

# Assignment 2 报告

朱林-2200011028

2025 年 12 月 14 日

## 1 引言

计算固体力学第二次作业报告，包含以下问题的有限元方法 (FEM) 实现过程：

1. **Problem 1:** 二维线性弹性力学 (平面应力)。
2. **Problem 2:** Mindlin 板弯曲问题。

## 2 Problem 1: 二维线性弹性分析

### 2.1 问题描述

本部分代码旨在求解二维平面应力问题。在默认配置下，代码模拟了以下物理问题：

- **几何模型:**  $1\text{m} \times 1\text{m}$  的正方形板。
- **边界条件:** 左侧边缘 ( $x = 0$ ) 完全固定 ( $u_x = 0, u_y = 0$ )。
- **载荷条件:** 顶部边缘 ( $y = 1\text{m}$ ) 施加均匀分布的向下面力 (Traction)，大小为  $T_y = -2 \times 10^4 \text{ N/m}$ 。
- **材料属性:** 杨氏模量  $E = 2.1 \times 10^9 \text{ Pa}$ ，泊松比  $\nu = 0.3$ 。

该模型类似于一个左端固定的悬臂板，在顶部受到剪切/压缩载荷。

### 2.2 实现细节

#### 2.2.1 网格生成 (`generate_mesh.m`)

网格生成函数创建了结构化的节点和单元网格。

- **节点:** 根据划分数量 ( $n_x, n_y$ ) 遍历  $x$  和  $y$  坐标生成。

- 单元:

- **Tri3 (Flag=1)**: 每个矩形网格单元被划分为两个三角形。
- **Quad4 (Flag=2)**: 每个矩形网格单元形成一个四边形单元。

## 2.2.2 刚度矩阵组装 (`K_matrix.m`)

通过遍历所有单元组装全局刚度矩阵  $K$ :

$$K = \sum_{e=1}^M K_e = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega_e} B^T DB d\Omega \quad (1)$$

对于 Quad4 单元，使用  $2 \times 2$  高斯积分进行数值积分。对于 Tri3 单元，1点积分（形心）对于常应变三角形 (CST) 已经足够。

## 2.2.3 边界条件 (`Boundary_conditions.m`)

边界条件定义如下:

- **位移边界**: 左边缘 ( $x = 0$ ) 完全固定 ( $u_x = 0, u_y = 0$ )。这是通过识别  $x$  坐标接近 0 的节点来实现的。
- **力边界**: 在顶边缘 ( $y = H$ ) 施加面力载荷。`l_area` 向量存储边界上每个节点的有效长度/面积，用于将力转换为节点力。

