# 第十六章　动力学普遍方程与拉格朗日方程

## §16-1　动力学普遍方程

应用达朗伯原理，把质点系动力学问题转化为虚拟的静力学平衡问题求解，而虚位移原理是用分析法求解质点系静力学平衡问题的普遍原理，将二者相结合，就可得到处理质点系动力学问题的动力学普遍方程（General equations of dynamics）。对此方程进行了广义坐标变换，可以导出拉格朗日方程（Lagrange’s equations of motion）。拉格朗日方程为建立质点系的运动微分方程提供了十分方便而有效的方法，在振动理论、质点系动力学问题中有着广泛地应用。

我们先讨论动力学普遍方程。

对于 $n$ 个质点组成的质点系，在任一瞬时，作用于系统内的任一个质点 $M_i$ 上的主动力主矢为 $\boldsymbol{F}_i$，约束反力主矢为 $\boldsymbol{F}_{N_i}$，据达朗伯原理，再加上该质点的惯性力 $\boldsymbol{F}_{I_i}=-m_i\boldsymbol{a}_i$，则有

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{N_i}+\left(-m_i\boldsymbol{a}_i\right)=0 \qquad \left(i=1,2,\cdots,n\right)$$

此时系统处于虚平衡状态。给系统任一组虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$，根据虚位移原理，有

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{N_i}-m_i\boldsymbol{a}_i\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

对于理想约束，由于

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{N_i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

则得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{16-1}$$

或写成解析式

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(F_{ix}-m_i x_i''\right)\delta x_i+\left(F_{iy}-m_i y_i''\right)\delta y_i+\left(F_{iz}-m_i z_i''\right)\delta z_i\right]\cdot=0 \tag{16-2}$$

式（16-1）和（16-2）称为动力学普遍方程。它表示：具有理想约束的质点系，任一瞬时作用于其上的主动力和惯性力在系统的任一组虚位移上的虚功之和等于零。

将动力学普遍方程与静力学普遍方程相比较，其共同点在于方程中均不出现理想约束反力，独立方程的数目等于系统的自由度数；区别在于动力学普遍方程中除包含主动力之外，还包含有惯性力。

应用动力学普遍方程解题时，要正确分析和虚加惯性力，并视惯性力为主动力，解题步骤与虚位移原理求平衡问题相同。

**例 16-1**　瓦特离心调速器以匀角速度 $\omega$ 绕铅垂固定轴 $Oy$ 转动，如图 16-1 所示。小球 $A$ 和 $B$ 的质量为 $m$，套筒 $C$ 的质量为 $M$，可沿铅垂轴无摩擦地滑动。其中 $OA=OB=l$，

$OD = OE = DC = EC = a$，不计各杆重，不计各铰链及轴承的摩擦，试求稳态运动时调速器的张角$\alpha$。

**解**　只要正确虚加惯性力，则可按虚位移原理求解静力学问题一样求解。

（1）受力分析。以系统为研究对象，主动力有小球 $A$、$B$ 的重力 $mg$ 以活套 $C$ 的重力 $Mg$。当系统稳定运动时，张角$\alpha =$ 常量，套筒 $C$ 不动。此时球 $A$、$B$ 都作匀速圆周运动，其向心加速度的大小为

