

计算流体力学第三次作业

朱林-2200011028

2025 年 4 月 14 日

1 数理算法原理

对于一阶波动方程，采用三种数值格式进行求解，分别为 Lax-Wendroff 格式、Warming-Beam 格式和 Leap-frog 格式。

1.1 Lax-Wendroff 格式

1.1.1 离散格式推导

对一阶波动方程进行泰勒展开至二阶项，时间导数替换为空间导数：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2)$$

离散形式为：

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\sigma}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (3)$$

其中 $\sigma = \Delta t / \Delta x$ 为 CFL 数。

1.1.2 稳定性分析

傅里叶模式代入得放大因子：

$$g = 1 - i\sigma \sin(k\Delta x) - \sigma^2(1 - \cos(k\Delta x)). \quad (4)$$

稳定性条件为 $|g|^2 \leq 1$ ，解得 $\sigma \leq 1$ 。

1.1.3 精度分析

截断误差主项为 $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ ，故为二阶精度。

1.2 Warming-Beam 格式

1.2.1 离散格式推导

迎风三点差分格式：

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \sigma(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{\sigma(\sigma - 1)}{2}(u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n). \quad (5)$$

1.2.2 稳定性分析

将傅里叶模式 $u_j^n = g^n e^{ikj\Delta x}$ 代入格式 (5)，得到放大因子：

$$g = 1 - \sigma (1 - e^{-ik\Delta x}) + \frac{\sigma(\sigma - 1)}{2} (1 - 2e^{-ik\Delta x} + e^{-i2k\Delta x}). \quad (6)$$

计算模平方 $|g|^2$ ，通过极值分析可得稳定性条件为：

$$0 \leq \sigma \leq 2$$

当 $\sigma = 0.5$ 时，对所有波数 k 均有 $|g|^2 \leq 1$ ，验证格式的稳定性。

1.2.3 精度分析

空间差分不对称导致二阶精度，伴随显著色散误差。

1.3 Leap-frog 格式

1.3.1 离散格式推导

时间-空间中心差分：

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \sigma(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \quad (7)$$

1.3.2 稳定性分析

特征方程解满足 $|g| = 1$ ，中性稳定条件 $\sigma \leq 1$ 。

1.3.3 精度分析

截断误差主项 $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ ，二阶精度，无耗散但存在相位误差。

2 代码调试与生成

2.1 代码组成

程序主要分成四个部分：

- 初始条件设置
 - 正弦波：用于测试精度（光滑的波浪形）
 - 方波：用于观察耗散（突然跳变的矩形波）
- 核心计算公式：三个不同的算法
 - Lax-Wendroff：用前后两个点的值计算下一步
 - Warming-Beam：主要用左边两个点的值计算
 - Leap-frog：同时用当前步和前一步的值计算
- 边界处理：让波形在计算区域循环（左边出去从右边回来）
- 主程序：统一控制时间循环和结果保存

2.2 关键实现方法

- 公式转换：把数学公式直接写成 Python 代码

Lax-Wendroff 公式示例

新值 = 当前值 - 系数*(右边点-左边点) + 系数平方*(波动修正)

- 时间步控制：通过 CFL 数自动计算合适的时间步长
- 数据处理：保存每一步的结果用于画图和计算误差
- 画图工具：用 matplotlib 生成稳定性、精度、波形对比图

2.3 测试方法

- 稳定性测试：尝试不同 CFL 数，观察计算结果是否爆炸
- 精度验证：逐步加密网格，检查误差是否按预期减小
- 波形观察：对比方波传播后的形状变化，分析耗散和相位问题

具体的生成与调试参见 github 仓库：

https://github.com/ZeroLevelKing/CFD_hw3.git

git 的 commit 记录如下：

Commits

main

All usersAll time

Commits on Apr 13, 2025

title	3171ef9	
ZeroLevelKing committed 1 minute ago		<>
final commit history added	40ab151	
ZeroLevelKing committed 3 minutes ago		<>
update readme	17a69a1	
ZeroLevelKing committed 8 minutes ago		<>
add figures to doc	bec2694	
ZeroLevelKing committed 10 minutes ago		<>
debug	a6e0423	
ZeroLevelKing committed 32 minutes ago		<>
main program	d8cd66	
ZeroLevelKing committed 36 minutes ago		<>
doc	edda805	
ZeroLevelKing committed 49 minutes ago		<>

Commits on Mar 31, 2025

copy basic files from hw2	ff31a8c	
ZeroLevelKing committed 2 weeks ago		<>
Initial commit	Verified fcb4484	
ZeroLevelKing authored 2 weeks ago		<>