## 2.3 结果

计算了位移场和应力场。由于不习惯原 `plot` 函数，对于原始文件中的绘图代码进行了调整以生成更清晰的云图。

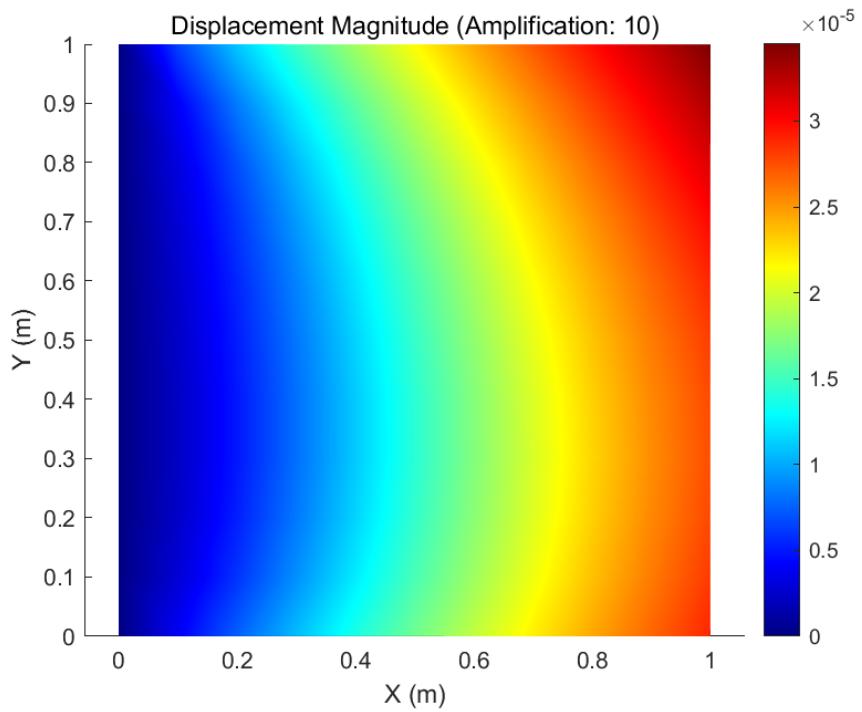


图 1: Problem 1 位移云图

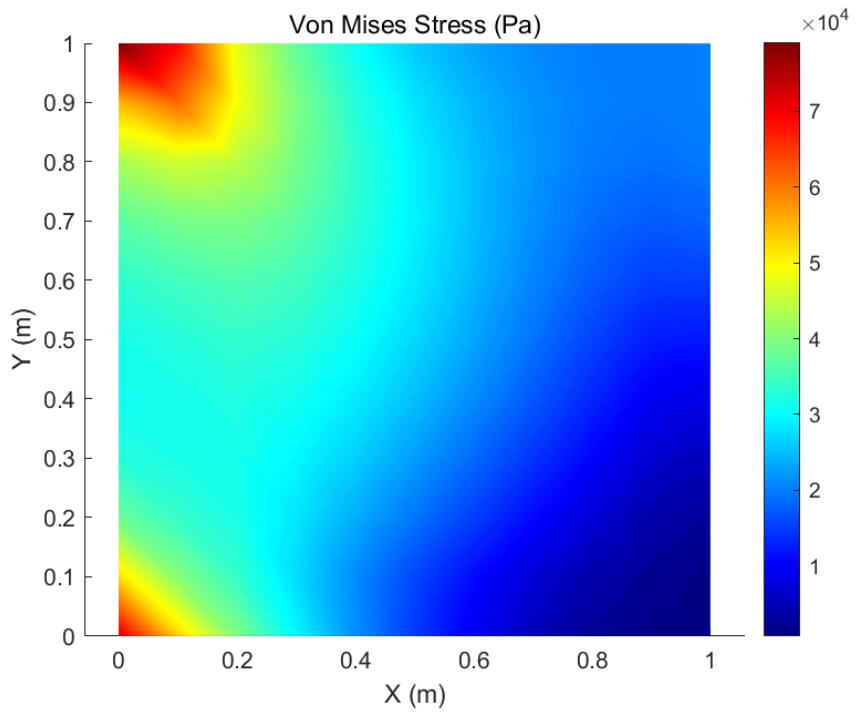


图 2: Problem 1 应力云图

### 3 Problem 2: Mindlin 板弯曲分析

#### 3.1 问题描述

分析一个在中心受高斯分布载荷作用的方形板 ( $1\text{m} \times 1\text{m}$ , 厚度  $t = 0.05\text{m}$ )。四边均简支 ( $w = 0$ )。材料属性为  $E = 210 \text{ GPa}$  和  $\nu = 0.3$ 。

#### 3.2 理论公式

问题采用 Mindlin-Reissner 板理论建模，该理论考虑了剪切变形。每个节点有 3 个自由度 (DOFs):

- $w$ : 横向挠度。
- $\theta_x$ : 绕 x 轴的转角。
- $\theta_y$ : 绕 y 轴的转角。

单元刚度矩阵由弯曲和剪切两部分组成:

$$K_e = K_b + K_s = \int_{\Omega_e} B_b^T D_b B_b dA + \int_{\Omega_e} B_s^T D_s B_s dA \quad (2)$$

#### 3.3 实现细节

##### 3.3.1 剪切自锁控制

为了防止薄板中的剪切自锁 (特别是对于 Quad4 单元)，对剪切刚度矩阵  $K_s$  采用了减缩积分 (Reduced Integration):