$$a_A = a_B = l\omega^2 \sin\alpha$$

虚加在小球 $A$、$B$ 上的惯性力的大小分别为

$$F_{IA} = F_{IB} = ml\omega^2 \sin\alpha$$

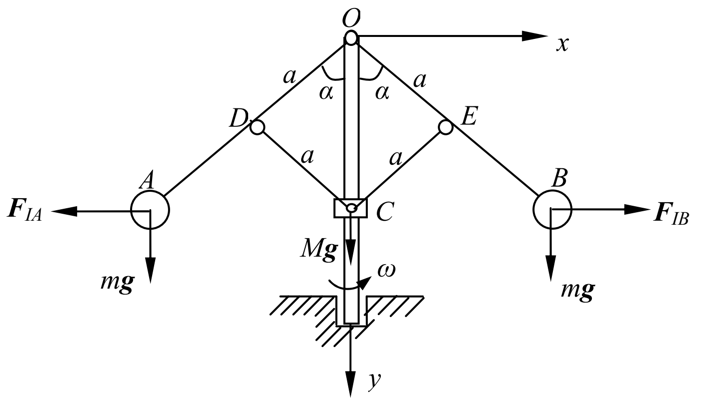


图　16-1

（2）虚位移分析。虚加惯性力后系统处于虚平衡状态。系统具有一个自由度，取$\alpha$角为广义坐标。对图示坐标系，可得力作用点的直角坐标为

$$x_A = -l\sin\alpha\,,\qquad y_A = l\cos\alpha$$
$$x_B = l\sin\alpha\,,\qquad y_B = l\cos\alpha$$
$$x_C = 0\,,\qquad y_C = 2a\cos\alpha$$

对上式取变分，得

$$\delta x_A = -l\cos\alpha\,\delta\alpha\,,\quad \delta y_A = -l\sin\alpha\,\delta\alpha$$
$$\delta x_B = l\cos\alpha\,\delta\alpha\,,\quad \delta y_B = -l\sin\alpha\,\delta\alpha$$
$$\delta x_C = 0\,,\qquad \delta y_C = -2a\sin\alpha\,\delta\alpha$$

（3）应用动力学普遍方程求解。据式（16-2）可得

$$mg\delta y_A + mg\delta y_B + Mg\delta y_C - F_{IA}\delta x_A + F_{IB}\delta x_B = 0$$

即
$$\left(-mgl\sin\alpha - mgl\sin\alpha - 2Mga\sin\alpha + 2ml^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\right)\delta\alpha = 0$$

因$\delta\alpha \neq 0$，可得

$$\cos\alpha = \frac{ml + Ma}{ml^2\omega^2}g\,,\qquad \sin\alpha = 0$$

第二个解$\alpha = 0$是不稳定的，只要稍加扰动，调速器就会有张角，而最终在第一个解给出的位置上处于相对平衡。

**例 16-2** 在图 16-2 所示系统中，物块 $A$ 的质量为 $m$，与接触面处的滑动摩擦因数为 $f_s$，均质圆柱体的质量为 $M$。不计绳重及定滑轮质量，当系统运动时，试求物块 $A$ 和圆柱体质心 $C$ 的加速度 $\boldsymbol{a}_A$ 和 $\boldsymbol{a}_C$。

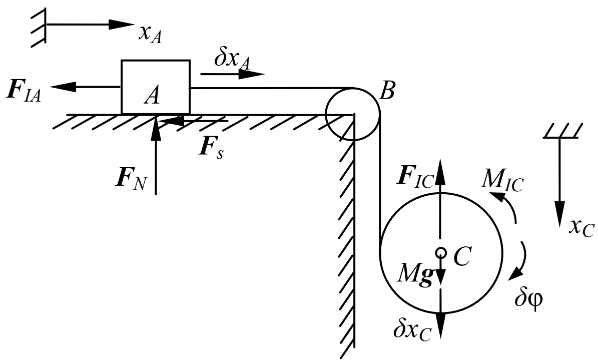


图 16-2

**解** 此系统为二自由度系统，视 $A$ 块的滑动摩擦力为主动力，可应用动力学普遍方程求解。

（1）受力分析。以物块、柱体及绳所组成的系统为研究对象。主动力为物块和柱体的重力 $m\boldsymbol{g}$ 和 $M\boldsymbol{g}$，物块 $A$ 的滑动摩擦力 $F_s = f_s\, mg$。

$A$ 块作直线运动，圆柱体作平面运动。系统具有二自由度，取 $x_A$ 及 $x_C$ 为广义坐标，物块 $A$、柱体质心 $C$ 的加速度以及圆柱的角加速度分别为

$$a_A = x_A'', \quad a_C = x_C''$$

$$\alpha = \frac{1}{r}\left(a_C - a_A\right) = \frac{1}{r}\left(x_C'' - x_A''\right) \tag{a}$$

