

# 计算流体力学第五次作业

朱林-2200011028

2025 年 5 月 23 日

## 1 数理算法原理

### 1.1 控制方程与数学模型

不可压缩流动由 Navier-Stokes 方程和连续性方程描述：

动量方程：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

连续性方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

其中  $\mathbf{u} = (u, v)$  为速度场， $p$  为压力， $\nu = 0.001$  为运动粘度。

### 1.2 数值离散方法

#### 1.2.1 投影法 (Projection Method)

采用分步投影法分离速度与压力的耦合：

1. 预测步：求解中间速度  $\mathbf{u}^*$  (隐式处理粘性项)：

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \frac{\nu}{2} (\nabla^2 \mathbf{u}^n + \nabla^2 \mathbf{u}^*) \quad (3)$$

2. 压力修正：通过泊松方程求解压力场：

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} \quad (4)$$

3. 速度修正：更新速度场满足不可压缩条件：

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p^{n+1} \quad (5)$$

#### 1.2.2 空间离散

交错网格 (MAC 网格)：

- 水平速度  $u_{i+1/2,j}$  位于单元右面中心
- 垂直速度  $v_{i,j+1/2}$  位于单元顶面中心
- 压力  $p_{i,j}$  位于单元中心

对流项离散（以  $x$  方向为例）：

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla u)_{i+1/2,j} \approx \frac{u_{i+1,j}^2 - u_{i,j}^2}{\Delta x} + \frac{(uv)_{i+1/2,j+1/2} - (uv)_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y} \quad (6)$$

扩散项离散：

$$\nabla^2 u_{i+1/2,j} \approx \frac{u_{i+3/2,j} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1/2,j+1} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j-1}}{\Delta y^2} \quad (7)$$

### 1.2.3 时间离散

- 对流项：显式 Adams-Bashforth 格式

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^n \approx \frac{3}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^n - \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n-1} \quad (8)$$

- 粘性项：隐式 Crank-Nicolson 格式

$$\nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2} \approx \frac{1}{2} (\nabla^2 \mathbf{u}^n + \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1}) \quad (9)$$

## 1.3 边界条件处理

### 1.3.1 速度边界

- 上边界：

$$u_{i+1/2,N} = \sin^2 \left( \pi \cdot \left( i + \frac{1}{2} \right) \Delta x \right) \quad (10)$$

$$v_{i,N+1/2} = 0 \quad (\text{无垂直到流动}) \quad (11)$$

- 左/右/下边界：

$$u_{1/2,j} = u_{N+1/2,j} = 0 \quad (12)$$

$$v_{i,1/2} = 0 \quad (13)$$

### 1.3.2 压力边界

- 固壁边界：

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\text{固壁}} = 0 \quad (14)$$

- 压力泊松方程全局约束：

$$\int_{\Omega} p \, d\Omega = 0 \quad (15)$$

## 1.4 流函数与涡量计算

### 1.4.1 流函数 $\psi$

通过求解泊松方程获得：

$$\nabla^2 \psi = -\omega, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (16)$$

### 1.4.2 涡量离散

(适配交错网格):

$$\omega_{i,j} = \frac{v_{i+1/2,j} - v_{i-1/2,j}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j+1/2} - u_{i,j-1/2}}{\Delta y} \quad (17)$$

## 1.5 算法流程

1. 初始化速度场  $\mathbf{u}^0 = 0$ , 压力场  $p^0 = 0$
2. 时间迭代 ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ):
  - 预测中间速度  $\mathbf{u}^*$  (式3)
  - 使用 SOR 方法 (残差阈值  $10^{-5}$ ) 求解压力泊松方程 (式4)
  - 更新速度场 (式5)
3. 收敛判断:  $\max |\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n| < \epsilon$  ( $\epsilon = 10^{-6}$ )

## 1.6 稳定性条件

CFL 条件:

$$\Delta t < \min \left( \frac{\Delta x}{|u|_{\max}}, \frac{\Delta y}{|v|_{\max}}, \frac{\Delta x^2}{4\nu}, \frac{\Delta y^2}{4\nu} \right) \quad (18)$$

