计算流体力学第二次作业

朱林-2200011028

2025 年 4 月 14 日

1 数理算法原理

对于一阶波动方程，采用三种数值格式进行求解，分别为 Lax-Wendroff 格式、Warming-Beam 格式和 Leap-frog 格式。

1.1 Lax-Wendroff 格式

1.1.1 离散格式推导

对一阶波动方程进行泰勒展开至二阶项，时间导数替换为空间导数：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}$$

离散形式为：

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\sigma}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \tag{3}$$

其中 $\sigma = \Delta t/\Delta x$ 为 CFL 数。

1.1.2 稳定性分析

傅里叶模式代入得放大因子：

$$g = 1 - i\sigma \sin(k\Delta x) - \sigma^2(1 - \cos(k\Delta x)). \tag{4}$$

稳定性条件为 $|g|^2 \leq 1$，解得 $\sigma \leq 1$。

1.1.3 精度分析

截断误差主项为 $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$，故为**二阶精度**。

1.2 Warming-Beam 格式

1.2.1 离散格式推导

迎风三点差分格式：

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \sigma(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2}(u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n). \tag{5}$$

1.2.2 稳定性分析

将傅里叶模式 $u_j^n = g^n e^{ikj\Delta x}$ 代入格式 (5)，得到放大因子：

$$g = 1 - \sigma\left(1 - e^{-ik\Delta x}\right) + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2}\left(1 - 2e^{-ik\Delta x} + e^{-i2k\Delta x}\right). \tag{6}$$

计算模平方 $|g|^2$，通过极值分析可得稳定性条件为：

$$0 \leq \sigma \leq 2$$

当 $\sigma = 0.5$ 时，对所有波数 k 均有 $|g|^2 \leq 1$，验证格式的稳定性。

1.2.3 精度分析

空间差分不对称导致**二阶精度**，伴随显著色散误差。

1.3 Leap-frog 格式

1.3.1 离散格式推导

时间-空间中心差分：

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \sigma(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \tag{7}$$

1.3.2 稳定性分析

特征方程解满足 $|g| = 1$，中性稳定条件 $\sigma \leq 1$。

1.3.3 精度分析

截断误差主项 $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$，**二阶精度**，无耗散但存在相位误差。

2 代码调试与生成

2.1 代码组成

程序主要分成四个部分：

- **初始条件设置**
  - 正弦波：用于测试精度（光滑的波浪形）
  - 方波：用于观察耗散（突然跳变的矩形波）
- **核心计算公式**：三个不同的算法
  - Lax-Wendroff：用前后两个点的值计算下一步
  - Warming-Beam：主要用左边两个点的值计算
  - Leap-frog：同时用当前步和前一步的值计算
- **边界处理**：让波形在计算区域循环（左边出去从右边回来）
- **主程序**：统一控制时间循环和结果保存

2.2 关键实现方法

- **公式转换**：把数学公式直接写成 Python 代码

```
# Lax-Wendroff公式示例
新值 = 当前值 - 系数*(右边点-左边点) + 系数平方*(波动修正)
```

- **时间步控制**：通过 CFL 数自动计算合适的时间步长
- **数据处理**：保存每一步的结果用于画图和计算误差
- **画图工具**：用 matplotlib 生成稳定性、精度、波形对比图

