

# 线性系统控制工程

## 理论知识讲义

主讲教师  
赵千川 赵明国  
2014 年秋

LCD 2014年秋季

# 绪论

## §0.1 自动控制理论的发展过程

为了说明现代控制理在整个控制理论中的地位，我们简短地叙述自动控制理论发展过程。自动控制理论的发展大体可划分为三个阶段。

### §0.1.1 经典控制理论——第一代控制理论

过去50年代的“第一代”控制理论，即所谓经典控制理论，以单变量控制与调节为主要内容，所用的工具主要是根轨迹法和频率响应法。以微分方程和传递函数为数学模型。优点：方法概念简单，计算方便，在多数情况下物理意义较明确。缺点是建立在输入输出关系即传递函数基础上的经典控制理论有其限局性，只知道输入——输出关系，对系统内部的变化知道甚少，即不能描述系统全部运动状态，工程上近似性（根轨迹和频率法）带有明显的依靠手工进行分析和综合的色彩。而且设计多凭经验，很难处理多输入—多输出的系统。

### §0.1.2 现代控制理论——第二代控制理论

现代控制理是在50年代末逐步形成并迅速发展的一门新兴学科分支。现代控制理论的诞生与发展是由于实践需要，技术条件可能、理论发展这三个方面互相影响，互相促进的结果。

1) 实践的需要，现代控制理是应分析与设计高质量和大型复杂控制系统的需要而产生的。随着科学技术的发展，特别是航天、航空、航海、导弹等军事尖端技术的发展，对自动控制系统提出越来越高的要求。这些要求可以概括为两个字：高、大。即：从质上说，要求设计高质量（如高精度、快速响应、低消耗、低代价等）的控制系统；从量上说控制系统越来越大型、复杂、综合化，从单个局部自动化发展成综合自动化。

2) 技术条件的可能，电子数字计算机为现代控制理论的发展提供了最主要的技术条件。计算机是现代的控制系统中的核心部分，计算机在现代控制系统的分析和设计中，被广泛采用来进行数字仿真，计算机辅助设计等。

3) 理论发展, 现代控制理论是以经典控制理论为基础, 以近代应用数学为理论工具的技术科学。50年代末60年代初应用数学的发展主要有:

- a) 1958年原苏联学者庞德里亚金等提出的解决最佳控制问题的极大值原理;
- b) 1960年美国学者*Kalman* (卡尔曼) 等提出 的最佳线性最小方差递推滤波 (即*Kalman*滤波) ;
- c) 同年*Kalman*提出了可控性与可观测性概念;
- d) *Bellman* (1957年) 提出了动态规划法;
- e) 50年代后期*Bellman*等人提出状态变量法。

而其中, 状态空间概念和方法的引入, 则起了很重要的推动作用。1960年美国自动控制第一届联合年会上, 首先提出了现代控制理论这一名称, 从此标志着现代控制理论的正式产生。

现代控制理论以多变量控制、最优控制为主要内容, 采用时域法, 以状态方程为数学模型。优点: 状态方程模型适用性相当广泛, 可用于描述线性或非线性系统, 常系数或变系数系统, 集中参数或分布参数系统; 状态方程描述了系统内部和系统输入、输出的关系, 所以它描述了系统的全部运动状态。缺点: 状态方程模型的物理直观性较差, 模型结构和参数的物理概念不够明确。

### §0.1.3 大系统理论与智能控制理论——第三代控制理论

进入70年代以后, 可以说“大系统理论”与“智能控制理论”是“第三代”控制理论的重要内容。这是控制理论向广度与深度发展的新阶段。所谓大系统, 是指规模大, 结构复杂变量众多的信息与控制系统。在大系统理论中, 采用状态方程和代数方程相结合的数学模型, 状态空间和运筹学相结合的方法。主要研究大系统的稳定性、最优化、模型化及模型简化等问题。智能控制是具有某些仿人智能的工程控制与信息处理系统。其中最典型的是智能机器人。控制理论的这一阶段, 是进入七十年代后广泛出现的各学科互相渗透的结果。大系统理和智能控制理论, 尽管目前尚在不断发展和完善过程中, 但已受到广泛重视和注意, 并开始得到一些应用。

## §0.2 现代控制理论主要内容

现代控制理论是研究系统的状态的分析和综合的理论。它主要包括：

(1) 线性控制系统的一般理论

线性控制系统理论是现代控制理论中最成熟的理论，它包括：线性对象的状态空间描述及分析；状态的常规控制与观测，状态反馈系统等。

(2) 系统辨识，如何从动态系统的输入和输出求系统的方程，即建立系统的状态空间数学模型，这是一件基本工作。

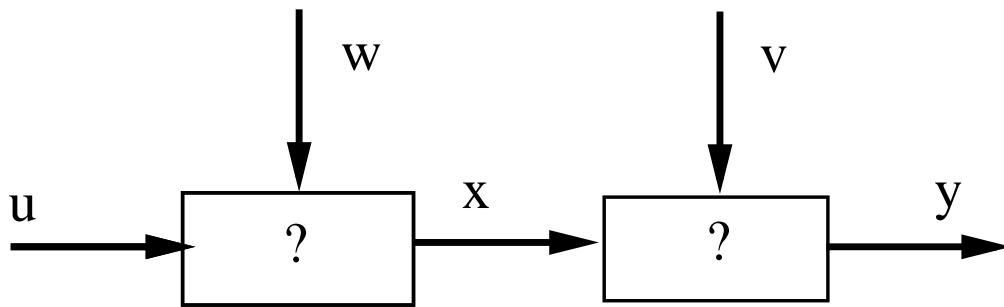


图 1

如图1所示的 $u(t)$ 为系统的输入、 $y(t)$ 为系统的输出，消除 $w(t)$ 和 $v(t)$ 的影响来找一个最适合于 $u(t)$ 和 $y(t)$ 的数学模型，这一大类问题称动态系统的辨识问题。

当模型结构已经确定，用输入输出来确定其参数的，叫做参数估计问题，同时确定模型结构和参数的则泛称系统辨识问题。

(3) 最佳控制问题，即如何按一定目标来确定一个控制函数。

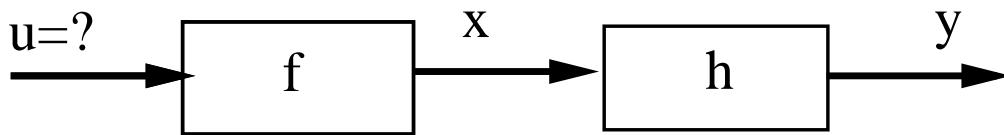


图 2

假设图2系统，有一组输入函数（控制函数） $u(t)$ 作用在受控系统上，其相应状态变量是 $x(t)$ ，通过量测系统可得到这些状态的某种组合

为 $\mathbf{y}(t)$ 。从实际需要出发，可以为受控系统指定一些目标。例如能耗最小，时间最短，偏差最小等，可以提出一系列的目标函数

$$J = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (1)$$

受控系统的运动方程即状态方程为：

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) \quad (2)$$

当(1)、(2)式已知，则寻找一个控制函数 $\mathbf{u}(t)$ 满足条件(2)，并使 $J$ 为极值（极大或极小）的问题。这就是现在控制理论中最普遍的课题之一，称之为最优控制问题。

如果所选用的目标函数 $J$ 是一种二次型函数，则(1)式变成

$$J = \mathbf{x}^T(t_f)Q_0\mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t)Q_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)Q_2\mathbf{u}(t)] dt \quad (3)$$

式中

$t_0, t_f$ ——分别为控制过程的开始和结束时间

$Q_0, Q_1, Q_2$ ——要加以确定的权矩阵

这就是最优控制问题中最成熟的线性二次型最优控制问题。

在解决最优控制问题中，庞德里亚金的最大值原理和Bellman的动态规划，是其中最重要的两种方法。

(4) 最佳滤波，如何从受到随机干扰的输入 $\mathbf{u}(t)$ 和输出 $\mathbf{y}(t)$ 来求状态向量 $\mathbf{x}(t)$ 。亦称最优估计。

在系统数学模型已经建立的基础上，通过对系统输入输出数据的测量，利用统计方法，对系统本来的状态进行预测。或称之为状态估计。状态估计理论中最有效的是Kalman滤波理论，Kalman滤波理论的提出，奠定了现代控制理论的基础。

此外现代控制理论包括随机最优控制、自适应控制、分布参数系统、非线性系统理论、多变量反馈系统的现代频域方法、容错控制、鲁棒控制、 $H_\infty$ 控制（近年发展起来）等等。这里，我们不可能涉及现代控制理论的全部内容，只讲解线性系统理论中的基本部分。（见自动控制理论（二）教学大纲）。

### §0.3 本课程的改革思路、教学安排和要求

在指导思想上更加注重基本理论和基本概念的教学，注重培养分析问题的能力；积极引导学生重视实验环节，与实验中心配合搞好实验建设，培养学生的实践能力。

在学时安排上继续执行48学时的模式（从64学时减到48学时），减少课堂理论学时，增加综合性设计型的实验学时，且将实验单独开出，以便为学生提供选择余地，为实验室实验灵活安排创造条件，进一步丰富实验内容，提高实验水平。同时适当安排课内习题讲解、讨论和综合练习，课外加强答疑和讨论；

在课程内容安排上更加突出重点，讲解以线性连续系统为主，以状态空间表达、状态方程的求解、能控性能观性、状态反馈控制器、状态观测器、解耦控制、有外扰时控制系统的综合、李亚普诺夫稳定性原理、最优控制为主要内容（详见《自动控制理论（二）》课程教学大纲）。线性离散系统以课外自学为主，有兴趣并有余力的同学可以自学*Kalman*滤波理论。课外安排答疑辅导，每章结束后将给出作业点评。