可得系统的惯性力和惯性力偶矩分别为

$$F_{IA} = m\,a_A = m\,x_A'', \quad F_{IC} = M\,a_C = M\,x_C''$$

$$M_{IC} = J_C\,\alpha = \frac{1}{2}M\,r^2\ \frac{1}{r}\left(x_C'' - x_A''\right) = \frac{1}{2}M\,r\left(x_C'' - x_A''\right) \tag{b}$$

（2）虚位移分析。当系统虚加惯性力后（见图 16-2），系统则处于虚平衡状态。此位置，给 $A$ 物块以虚位移 $\delta x_A$，给 $C$ 点以虚位移 $\delta x_C$，圆柱体的虚转角则为

$$\delta\varphi = \frac{1}{r}\left(\delta x_C - \delta x_A\right) \tag{c}$$

（3）用动力学普遍方程求解。根据式（16-1），有

$$Mg\,\delta x_C - F_S\,\delta x_A - F_{IA}\,\delta x_A - F_{IC}\,\delta x_C - M_{IC}\ \delta\varphi = 0 \tag{d}$$

将式（a）、（b）、（c）代入式（d），得

$$M\,g\,\delta x_C - F_S\,\delta x_A - m x_A''\delta x_A - M x_C''\delta x_C - \frac{1}{2}M\,r\left(x_C'' - x_A''\right)\cdot\frac{1}{r}\left(\delta x_C - \delta x_A\right) = 0$$

经整理后为

$$\left[Mg - Mx_C'' - \frac{1}{2}M\ \left(x_C'' - x_A''\right)\right]\delta x_C - \left[F_S + m x_A'' - \frac{1}{2}M\left(x_C'' - x_A''\right)\right]\delta x_A = 0 \tag{e}$$

由于 $\delta x_A$ 和 $\delta x_C$ 是彼此互为独立的虚位移，欲式（e）成立，则必须

$$\left.\begin{aligned} Mg - Mx_C'' - \frac{1}{2}M\left(x_C'' - x_A''\right) = 0 \\ F_S + mx_A'' - \frac{1}{2}M\left(x_C'' - x_A''\right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

式（f）即为系统的运动微分方程。运动微分方程的个数即系统的自由度数。从而解得

$$\left.\begin{aligned} a_A = x_A'' = \frac{Mg - 3f_S mg}{M + 3m} = \frac{M - 3f_S m}{M + 3m}g \\ a_C = x_C'' = \frac{M + 2m - f_S m}{M + 3m}g \end{aligned}\right\} \tag{g}$$

**讨论**

（i）解答式（g），只有$M - 3f_S mg > 0$时符合题意。若$M - 3f_S mg \le 0$，此时

$$a_A = 0,\quad f_s = \frac{1}{3}\frac{M}{3m}$$

$$a_C = \frac{M + 2m - \frac{M}{3m}m}{M + 3m}g = \frac{2}{3}g$$

（ii）由于广义虚位移的独立性，当系统虚加惯性力后，可分别令$\delta x_C \ne 0$，$\delta x_A = 0$；以及$\delta x_A \ne 0$，$\delta x_C = 0$。应用动力学普遍方程，可直接得到系统的运动微分方程式（f）。

## §16-2　拉格朗日方程

上节导出的动力学普遍方程是以直角坐标形式表达的，由于系统中各质点的虚位移并不独立，应用时还必须寻求虚位移间的关系，而在复杂的非自由质点系中将十分麻烦。利用广义坐标，对动力学普遍方程进行坐标变换，则可得到与自由度数目相同的一组独立运动微分方程，从而使这一方程更加简洁，便于应用。

1．拉格朗日方程

设具有理想完整约束的质点系由 $n$ 个质点组成，有 $k$ 个自由度，取广义坐标为 $q_1$，$q_2$，…，$q_k$。质点系中任一质点 $m_i$ 的矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 可表示为广义坐标和时间的函数，即

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i（q_1，q_2，\cdots，q_k；t） \tag{16-3}$$

质点 $m_i$ 的虚位移

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{16-4}$$

将式（16-4）代入动力学普遍方程（16-1），可得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{F}_i - m\boldsymbol{a}_i\right)\cdot\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = 0 \tag{16-5}$$

