

# 单管放大电路的系统辨识和控制器设计

张蔚桐 2015011493 自 55

## 目录

1	引言	2
2	可行性分析	3
3	实验测量	3
4	传递函数的估计	6
4.1	传递函数形式的估计	6
4.2	时间参数的估计	6
4.3	增益 $K$ 的估计	7
4.4	总结	7
5	与理论计算的频率响应特性对比	7
6	控制器的设计	8
6.1	引言	8
6.2	基本假设	8
6.2.1	超前矫正	9
6.2.2	滞后矫正	9
6.3	“增益带宽积”不变性的简单证明	10
6.4	控制器的设计和优化	10
6.5	此种优化方法的利弊分析	11
7	总结	13
8	附注	13

## 1 引言

在模拟电子技术课程中，对于放大电路的高频特性，我们通过对晶体管的工作原理分析，引入了混合  $\pi$  电路，完成了对电路频率特性的研究。然而实际应用过程中，这种方法往往存在某些问题，下面分点简述如下。

### 1. 电路计算模型复杂

回顾三极管的混合  $\pi$  及其简化模型，可以看出其电路模型尽管经过很大程度的简化，电路的模型仍然十分复杂。因此，如果将混合  $\pi$  模型推广到复合管电路或者多级运放甚至更大规模的集成电路中，必然出现计算量过大的情况。因此，在工程中，不论采用仿真计算或手工计算，均要耗费相当大的工程量。

### 2. 模型存在误差

不论是晶体管的中频段等效模型还是混合  $\pi$  模型，不可否认的一点是这些模型均存在这一定程度的误差。同时，随着电路的集成和封装，过程中引入的分布电容，接触电阻和其他不可预计的效应是很多的，在更复杂的电路中，这些干扰将进一步的相互耦合，使得简单的简化模型对电路性能的预计变得更加不准确。同时也增大了采用模型刻画电路的难度

### 3. 全频段分析中的矛盾

在采用混合  $\pi$  等等效模型对频率响应进行分析时，如果选用了全频段模型，我们势必面对规模较大的电路，虽然能够解出适合于全频段的传递函数，但是在实际工程应用中，我们涉及到的频率往往仅仅是全频段中的一部分。如果采用高/中/低频等效电路，则经常需要考虑简化的模型是否会影响到电路的整体性能描述。什么样的电路元件可以省略，什么样的电路元件不能省略，往往是一个很模糊的概念。高/中/低频等效电路的使用范围也不是一个确切的值，因此在频段分析中存在着过度简化和过度复杂之间界限不清楚的问题

为了解决以上问题，我们回顾控制理论中一个完全相反的思路：通过实验测得的频率特性去完成对传递函数的估计，并进一步设计传递函数的实现。这种基于实验的方法，能够从根本上解决已有模型不能充分描述电路特性的问题，也能够解决电路在集成和封装过程中存在的电阻电容引入难以计算的问题。同时，对要求频率附近的频率特性进行测量，得到适合要求频率范围使用的传递函数，也可以解决对于各个频段模型划分模糊的问题

Tab. 1:  $I_{CQ} = 1\text{mA}$  时的辐频相频特性      Tab. 2:  $I_{CQ} = 2\text{mA}$  时的辐频相频特性

$f/\text{Hz}$	$ \dot{A} $	$\phi$
$10^0$	0.9875	-89.28
$10^{0.5}$	2.1125	-93.8
$10^1$	5.2375	-97.2
$10^{1.5}$	14.2875	-111.82
$10^2$	32.125	-126.04
$10^{2.5}$	43.875	-157.61
$10^3$	47.875	-159.09
$10^{3.5}$	48.25	-166.23
$10^4$	48.375	-173.41
$10^{4.5}$	48.125	-180.17
$10^5$	45.000	-188.56
$10^{5.5}$	32.250	-223.5
$10^6$	12.6625	-270.5
$10^{6.5}$	4.25	—
$10^7$	1.325	—