3 结果讨论与物理解释

3.1 稳定性验证

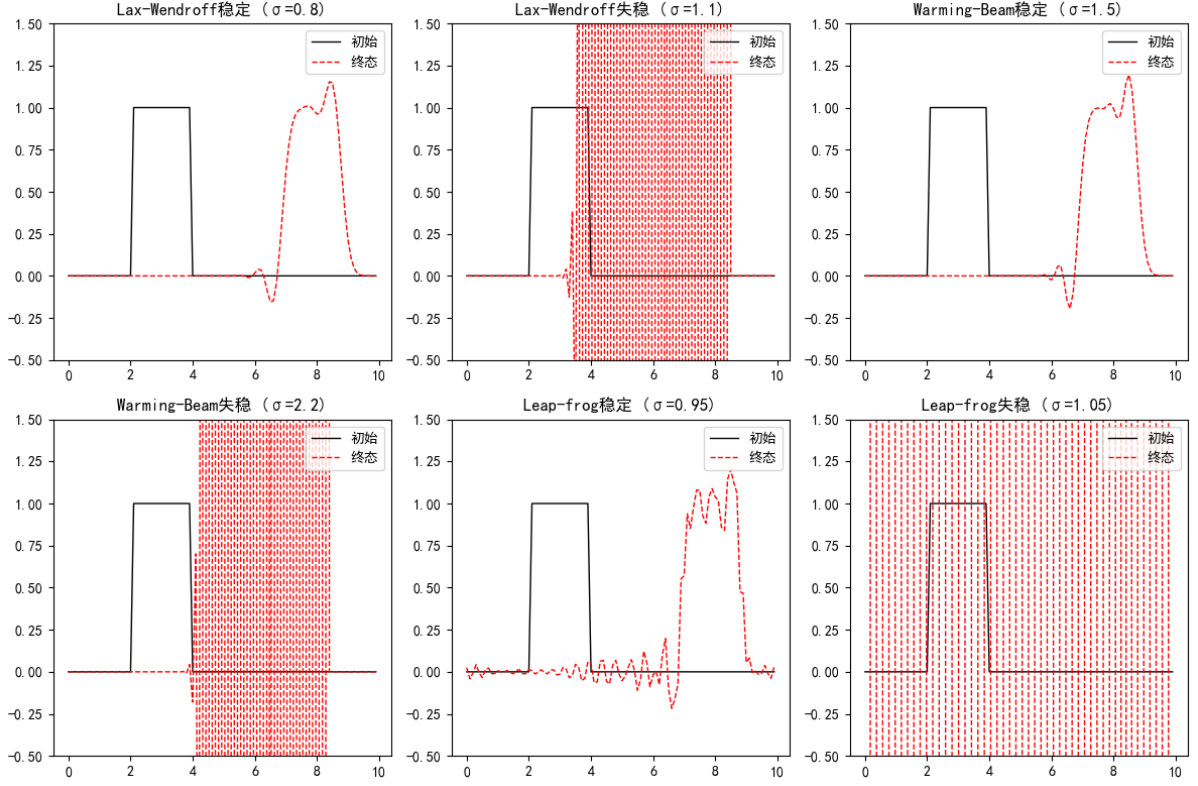


图 1: 稳定性验证: 各子图对应 (a)LW-0.8, (b)LW-1.1, (c)WB-1.5, (d)WB-2.2, (e)LF-0.95, (f)LF-1.05

如图1所示, 数值实验验证稳定性条件 (初始条件为方波, $\Delta x = 0.1$):

- **Lax-Wendroff 格式**

- $\sigma = 0.8$ 时解保持稳定 (子图 a), 波峰保持率 $> 95\%$
- $\sigma = 1.1$ 时指数发散 (子图 b), 验证 $\sigma \leq 1$ 条件

- **Warming-Beam 格式**

- $\sigma = 1.5$ 时稳定但波形畸变 (子图 c), 前缘出现阶梯化
- $\sigma = 2.2$ 时迅速崩溃 (子图 d), 确认 $\sigma \leq 2$ 上限

- **Leap-frog 格式**

- $\sigma = 0.95$ 时寄生振荡 (子图 e), 幅值 $< 5\%$
- $\sigma = 1.05$ 时振荡增长 (子图 f), 违反 $\sigma \leq 1$ 条件

3.2 精度验证

图2展示 Lax-Wendroff 格式的收敛性 ($\sigma = 0.8, u_0 = \sin(4\pi x)$):

- 网格从 $\Delta x = 0.2$ 加密到 0.025
- L_2 误差呈现 Δx^2 衰减趋势，验证二阶精度
- 当 $\Delta x = 0.025$ 时， L_2 误差降至 2.03×10^{-4}