交换 $i$，$j$ 的求和顺序，得

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}-\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{a}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j=0$$

式中括号内的第一项称为对应于广义坐标 $q_j$ 的广义力，即

$$Q_j=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\qquad (j=1,2,\cdots,k)$$

上一章对广义力的计算方法作了详细讨论。类似地，可定义对应于广义坐标 $q_j$ 的广义惯性力（Generalized force of inertia）为

$$Q_{Ij}=-\sum_{i=1}^{n}m_i\,\boldsymbol{a}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\qquad (j=1,2,\cdots,k) \tag{16-6}$$

于是，将式（16-5）可简写成

$$\sum_{j=1}^{k}\left(Q_j+Q_{Ij}\right)\delta q_j=0 \tag{16-7}$$

现在，我们研究广义惯性力的计算。在质点系的运动过程中，广义坐标将随时间 $t$ 的变化而变化，是时间 $t$ 的函数。因此，质点系中任一质点 $m_i$ 的速度为

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{r}_i'=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot q_j'+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{16-8}$$

式中的 $q_j'$ 是广义坐标对时间的导数，称为广义速度。可见，质点的速度 $\boldsymbol{v}_i$ 是广义坐标、广义速度和时间 $t$ 的已知函数。它对广义坐标和广义速度的偏导数可得以下两个重要等式，称为拉格朗日变换式。

（1）式（16-8）中，由于 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$ 和 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$ 中不包括广义速度，将该式两端对 $q_j'$ 求偏导数，则得

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j'}=\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \tag{16-9}$$

（2）将 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$ 对时间 $t$ 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)=\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial}{\partial q_s}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)q_s'+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial t}=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}q_s'+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right) \tag{16-10}$$

考虑到式（16-8），式（16-10）右端括号内即为速度$\boldsymbol{v}_i$，因而可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j} \tag{16-11}$$

式（16-9）及（16-11）称为拉格朗日变换式。

将广义惯性力可改写成

$$Q_{Ij}=-\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{v}_i'\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=-\sum_{i=1}^{n}\left[m_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)-m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\right]$$

将式（16-9）和（16-11）代入上式，得

$$\begin{aligned}Q_{Ij}&=-\sum_{i=1}^{n}\left[m_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j'}\right)-m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j}\right]\\&=-\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial q_j'}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2\right)-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2\right)\right]\end{aligned}$$

注意到质点系的功能$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2$，最终将广义惯性力可表示为

$$Q_{Ij}=-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial q_j'}-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\qquad (j=1,2,\cdots,k) \tag{16-12}$$

将广义惯性力式（16-12）代入式（16-7），则得

$$\sum_{j=1}^{k}\left(Q_j-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial q_j'}+\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j=0 \tag{16-13}$$

式（16-13）即为广义坐标形式的动力学普遍方程。对于我们所讨论的完整的约束系统，则由$\delta q_j\ \ (j=1,2,\cdots,k)$的独立性，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial q_j'}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j\qquad (j=1,2,\cdots,k) \tag{16-14}$$

式（16-14）称为第二类拉格朗日方程，简称为拉格朗日方程。该式是由 $k$ 个二阶常微分方程组成的方程组，求解该方程组，则得质点系的运动方程。

若主动力是有势力，此时势能量广义坐标及时间的函数，即 $V=V(q_1, q_2, \cdots, q_k, t)$，则有

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad (j=1,2,\cdots,k)$$

将上式代入式（16-14）得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial q'_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

注意到势能函数中不含广义速度 $q'_j$，因而 $\frac{\partial V}{\partial q'_j}=0$。将上式可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial (T-V)}{\partial q'_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

令 $$L = T - V \qquad (16\text{-}15)$$

$L$ 称为拉格朗日函数（Lagrangian function）或动势（Kinetic potential）。于是，可得主动力为有势力的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial q'_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (j=1,2,\cdots,k) \qquad (16\text{-}16)$$