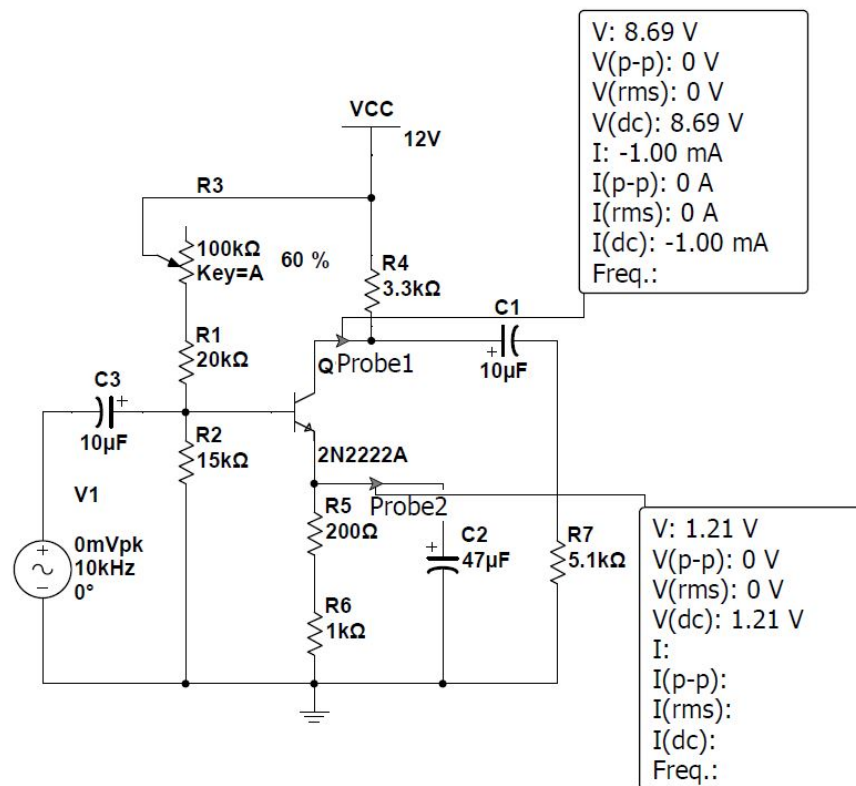
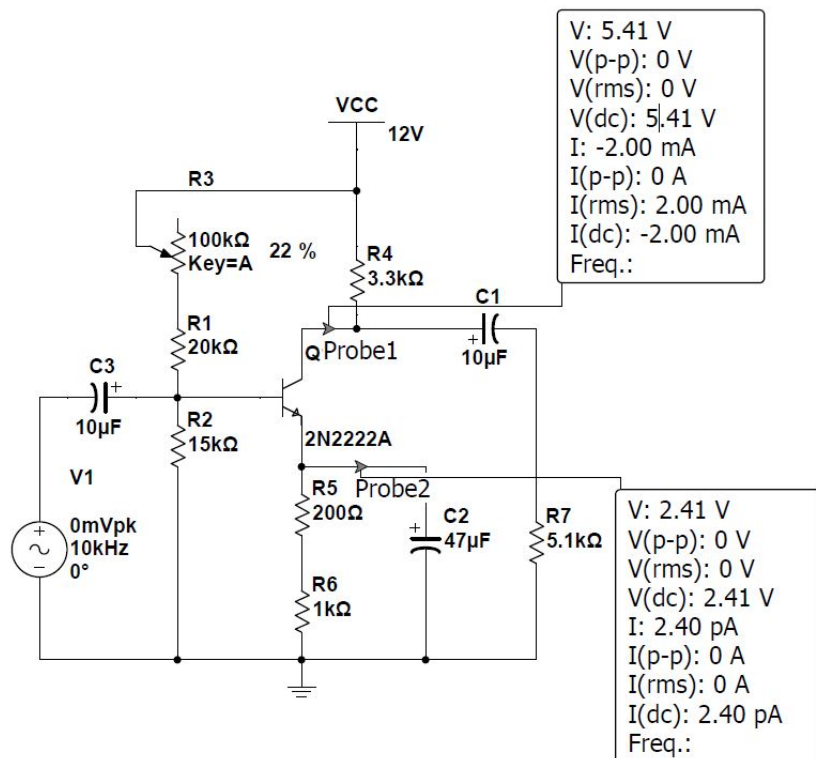
$f/\text{Hz}$	$ \dot{A} $	$\phi$
$10^0$	0.5025	-59.04
$10^{0.5}$	1.925	-86.52
$10^1$	7.650	-94.68
$10^{1.5}$	16.100	-101.0
$10^2$	38.000	-124.09
$10^{2.5}$	62.5	-150.71
$10^3$	70.5	-167.60
$10^{3.5}$	72.5	-178.02
$10^4$	73.00	-183
$10^{4.5}$	72.00	-188.73
$10^5$	64.00	-206.03
$10^{5.5}$	36.00	-230.8
$10^6$	13.5	-263.2
$10^{6.5}$	4.5	—
$10^7$	1.6	—

