计算流体力学期末大作业

朱林-2200011028

2025 年 6 月 14 日

1 数理算法原理

1.1 问题描述

1.1.1 物理情形

Sod 激波管问题是一个一维理想气体流动问题：无限长管道中，初始时刻 $(t = 0)$ 在 $x = 0$ 处有一薄膜分隔两侧气体：

- 左侧 $(x < 0)$: 高压区，状态为 (ρ_L, u_L, p_L)
- 右侧 $(x > 0)$: 低压区，状态为 (ρ_R, u_R, p_R)

薄膜在 $t = 0^+$ 时刻瞬时破裂，两侧气体开始相互作用，产生复杂的波系结构。

1.1.2 标准初始条件

采用以下无量纲初始条件：

$$
\begin{aligned}
\text{左侧:}\quad & \rho_L = 1.0, u_L = 0.0, p_L = 1.0 \\
\text{右侧:}\quad & \rho_R = 0.125, u_R = 0.0, p_R = 0.1
\end{aligned}
$$

1.2 控制方程

流动由一维欧拉方程描述：

$$
\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial f(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \tag{1}
$$

$$
\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix} \tag{2}
$$

其中总能密度 $E = \rho e = \rho(C_v T + \frac{1}{2}u^2)$。

1.3 Riemann 问题精确解

通过查阅资料，Sod 激波管问题的精确解可以通过黎曼问题的解法得到。该问题的解由四个区域组成，分别对应不同的流动状态和波系结构。

1.3.1 波系结构

薄膜破裂后，将产生以下三种波结构：

1. **膨胀波（稀疏波）**：向左传播进入高压区（$x < 0$）
2. **接触间断**：向右传播的分界面，分隔原始左右侧气体
3. **激波**：向右传播进入低压区（$x > 0$）

这些波将流场划分为四个特征区域（如图??所示）：

- **区域 1** ($x < x_{\text{left}}$)：未扰动的左侧高压区，保持初始状态 (ρ_L, u_L, p_L)
- **区域 2** ($x_{\text{left}} < x < x_{\text{contact}}$)：膨胀波后均匀区，状态为 (ρ_2, u^*, p^*)
- **区域 3** ($x_{\text{contact}} < x < x_{\text{shock}}$)：接触间断与激波间均匀区，状态为 (ρ_3, u^*, p^*)
- **区域 4** ($x > x_{\text{shock}}$)：未扰动的右侧低压区，保持初始状态 (ρ_R, u_R, p_R)

其中 u^* 和 p^* 为接触间断处的速度和压力，各波位置随时间线性变化：

$$x_{\text{left}} = -c_L t, \quad x_{\text{contact}} = u^* t, \quad x_{\text{shock}} = W_s t$$

W_s 为激波传播速度，$c_L = \sqrt{\gamma p_L / \rho_L}$ 为左侧声速。

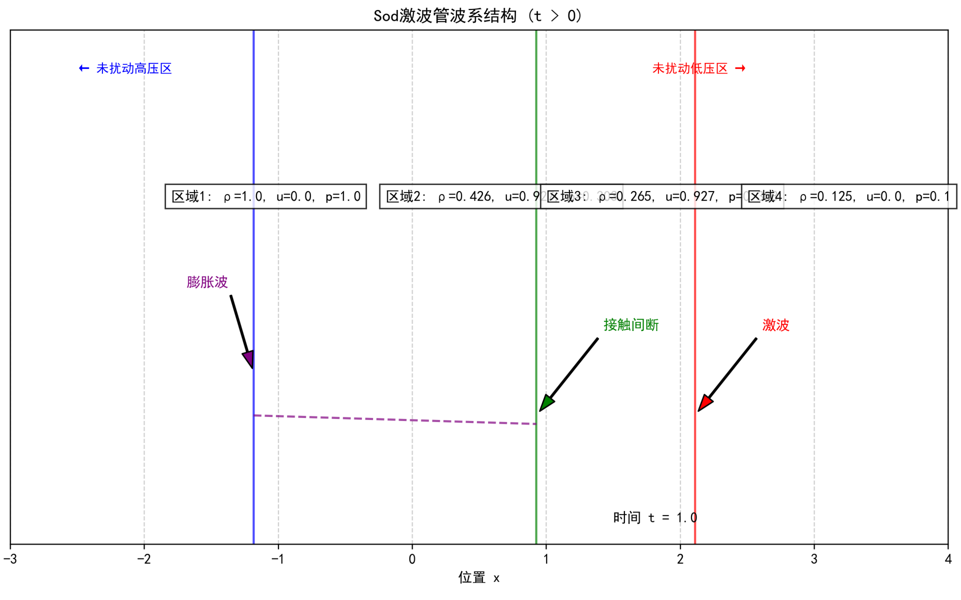

图 1: Sod 激波管典型波系结构（t>0）

1.3.2 解析解表达式

解析解通过求解以下方程组获得：

1. **膨胀波区（稀疏波，$x/t \in [-c_L, u^* - c_2]$）**等熵流动关系：

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{2}{\gamma+1}\left(c_L + \frac{x}{t}\right) \\
c &= c_L - \frac{\gamma-1}{2}u \\
\rho &= \rho_L\left(\frac{c}{c_L}\right)^{2/(\gamma-1)} \\
p &= p_L\left(\frac{c}{c_L}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)}
\end{aligned}
$$

2. **接触间断条件**（$x = u^* t$）压力与速度连续：

$$
p_2 = p_3 = p^*, \quad u_2 = u_3 = u^*
$$

3. **激波关系**（Rankine-Hugoniot 条件）

$$
\begin{aligned}
\frac{\rho_3}{\rho_R} &= \frac{(\gamma+1)p^* + (\gamma-1)p_R}{(\gamma-1)p^* + (\gamma+1)p_R} \\
u^* &= u_R + \frac{c_R}{\gamma}\left(\frac{p^*}{p_R} - 1\right)\sqrt{\frac{2\gamma}{(\gamma+1)p^*/p_R + (\gamma-1)}}
\end{aligned}
$$

4. **膨胀波与接触间断衔接**

$$
u^* = u_L + \frac{2c_L}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{p^*}{p_L}\right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)}\right]
$$

其中 γ 为比热比（空气取 1.4）。通过数值求解上述非线性方程组可得 p^* 和 u^*，进而确定全场解。

作为黎曼问题的最简单形式，Sod 激波管是理解更复杂流动机理的基础，同时常用于计算流体中作为典型案例检验算法和格式。

作为黎曼问题的最简单形式，Sod 激波管是理解更复杂流动机理的基础。同时常用于计算流体中作为典型案例检验算法和格式。

A AI 工具使用声明表

使用内容	工具名称	使用目的
hw2.tex 1-9 行、图片插入	Github Copilot	调整 pdf 格式，调用宏包，省略插入图片的重复性工作
main.py 6-15 行	DeepSeek	修正 matplotlib 中文显示问题
ReadMe.md 框架	DeepSeek	在 DeepSeek 的帮助下生成一个框架，在此基础上增加而来
.gitignore	Github Copilot	针对于 python 和 latex 的.gitignore 文件，完全由 Copilot 生成