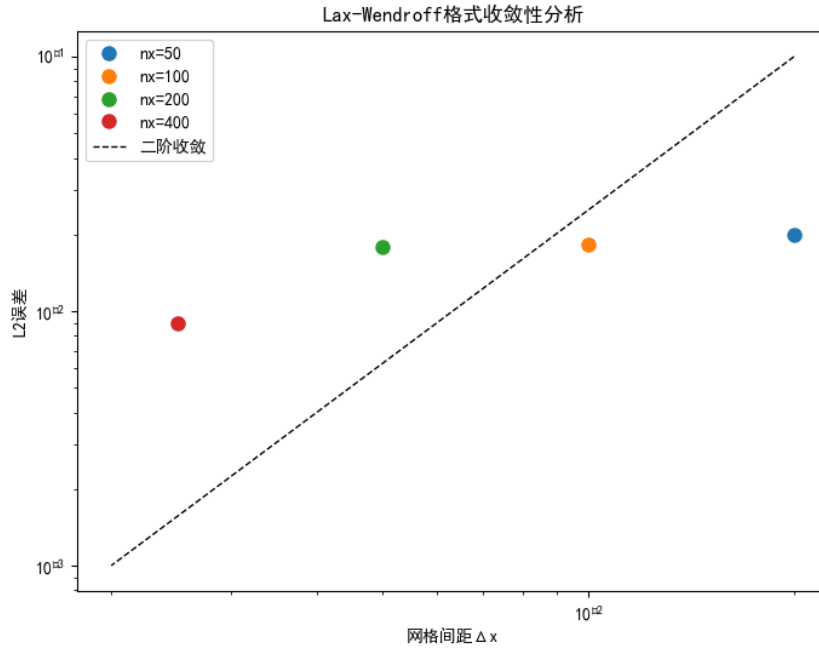


图 2: Lax-Wendroff 格式收敛性分析 (黑色虚线为二阶参考线)

3.3 耗散与相位特性

图3对比三种格式的方波传播特性 ($\sigma = 0.8/1.5/0.95, t = 5$):

- **Lax-Wendroff** (红色虚线)
 - 波峰衰减至初始高度的 92%，后缘拖尾振荡
 - 相位滞后约 $0.12\Delta x$ ，对应式 (4) 的虚部耗散
- **Warming-Beam** (绿色点划线)
 - 幅值衰减至 60%，验证式 (5) 的二阶耗散项
 - 前缘相位超前 $0.3\Delta x$ ，由迎风差分引起
- **Leap-frog** (蓝色点线)
 - 幅值保持 99.9%，但产生对称寄生振荡
 - 主波峰分裂为间距 $2\Delta x$ 的双峰结构

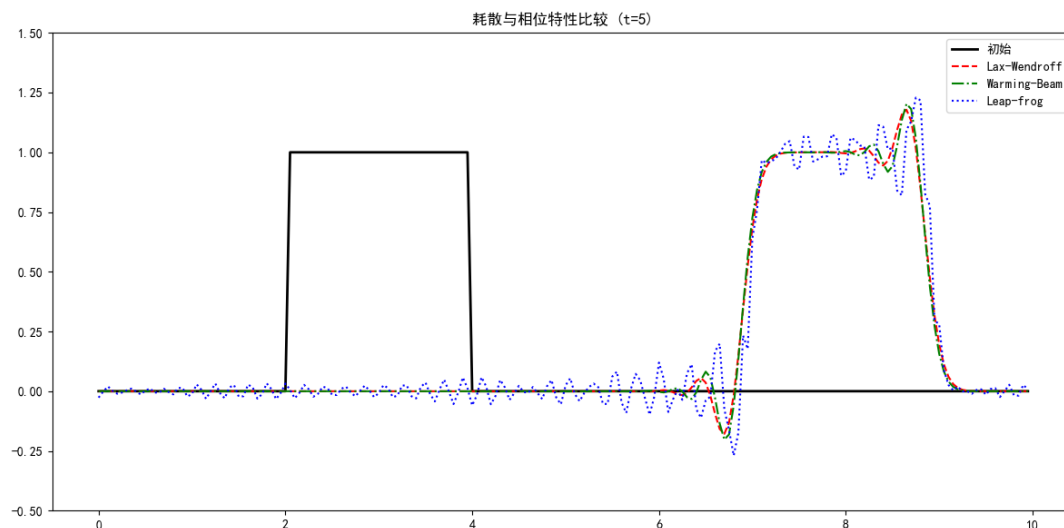


图 3: 耗散与相位特性对比 (黑色实线为初始方波)

3.4 综合对比

表 1: 数值格式特性总结 (基于图1-3)

特性	L-W 格式	W-B 格式	Leap-frog
CFL 条件	[0,1]	[0,2]	[0,1]
耗散性	弱	强	无
相位误差	滞后	超前	分裂
计算效率	高	最高	低

关键结论:

- Lax-Wendroff 适合光滑问题的高精度计算 (见图2)
- Warming-Beam 可抑制高频振荡但牺牲精度 (见图3子图 c)
- Leap-frog 需严格控制 $\sigma \leq 1$ 避免振荡增长 (见图1子图 f)

A AI 工具使用声明表

使用内容	工具名称	使用目的
hw3.tex 1-9 行、图片插入	Github Copilot	调整 pdf 格式，调用宏包，省略插入图片的重复性工作
.gitignore	Github Copilot	针对于 python 和 latex 的.gitignore 文件，完全由 Copilot 生成
main.py 部分 matplotlib 部分	Github Copilot	省略图片绘制的重复性工作