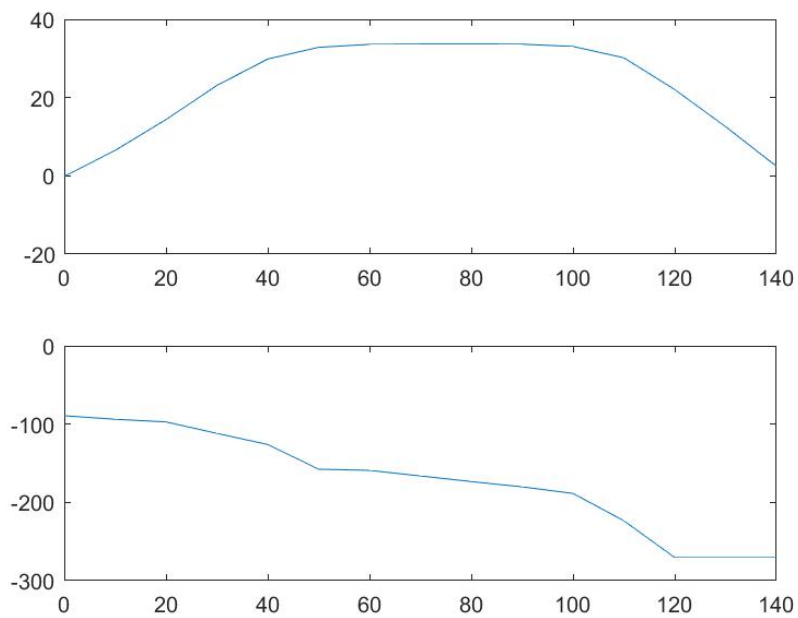
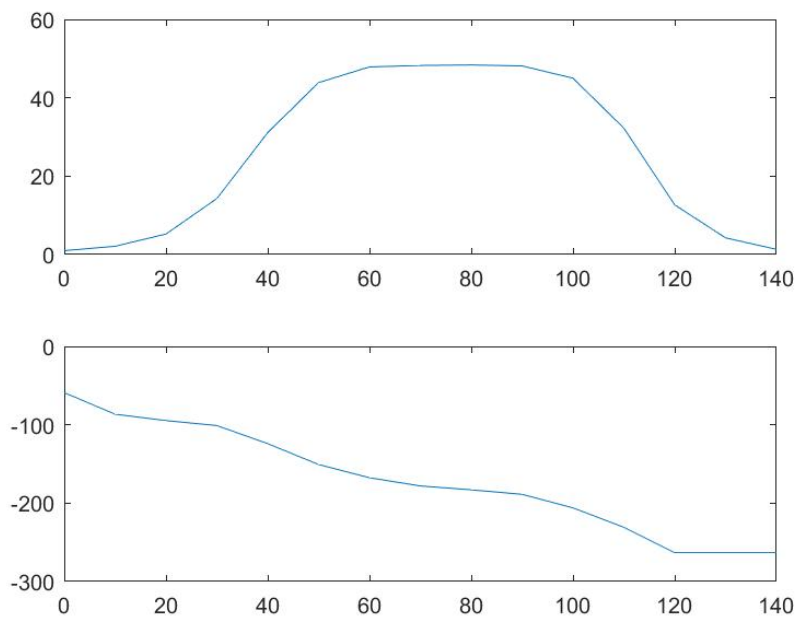
## 2 可行性分析

我们知道，一个线性系统可以从其 bode 图等频率响应图中估计出系统的传输函数。对于放大电路而言，由于静态工作点的设置使得静态工作电压远远大于输入的交变电压，因此整个系统完全可以在静态工作点附近进行微偏线性化进行线性模型等效。如图 1,2所示，测试电路中采用的输入电压峰值为 10mV，静态工作点在 V 的量级。微变电压在静态电压的 1% 量级上，采用线性模型进行估计所产生的误差是可以接受的。

## 3 实验测量

在电子技术实验中，在老师的指导下对单管放大电路的频率特性（辐频，相频特性）进行了研究。得到的实验结果如表 1,2所示，使用绘图软件绘制其辐频和相频特性曲线如图 34所示，其中横坐标采用的是频率的分贝数。从图中我们可以看出这两种静态工作点下的频率特性虽然有所差异，但是基本的模态是相同的，因此下文将就  $I_{CQ} = 1\text{mA}$  时的情况着重分析，至于  $I_{CQ} = 2\text{mA}$  时的情况的分析可以同理推得