应注意，拉格朗日函数一般是广义坐标、广义速度和时间 $t$ 的函数，其量纲与动能的量纲相同。

综上所述，拉格朗日方程是以广义坐标表示的动力学普遍方程，适用于具有理想完整约束的任意质点系。它具有以下特点：

（1）由于拉格朗日方程的数目等于系统的自由度数，无论广义坐标如何选取，而拉氏方程的形式不变。因而可按统一的程序和步骤直接建立系统的运动微分方程。

（2）在拉氏方程中，只包含系统的动能、广义坐标、广义力或势能等标量，因而不必进行加速度分析，不必虚加惯性力，对于保守系统，也不必分析系统的虚位移，极大地简化了复杂系统动力学问题的分析和求解过程，改变了传统的矢量动力学方法。

2．应用举例

应用拉格朗日方程求解动力学问题时，可按下述的程序和步骤进行。

（1）分析系统的自由度，适当选择与自由度数相同的广义坐标。

（2）分析速度，用广义坐标、广义速度和时间的函数表示系统的动能。

（3）分析主动力，求广义力。若主动力为有势力时，用广义坐标表示系统的势能，从而求出拉氏函数。若主动力为非有势力，广义力一般由虚功法求较方便，即

$$Q_j = \sum \delta W_j / \delta q_j$$

（4）将 $Q_j$，$T$（或 $L$）代入拉氏方程，即可得到系统的运动微分方程。

下面举例说明拉格朗日方程的具体应用。

**例 16-3** 由滑块 $A$、无重刚杆 $AB$ 和摆锤 $B$ 所组成的椭圆摆如图 16-3 所示。设滑块 $A$ 质量为 $m_1$，摆锤 $B$ 质量为 $m_2$，$AB = l$，不计摩擦。试写出系统的运动微分方程。

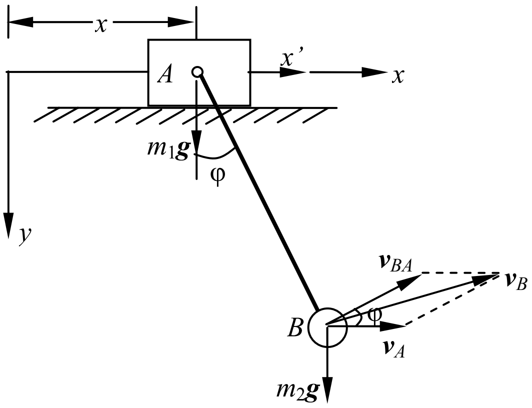

图 16-3

**解** （1）以系统为研究对象。该系统具有两个自由度，取滑块 $A$ 的坐标 $x$ 及杆 $AB$ 的转角 $\varphi$ 为广义坐标（见图 16-3）。

（2）计算动能。任一瞬时，滑块 $A$ 的速度为 $x'$。杆 $AB$ 作平面运动，可由基点法求点 $B$ 的速度，即 $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}$，其中 $v_{BA} = l\varphi'$。于是可得点 $B$ 的速度大小为

$$v_B^2 = v_A^2 + v_{BA}^2 + 2v_A v_{BA}\cos\varphi = x'^2 + l^2\varphi'^2 + 2x' l\varphi'\cos\varphi \tag{a}$$

系统的动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1 v_A^2 + \frac{1}{2}m_2 v_B^2 = \frac{1}{2}m_1 x'^2 + \frac{1}{2}m_2\left(x'^2 + l^2\varphi'^2 + 2x'l\varphi'\cos\varphi\right) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)x'^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\varphi'^2 + m_2 l x'\varphi'\cos\varphi \end{aligned} \tag{b}$$

（3）求广义力。由于系统的主动力只有重力，可分别给系统以虚位移 $\delta x$ 及 $\delta\varphi$，则由虚功法求出对应于广义坐标的广义力。即

$$Q_x = \sum \delta W_x / \delta x = 0$$

$$Q_\varphi = \sum \delta W_\varphi / \delta\varphi = -m_2 g l\sin\varphi\,\delta\varphi/\delta\varphi = -m_2 g l\sin\varphi \tag{c}$$