#### 本课程要求：

本课程特点是数学推导较多，理论性较强，要求掌握基本概念，掌握分析问题和解决问题的基本方法。具体要求如下：

- (1) 要有好的学风，要严谨、勤奋，要踏踏实实地学；
- (2) 上课不迟到，不早退，不旷课，希望课上认真听课，课后认真复习，并认真独立地做习题、思考题和实验，及时交作业，及时改正作业错误；
- (3) 以课堂讲课内容为主线，尽可能拓宽知识面，广泛参考其它教材和参考资料，积极认真选作实验，提倡积极讨论研究问题，培养创新意识。

每周二交作业，每周五下午3:00—4:00安排答疑，有问题希望及时解决。具体教学内容和安排见自动控制理论（二）教学大纲。

#### 参考文献：

（除教学大纲指出的参考文献外还可参考以下文献）

Katsuhiko Ogata. Modern Control Engineering (Fourth Edition). Prentice Hall Inc. 2002

薛定宇, 反馈控制系统设计与分析——MATLAB语言应用, 清华大学出版社, 2000年4月

T.E. Fortmann, K.L. Hitz, 线性控制系统引论, 吕林等译, 机械工业出版社, 1980

郑大钟, 线性系统, 清华大学出版社, 2002年10月

John J.D'Azzo, Constantine H. Houpis, Linear Control System Analyse and Design, Fourth Edition, 清华大学出版社, 2000年12月

Morris Driels, Linear Control System Engineering, 清华大学出版社, 2000年12月  
或其中译本线性控制系统工程, 金爱娟, 李少龙, 李航天译, 清华大学出版社2005年6月,

Robert H. Bishop, Modern Control Systems Analysis and Design Using Matlab and Simulink, 清华大学出版社, 2003年12月

# 第一章 控制系统的状态空间表达式

在经典控制理论中，主要研究的仅仅是输入、输出之间的动态关系。对于一个线性定常系统，是用一个高阶微分方程或传递函数加以描述的，它们将某个变量作为输出，直接和输入联系起来。系统的动态特性由该变量对给定输入的响应来表征。虽然这个输出变量的响应可能是我们直接感兴趣的唯一结果，但是系统除了这个变量外，还包含有其它相互独立的变量。关于它们对给定输入的响应如何，则必须另行研究。因此，用一个高阶微分方程或传递函数来描述一个线性定常系统显然有其不足之处，它们不能完全描述系统的全部运动状态。

如图1.1所示的系统，其中 $y$ 表示小车运动的位移， $u$ 表示外作用力， $F$ 为摩擦力， $k$ 为摩擦系数， $M$ 为小车的质量。根据力学定理，系统的方程为：

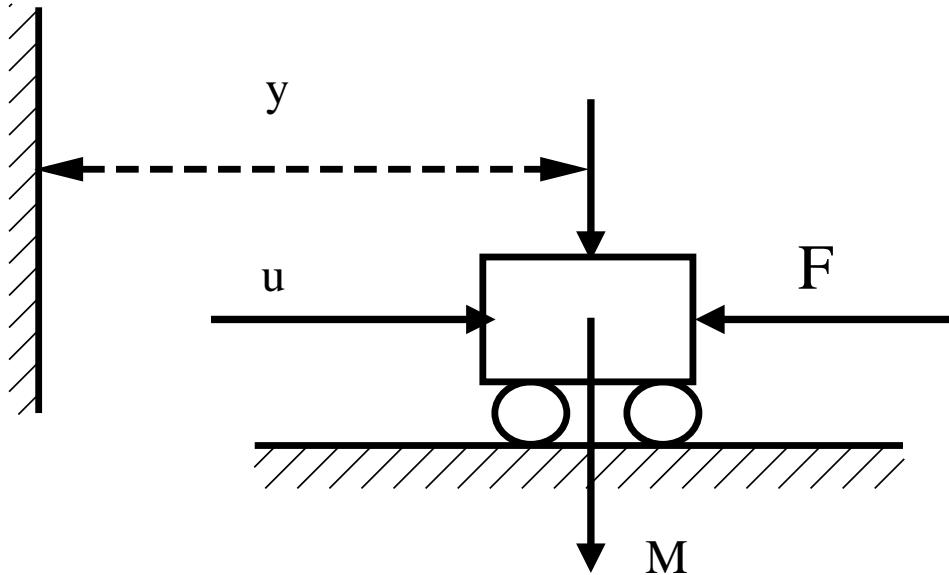


图 1.1

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} = u \quad (1.1)$$

以小车的位移 $y$ 为输出，外作用力 $u$ 作为输入，系统的传递函数为：

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s(Ms + k)} \quad (1.2)$$

我们知道，光有位置 $y$ 还不能完全表达小车的状态。对于某个位移 $y$ ，速度可以具有任何数值而与位移的数值无关。要完整地描述这个系统的状态，既要知道 $y$ 又要知道 $\frac{dy}{dt}$ 。一般说来，要完整地描述任意一个系统都需要知道其全部独立变量。这就说明建立在输入—输出关系上的古典控制理论存在着局限性。

五十年代后期开始，贝尔曼（Bellman）等人提出了状态变量法。在用状态空间法分析系统时，系统的动态特性是由状态变量构成的一阶微分方程组来描述的。在数字计算机上求解一阶微分方程组比求解与之相应的高阶微分方程容易得多，而且可以同时得到系统全部独立变量的响应，因而能同时确定系统的全部内部运动状态。此外，状态空间法还可以方便地处理初始条件，可以用来分析设计多变量、时变和非线性系统，也可以应用于随机过程和采样数据系统，因此它是研究大型、复杂、高质量控制系统的理论基础。

现代控制理论是在引入状态和状态空间概念的基础上发展起来的。因此，确定控制系统状态空间的描述，即建立状态空间的数学模型，是一个基本问题。

## §1.1 状态的概念、状态方程和输出方程

### 一、状态

动态系统的状态粗略地说就是指系统的过去、现在和将来的运动状况。精确地说，状态需要一组必要而充分的数据来说明。如图1.1中所示的小车的运动，这个系统的状态就是车子每一时刻的位置（位移）和速度。

### 二、状态变量

系统的状态变量就是指足以完全确定系统运动状态的最小一组变量。一个用 $n$ 阶微分方程描述的系统，就有 $n$ 个独立变量，求得这 $n$ 个独立变量的时间响应，系统的运动状态也就被揭示无遗了。因此，可以说系统的状态变量就是 $n$ 阶系统的 $n$ 个独立变量。

设  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  为系统的一组状态变量，则它应该满足下列两个条件：

1、在任何时刻  $t = t_0$ ，这组变量的值  $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$  都表示系统在该时刻的状态；

2、当系统在  $t \geq t_0$  的输入和上述初始状态确定以后，状态变量便能完全确定系统在任何  $t \geq t_0$  时刻的行为。

图1.1中，只要已知  $t = t_0$  时刻小车的位置  $y_0$  和速度  $v_0$ ，并且知道  $t \geq t_0$  时作用函数  $u$ ，那么，小车在任何时刻的状态就确定了。

很显然， $n$  阶动态系统在  $t$  时刻的状态  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  ( $t_0 \leq t < \infty$ ) 是由其在  $t_0$  时刻的初始状态  $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$  和  $t \geq t_0$  时的输入函数  $u(t)$  所唯一确定的，而与  $t_0$  前时刻的状态和输入无关。

同一个系统，究竟选取那些变量作为状态变量，这不是唯一的，要紧的是这些状态变量是相互独立的，且其个数应等于微分方程的阶数。因为微分方程的阶数是唯一地取决于系统中独立储能元件的个数，因此，状态变量的个数就应等于系统独立储能元件的个数。

还应该指出，状态变量不一定是物理上可量测或可观测的量，但通常总是选择易于测量或观测的量作为状态变量，因为当系统实现最佳控制规律时，需要反馈所有的状态变量。

### 三、状态向量

如果完全描述一个系统的动态行为需要  $n$  个状态变量  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ，那么这  $n$  个状态变量作分量所构成的向量  $\mathbf{x}(t)$  就叫做该系统的状态向量，记作

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ 或 } \mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T \quad (1.3)$$

### 四、状态空间

以状态变量  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  为坐标所构成的  $n$  维空间称为状态空间。任何状态，都可以用状态空间中的一个点来表示。即在特定时刻  $t$ ，状态向量  $\mathbf{x}(t)$  在状态空间中是一点。已知初始时刻  $t_0$  的  $\mathbf{x}(t_0)$ ，就得到状态空

间中的一个初始点。随着时间的推移， $\mathbf{x}(t)$ 将在状态空间中描绘出一条轨迹，称为状态轨线。显然，这一轨线的形状，完全由系统在 $t_0$ 时刻的初始状态和 $t \geq t_0$ 的输入以及系统的动态特性唯一决定的。状态向量的状态空间表示则将向量的代数结构和几何概念联系了起来。

### 五、状态方程

描述系统状态变量与系统输入之间关系的一阶微分方程组称为状态方程。

图1.1中，若令 $x_1 = y$ ， $x_2 = \frac{dy}{dt}$ ，即取 $x_1, x_2$ 为此系统的一组状态变量，则得一阶微分方程组：

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = x_2 \quad (1.4)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{M} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{M}u = -\frac{k}{M}x_2 + \frac{1}{M}u \quad (1.5)$$

即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \quad (1.6)$$

式(1.6)即为该系统的状态方程，上式可简写成：

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (1.7)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k}{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