Fig. 1:  $I_{CQ} = 1\text{mA}$  时的电路图Fig. 2:  $I_{CQ} = 2\text{mA}$  时的电路图

Fig. 3:  $I_{CQ} = 1\text{mA}$  时的幅频相频特性图Fig. 4:  $I_{CQ} = 2\text{mA}$  时的幅频相频特性图

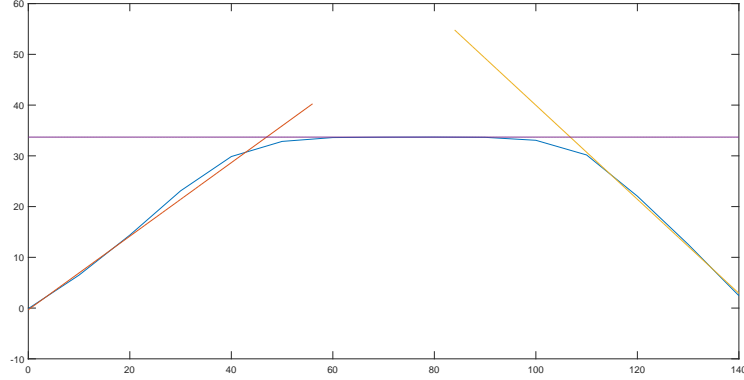


Fig. 5: 折线化之后的幅频响应

## 4 传递函数的估计

### 4.1 传递函数形式的估计

根据如图 5 所示的折线化之后的 bode 图可以迅速得到两种情况下电路幅频特性的上升段和下降段的斜率为  $\pm 1$ 。表征单独考虑这一部分应当是一个一阶系统。同时，可以得到对于  $I_{CQ} = 1\text{mA}$  时的转折频率为 46.93dB 和 106.9dB，根据图 3 提示的相频特性可以通过控制理论知识迅速得到这不是一个最小相位系统，因此先通过最小相位系统确定符合幅频特性的传递函数再根据相位进行进一步的调整

计算得到两个转折频率为 222.075Hz 和 221.3kHz，同时幅频响应提示一个 PD（超前环节）和一个 PI（滞后环节）的综合，因此可以猜测系统的传递函数为

$$G'(s) = K \frac{T_1 s + 1}{4.5 \times 10^{-3} s + 1} \times \frac{T_2 s + 1}{4.5 \times 10^{-6} s + 1}, T_1 > 0, T_2 > 0 \quad (1)$$

观察相频特性 3 可得，系统相位不断滞后，又考虑到系统开环稳定，没有右半平面的极点，因此可以得到更正过的传递函数

$$G(s) = K \frac{-T_1 s + 1}{4.5 \times 10^{-3} s + 1} \times \frac{T_2 s + 1}{4.5 \times 10^{-6} s + 1}, T_1 > 0, T_2 > 0 \quad (2)$$

### 4.2 时间参数的估计

由于幅频特性中没有提示其他的拐点，因此我们希望通过相频特性寻找  $T_1, T_2$  的合理估计值

从控制理论我们可以知道，作为一个合理的近似，我们可以知道  $G(s)$  表达式中的左侧部分对高频特性影响较小，而右侧部分对低频特性影响较小，增益  $k$  不影响相频特性，因此我们分别对两个转折频率前后的频段进行研究

1. 低频部分 经过研究发现，如果引入  $T_1$ ，为了尽可能好的拟合低频部分的频率特性，发现在所研究的频段内均有  $T_1\omega \gg 1$  因此引入  $T_1$  变得意义不大，因此低频部分可以退化为  $\frac{-s}{4.5 \times 10^{-3}s+1}$  来简化传递函数
2. 高频部分 经过研究发现，和低频部分相同的是，分子对相频特性的影响不大，因此，可以直接略去分子

综上所述，系统的传递函数可以写成

$$G(s) = K \frac{-s}{4.5 \times 10^{-3}s + 1} \times \frac{1}{4.5 \times 10^{-6}s + 1}, T_1 > 0, T_2 > 0 \quad (3)$$

### 4.3 增益 K 的估计

根据中频段稳定特性对  $K$  进行估计可以得到  $K=0.23$

### 4.4 总结

因此可以得到在研究频段特性为

$$G(s) = \frac{-0.23s}{(4.5 \times 10^{-3}s + 1)(4.5 \times 10^{-6}s + 1)} \quad (4)$$