（4）应用拉格朗日方程。据式（16-14）有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial x'} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

式中，$\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0$，$\dfrac{\partial T}{\partial x'} = (m_1 + m_2)x' + m_2 l\varphi'\cos\varphi$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial x'} = (m_1 + m_2)x'' + m_2 l\varphi''\cos\varphi - m_2 l\varphi'^2\sin\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=-m_2\, l\, x'\varphi'\sin\varphi\,,\quad \frac{\partial T}{\partial \varphi'}=m_2\, l\,\varphi'+m_2\, l\, x'\cos\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \varphi'}=m_2\, l^2\varphi''+m_2\, l\, x''\cos\varphi-m_2\, l\, x'\varphi'\sin\varphi$$

于是，可得系统的运动微分方程

$$(m_1+m_2)x''+m_2\, l\,\varphi''\cos\varphi-m_2\, l\,\varphi'^2\sin\varphi=0 \tag{d}$$

$$l\,\varphi''+x''\cos\varphi+g\sin\varphi=0 \tag{e}$$

讨论

由于本例的主动力为有势力，因而可应用主动力为势力的拉格朗日方程求解。取点 $A$ 的水平面为零势能面，系统的势能为

$$V=-m_2\, g\, l\cos\varphi \tag{f}$$

由式（b）和（f）可得系统的拉格朗日函数

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m_1+m_2)x'^2+\frac{1}{2}m_2\, l^2\varphi'^2+m_2\, l\, x'\varphi'\cos\varphi+m_2\, g\, l\cos\varphi$$

代入保守系统的拉格朗日方程式（16-16）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial x'}-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \varphi'}-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$$

则可求得系统的运动微分方程与式（d）和式（e）相同。

**例 16-4** 两半径均为 $r$、质量均为 $m$ 的均质圆轮 $A$ 和 $B$，用绳缠绕连接如图 16-4 所示。不计绳重和摩擦，求轮 $B$ 下落时两轮的角加速度及 $B$ 轮质心 $C$ 的加速度。

**解** （1）以系统为研究对象。轮 A 作定轴运动，轮 B 作平面运动，系统具有两个自由度。取两轮的转角 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 为广义坐标，设顺时针转向为正（见图 16-4）。

（2）计算动能。两轮的角速度分别为 $\varphi_1'$ 和 $\varphi_2'$，轮 $B$ 质心 $C$ 的速度为

$$v_C=r\,\varphi_1'+r\,\varphi_2'$$

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}J_0\,\varphi_1'^2+\frac{1}{2}m\,v_C^2+\frac{1}{2}J_C\,\varphi_2'^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m\,r^2\right)\varphi_1'^2+\frac{1}{2}m\,r^2(\varphi_1'+\varphi_2')^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m\,r^2\right)\varphi_2'^2$$

$$=\frac{3}{4}m\,r^2\varphi_1'^2+m\,r^2\varphi_1'\,\varphi_2'+\frac{3}{4}m\,r^2\varphi_2'^2$$

（3）计算拉氏函数。由于系统的主动力为有势力，以过点 $O$ 的水平面为势能零面，系统的势能的

$$V=-mg(l_0+r\varphi_1+r\varphi_2)$$

其中 $l_0$ 为系统开始运动时两轮心的高度差。系统的拉氏函数为

$$L=T-V=\frac{3}{4}m\,r^2\varphi_1'^2+m\,r^2\,\varphi_1'\varphi_2'+\frac{3}{4}m\,r^2\varphi_2'^2+m\,g(l_0+r\,\varphi_1+r\,\varphi_2)$$

（4）应用拉格朗日方程。据式（16-16），有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \varphi_1'}-\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \varphi_2'}-\frac{\partial L}{\partial \varphi_2}=0$$

其中 $$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}=mgr,\quad \frac{\partial L}{\partial \varphi_1'}=\frac{3}{2}mr^2\varphi_1'+mr^2\varphi_2'$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \varphi_1'}=\frac{3}{2}mr^2\varphi_1''+mr^2\varphi_2''$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2}=mgr,\quad \frac{\partial L}{\partial \varphi_2'}=mr^2\varphi_1'+\frac{3}{2}mr^2\varphi_2'$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \varphi_2'}=mr^2\varphi_1''+\frac{3}{2}mr^2\varphi_2''$$