### 六、输出方程

描述系统的状态变量与输出变量关系的一组代数方程称为输出方程。

图1.1中，指定位移 $y$ 为系统的输出，则有

$$y = x_1 \quad (1.8)$$

或

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

式(1.9)即为该系统的输出方程，简写成

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

状态方程和输出方程一道构成一个系统动态的完整描述，称为系统的状态空间表达式。如式(1.6)和式(1.9)就是图1.1系统的状态空间表达式。

下面举几个例子，进一步说明列写状态方程和输出方程的方法。

**Example 1.1** 如图1.2所示的R—L—C网络，此系统有两个独立储能元件电容C和电感L，所以应有两个独立变量。现选*i*和*v<sub>C</sub>*为两个状态变量，根据电学原理，可以写出两个含有状态变量的一阶微分方程：

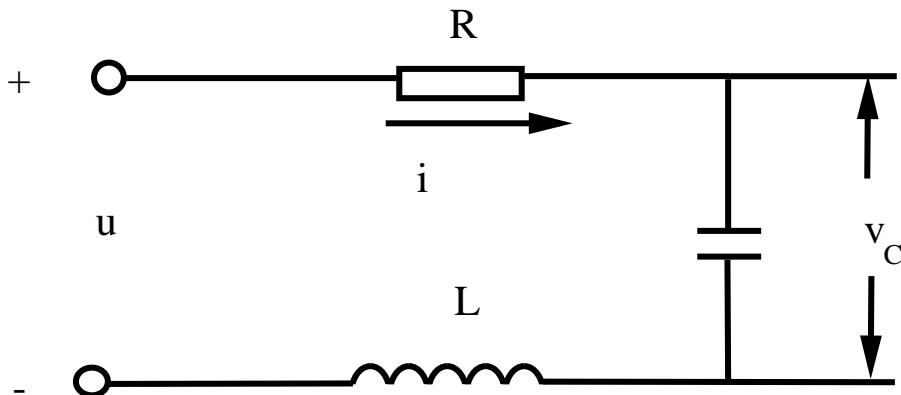


图 1.2

$$c \frac{dv_c}{dt} = i \quad (1.11)$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v_c = u \quad (1.12)$$

即

$$\begin{cases} \dot{v}_c = \frac{1}{c}i \\ \dot{i} = -\frac{1}{L}v_c - \frac{R}{L}i + \frac{1}{L}u \end{cases} \quad (1.13)$$

令

$$\begin{cases} v_c = x_1 \\ i = x_2 \end{cases} \quad (1.14)$$

并写成向量和矩阵形式，则状态方程为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \quad (1.15)$$

若以  $v_c$  为输出，则输出方程为：

$$y = [1 \ 0] \mathbf{x} \quad (1.16)$$

**Example 1.2** 如图1.3所示的水槽系统中，设水槽1的横截面积为  $C_1$ ，水位为  $x_1$ ；水槽2的横截面积为  $C_2$ ，水位为  $x_2$ ，  $R_1, R_2, R_3$  为各导管的液阻。试导出以  $x_1, x_2$  为状态变量的状态方程和以  $y_1, y_2$  为输出量的输出方程。其中  $u$  为流入水槽1的流量（即单位时间内流进的水量）， $y_1, y_2$  为单位时间内流出的水量。

考虑水槽1的水量变化，包括  $u$  及水槽的水位差  $(x_2 - x_1)$  造成的水量变化  $(x_2 - x_1)/R_3$  和从水槽流出的水量  $y_1 = x_1/R_1$ ，可以得到：

$$c_1 \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_2 - x_1}{R_3} - \frac{x_1}{R_1} + u \quad (1.17)$$

同理，对水槽2可以得到

$$c_2 \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{R_3} - \frac{x_2}{R_2} \quad (1.18)$$

将上两式加以整理得到

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_3 C_1}) x_1 + \frac{1}{R_3 C_1} x_2 + \frac{1}{C_1} u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{R_3 C_2} x_1 - (\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_3 C_2}) x_2 \end{cases} \quad (1.19)$$

写成向量和矩阵形式，得到状态方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_3 C_1}) & \frac{1}{R_3 C_1} \\ \frac{1}{R_3 C_2} & -(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_3 C_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (1.20)$$

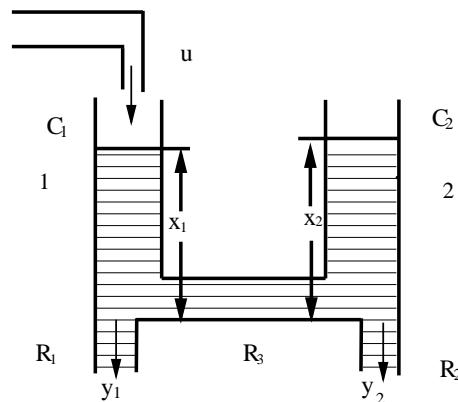


图 1.3

输出方程为:  $y_1 = \frac{1}{R_1}x_1$      $y_2 = \frac{1}{R_2}x_2$  或写成矩形的形式, 得输出方程为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

**Example 1.3** 如图1.4所示的电枢控制型直流电动机, 由于激磁电流*i<sub>f</sub>*为常数, 所以电动机转矩*M<sub>D</sub>*[牛顿·米]与电枢电流*i<sub>a</sub>*成正比:

$$M_D = k_a i_a \text{ 其中 } k_a \text{ 为转矩常数[牛顿·米/安].}$$

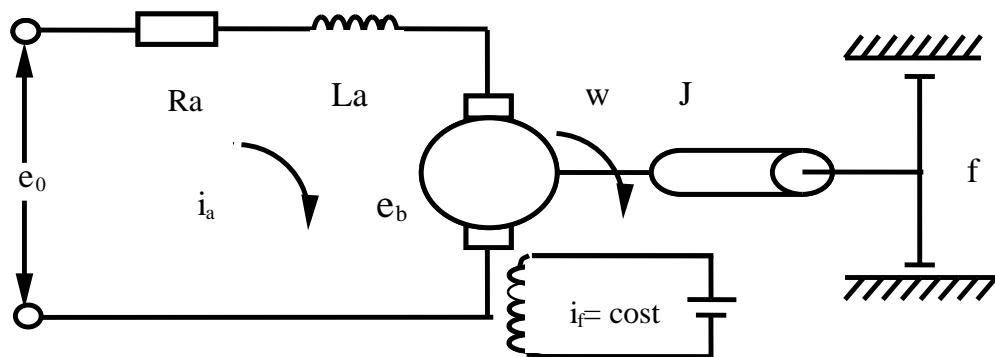


图 1.4

在电枢控制型直流电动机中, 只有电枢电感*L<sub>a</sub>*和转子转动惯量*J*两个

独立储能元件，因此，选择电枢电流*i<sub>a</sub>*和转速*w*为一组状态变量，对于电枢回路有下面微分方程：

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_0 \quad (\text{电枢回路微分方程}) \quad (1.22)$$

其中*e<sub>b</sub>*是反电势，它与转速成正比：

$$e_b = k_e \cdot w \quad (1.23)$$

其中*k<sub>e</sub>*为电动势常数[伏/弧度/秒]。假设负载转矩为零，对于转矩驱动机械系统有下面微分方程：

$$J \cdot \frac{dw}{dt} + f \cdot w = k_a \cdot i_a \quad (\text{力学回路微分方程}) \quad (1.24)$$

其中*J*[牛顿·米·秒<sup>2</sup>]为转子的转动惯量，*f*[牛顿·米/弧度·秒<sup>-1</sup>]为粘滞摩擦系数。将上述状态方程改写成：

$$\begin{cases} \frac{di_a}{dt} = -\frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{k_e}{L_a} w + \frac{1}{L_a} e_0 \\ \frac{dw}{dt} = \frac{k_a}{J} i_a - \frac{f}{J} w \end{cases} \quad (1.25)$$

写成向量矩阵形式为：以*w*为输出的输出方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k_e}{L_a} \\ \frac{k_a}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} e_0 \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ w \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

**Example 1.4** 如图1.5所示的力学系统，作用外力为*u*，输出位移为*x*.求该系统的状态方程和输出方程。

此系统中位移*x*和速度*v*为两个独立的状态变量，根据牛顿定律有：

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} + fv + kx = u \\ v = \frac{dx}{dt} \end{cases} \quad (1.27)$$

经整理，得：

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{f}{m}v - \frac{k}{m}x + \frac{1}{m}u \\ \frac{dx}{dt} = v \end{cases} \quad (1.28)$$

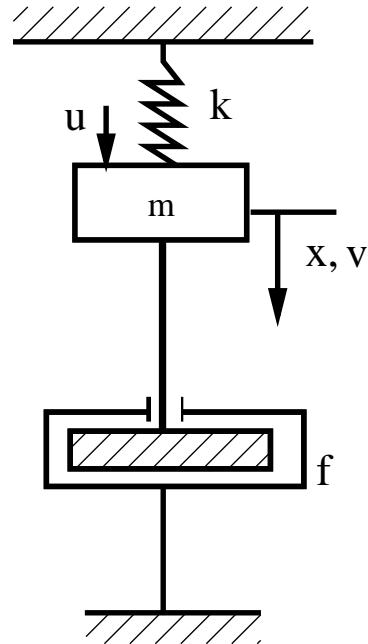


图 1.5

写成向量矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{f}{m} & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (1.29)$$

输出方程, 由于

$$y = x \quad (1.30)$$

故得

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

一般地, 对于单输入-单输出系统, 状态方程具有如下形式:

LCD 2014年秋季

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1u \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2u \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_nu \end{cases} \quad (1.32)$$

输出方程有如下形式:

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad (1.33)$$

用向量矩阵表示的状态空间表达式则为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \end{cases} \quad (1.34)$$

式中  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$   
表示  $n$  维状态向量, 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