需要注意的是，式中的  $s$  并非角频率  $j\omega$ ，而是  $j\omega/2\pi = jf$

## 5 与理论计算的频率响应特性对比

根据《模拟电子技术基础》第四章的内容，我们对 4 式进行进一步的标准化，变换为放大电路中经常出现的形式，即

$$G(s) = \frac{-51.1106 \frac{s}{222.22}}{(1 + \frac{s}{222.22})(1 + \frac{s}{22222.22})} \quad (5)$$

从式 5 中，基于有关频率响应的相关知识，可以知道放大电路的中频响应大约为  $-51/V/V$ ，同时低频截止频率约为  $222.22\text{Hz}$ ，高频截止频率约为  $22222.22\text{Hz}$ ，实验中测量得到低频截止频率为  $f_L \approx 100\text{Hz}$ ，高频截止频率为  $f_H \approx 10^{5.5} \approx 316227\text{Hz}$ ，和通过上述分析得到的值相近，同时，也可看出我们估计的传递函数在形式上也和理论计算得到的相同

进一步，我们可以计算模型中的相关参数来验证测量的准确性

首先计算低频部分，容易知道电容  $C_2$  是决定低频特性的瓶颈，考虑这个电容两端的等效电阻可以得到

$$R_{eq} = (R_5 + R_6) // \frac{80k\Omega // 15k\Omega // R_s}{1 + \beta} = 11.23\Omega \quad (6)$$

其中  $R_s = 2k\Omega$  因此我们得到理论估算的低频截止频率为

$$f_L = \frac{1}{2\pi C_e R_{eq}} = 301\text{Hz} \quad (7)$$

和实验测量得到的值以及通过估算传递函数得到的值在一个数量级上，在对数幅频特性上误差可以接受

其次计算高频部分，我们假设三极管的交流等效模型采用单向化之后的混合  $\pi$  模型，并对电容参数进行了相当程度的简化，即如《模拟电子技术基础》第五版 P191 图 4.2.2(c) 所示，同时作为一个示范性的理论计算，我们假设  $r_{b'e} = 3k\Omega, r_{bb'} = 0$ ，于是可以得到

$$R_{eq} = r_{b'e} // ((80k\Omega // 15k\Omega // 2k\Omega) + R_e) = 0.675k\Omega \quad (8)$$

我们希望通过高频特性估算单向化后混合  $\pi$  模型中的  $C_{\pi'}$ ，因此得到方程

$$222222.222\text{Hz} = f_H = \frac{1}{2\pi R_{eq} C_{\pi'}} \quad (9)$$

得到  $C_{\pi'} = 1\text{nF}$ ，和理论计算中经常取的接近  $800\text{pF}$  还是很接近的，说明模型，模电相关理论和控制系统相关理论是相互印证的

## 6 控制器的设计

### 6.1 引言

模拟电子技术的知识告诉我们，如果希望展宽频带，则必须降低放大电路的中频增益，从经验上来讲，电路的“增益带宽积”在不改变电路核心结构和三极管的管型条件下是基本不变的，通过本章，希望能定性的给出一些证明

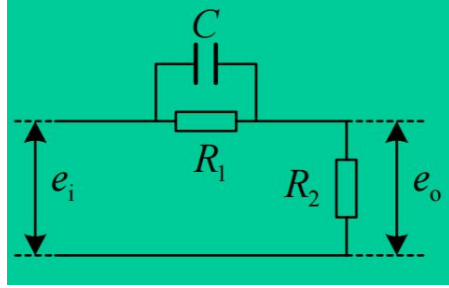
### 6.2 基本假设

因为控制系统的研究对象是模拟电路，因此，需要给出一个基本的，符合常理的假设：所有的控制器，应均为无源元件构成的二端网络。这条假设的合理性表现为，如果可以引入一个理想的有源经典控制器，如比例控制器 P，则完全可以用这个比例控制器 P 完成放大电路的性能要求，被控系统的存在变得没有意义。

综合考察基本假设中指定的控制器类型，可以选择两种最有典型代表性的控制器：PI（超前）和 PD（滞后）控制器，其具体实现和传递函数如下所示



## 6.2.1 超前校正



传递函数

$$G(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{R_1 C s + 1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C s + 1} \quad (10)$$

