计算流体力学第二次作业

朱林-2200011028

2025 年 3 月 26 日

1　数理算法原理

1.1　对于一阶导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的差分格式

1.1.1　采用两个网格点的一阶格式

利用泰勒展开式，对于 u_{i+1}，我们有：

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^2) \tag{1}$$

在等式两侧同时除以 Δx，我们可以得到：

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x) \tag{2}$$

由此可知，差分格式为：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \tag{3}$$

将右侧展开后观察阶数：

$$\begin{aligned}
\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} &= \frac{u_i + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^3) - u_i}{\Delta x} \\
&= \frac{\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^3)}{\Delta x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^2)
\end{aligned} \tag{4}$$

由于截断误差为一阶，所以，该格式为一阶格式。

1.1.2　采用四个网格点的三阶格式

采用待定系数法，我们采用四个网格点来构造差分格式，设这一格式为：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_1 u_{i-1} + a_2 u_i + a_3 u_{i+1} + a_4 u_{i+2} \tag{5}$$

将 u_{i-1}、、u_{i+1}、u_{i+2} 分别用泰勒展开式展开，得到：

$$\begin{aligned}
u_{i-1} &= u_i - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^4) \\
u_{i+1} &= u_i + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^4) \\
u_{i+2} &= u_i + 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + 2(\Delta x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4(\Delta x)^3}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^4)
\end{aligned} \tag{6}$$

带入 (4) 式中，得到：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= a_1\left(u_i - \Delta x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^4)\right) + a_2 u_i \\
&+ a_3\left(u_i + \Delta x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^4)\right) \\
&+ a_4\left(u_i + 2\Delta x\frac{\partial u}{\partial x} + 2(\Delta x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4(\Delta x)^3}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^4)\right) \\
&= (a_1+a_2+a_3+a_4)u_i + (-a_1+a_3+2a_4)\,\Delta x\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2}+a_3+2a_4\right)(\Delta x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
&+ \left(-\frac{a_1}{6}+\frac{a_2}{6}+\frac{a_3}{6}+\frac{4a_4}{3}\right)(\Delta x)^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^3)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

比较两侧系数得到一下方程组：

$$
\begin{cases}
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & = 0 \\
\Delta x(-a_1 + a_3 + 2a_4) & = 1 \\
\frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2} + 2a_4 & = 0 \\
-\frac{a_1}{6} + \frac{a_3}{6} + \frac{4a_4}{3} & = 0
\end{cases}
\tag{8}
$$

解得：

$$
\begin{cases}
a_1 & = -\frac{1}{3\Delta x} \\
a_2 & = -\frac{1}{2\Delta x} \\
a_3 & = \frac{1}{\Delta x} \\
a_4 & = -\frac{1}{6\Delta x}
\end{cases}
\tag{9}
$$

因此，最终的四网格点差分格式为：

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2u_{i-1} - 3u_i + 6u_{i+1} - u_{i+2}}{6\Delta x}
\tag{10}
$$

同理，将右侧展开后观察阶数可以得知该格式为三阶格式。

1.2 对于二阶导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的差分格式

1.2.1 采用三个网格点的一阶格式

利用泰勒展开式，对于 u_{i+1}，我们有：

$$
u_{i+1} = u_i + \Delta x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^3)
\tag{11}
$$

对于 u_{i+2}，我们有：

$$
u_{i+2} = u_i + 2\Delta x\frac{\partial u}{\partial x} + 2(\Delta x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta x^3)
\tag{12}
$$

利用 (10) 式和 (11) 式，消去 $\frac{\partial u}{\partial x}$，我们可以得到该差分公式：

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{(\Delta x)^2}
\tag{13}
$$

将右侧展开后观察阶数：

$$
\begin{aligned}
\frac{u_{i+2}-2u_{i+1}+u_i}{(\Delta x)^2} &= \frac{1}{(\Delta x)^2}\cdot[(u_i+2\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}+2(\Delta x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{4(\Delta x)^3}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x^4)) \\
&-2(u_i+\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{(\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x^4))+u_i] \\
&= \frac{(\Delta x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\Delta x)^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x^4)}{(\Delta x)^2} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\Delta x)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x^2)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

因此，该格式为一阶格式。

1.2.2 采用三个网格点的二阶格式

同理，首先设定差分格式为：

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b_1u_{i-1}+b_2u_i+b_3u_{i+1} \tag{15}
$$

对于 u_{i-1}、u_{i+1}，我们有：

$$
\begin{aligned}
u_{i-1} &= u_i-\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{(\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x^4) \\
u_{i+1} &= u_i+\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{(\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x^4)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

带入得到：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= b_1\left(u_i-\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{(\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x^4)\right) \\
&+b_2u_i+b_3\left(u_i+\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{(\Delta x)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x^4)\right) \\
&= (b_1+b_2+b_3)u_i+(-b_1+b_3)\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}+(\frac{b_1}{2}+\frac{b_3}{2})(\Delta x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
&+(-\frac{b_1}{6}+\frac{b_3}{6})(\Delta x)^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O(\Delta x^2)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

比较两侧系数得到以下方程组：

$$
\begin{cases}
b_1+b_2+b_3 &= 0 \\
-b_1+b_3 &= 0 \\
(\Delta x)^2(\frac{b_1}{2}+\frac{b_3}{2}) &= 1 \\
-\frac{b_1}{6}+\frac{b_3}{6} &= 0
\end{cases}
\tag{18}
$$

解得：

$$
\begin{cases}
b_1 &= \frac{1}{\Delta x^2} \\
b_2 &= -2\frac{1}{\Delta x^2} \\
b_3 &= \frac{1}{\Delta x^2}
\end{cases}
\tag{19}
$$

因此，最终的三网格点差分格式为：

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{\Delta x^2} \tag{20}
$$

同理，将右侧展开后观察阶数可以得知该格式为二阶格式。

2 代码生成与调试

计算误差 $error$ 的思路为：

- 定义一个已知解析解的函数，程序中采用的是三次函数 $f_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ 和三角函数 $g(x) = \sin(kx)$
- 通过数值方法计算出该函数的一阶导数和二阶导数
- 通过解析解计算出该函数的一阶导数和二阶导数
- 计算数值解与解析解的误差

验证精度的思路为：

- 通过不同的网格步长，计算出数值解
- 计算出不同网格下的误差
- 根据步长与误差的关系，

$$error = C \cdot \Delta x^p + O(\Delta x^{p+1}) + e \tag{21}$$

  其中，C 为常数，p 为阶数,e 为舍入误差将步长与误差同时取对数，如果舍入误差可以忽略，则可以

$$\log(error) = \log(C) + p \cdot \log(\Delta x) \tag{22}$$

  通过线性拟合函数 $y = kx + b$，可以得到拟合函数的斜率 k，与理论阶数 p 相比较，可以通过斜率来验证精度

与此同时，还修改了数据的存储精度，比较了单精度和双精度的计算结果。具体的生成与调试参见 github 仓库：

`https://github.com/ZeroLevelKing/CFD_hw2.git`

3 结果讨论和物理解释