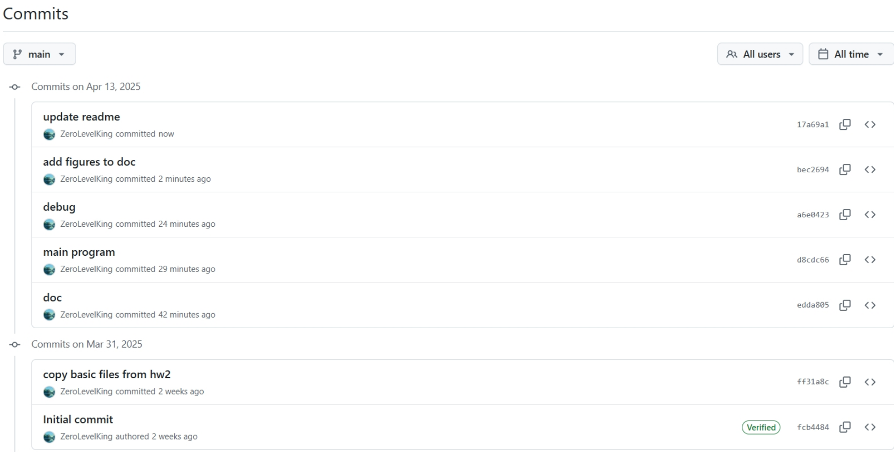
2.3 测试方法

- **稳定性测试**：尝试不同 CFL 数，观察计算结果是否爆炸
- **精度验证**：逐步加密网格，检查误差是否按预期减小
- **波形观察**：对比方波传播后的形状变化，分析耗散和相位问题

具体的生成与调试参见 github 仓库：

`https://github.com/ZeroLevelKing/CFD_hw3.git`

git 的 commit 记录如下：


Commits
main
All users
All time
Commits on Apr 13, 2025
update readme
ZeroLevelKing committed now
17a69a1
add figures to doc
ZeroLevelKing committed 2 minutes ago
bec2694
debug
ZeroLevelKing committed 24 minutes ago
a6e0423
main program
ZeroLevelKing committed 29 minutes ago
d8cdc66
doc
ZeroLevelKing committed 42 minutes ago
edda805
Commits on Mar 31, 2025
copy basic files from hw2
ZeroLevelKing committed 2 weeks ago
ff31a8c
Initial commit
ZeroLevelKing authored 2 weeks ago
Verified
fcb4484