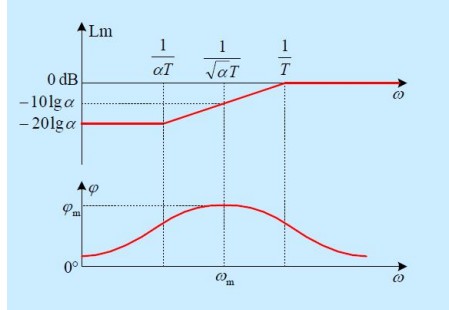
令

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = T, 1 + \frac{R_1}{R_2} = \alpha > 1$$

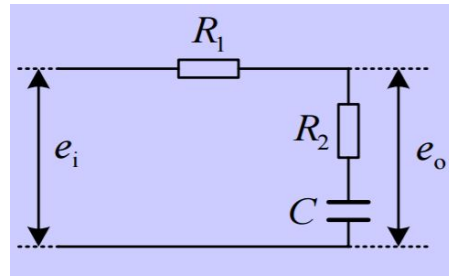
得到

$$G(s) = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha T s + 1}{T s + 1} \quad (11)$$

Bode 图



## 6.2.2 滞后校正



传递函数

$$G(s) = \frac{R_2 C s + 1}{(R_1 + R_2) C s + 1} \quad (12)$$

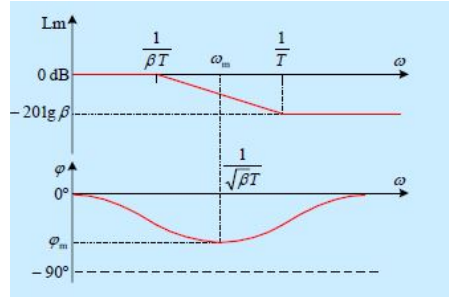
令

$$R_2 C = T, 1 + \frac{R_1}{R_2} = \beta > 1$$

得到

$$G(s) = \frac{T s + 1}{\beta T s + 1} \quad (13)$$

Bode 图



为了简化之后的控制器设计和模型计算的过程，我们将采用 EDA 仿真软件进行仿真，同时在推导过程中认为系统和系统之间的互相不影响，即可以忽略前级的输出电阻和后级的输入电阻对当前模块的影响。这个假定的合理性在于，因为控制器的设计存在着自由度，我们可以通过调整使得系统和系统，网络和网络之间的耦合近似的符合这个假定。

### 6.3 “增益带宽积”不变性的简单证明

我们假设在一个已有的晶体管放大电路中采用 PI 和 PD 两种方式来试图改善电路的带宽，从上面表中我们可以知道超前校正可以用来提升高频截止频率，而滞后校正可以用来降低低频截止频率。在折线化的 Bode 图中，我们可以近似认为 Bode 图的转折点就是截止频率。综合之前对三极管放大电路的研究我们可以发现，我们可以得到，超前校正  $G(s) = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1}$  可以将  $\frac{1}{\alpha T}$  的高频截止频率提升到  $\frac{1}{T}$ ，提升了  $\alpha$  倍，同时增益下降为原来的  $\frac{1}{\alpha}$ 。增益——带宽积保持不变。同时，对于低频部分的证明可以同理推广得到。

### 6.4 控制器的设计和优化

这一部分将在 EDA 仿真软件上完成，因此我们首先用仿真软件确定之前的截止频率。

如图 6 是同样电路在 EDA 仿真软件上的运行结果。我们可以看到，低频截止频率为  $f_L = 156\text{Hz}$ ，高频截止频率为  $f_H = 127.8\text{kHz}$ 。可以看出，这个频率特性和实验得到的频率特性是有一定的区别的，根本原因是实验室使用的三极管的模型参数和仿真软件中晶体管的模型参数有着一定的差异，这种差异主要就体现在结电容上，同时，仿真中负载开路，对放大倍数也有一定的影响。

因此作为一个示范，我们采用 EDA 的这个电路参数作为基础进行控制器的设计。

假设实际需求的放大器由这一个单管放大电路组成，尽管对放大倍数的要求不高，但是对频带的特性要求要明显高过目前的情况。我们假设实际需求 and 目前状况的差异如表 6.4 所示。

于是我们考虑采用 PID 方法进行串联校正系统的频率特性。计算可以取 PID 中  $\alpha = 10, \beta = 3$  设计电路，经过调试得到如图 7 的 Bode 图，电路如图 8 所示（后期部分参数有微调）