- 弯曲刚度 ( $K_b$ ): 使用全积分计算 (Quad4 使用  $2 \times 2$  高斯点)。
- 剪切刚度 ( $K_s$ ): 使用减缩积分计算 (Quad4 使用  $1 \times 1$  高斯点)。

确保了单元在薄板极限下不会变得过硬。

##### 3.3.2 高斯载荷积分 (F\_vector.m)

通过使用形函数在单元面积上积分高斯压力场  $q(x, y)$  来计算外力向量:

$$F_e = \int_{\Omega_e} N^T q(x, y) dA \quad (3)$$

### 3.4 不同网格密度下的计算

为了研究网格收敛性，使用三种不同的网格密度进行了计算：

- 粗网格:  $5 \times 5$  单元。
- 中等网格:  $10 \times 10$  单元。
- 细网格:  $50 \times 50$  单元。

图 6 展示了使用 Quad4 单元在不同网格密度下的挠度分布。可以看出，随着网格加密，挠度场变得更加平滑，且中心最大挠度值逐渐收敛。粗网格 ( $5 \times 5$ ) 虽然能捕捉到整体变形趋势，但在极值点和边缘处的精度较低。

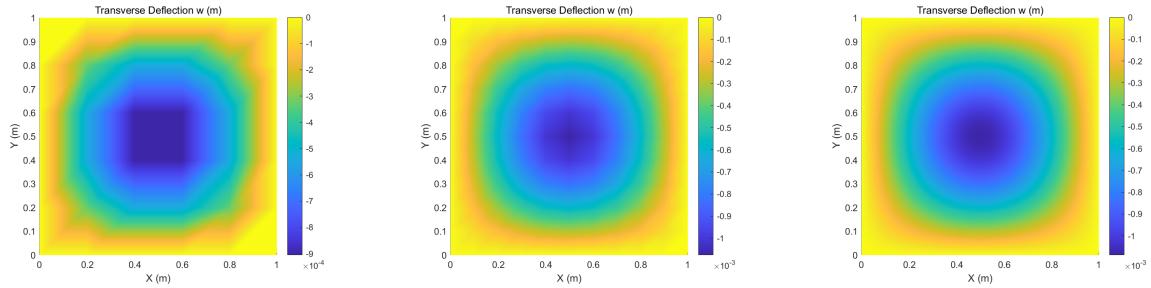


图 3: Quad4  $5 \times 5$

图 4: Quad4  $10 \times 10$

图 5: Quad4  $50 \times 50$

图 6: 不同网格密度下的挠度云图对比 (Quad4)

同样地，图 10 展示了使用 Tri3 单元在不同网格密度下的挠度分布。

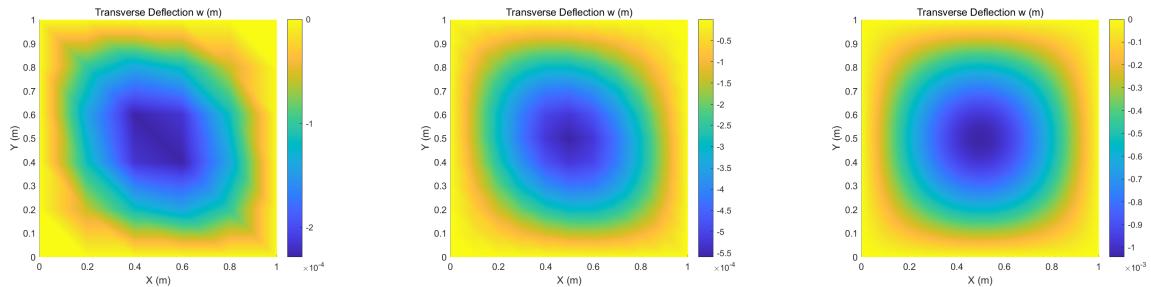


图 7: Tri3  $5 \times 5$

图 8: Tri3  $10 \times 10$

图 9: Tri3  $50 \times 50$

图 10: 不同网格密度下的挠度云图对比 (Tri3)