表示系统内部状态之间的联系, 称为状态矩阵(或称系统矩阵, 系数矩阵), 是  $n \times n$  方阵; 向量

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

表示输入对状态的作用, 称为输入矩阵(或控制矩阵), 它为  $n \times 1$  的列阵; 向量

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

表示输出与状态的关系，称为输出矩阵，它为 $1 \times n$ 的行向量。

对于一个复杂系统，它可以有 $r$ 个输入， $m$ 个输出，此时状态方程变为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \cdots + b_{1r}u_r \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \cdots + b_{2r}u_r \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \cdots + b_{nr}u_r \end{array} \right. \quad (1.38)$$

而输出方程，不仅是状态变量的组合，而且在特殊情况下，可以有输入向量的直接传递，因而有以下一般形式：

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = C_{11}x_1 + C_{12}x_2 + \cdots + C_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \cdots + d_{1r}u_r \\ y_2 = C_{21}x_1 + C_{22}x_2 + \cdots + C_{2n}x_n + d_{21}u_1 + \cdots + d_{2r}u_r \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ y_m = C_{m1}x_1 + C_{m2}x_2 + \cdots + C_{mn}x_n + d_{m1}u_1 + \cdots + d_{mr}u_r \end{array} \right. \quad (1.39)$$

因而多输入—多输出系统状态空间表达式的向量矩阵形式为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{array} \right. \quad (1.40)$$

式中 $\mathbf{x}$ 和 $A$ 与单输入系统一样，分别为 $n$ 维状态向量和 $n \times n$ 状态矩阵；

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

表示 $r$ 维输入（或控制）向量；

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

表示 $m$ 维输出向量；

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

表示 $n \times r$ 输入（或控制）矩阵；

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

表示 $m \times n$ 输出矩阵；

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

表示输入量的 $m \times r$ 直接传递矩阵。

综合上述分析，可以清楚地看出：状态空间的描述和经典控制理论中的描述不同。状态空间描述了系统内部状态和输入、输出关系，而在经典控制理论中描述的是输入输出之间的关系。因而状态空间描述揭示了系统的内部联系，输入引起状态的变化，而状态的变化决定输出的变化。输入引起状态的变化是一个运动过程，用微分方程组来表示，即状态方程。状态决定输出的变化则是一个变换过程，数学上表现为一个变换方程，即代数方程。从上面分析还可以看到，系统状态变量的个数等于系统所包含的

独立贮能元件的个数。因此，一个 $n$ 阶系统有且仅有 $n$ 个状态变量可以选择。对于简单的电路和力学回路，选择独立的贮能元件的贮能变量，如电容端电压 $v_c$ ，电感中（或电枢中）电流 $i_l$ ，惯性元件的速度 $v$ ，弹性元件的位移 $x$ ，电动机转子的角速度 $w$ ，以及水槽的水位 $h$ 等作为状态变量是方便的。同时看到状态变量的选择不是唯一的。

状态空间表达式的突出优点是当状态变量个数，输入和输出个数增加时并不增加方程在表达和分析上的复杂性。同时，系统的状态空间分析法是在时域内进行的一种矩阵运算的方法，因此特别适用于计算机来运算。

## §1.2 系统按其状态空间表达式进行分类

通常，动态系统的状态、输入、输出可以都是向量，用 $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{u}(t)$ 、 $\mathbf{y}(t)$ 来表示，其维数为 $n$ 。系统本身常用方块图，如图1.6所示。

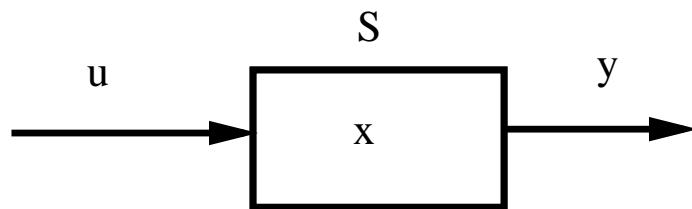


图 1.6

系统的状态空间描述，是其动力学性质的完整表达。因此，按其状态空间表达式将系统分类，就能充分揭示它们在某些特性上的质的差别。

一般的非线性、时变动态系统可以用下列状态变量形式的微分方程和输出方程来描述。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases} \quad (1.46)$$

其中 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{h}$ 是状态 $\mathbf{x}(t)$ 和输入 $\mathbf{u}(t)$ 的某类非线性函数。

如果(1.46)式中向量函数 $\mathbf{f}, \mathbf{h}$ 的元都是 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{u}(t)$ 的线性函数：则称此系统为线性系统。对于线性系统其方程变为：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1.47)$$

其中  $A(t), B(t), C(t), D(t)$  的元是时间  $t$  的函数，因此称此类系统是线性时变系统。通常为了形象起见，式(1.47)代表的系统可以表示为图1.7。

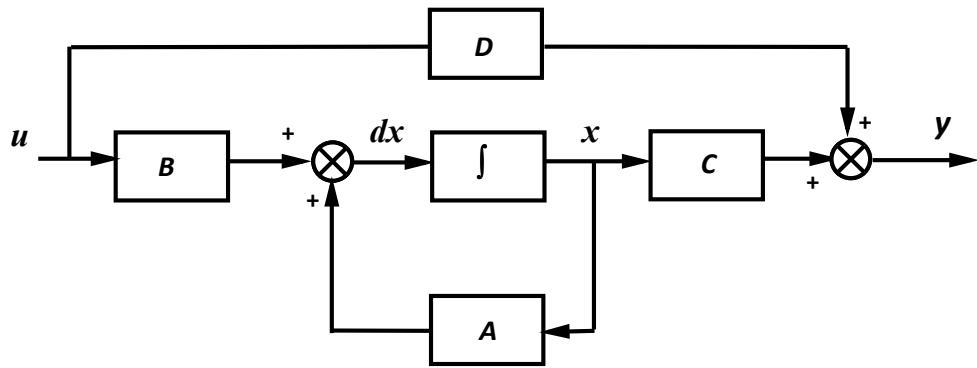


图 1.7

严格地说，一切物理系统都是非线性的，但是其中相当部分可以在足够精度下，用线性系统来近似。和非线性系统相比，线性系统无论在分析上或是在综合上都要简单得多。线性系统理论是现代控制理论中内容最成熟应用最广泛的一个分支。

一个线性时不变系统是用下式来描述的：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1.48)$$

其中  $A, B, C, D$  为常数矩阵。时不变性的简单含义是系统参数不随时间而变化。

式(1.48) 所示的系统是本讲义主要研究的系统，在上节中已经指出，因为输入输出都是向量，所以称为多变量（或多输入多输出）系统。作为子集的标量系统（或单输入单输出系统）具有如下形式：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + d\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1.49)$$

式(1.49)也在上节出现过。

### §1.3 由状态方程导出传递函数阵

上面我们曾讨论了由系统的传递函数推导状态方程的问题。在这一节里，我们从状态方程出发，来导出系统的传递函数阵，进一步讨论这两种表达式之间的内在联系。

#### 一、单输入一一单输出系统

令系统的状态方程和输出方程为：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du \end{cases} \quad (1.50)$$

式中 $\mathbf{x}$ 为 $n$ 维向量， $y, u$ 分别为输出和输入，它们都是标量。在这种情况下， $A$ 是 $n \times n$ 方阵， $\mathbf{b}$ 是 $n \times 1$ 列阵， $\mathbf{c}^T$ 是 $1 \times n$ 行阵， $d$ 为标量，一般为零。

对(1.50)式进行拉氏变换，并假定初始条件为零，则有

$$s\mathbf{x}(s) = A\mathbf{x}(s) + \mathbf{b}u(s) \quad (1.51)$$

$$y(s) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(s) + du(s) \quad (1.52)$$

由(1.51)式得

$$\mathbf{x}(s) = (sI - A)^{-1}\mathbf{b}u(s) \quad (1.53)$$

将(1.53)式代入(1.52)式得

$$y(s) = [\mathbf{c}^T(sI - A)^{-1}\mathbf{b} + d]u(s) \quad (1.54)$$

于是可得传递函数为：

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \mathbf{c}^T(sI - A)^{-1}\mathbf{b} + d \quad (1.55)$$

可见只需知道系统状态方程中的系数阵 $A, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T$ 和 $d$ ，就能求得传递函数 $g(s)$ 。

**Example 1.5** 已知一个系统的状态方程和输出方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -5x_1 - 3x_2 - 2x_3 + u \end{cases} \quad (1.56)$$

$$y = \frac{3}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \quad (1.57)$$

求系统的传递函数。

解: 首先将状态方程和输出方程用矩阵形式表示成

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.58)$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

因为

$$[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 5 & 3 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|} \quad (1.60)$$

$$= \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 5} \begin{bmatrix} s^2 + 2s + 3 & s + 2 & 1 \\ -5 & s(s+2) & s \\ -5s & -(3s+5) & s^2 \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

故

$$g(s) = \frac{\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{s^3 + 2s^2 + 3s + 5} \begin{bmatrix} s^2 + 2s + 3 & s + 2 & 1 \\ -5 & s(s+2) & s \\ -5s & -(3s+5) & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{s^3 + 2s^2 + 3s + 5} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix} = \frac{s^2 + 2s + 3}{2s^3 + 4s^2 + 6s + 10} \quad (1.63)$$

在经典控制理论中，已知  $g(s)$  具有如下的形式：

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (1.64)$$

显然，(1.55)和(1.64)两式应是相等的。为了讨论这两个表达式之间的联系，我们把(1.55)式化为如下形式：

$$g(s) = \mathbf{c}^T \frac{\text{adj}(SI - A)}{|SI - A|} \mathbf{b} + d \quad (1.65)$$

$$= \frac{\mathbf{c}^T \text{adj}(sI - A) \mathbf{b} + d|sI - A|}{|sI - A|} \quad (1.66)$$