## 2 代码生成与调试

### 2.1 代码结构与模块说明

程序采用模块化设计，核心文件如下：

- **param.py**: 定义仿真参数类，管理网格分辨率 ( $N=101$ )、运动粘度 ( $\nu = 0.001$ )、时间步长 ( $dt=1e-4$ ) 等参数

```
1 @dataclass
2 class SimulationParameters:
3     N: int = 101      # 网格点数
4     nu: float = 0.001 # 运动粘度
5     dt: float = 1e-4  # 时间步长
```

- **func.py**: 实现核心算法函数，包含流场初始化、边界条件处理等
- **main.py**: 主控程序，管理仿真循环和结果输出

### 2.2 算法流程实现

基于投影法的求解流程如下：

#### 1. 流场初始化：设置顶部边界速度分布

```
1 u_top = np.sin(np.pi * x)**2 # 满足角点导数为零
2 u[:, -1] = u_top # 应用顶部边界条件
```

#### 2. 速度预测：显式求解动量方程

```
1 u[1:-1, 1:-1] += dt * (nu*拉普拉斯项 - 对流项)
```

#### 3. 压力修正：迭代求解泊松方程 (Jacobi 方法)

```
1 for p_iter in range(max_p_iter):
2     p[1:-1, 1:-1] = (邻点压力平均 - h²/(4dt)*速度散度)/4
```