综合对比 Tri3 和 Quad4 两种单元的结果表明，随着网格密度的增加，中心挠度均收敛于一个稳定值。在相同节点数下，Quad4 单元通常比 Tri3 单元表现出更快的收敛速度和更高的精度。

## 3.5 结果与验证

### 3.5.1 MATLAB 仿真结果

模拟输出包括：

- **挠度 ( $w$ )**: 最大挠度出现在板中心。
- **转角幅值**: 中心处为零（由于对称性），边缘附近最大。
- **Von Mises 应力**: 基于弯矩在板顶表面 ( $z = t/2$ ) 计算得出。

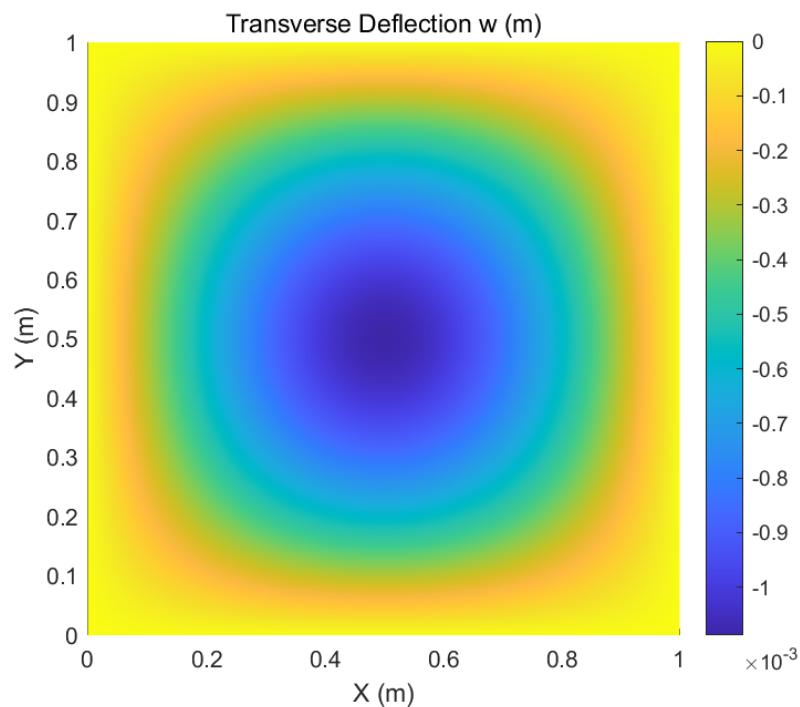


图 11: 挠度云图 (Quad4, 50x50 网格)

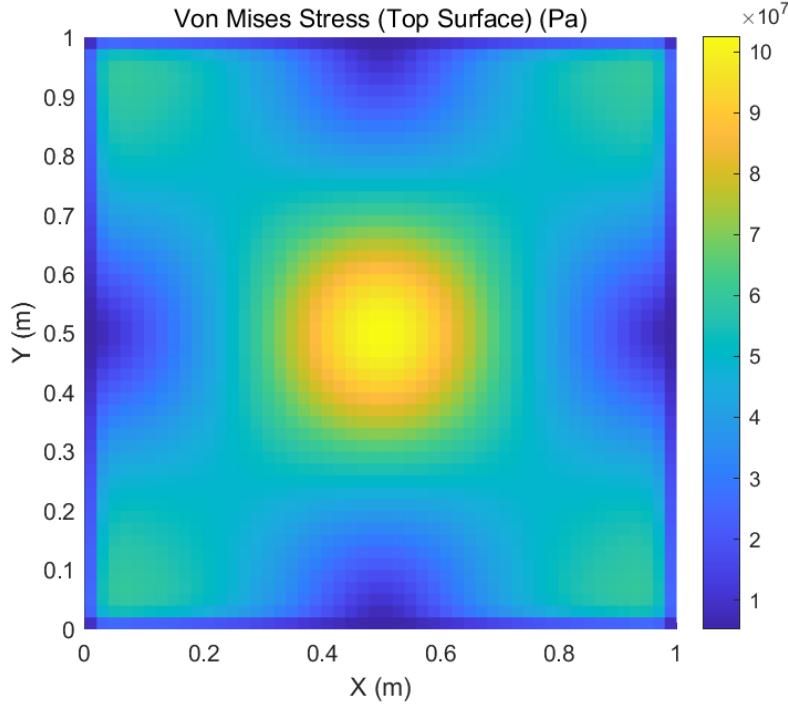


图 12: Von Mises 应力云图 (Quad4, 50x50 网格)