比较(1.66)和(1.64)两式可知，传递函数的分子多项式等同于多项式  $\mathbf{c}^T \text{adj}(sI - A) \mathbf{b} + d|sI - A|$ ；传递函数的分母多项式即为系数矩阵  $A$  的特征多项式。

换句话说，传递函数的极点即为状态矩阵  $A$  的特征值。由此也可得出单输入——单输出线性定常系统稳定的充要条件是要求  $g(s)$  的极点均具有负实部。在状态空间表达式中，这即要求状态矩阵  $A$  的所有特征值均具有负实部。

## 二、多输—多输出系统

已知系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{cases} \quad (1.67)$$

式中： $\mathbf{u}$  是  $r \times 1$  输入列向量； $A$  是  $n \times n$  系统矩阵； $B$  是  $n \times r$  控制矩阵； $\mathbf{y}$  是  $m \times 1$  输出列向量； $C$  是  $m \times n$  输出矩阵； $D$  是  $m \times r$  直接传递矩阵； $\mathbf{x}$  是  $n \times 1$  状态向量。

在初始条件为零的前提下，对式(1.67)作拉氏变换，得

$$\begin{cases} \mathbf{x}(s) = (SI - A)^{-1} B\mathbf{u}(s) \\ \mathbf{y}(s) = C\mathbf{x}(s) + D\mathbf{u}(s) \end{cases} \quad (1.68)$$

于是得传递函数阵

$$G(s) = C(SI - A)^{-1}B + D \quad (1.69)$$

它是一个 $m \times r$ 的矩阵函数，设

$$g_{ij}(s) \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, r) \quad (1.70)$$

为 $G(s)$ 的元，则系统的传递函数阵 $G(s)$ 可表示为如下的形式：

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1r}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \cdots & g_{2r}(s) \\ \vdots & & & \\ g_{m1}(s) & g_{m2}(s) & \cdots & g_{mr}(s) \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

并且容易看出，其元 $g_{ij}(s)$ 都是标量函数，它在物理上表示为第 $j$ 个输入对第 $i$ 个输出的传递关系，当 $i \neq j$ 时，意味着不同标号的输入与输出有相互关联。称为耦合关系，这正是多变量系统的特点。

**Example 1.6** 考虑这样一个系统，它的状态方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.72)$$

输出方程为：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.73)$$

求系统的传递函数矩阵。

解：因为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.74)$$

且  $(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{S}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$  因此，系统的传递矩阵为：

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.75)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.76)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+4}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{\frac{s+4}{s+2}}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{2(s-2)}{(s+1)(s+2)} & \frac{s^2+5s+2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \quad (1.77)$$

此传递函数矩阵有六个元素，每个都是一个传递函数。

### 三、组合系统的空间表达式及传递函数阵

实际的控制系统，往往由多个子系统组合而成，或并联，或串联，或形成反馈连接，这种系统称组合系统。这里仅限于讨论线性定常系统的组合系统的状态空间表达式及其传递函数阵。

设子系统 $\Sigma_1$ 为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1 \\ y_1 = C_1x_1 + D_1u_1 \end{cases} \quad (1.78)$$

简记为： $\Sigma_1 : (A_1, B_1, C_1, D_1)$  和子系统 $\Sigma_2$ 为：

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2 \\ y_2 = C_2x_2 + D_2u_2 \end{cases} \quad (1.79)$$

简记为 $\Sigma_2 : (A_2, B_2, C_2, D_2)$ 。

#### 1、并联组合系统

所谓并联组合系统，是指各子系统有相同的输入，组合系统的输出是各子系统的代数和，其结构简图如图1.8所示。

由图可知：

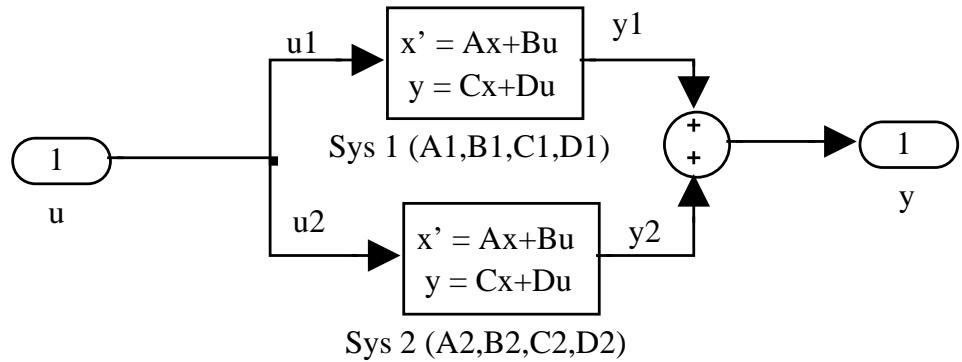


图 1.8 并联组合系统

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} \quad (1.80)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \quad (1.81)$$

并由式(1.78)和(1.79)得状态空间表达式:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (1.82)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + [D_1 + D_2] \mathbf{u} \quad (1.83)$$

从而组合系统的传递函数阵为:

$$G(s) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (sI - A_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + [D_1 + D_2] \quad (1.84)$$

$$\begin{aligned} &= [C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + D_1] + [C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + D_2] \\ &= G_1(s) + G_2(s) \end{aligned} \quad (1.85)$$

故系统并联时，系统传递函数阵等于子系统的传递函数阵之和。

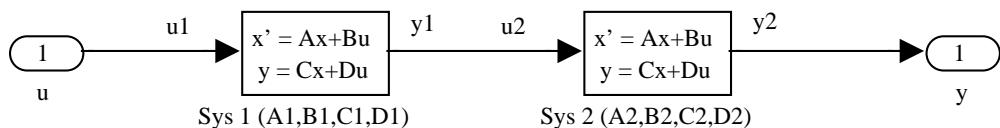


图 1.9 串联组合系统

串联组合系统

串联组合系统如图1.9所示,从图可知:

$$u = u_1, \quad y_1 = u_2, \quad y = y_2 \quad (1.86)$$

并由式(1.78)和(1.79)得

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1 = A_1 \boldsymbol{x}_1 + B_1 \boldsymbol{u} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 = A_2 \boldsymbol{x}_2 + B_2 C_1 \boldsymbol{x}_1 + B_2 D_1 \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C_2 \boldsymbol{x}_2 + D_2 C_1 \boldsymbol{x}_1 + D_2 D_1 \boldsymbol{u} \end{cases} \quad (1.87)$$

即为：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [D_2 D_1] u \end{cases} \quad (1.88)$$

而传递函数阵为:

$$G(s) = \begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SI - A_1 & O \\ -B_2C_1 & SI - A_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix} + [D_2D_1] \quad (1.89)$$

由于  $\begin{bmatrix} sI - A_1 & O \\ -B_2 C_1 & sI - A_2 \end{bmatrix}$  为下三角矩阵，所以

$$\begin{bmatrix} SI - A_1 & O \\ -B_2 C_1 & SI - A_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (SI - A_1)^{-1} & O \\ (SI - A_2)^{-1} B_2 C_1 (SI - A_1)^{-1} & (SI - A_2)^{-1} \end{bmatrix} \quad (1.90)$$

将式(1.90)代入式(1.89)得:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= [D_1 C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} (sI - A_1)^{-1} & 0 \\ (sI - A_2)^{-1} B_2 C_1 (sI - A_1)^{-1} & (sI - A_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} + [D_2 D_1] \\
 &= D_2 C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 + C_2 (sI - A_2)^{-1} B_2 C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 \\
 &\quad + C_2 (sI - A_2)^{-1} B_2 D_1 + D_2 D_1 \\
 &= [C_2 (sI - A_2)^{-1} B_2 + D_2] [C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 + D_1]
 \end{aligned} \tag{1.91}$$

故  $G(s) = G_2(s) \cdot G_1(s)$

即串联组合系统的传递函数阵等于子系统传递函数阵之积。应注意，先后次序不能颠倒。

### 3、具有输出反馈的系统

(1) 如图1.10所示为常数反馈的情况:

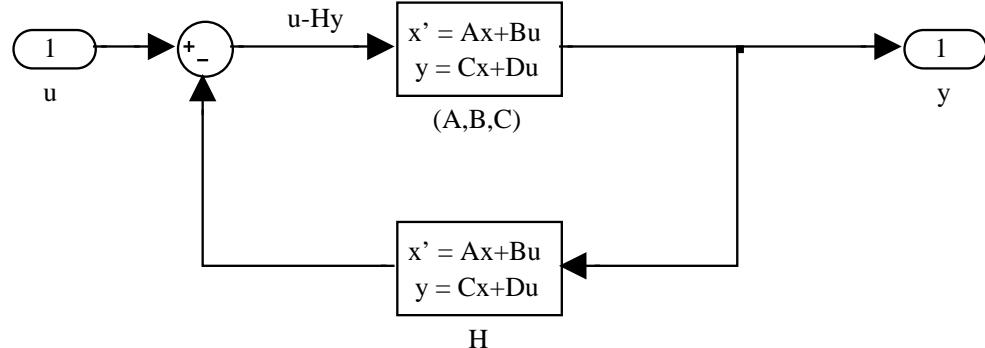


图 1.10 常数反馈系统

从图1.10可知，系统在没有反馈时，系统前向通道的传递函数矩阵为:

$$G_0(s) = C(sI - A)^{-1}B \tag{1.92}$$

闭环后系统状态空间表达式为:

LCD 2014年秋季

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B(\mathbf{u} - H\mathbf{y}) = (A - BHC) + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases} \quad (1.93)$$

