

# 计算流体力学第五次作业

朱林-2200011028

2025 年 5 月 22 日

## 1 数理算法原理

### 1.1 控制方程与数学模型

不可压缩流动由 Navier-Stokes 方程和连续性方程描述：

动量方程：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

连续性方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

其中  $\mathbf{u} = (u, v)$  为速度场， $p$  为压力， $\nu = 0.001$  为运动粘度。

### 1.2 数值离散方法

#### 1.2.1 投影法 (Projection Method)

采用分步投影法分离速度与压力的耦合：

1. 预测步：求解中间速度  $\mathbf{u}^*$  (隐式处理粘性项)：

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \frac{\nu}{2} (\nabla^2 \mathbf{u}^n + \nabla^2 \mathbf{u}^*) \quad (3)$$

2. 压力修正：通过泊松方程求解压力场：

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} \quad (4)$$

3. 速度修正：更新速度场满足不可压缩条件：

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p^{n+1} \quad (5)$$

#### 1.2.2 空间离散

交错网格 (MAC 网格)：

- 水平速度  $u_{i+1/2,j}$  位于单元右面中心
- 垂直速度  $v_{i,j+1/2}$  位于单元顶面中心
- 压力  $p_{i,j}$  位于单元中心

对流项离散（以  $x$  方向为例）：

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla u)_{i+1/2,j} \approx \frac{u_{i+1,j}^2 - u_{i,j}^2}{\Delta x} + \frac{(uv)_{i+1/2,j+1/2} - (uv)_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y} \quad (6)$$

扩散项离散：

$$\nabla^2 u_{i+1/2,j} \approx \frac{u_{i+3/2,j} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1/2,j+1} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j-1}}{\Delta y^2} \quad (7)$$

### 1.2.3 时间离散

- 对流项：显式 Adams-Bashforth 格式

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^n \approx \frac{3}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^n - \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n-1} \quad (8)$$

- 粘性项：隐式 Crank-Nicolson 格式

$$\nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2} \approx \frac{1}{2} (\nabla^2 \mathbf{u}^n + \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1}) \quad (9)$$

## 1.3 边界条件处理

### 1.3.1 速度边界

- 上边界：

$$u_{i+1/2,N} = \sin^2 \left( \pi \cdot \left( i + \frac{1}{2} \right) \Delta x \right) \quad (10)$$

$$v_{i,N+1/2} = 0 \quad (\text{无垂直到流动}) \quad (11)$$

- 左/右/下边界：

$$u_{1/2,j} = u_{N+1/2,j} = 0 \quad (12)$$

$$v_{i,1/2} = 0 \quad (13)$$

### 1.3.2 压力边界

- 固壁边界：

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\text{固壁}} = 0 \quad (14)$$

- 压力泊松方程全局约束：

$$\int_{\Omega} p d\Omega = 0 \quad (15)$$

## 1.4 流函数与涡量计算

### 1.4.1 流函数 $\psi$

通过求解泊松方程获得：

$$\nabla^2 \psi = -\omega, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (16)$$

### 1.4.2 涡量离散

(适配交错网格):

$$\omega_{i,j} = \frac{v_{i+1/2,j} - v_{i-1/2,j}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j+1/2} - u_{i,j-1/2}}{\Delta y} \quad (17)$$

## 1.5 算法流程

1. 初始化速度场  $\mathbf{u}^0 = 0$ , 压力场  $p^0 = 0$
2. 时间迭代 ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ):
  - 预测中间速度  $\mathbf{u}^*$  (式3)
  - 使用 SOR 方法 (残差阈值  $10^{-5}$ ) 求解压力泊松方程 (式4)
  - 更新速度场 (式5)
3. 收敛判断:  $\max |\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n| < \epsilon$  ( $\epsilon = 10^{-6}$ )

## 1.6 稳定性条件

- CFL 条件:

$$\Delta t < \min \left( \frac{\Delta x}{|u|_{\max}}, \frac{\Delta y}{|v|_{\max}}, \frac{\Delta x^2}{4\nu}, \frac{\Delta y^2}{4\nu} \right) \quad (18)$$

- 网格独立性验证: 比较  $64 \times 64$  与  $128 \times 128$  网格的主涡涡心位置差异小于 1%

## 2 代码生成与调试

## 3 结果讨论和物理解释

## A AI 工具使用声明表

使用内容	使用比例	使用目的
hw4.tex	60%	调整 pdf 格式，调用宏包，省略插入图片和代码的重复性工作
.gitignore	100%	针对于 python 和 latex 的.gitignore 文件，完全由 Copilot 生成
ReadMe	80%	介绍文件，从上次作业继承，结合 AI 修改
common.py	30%	主要迭代和划分网格自己实现，部分绘图代码 AI 生成
task1.py	0%	自己实现
task2.py	0%	自己实现
task3.py	0%	自己实现