于是，可得系统的运动微分方程为

$$3r\varphi_1''+2r\varphi_2''=2g$$
$$2r\varphi_1''+3r\varphi_2''=2g$$

联立求解此方程组，可得

$$\varphi_1''=\varphi_2''=\frac{2g}{5r}$$

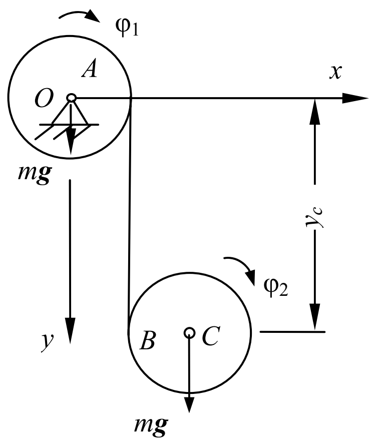


图 16-4

故轮 $A$ 与轮 $B$ 的角加速度相同，均为 $\frac{2g}{5r}$，转向为顺时针，根据运动学关系，可得轮 $B$ 质心 $C$ 的加速度大小为

$$a_C=r(\varphi_1''+\varphi'')=\frac{4}{5}g$$

$\boldsymbol{a}_C$ 的方向为铅垂向下。

**讨论** 若系统的广义坐标取为轮 $A$ 的转角 $\varphi_1$ 和轮 $B$ 质心 $C$ 的坐标 $y_c$，请读者考虑如何求解？

**例 16-5** 物块 $A$ 和 $B$ 的质量为 $m$，用刚度系数为 $k$ 的三根弹簧连接如图 16-5 所示。不计摩擦，试求物块 $A$、$B$ 的运动微分方程。

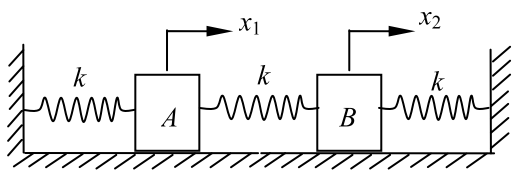


图 16-5

**解** （1）以系统为研究对象。系统的自由度系数为二，分别取物块相对其平衡位置的水平偏移 $x_1$ 和 $x_2$ 为广义坐标（见图 16-5）。

（2）任一瞬时，物 $A$ 和 $B$ 的速度分别为 $x_1'$ 和 $x_2'$，可得系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}mx_1'^2+\frac{1}{2}mx_2'^2$$

（2）系统的主动力为有势力，三根弹簧的变形量分别为 $x_1$，$x_2$-$x_1$ 和 $x_2$，取弹簧未变形

的末端为势能零点，则系统的势能为

$$V=\frac{1}{2}k\,x_1^2+\frac{1}{2}k\left(x_2-x_1\right)^2+\frac{1}{2}k\,x_2^2$$

拉氏函数为 $$L=T-V=\frac{1}{2}m\,x_1'^2+\frac{1}{2}mx_2'^2-\frac{1}{2}k\,x_1^2-\frac{1}{2}k\left(x_2-x_1\right)^2-\frac{1}{2}k\,x_2^2$$

（4）应用拉氏方程。据式（16-16），有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial x_1'}-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0\,,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial x_2'}-\frac{\partial L}{\partial x_2}=0$$

其中，

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=-kx_1+k\left(x_2-x_1\right),\quad \frac{\partial L}{\partial x_1'}=m\,x_1'$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=-k\left(x_2-x_1\right)-kx_2\,,\quad \frac{\partial L}{\partial x_2'}=m\,x_2'$$

故系统的振动微分方程为

$$mx_1''-k\left(x_2-2x_1\right)=0\,,\quad mx_2''-k\left(x_1-2x_2\right)=0$$

**讨论**　读者试分别以 A 块和 B 块为研究对象，列动力学基本方程求解本题。