故常数反馈系统传递函数为：

$$G(s) = C(sI - A + BHC)^{-1}B \quad (1.94)$$

下面我们进一步推导  $G(s)$  与  $G_0(s)$  的关系。

由图1.10可得：

$$\mathbf{y}(s) = G_0(s)[\mathbf{u}(s) - H\mathbf{y}(s)] \quad (1.95)$$

$$\mathbf{y}(s) = G_0(s)\mathbf{u}(s) - G_0(s)H\mathbf{y}(s) \quad (1.96)$$

$$[I + G_0(s)H]\mathbf{y}(s) = G_0(s)\mathbf{u}(s) \quad (1.97)$$

假设  $\det[I + G_0(s)H] \neq 0$ , 则  $[I + G_0(s)H]$  为非奇异矩阵, 则得:

$$\mathbf{y}(s) = [I + G_0(s)H]^{-1}G_0(s)\mathbf{u}(s) \quad (1.98)$$

即得：

$$G(s) = [I + G_0(s)H]^{-1}G_0(s) \quad (1.99)$$

可类似证明：

$$G(s) = G_0(s)[I + HG_0(s)]^{-1} \quad (1.100)$$

(2) 再考察如图1.11所示的动态反馈的情况：

由图1.11可知：

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} - \mathbf{y}_2, \mathbf{y} = \mathbf{y}_1 = \mathbf{u}_2 \quad (1.101)$$

重写(1.78)(1.79)式：

$$\sum_1 : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = A_1\mathbf{x}_1 + B_1\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{y}_1 = C_1\mathbf{x}_1 \end{cases} \quad \sum_2 : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_2 = A_2\mathbf{x}_2 + B_2\mathbf{u}_2 \\ \mathbf{y}_2 = C_2\mathbf{x}_2 \end{cases} \quad (1.102)$$

由此可得动态分反馈系统得状态空间表达式为：

LCD 2014年秋季

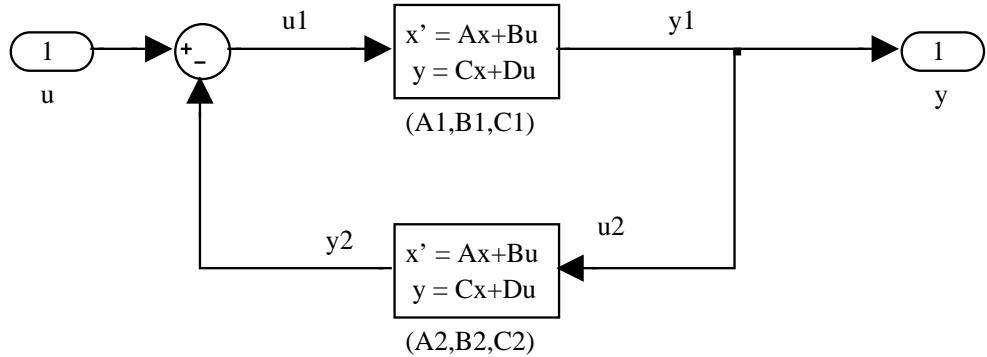


图 1.11 动态反馈系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = A_1 \mathbf{x}_1 + B_1 \mathbf{u} - B_1 C_2 \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = A_2 \mathbf{x}_2 + B_2 C_1 \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y} = C_1 \mathbf{x}_1 \end{cases} \quad (1.103)$$

化为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (1.104)$$

再推导动态反馈系统的传递函数矩阵, 由图1.11, 设 $\sum_1$ 、 $\sum_2$ 的传递函数矩阵分别为 $G_1(s)$ 、 $G_2(s)$ , 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(s) &= G_1(s)[\mathbf{u}(s) - G_2(s)\mathbf{y}(s)] \\ &= G_1(s)\mathbf{u}(s) - G_1(s)G_2(s)\mathbf{y}(s) \end{aligned} \quad (1.105)$$

将上式化简, 得:

$$[I + G_1(s)G_2(s)]\mathbf{y}(s) = G_1(s)\mathbf{u}(s) \quad (1.106)$$

假设 $\det[I + G_1(s)G_2(s)] \neq 0$ , 则 $[I + G_1(s)G_2(s)]$ 为非奇异矩阵, 则得

$$\mathbf{y}(s) = [I + G_1(s)G_2(s)]^{-1}G_1(s)\mathbf{u}(s) \quad (1.107)$$

LCD 2014年秋季

所以

$$G(s) = [I + G_1(s)G_2(s)]^{-1}G_1(s) \quad (1.108)$$

可类似证明：

$$G(s) = G_1(s)[I + G_2(s)G_1(s)]^{-1} \quad (1.109)$$

## §1.4 单输入一一单输出系统的状态空间表达式

在状态空间分析中，首先要有由状态空间表达式所描述的系统数学模型。这种数学模型一般可以从以下三个途径获得：一是从一般时域描述化为状态空间表达式；二是从模拟结构图写出状态空间描述；三是从系统的物理化学机理推出状态空间表达式。本节分别介绍由这三种途径写出状态空间表达式。

### 一、由系统的时域描述写出状态空间表达式

对于一个单变量线性定常系统，在经典控制理论中它的运动方程通常是一个 $n$ 阶线性常系数微分方程：

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_ny \\ &= b_0u^{(m)} + b_1u^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1}\dot{u} + b_mu \end{aligned} \quad (1.110)$$

其中 $m \leq n$ 。

上节中我们已经给出单变量线性定常系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du \end{cases} \quad (1.111)$$

因此，化系统的一般时域描述(1.110) 式为状态空间描述(1.111) 式的关键在于选择合适的状态变量，根据(1.110) 式的系数 $a_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $b_j, (j = 0, 1, 2, \dots, m)$  来定出相应的式(1.111) 的系数 $A, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d$ 。

由高阶微分方程（或传递函数）出发来建立与之等效的状态空间表达式的问题实际上是动态系统的实现问题，在第三章中将进一步讨论，这里只是将单变量系统微分方程化为某种特定形式的状态方程的方法作一介绍。

#### 1. 方程式中不含作用函数导数项

首先我们讨论最简单的情况，即在(1.110)中不含作用函数的各阶导数的情况。显然(1.110)式可表示为如下形式

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u \quad (1.112)$$

由式(1.112)可以看出，对于此系统，若已知初始条件 $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ 及 $t \geq 0$ 时的输入 $u(t)$ ，则该系统在任何 $t \geq 0$ 时刻的行为便可以确定。因此我们可以选取 $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ 这 $n$ 个变量为系统的一组状态变量，现记为：

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ x_3 = \ddot{y} \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases} \quad (1.113)$$

进一步化高阶微分方程组(1.113)为一阶微分方程组，即：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n = y^{(n)} = -a_1 y^{(n-1)} - a_2 y^{(n-2)} - \cdots - a_n y + bu \\ \quad = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_n x_1 + u \end{cases} \quad (1.114)$$

由(1.113)式所示方程组中第一式可得系统的输出关系式为：

$$y = x_1 \quad (1.115)$$

将上式化为向量矩阵形式：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{bu} \\ y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{cases} \quad (1.116)$$

$$\text{其中 } A = \left[ \begin{array}{c|ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{array} \right], \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}^T = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ \cdots \ 0] \quad (1.117)$$

**Example 1.7** 设系统的微分方程为:

$$\ddot{y} + 7\ddot{y} + 14\dot{y} + 10y = u \quad (1.118)$$

求系统的状态方程和输出方程。

解: 选取状态变量为

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ x_3 = \ddot{y} \end{cases} \quad (1.119)$$

则得状态方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dddot{y} = -10x_1 - 14x_2 - 7x_3 + u \end{cases} \quad (1.120)$$

写成向量矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -14 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.121)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (1.122)$$

或简写为:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -14 & -7 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.123)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \quad (1.124)$$

## 2、高阶微分方程(1.110) 中含有作用函数导数项

对于方程中含有作用函数导数项的情况，可按与上述相同的步骤来推出相应状态方程和输出方程。首先，我们来看一个三阶系统的微分方程。

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y + a_3y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2u + b_3u \quad (1.125)$$

(a) 假设  $b_0 = 0$ 。若仍采用如下形式的状态方程：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.126)$$

则：

$$\ddot{x}_1 + a_1\dot{x}_1 + a_2x_1 + a_3x_1 = u \quad (1.127)$$

于是问题就变成如何选取输出方程。

$$y = b_1\ddot{x}_1 + b_2\dot{x}_1 + b_3x_1 = b_1x_3 + b_2x_2 + b_3x_1 \quad (1.128)$$

化为向量矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.129)$$

$$y = [ b_n \ b_{n-1} \ \cdots \ b_1 ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1.130)$$

扩大到  $b_0 \neq 0$  的高阶系统, 得:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.131)$$

$$y = [ (b_n - a_n b_0) \ (b_{n-1} - a_{n-1} b_0) \ \cdots \ (b_1 - a_1 b_0) ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (1.132)$$

该形式的状态空间表达式称为能控标准I型, 也称控制器规范型。(吴: 第二可控规范型)

**Example 1.8** 已知系统的输入一一输出微分方程为:

$$\ddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 8\ddot{u} + 17\dot{u} + 8u \quad (1.133)$$

求系统的状态方程和输出方程。

解: 因该方程的系数  $a_i$  和  $b_j$  分别为

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 11, \quad a_3 = 6 \quad (1.134)$$

$$b_1 = 8, \quad b_2 = 17, \quad b_3 = 8 \quad (1.135)$$

由式(1.129) 可得状态方程和输出方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [8 \ 17 \ 8] \mathbf{x} + u \end{cases}$$

(b)若希望输出方程保持 $y = x_1 + \beta_0 u$ 的形式，则需要将状态方程变换成为如下形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u \quad (1.136)$$