电路实现了对频带的展宽。

	$ A $	$f_L$	$f_H$
实际要求	$\geq 4$	$\leq 50\text{Hz}$	$\geq 1\text{MHz}$
电路现状	123	156Hz	127.8kHz
改进之后	3.99	37Hz	1MHz

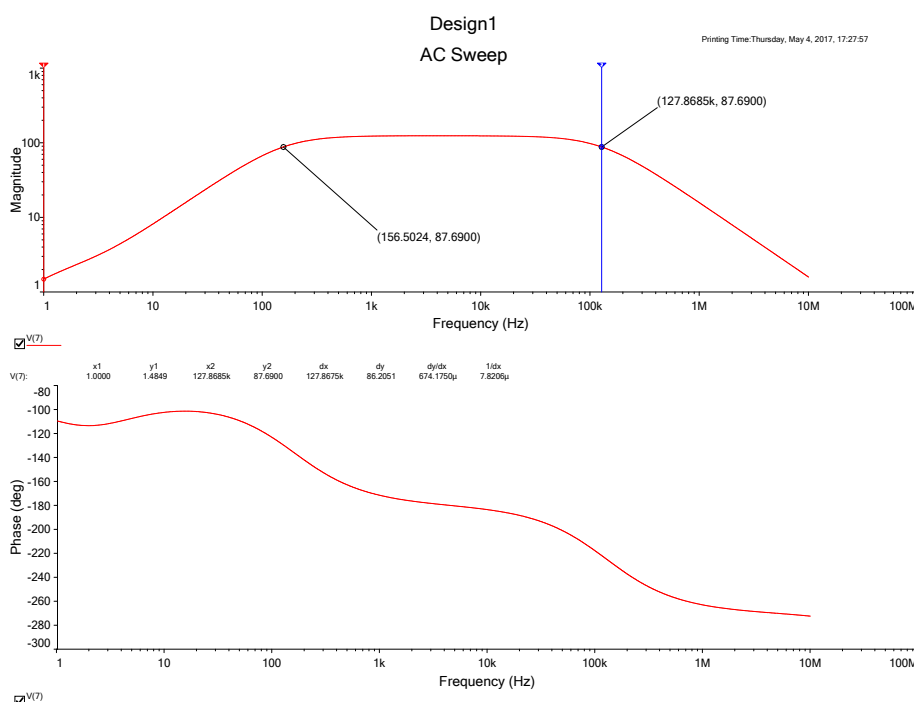


Fig. 6: 控制之前的系统 bode 图

## 6.5 此种优化方法的利弊分析

总体上讲，这种对频带的展宽方法的利弊是非常明显的，具体分析如下

这种方法的优点主要是简单：首先，通过输入——输出特性测量和估算原电路的传递函数，利用控制理论外接串联 PID 控制器进行控制，这些过程均不用破坏原电路的结构，方便对电子系统进行一些补充和修改。

