 界面通量计算：

$$f_{i+1/2} = f^+(U_L) + f^-(U_R) \tag{15}$$

该格式结构简单但引入数值耗散，特别适合激波捕捉，但接触间断分辨率有限。

2. FDS (通量差分裂) 通量差分裂方法基于 Riemann 问题精确解思想：

$$f_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[f(U_L) + f(U_R)\right] - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} \alpha_k |\lambda_k| r_k \tag{16}$$

计算步骤：1. 计算界面左右状态 U_L, U_R 2. 构造 Jacobian 矩阵 $A = \partial f/\partial U$ 3. 特征分解：$A = R\Lambda L$ 4. 计算波强度 $\alpha = L \cdot (U_R - U_L)$ 5. 组装通量：

$$f_{i+1/2} = \frac{1}{2}[f(U_L) + f(U_R)] - \frac{1}{2}R|\Lambda|L\Delta U \tag{17}$$

Roe 格式作为典型 FDS 方法，在光滑区域保持高精度，但需熵修正避免激波后振荡。

1.4.4 时间推进格式

采用三阶 Runge-Kutta 方法离散时间项，其 Butcher 表为：

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
1/2 & 1/2 & & \\
1 & -1 & 2 & \\
\hline
 & 1/6 & 2/3 & 1/6
\end{array}$$

计算流程：

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t \mathcal{L}(U^n) \tag{18}$$

$$U^{(2)} = \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}U^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t \mathcal{L}(U^{(1)}) \tag{19}$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}U^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t \mathcal{L}(U^{(2)}) \tag{20}$$

其中 $\mathcal{L}(U)$ 为空间离散算子。此格式具有：1. 三阶时间精度 2. 强稳定性保持 (SSP) 特性 3. 大时间步长稳定性 4. 与高精度空间格式良好兼容

1.4.5 附加题：特征重构方法在 FVS 框架中的应用

特征重构方法的核心思想是将守恒变量投影到特征空间进行处理，其数学基础为：

$$W = L \cdot U, \quad L = \text{左特征矩阵} \tag{21}$$

在 FVS 框架中的实施步骤：

1. **局部特征分解：**

$$A = \frac{\partial f}{\partial U} = R\Lambda L \tag{22}$$

其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_k)$ 为特征值矩阵

2. **特征变量投影：**

$$W_L = L \cdot U_L, \quad W_R = L \cdot U_R \tag{23}$$

3. **特征空间重构：**

$$W^L_{i+1/2} = \mathrm{Recon}(W_{i-1}, W_i, W_{i+1}) \tag{24}$$

$$W^R_{i+1/2} = \mathrm{Recon}(W_i, W_{i+1}, W_{i+2}) \tag{25}$$

采用 WENO/TVD 等重构技术

4. **物理空间恢复：**

$$U^L_{i+1/2} = R \cdot W^L_{i+1/2}, \quad U^R_{i+1/2} = R \cdot W^R_{i+1/2} \tag{26}$$

5. **FVS 通量计算：**

$$f_{i+1/2} = f^+(U^L_{i+1/2}) + f^-(U^R_{i+1/2}) \tag{27}$$

AI 工具使用声明表

使用内容	工具名称	使用目的
hw2.tex 1-9 行、图片插入	Github Copilot	调整 pdf 格式，调用宏包，省略插入图片的重复性工作
main.py 6-15 行	DeepSeek	修正 matplotlib 中文显示问题
ReadMe.md 框架	DeepSeek	在 DeepSeek 的帮助下生成一个框架，在此基础上增加而来
.gitignore	Github Copilot	针对于 python 和 latex 的.gitignore 文件，完全由 Copilot 生成

参考文献

[1] Gogol. Sod shock tube problem solver, 2025. Accessed: 2025-06-17. URL: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/46311-sod-shock-tube-problem-solver.