为此，定义

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\ \dot{x}_3 = -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + \beta_3 u \end{cases} \quad (1.137)$$

以及

$$y = x_1 + \beta_0 u \quad (1.138)$$

于是问题就变成如何从系数 $a_i$ 和 $b_j$ 来求 $\beta_0$ 、 $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$ 。由式(1.138)和(1.137)得：

$$\dot{y} = x_2 + \beta_0 \dot{u} + \beta_1 u \quad (1.139)$$

$$\ddot{y} = x_3 + \beta_0 \ddot{u} + \beta_1 \dot{u} + \beta_2 u \quad (1.140)$$

$$\dddot{y} = -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + \beta_0 \ddot{u} + \beta_1 \dot{u} + \beta_2 u \quad (1.141)$$

将式(1.140)(1.139)(1.138)两边分别乘以 $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ，然后再将它们与(1.141)式相加，就可得到：

$$\begin{aligned}
& y + a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y \\
&= -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + \beta_0 u + \beta_1 \ddot{u} + \beta_2 \dot{u} + \beta_3 u + a_1 x_3 + a_1 \beta_0 \ddot{u} + a_1 \beta_1 \dot{u} \\
&\quad + a_1 \beta_2 u + a_2 x_2 + a_2 \beta_0 \dot{u} + a_2 \beta_1 u + a_3 x_1 + a_3 \beta_0 u \\
&= \beta_0 u + (\beta_1 + a_1 \beta_0) \ddot{u} + (\beta_2 + a_1 \beta_1 + a_2 \beta_0) \dot{u} + (\beta_3 + a_1 \beta_2 + a_2 \beta_1 + a_3 \beta_0) u \\
&= b_0 u + b_1 \ddot{u} + b_2 \dot{u} + b_3 u
\end{aligned} \tag{1.142}$$

上式系数与(1.125) 式系数相比, 可得:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = b_0 \\ \beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 \\ \beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\ \beta_3 = b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 \end{array} \right. \tag{1.143}$$

不难看出, 这里所选的一组状态变量是

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = y - \beta_0 u \\ x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u \\ x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u \end{array} \right. \tag{1.144}$$

由上面的3阶系统可以推广到一般的n阶系统, 设n阶系统为:

$$\begin{aligned}
& y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y \\
&= b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u
\end{aligned} \tag{1.145}$$

为此, 定义:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u \end{array} \right. \tag{1.146}$$

以及

$$y = x_1 + \beta_0 u \tag{1.147}$$

由式(1.146)和(1.147) 可得

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x_1 + \beta_0 u \\ \dot{y} = x_2 + \beta_0 \dot{u} + \beta_1 u \\ \ddot{y} = x_3 + \beta_0 \ddot{u} + \beta_1 \dot{u} + \beta_2 u \\ \vdots \\ y^{(n-1)} = x_n + \beta_0 u^{(n-1)} + \beta_1 u^{(n-2)} + \cdots + \beta_{n-2} \dot{u} + \beta_{n-1} u \\ y^{(n)} = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_0 u^{(n)} + \beta_1 u^{(n-1)} + \cdots + \beta_{n-1} \dot{u} + \beta_n u \end{array} \right. \quad (1.148)$$

将(1.148) 式中各式依次分别乘以  $a_n, a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_1 1$ , 然后相加, 得:

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y \\ &= \beta_0 u^{(n)} + (\beta_1 + a_1 \beta_0) u^{(n-1)} + (\beta_2 + a_1 \beta_1 + a_2 \beta_0) u^{(n-2)} + \cdots + (\beta_{n-1} \\ &+ a_1 \beta_{n-2} + \cdots + a_{n-2} \beta_1 + a_{n-1} \beta_0) \dot{u} + (\beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1} \beta_1 + a_n \beta_0) u \\ &= b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \end{aligned} \quad (1.149)$$

上式中等式两边  $u^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) 项的系数应相等, 故有

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = b_0 \\ \beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 \\ \beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_n = b_n - a_1 \beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_0 \end{array} \right. \quad (1.150)$$

将(1.146) 化为向量矩阵的形式为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} u \quad (1.151)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u \quad (1.152)$$

**Example 1.9** 已知系统的输入一一输出微分方程为:

$$\ddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = \ddot{u} + 8\ddot{u} + 17\dot{u} + 8u \quad (1.153)$$

求系统的状态方程和输出方程。

解: 因该方程的系数 $a_i$ 和 $b_j$ 分别为

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 11, \quad a_3 = 6 \quad (1.154)$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 8, \quad b_2 = 17, \quad b_3 = 8 \quad (1.155)$$

由式(1.150) 得

$$\begin{cases} \beta_0 = b_0 = 1 \\ \beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = 8 - 6 \times 1 = 2 \\ \beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = 17 - 6 \times 2 - 11 \times 1 = -6 \\ \beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 = 16 \end{cases} \quad (1.156)$$

再由式(1.150) 可得状态方程和输出方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 16 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x} + u \end{cases}$$

### 3. 线性时变系统的状态空间表达式

上面对线性定常系统的讨论, 其方法也可以推广到线性时变系统, 设有如下的线性时变系统:

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y \\ &= b_0(t)u^{(n)} + b_1(t)u^{(n-1)} + \cdots + b_n(t)u \end{aligned} \quad (1.157)$$

假定  $a_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $b_j(t)$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) 是充分可微的, 对(1.157) 式仿照线性时不变系统的情况, 我们可以导出

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1(t)u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2(t)u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1}(t)u \\ \dot{x}_n = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \cdots - a_2(t)x_{n-1} - a_1(t)x_n + \beta_n(t)u \end{array} \right. \quad (1.158)$$

和  $y = x_1 + \beta_0(t)u$

其中  $\beta_i(t)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 的计算式, 相应地为:

$$\beta_0(t) = b_0(t) \quad (1.159)$$

$$\beta_i(t) = b_i(t) - \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{i-k} \frac{(n+l-i)!}{l!(n-i)!} a_{i-k-l}(t) \beta_k^l(t), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.160)$$

显然, 状态变量的表达式因  $a_i(t)$ 、 $b_j(t)$  是时变的而远较时不变系统要复杂得多, 写为:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = y - \beta_0(t)u \\ x_2(t) = \dot{y} - \beta_0(t)\dot{u} - [\beta_1(t) + \dot{\beta}_0(t)]u \\ x_3(t) = \ddot{y} - \beta_0(t)\ddot{u} - [\beta_1(t) + 2\dot{\beta}_0(t)]\dot{u} - [\beta_2(t) + \dot{\beta}_1(t) + \ddot{\beta}_0(t)]u \\ \dots \dots \end{array} \right. \quad (1.161)$$

将((1.158)) 表示为向量矩阵形式，即可变为如下形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \vdots & -a_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_n(t) \end{bmatrix} u \quad (1.162)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0(t)u \quad (1.163)$$

必须指出，无论是时变系统还是定常系统，在由高阶微分方程化为状态空间表达式时，通常可采用不同的方法来组成不同的状态变量组，从而导出不同形式的状态方程和输出方程，上面介绍的只是其中的一种。

## 二、由模拟结构图写出状态方程

在状态空间分析中，利用模拟计算机的模拟结构图能充分反映状态变量间的相互关系，对建立状态空间表达式很有帮助。

下面介绍的几种方法是由微分方程（或传递函数）画出模拟结构图，再写出状态方程。由模拟结构图写出状态方程的方法往往使我们得到几种有用的状态方程的实现形式，称标准型。至于这些标准型的特殊含义我们将以后陆续介绍，这里只要了解这几种标准型的名称和对应的状态方程的形式即可。

根据传递函数导出状态空间描述的基本思路：（1）基于串并联分解  
(2) 基于部分分式分解 (3) 基于积分器串+常值反馈

(1) 基于串并联分解当系统的描述是以方块图给出时，不必算出其总的传递函数，基于各模块的串并联分解可直接导出相应的状态空间表达式。下面，我们举例说明此方法。下面，我们举例说明此方法。

设给出系统如图1.12(a)所示，其中 $z_1, p_1, p_2, p_3, k$ 均为常值， $y$ 为输出， $u$ 是输入。导出相应的状态空间表达式。

第一步是把各环节的传递函数化为最简形式( $\frac{k_i}{s+P_i}$ )的组合，于是图(a)可化为图(b)。第二步是把具有简单函数相加的环节化为单元方块的并联，把具有简单函数相乘的环节化为单元方块的串联，从而将图 (b)转化为图(c)。第三步，在图(c)上设置状态变量，并列出状态方程和输出方程。