3 结果讨论与物理解释

3.1 稳定性验证

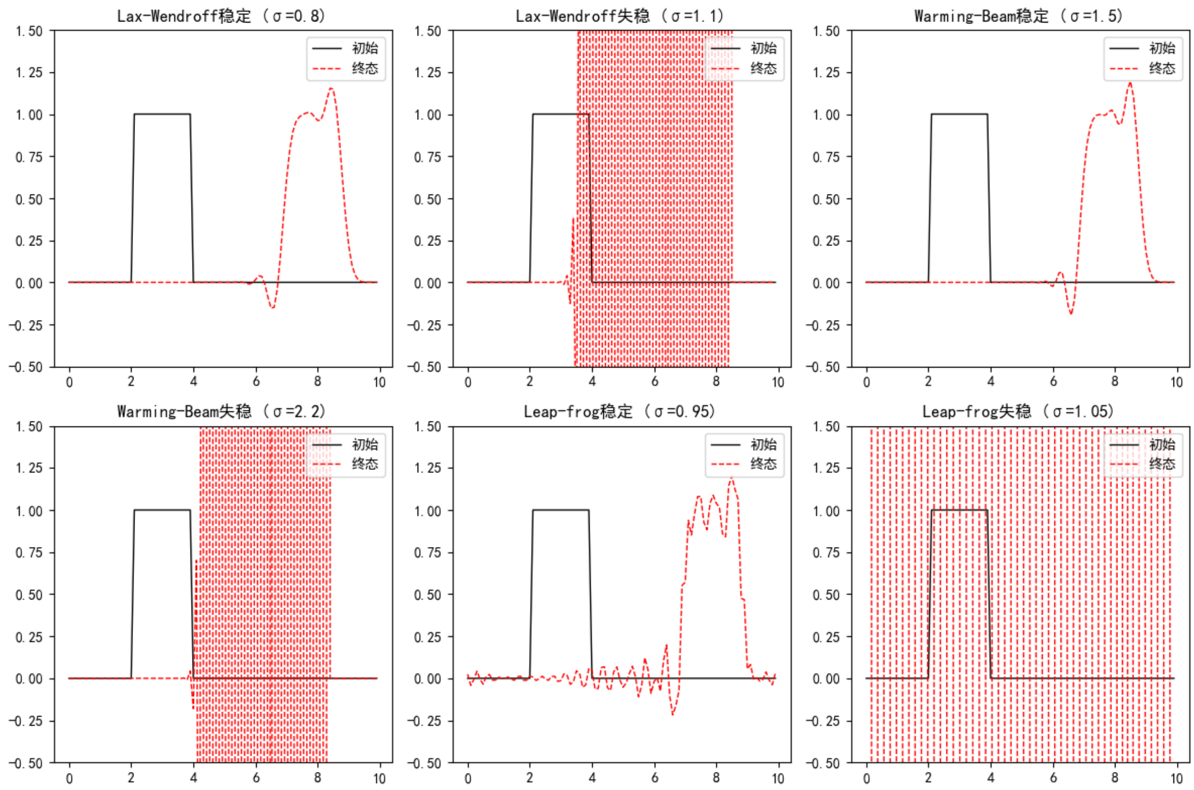


图 1: 稳定性验证：各子图对应 (a)LW-0.8, (b)LW-1.1, (c)WB-1.5, (d)WB-2.2, (e)LF-0.95, (f)LF-1.05

如图1所示，数值实验验证稳定性条件（初始条件为方波，$\Delta x = 0.1$）：

- **Lax-Wendroff 格式**
  - $\sigma = 0.8$ 时解保持稳定（子图 a），波峰保持率 $> 95\%$
  - $\sigma = 1.1$ 时指数发散（子图 b），验证 $\sigma \le 1$ 条件
- **Warming-Beam 格式**
  - $\sigma = 1.5$ 时稳定但波形畸变（子图 c），前缘出现阶梯化
  - $\sigma = 2.2$ 时迅速崩溃（子图 d），确认 $\sigma \le 2$ 上限
- **Leap-frog 格式**
  - $\sigma = 0.95$ 时寄生振荡（子图 e），幅值 $< 5\%$
  - $\sigma = 1.05$ 时振荡增长（子图 f），违反 $\sigma \le 1$ 条件

3.2 精度验证

图2展示 Lax-Wendroff 格式的收敛性（$\sigma = 0.8$, $u_0 = \sin(4\pi x)$）：

- 网格从 $\Delta x = 0.2$ 加密到 0.025
- L2 误差呈现 Δx^2 衰减趋势，验证二阶精度
- 当 $\Delta x = 0.025$ 时，L_2 误差降至 2.03×10^{-4}

