计算流体力学第四次作业

朱林-2200011028

2025 年 4 月 29 日

1 数理算法原理

1.1 控制方程与边界条件

二维稳态温度场满足拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

边界条件：

- 上边界 ($y=12\text{cm}$)：$T=100°\text{C}$
- 左边界 ($x=0$)、右边界 ($x=15\text{cm}$)、下边界 ($y=0$)：$T=20°\text{C}$

1.2 有限差分离散化

1.2.1 网格参数

$$\Delta x=\frac{15}{N_x-1},\quad x_i=(i-1)\Delta x\quad (i=1,2,...,N_x) \tag{2}$$

$$\Delta y=\frac{12}{N_y-1},\quad y_j=(j-1)\Delta y\quad (j=1,2,...,N_y) \tag{3}$$

1.2.2 离散方程

内部节点 ($2\le i\le N_x-1, 2\le j\le N_y-1$)：

$$\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}+\frac{T_{i,j+1}-2T_{i,j}+T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}=0 \tag{4}$$

均匀网格 ($\Delta x=\Delta y=h$) 简化为：

$$T_{i,j}=\frac{1}{4}\left(T_{i+1,j}+T_{i-1,j}+T_{i,j+1}+T_{i,j-1}\right) \tag{5}$$

1.2.3 边界节点处理

$$T_{1,j}=20\quad(\forall j),\quad T_{N_x,j}=20\quad(\forall j) \tag{6}$$

$$T_{i,1}=20\quad(\forall i),\quad T_{i,N_y}=100\quad(\forall i) \tag{7}$$

1.3 迭代算法修正

1.3.1 高斯-赛德尔迭代

按列优先顺序更新 (j 从 2 到 N_y-1)：

$$T_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(T_{i-1,j}^{(k+1)} + T_{i+1,j}^{(k)} + T_{i,j-1}^{(k+1)} + \underbrace{T_{i,j+1}^{(k)}}_{\text{当}j+1=N_y\text{ 时取100}} \right) \tag{8}$$

1.3.2 SOR 加速算法

引入松弛因子 ω：

$$T_{i,j}^{(k+1)} = (1-\omega)T_{i,j}^{(k)} + \frac{\omega}{4}\left(T_{i-1,j}^{(k+1)} + T_{i+1,j}^{(k)} + T_{i,j-1}^{(k+1)} + T_{i,j+1}^{(k)} \right) \tag{9}$$

1.4 收敛性分析

- **残差定义**：$R^{(k)} = \max\limits_{\substack{2\le i\le N_x-1\\ 2\le j\le N_y-1}} |T_{i,j}^{(k+1)} - T_{i,j}^{(k)}|$
- **收敛判据**：$R^{(k)} < \epsilon \quad (\text{通常取}\epsilon = 10^{-5})$
- **最优松弛因子**：

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1+\sin\left(\frac{\pi}{\max(N_x,N_y)-1}\right)} \tag{10}$$

1.5 数值实现伪代码

```
# 初始化温度场
T = 20 * np.ones((Nx, Ny))
T[:, -1] = 100  # 设置上边界

for k in range(max_iter):
    R = 0
    for j in range(1, Ny-1):
        for i in range(1, Nx-1):
            T_new = 0.25 * (T[i+1,j] + T[i-1,j]
                   + T[i,j+1] + T[i,j-1])
            R = max(R, abs(T_new - T[i,j]))
            T[i,j] = T_new
    if R < epsilon:
        break
```

1.6 理论验证

- **对称性检验**：温度场应关于 $x = 7.5\text{cm}$ 对称
- **极值原理**：内部温度 $T \in (20, 100)^\circ\text{C}$

- **能量守恒**：总热流量进出平衡