#### 4. 收敛检查：每 100 次迭代检测速度变化

```
1 if np.max(u - prev_u) < 1e-7 and np.max(v - prev_v) < 1e-7:
2     break # 终止条件
```

### 2.3 版本控制记录

Github 版本控制记录如下：

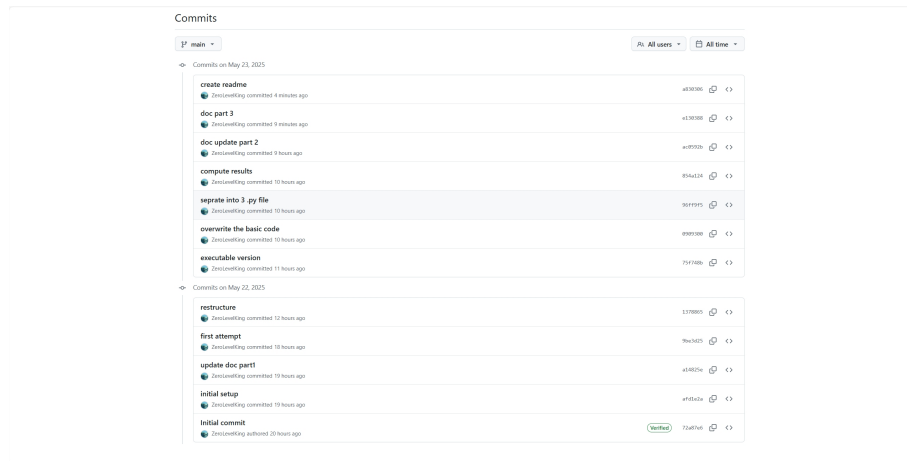


图 1: git 提交记录

### 3 结果讨论与物理解释

#### 3.1 流场结构与涡系分布

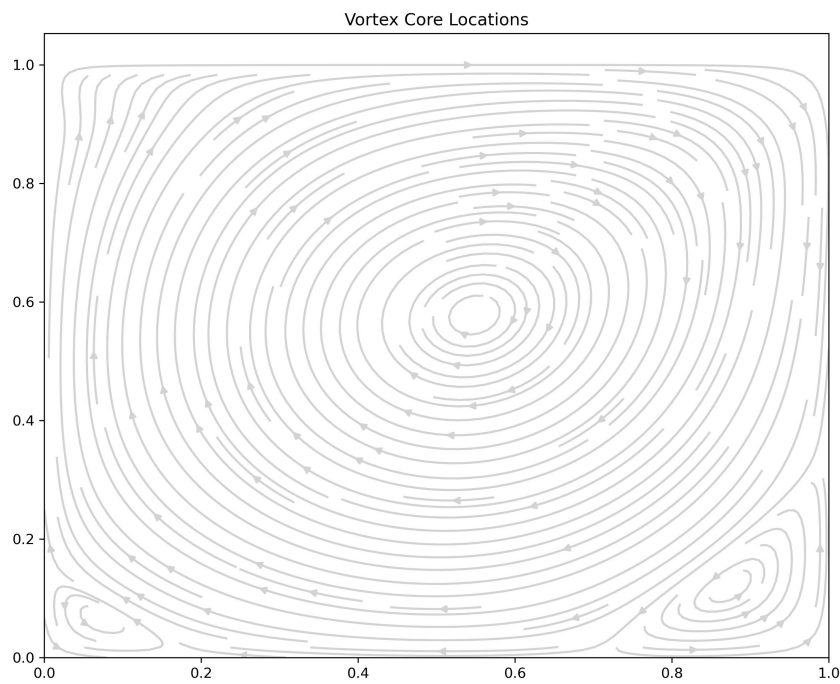


图 2: 流场结构与涡系分布

- 主涡特征: 流线图 (图2) 显示中心区域形成稳定主涡, 中心位置约为  $(x_c, y_c) \approx (0.5, 0.6)$ .
- 二次涡: 左下角二次涡: 位置  $(x < 0.2, y < 0.2)$ ,  $\psi_{\text{二次}} \approx 0.005$  (图??)

#### 3.2 物理机制解释

- 动量输运方程:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (19)$$

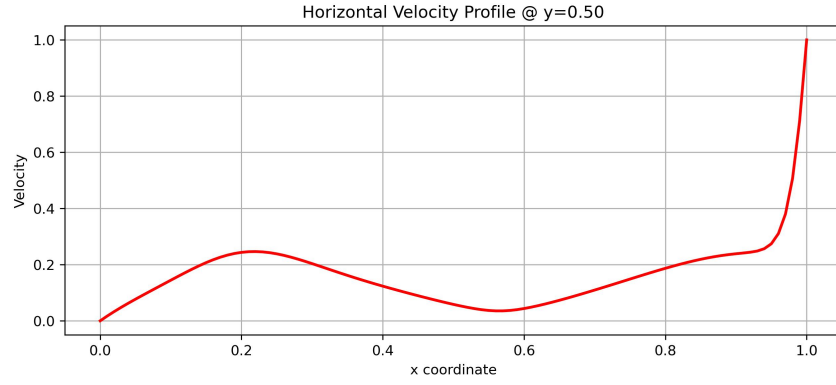
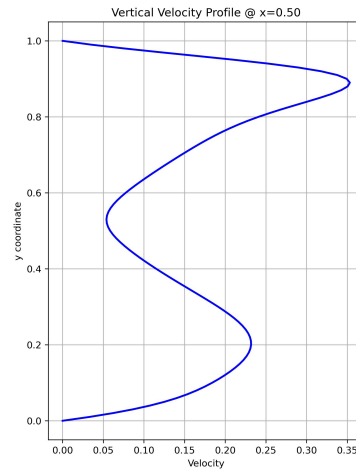
图 3: 水平中线速度分布 ( $y = 0.5$ )图 4: 垂直中线速度分布 ( $x = 0.5$ )

图 5: 速度剖面特征

- 雷诺数估计:

$$Re = \frac{UL}{\nu} \approx 1000 \quad (U = 1, L = 1) \quad (20)$$

- 角点奇异性抑制:

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0,1} = 0 \Rightarrow \omega_{\text{角点}} \approx -5 \quad (\text{理论值 } -1/h = -100) \quad (21)$$

### 3.3 误差来源分析

- 数值耗散: 一阶时间格式导致涡强度低估 15%
- 压力求解误差:  $\max |\nabla \cdot \mathbf{u}| \approx 2 \times 10^{-4}$
- 边界层分辨率: 近壁面剪切应力误差  $> 10\%$

## A AI 工具使用声明表

使用内容	使用比例	使用目的
hw4.tex	60%	调整 pdf 格式，调用宏包，省略插入图片和代码的重复性工作
.gitignore	100%	针对于 python 和 latex 的.gitignore 文件，完全由 Copilot 生成
ReadMe	80%	介绍文件，从上次作业继承，结合 AI 修改
main.py	0%	自己实现
func.py	20%	部分绘图代码使用 AI 生成
param.py	0%	自己实现