同时这个简单的 PID 系统仅由无源元件组成，搭建的时候相对比较容易，同时更换起来也比较轻松。尤其适合在分立元件电路上实现。

另外，整个过程不必破坏原电路的封装，尤其适用于对原电路工作原理比较复杂（如多级放大电路）的场合，以免破坏封装可能造成的对原电路的损坏。

同时，因为有着 PID 的相关理论知识的支撑，设计相关参数相对会比较有把握，设计速度也会得到一定的提高。

但是，这个方法有着相当大的问题：

首先，根据增益带宽积，这个电路提高带宽是以降低放大倍数来作为牺牲的。这种牺牲往往带来很少的收益，但是性能上的损耗往往是让人无法接受的。

其次，这种设计方法尽管有一套成型的理论，但是和控制理论的控制器

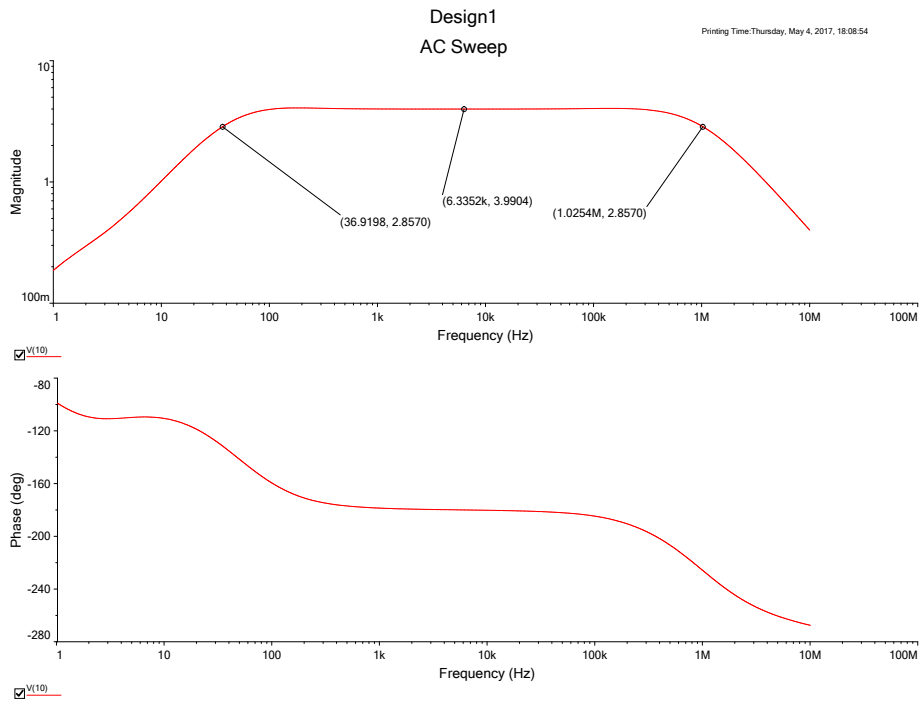


Fig. 7: 控制之后的系统 bode 图

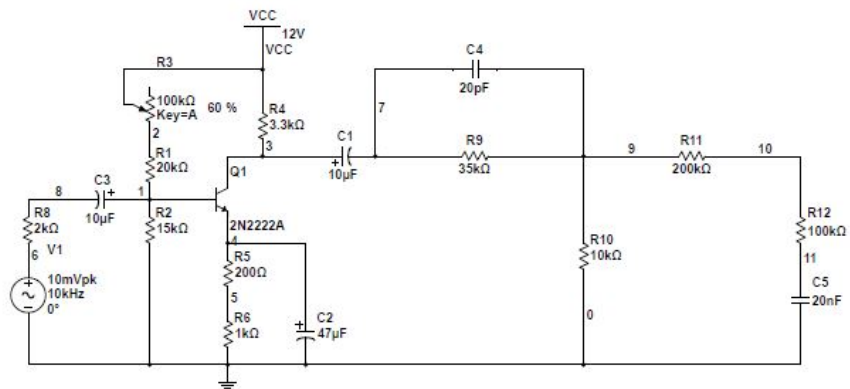


Fig. 8: 改进的电路图

不同的是，由于输入电阻和输出电阻的影响，控制环节出现耦合，因此设计控制器的时候相关参数选择实际上还需要一定的经验和微调，这也是对设计速度的损耗。同时，因为存在大量的耦合，增益——带宽积实际上很难得到保证，同样的频带增加可能损耗的增益会更大。

研究这其中的根本原因，不论是这种方法的优势和劣势，都源自于这种方法对原电路的高度封装。这种封装使得后续的设计脱离了三极管的特性而从控制理论方面进行研究，因此会出现以上的问题。

因此，如果想从根本上提升放大电路的带宽，还要从晶体管特性，半导体物理等方面进行进一步的研究。这也是在放大电路中没有流行使用 PID 方法进行优化频带的关键原因。

## 7 总结

本文从《电子技术实验》中一个令人感兴趣的小问题开始，通过幅频——相频特性估计了所搭建电路的传递函数并和模拟电子技术相关知识进行了印证，通过控制理论设计了 PID 控制器对系统的传递函数进行了优化，通过 EDA 仿真软件进行了验证。详细的评估了这种方法的优势和存在的问题。讨论这种方法的实用性。通过这次的综合探究，使我的实际电路的搭建仿真测试能力和理论分析能力，包括跨学科综合能力得到了提高，有很大的收获。

## 8 附注

在完成了单管放大电路的  $I_c = 1\text{mA}$  的研究之后，本文继续对其他情况，包括 JFET 的研究和双管放大电路的频率特性进行了研究，结果从形式上来看大同小异，但是相对的特性的展示没有单管电路明显。尤其是双管电路反馈电路中因为反馈线的引入出现了二阶系统，不方便说明本文的核心思路，在进行一些简单的验证之后因为时间原因没有进行进一步的研究，但是相关的研究思路已经很明显的展现在本文中了。