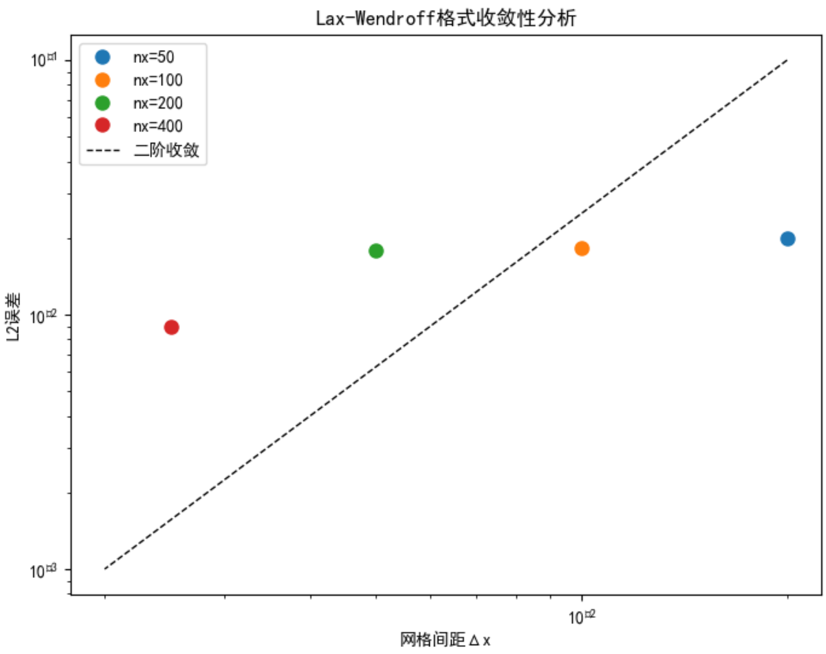


图 2: Lax-Wendroff 格式收敛性分析（黑色虚线为二阶参考线）

3.3 耗散与相位特性

图3对比三种格式的方波传播特性（$\sigma = 0.8/1.5/0.95$, $t = 5$）：

- **Lax-Wendroff**（红色虚线）
  - 波峰衰减至初始高度的 92%，后缘拖尾振荡
  - 相位滞后约 $0.12\Delta x$，对应式 (4) 的虚部耗散
- **Warming-Beam**（绿色点划线）
  - 幅值衰减至 60%，验证式 (5) 的二阶耗散项
  - 前缘相位超前 $0.3\Delta x$，由迎风差分引起
- **Leap-frog**（蓝色点线）
  - 幅值保持 99.9%，但产生对称寄生振荡
  - 主波峰分裂为间距 $2\Delta x$ 的双峰结构

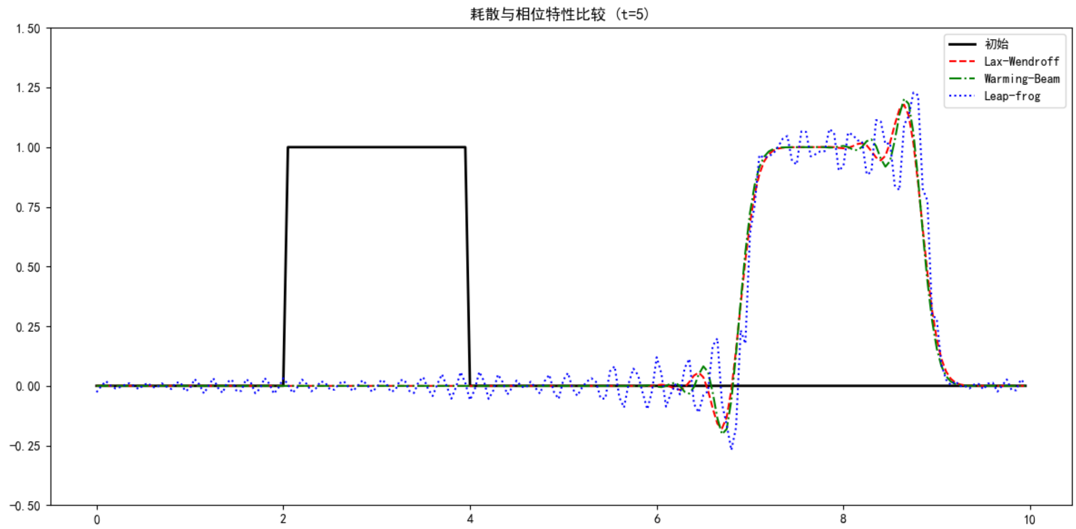


图 3: 耗散与相位特性对比（黑色实线为初始方波）

3.4 综合对比

表 1: 数值格式特性总结（基于图1-3）

特性	L-W 格式	W-B 格式	Leap-frog
CFL 条件	[0,1]	[0,2]	[0,1]
耗散性	弱	强	无
相位误差	滞后	超前	分裂
计算效率	高	最高	低

关键结论：

- Lax-Wendroff 适合光滑问题的高精度计算（见图2）
- Warming-Beam 可抑制高频振荡但牺牲精度（见图3子图 c）
- Leap-frog 需严格控制 $\sigma \leq 1$ 避免振荡增长（见图1子图 f）

A AI 工具使用声明表

使用内容	工具名称	使用目的
hw3.tex 1-9 行、图片插入	Github Copilot	调整 pdf 格式，调用宏包，省略插入图片的重复性工作
.gitignore	Github Copilot	针对于 python 和 latex 的.gitignore 文件，完全由 Copilot 生成
main.py 部分 matplotlib 部分	Github Copilot	省略图片绘制的重复性工作