### 3.5.2 与商业软件 (Abaqus) 的对比验证

为了验证 MATLAB 代码的准确性，使用商业有限元软件 Abaqus 进行了对比分析。

- **单元类型:** S4R (4节点减缩积分壳单元)，与 MATLAB 中的 Quad4 Mindlin 板单元理论一致。
- **网格密度:**  $50 \times 50$  (2500 个单元)。
- **积分方案:** 厚度方向采用 Simpson 积分 (5个积分点)。
- **载荷施加:** 使用 Analytical Field 定义高斯分布载荷。

表 1 展示了 MATLAB 代码与 Abaqus 仿真结果的对比。选取了两个关键指标：板中心的最大挠度 ( $w_{max}$ ) 和板中心的最大 Von Mises 应力 ( $\sigma_{vm,max}$ )。

表 1: MATLAB 代码与 Abaqus 结果对比 (50x50 网格)

指标	MATLAB (Quad4)	Abaqus (S4R)	相对误差 (%)
中心挠度 $w_{max}$ (m)	-1.088290e-03	-1.08737e-03	0.085%
最大 Von Mises 应力 (Pa)	1.026135e+08	1.02514e+08	0.097%

图 15 展示了 MATLAB 代码计算得到的 3D 变形图与 Abaqus 仿真结果的对比。两者在变形趋势和幅值分布上高度一致。

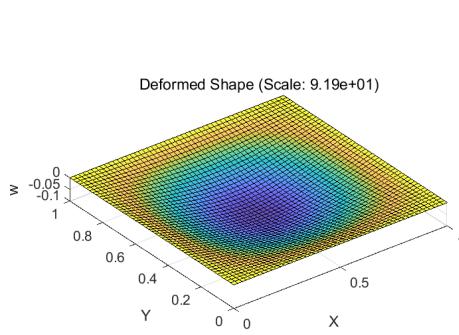


图 13: MATLAB 3D 变形图

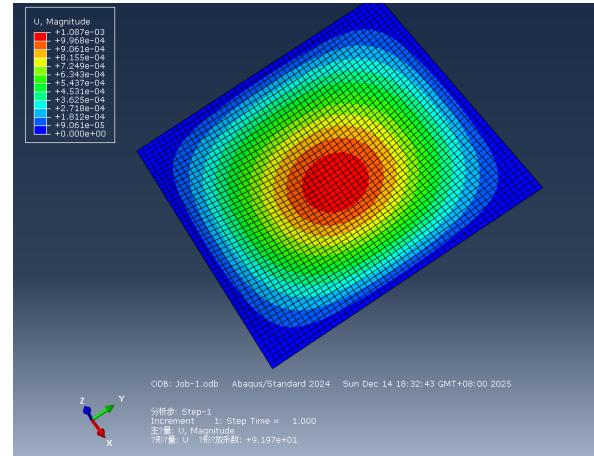


图 14: Abaqus 3D 变形图

图 15: MATLAB 与 Abaqus 3D 变形结果对比

总体上看计算结果与 abaqus 高度一致，但仍存在一定差异，可能原因包括：

- 单元类型差异:** 虽然 S4R 单元与 Quad4 Mindlin 板单元类似，但在数值实现细节上可能存在差异。
- 积分方案:** Abaqus 使用了厚度方向的 Simpson 积分，而 MATLAB 代码中未明确考虑厚度积分，可能导致结果偏差。
- 网格划分:** 尽管网格数量相同，但节点分布和单元形状可能略有不同，影响结果精度。
- 边界条件实现:** 边界条件的具体实现方式可能存在差异，影响整体响应。