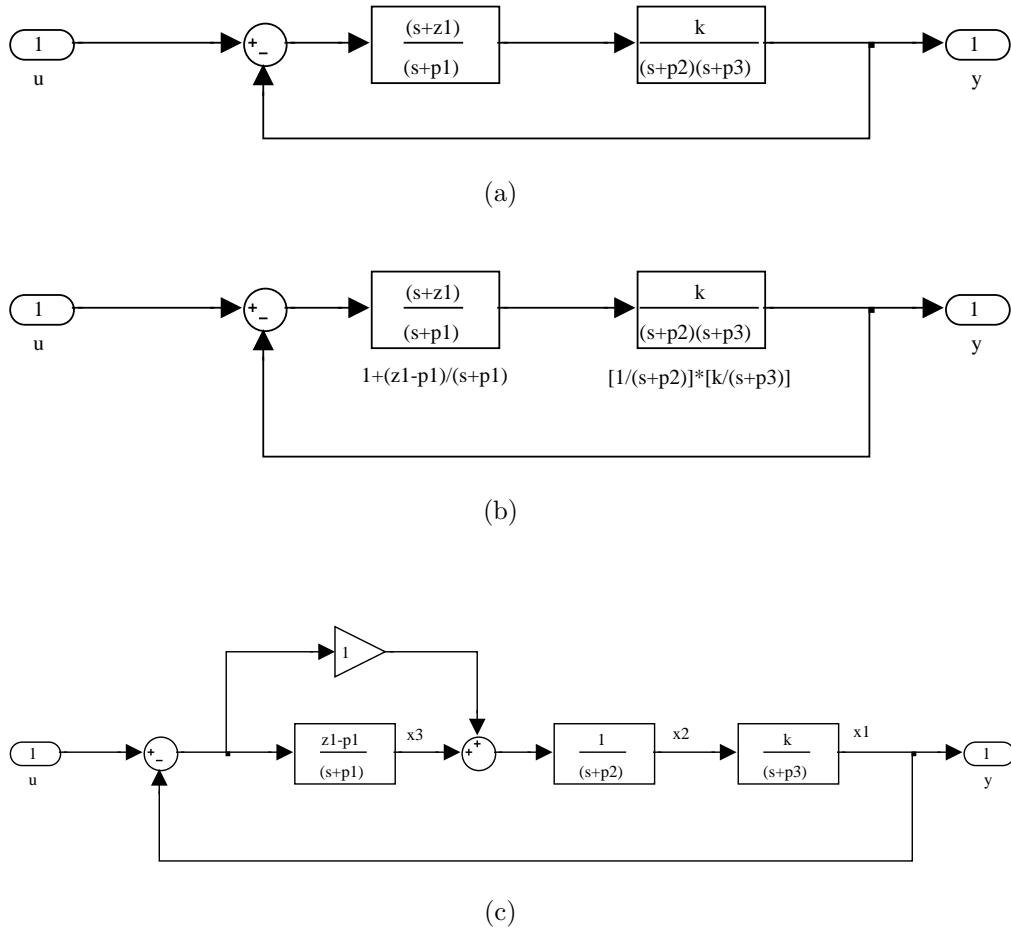


图 1.12

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -p_3x_1 + kx_2 \\ \dot{x}_2 = -p_2x_2 + x_3 + u - x_1 = -x_1 - p_2x_2 + x_3 + u \\ \dot{x}_3 = -p_1x_3 + (u - x_1)(z_1 - p_1) = (p_1 - z_1)x_1 - p_1x_3 + (z_1 - p_1)u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1.164)$$

写成矩阵向量的形式即为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -p_3 & k & 0 \\ -1 & -p_2 & 1 \\ (p_1 - z_1) & 0 & -p_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ z_1 - p_1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \end{cases} \quad (1.165)$$

**Example 1.10** 写出图1.13(a)所示系统的状态方程和输出方程。

解：首先把前向通路的二阶传递函数表示为两个一阶传递函数的串联，如图1.13(b)所示，然后在图1.13(b)上设置状态变量，并根据图1.13(b)写出状态空间表达式。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + 3(-x_3 + u) \\ \dot{x}_3 = -x_3 + x_1 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1.166)$$

整理并写成向量矩阵形式为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (1.167)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \quad (1.168)$$

(2) 基于部分分式分解

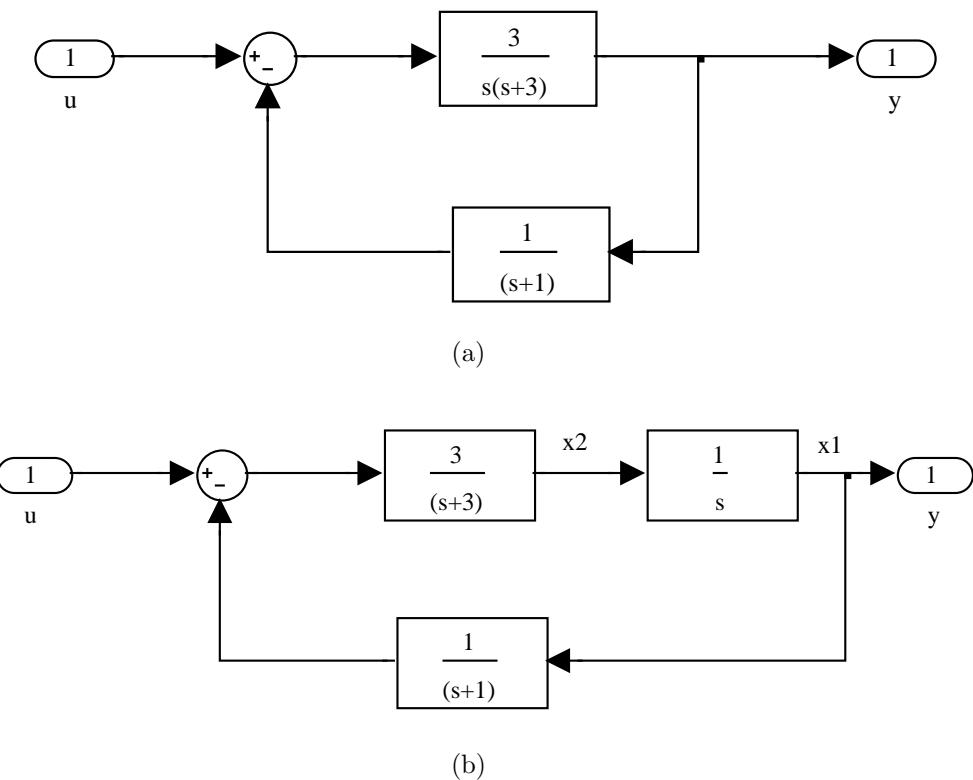


图 1.13

LCD 2014年秋季

将传递函数展开成部分分式，根据此部分分式画出其模拟结构图，然后由此模拟结构图写出的状态空间表达式是具有一定特点的约当标准型。

设单输入一一单输出系统的传递函数如下：

$$g(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (1.169)$$

由于系统的特征值有两种情况，一是所有的特征值都是两两相异的；一是有些特征值是相同的。以下分两种情况分别讨论。

(1) 设(1.169) 式具有两两相异的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，则  $g(s)$  可展开成如下部分分式：

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\alpha_1}{s - \lambda_1} + \frac{\alpha_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s - \lambda_n} + \delta \quad (1.170)$$

其中

$$\alpha_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) \cdot g(s) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.171)$$

而

$$y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s - \lambda_i} u(s) + \delta u(s) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.172)$$

根据式(1.172) 容易看到，其模拟结构图如图1.14(a)所示。这种结构的显著特点是积分器不再是前后串联形式而是并联形式。取状态变量如图1.14(a)所示，则状态方程和输出方程可表示为：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.173)$$

$$y = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n] x + \delta u \quad (1.174)$$

或

LCD 2014年秋季

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} u \quad (1.175)$$

$$y = [1 \ 1 \ \cdots \ 1] \mathbf{x} + \delta u \quad (1.176)$$

式(1.173)和(1.175)是互为对偶的，两式的系数矩阵A均为对角矩阵，对角线上各元素是互异的n个特征值。故称为对角线标准型或解耦标准型，即变量之间不存在耦合关系。广义地说，它是属于下面介绍的约当标准型。

(2)考虑式(1.169)的特征方程式具有重根的情况。此时，也可以象下面那样用部分分式展开。为了简单起见，设 $\lambda_1$ 为三重根， $\lambda_4 \sim \lambda_n$ 为互异的根，于是得到

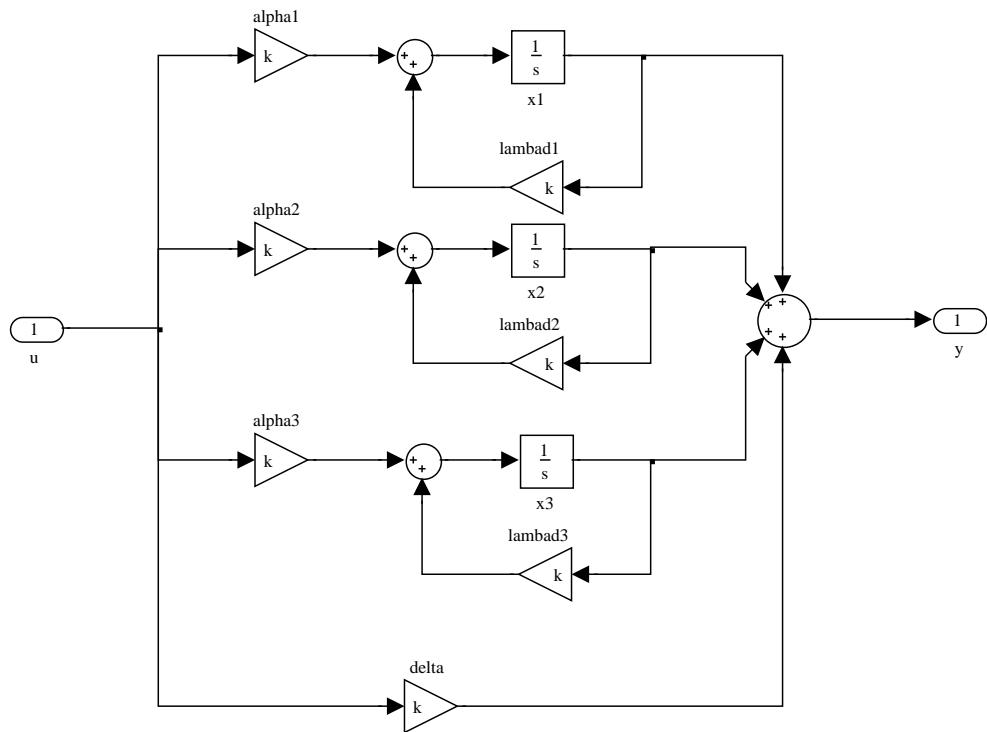
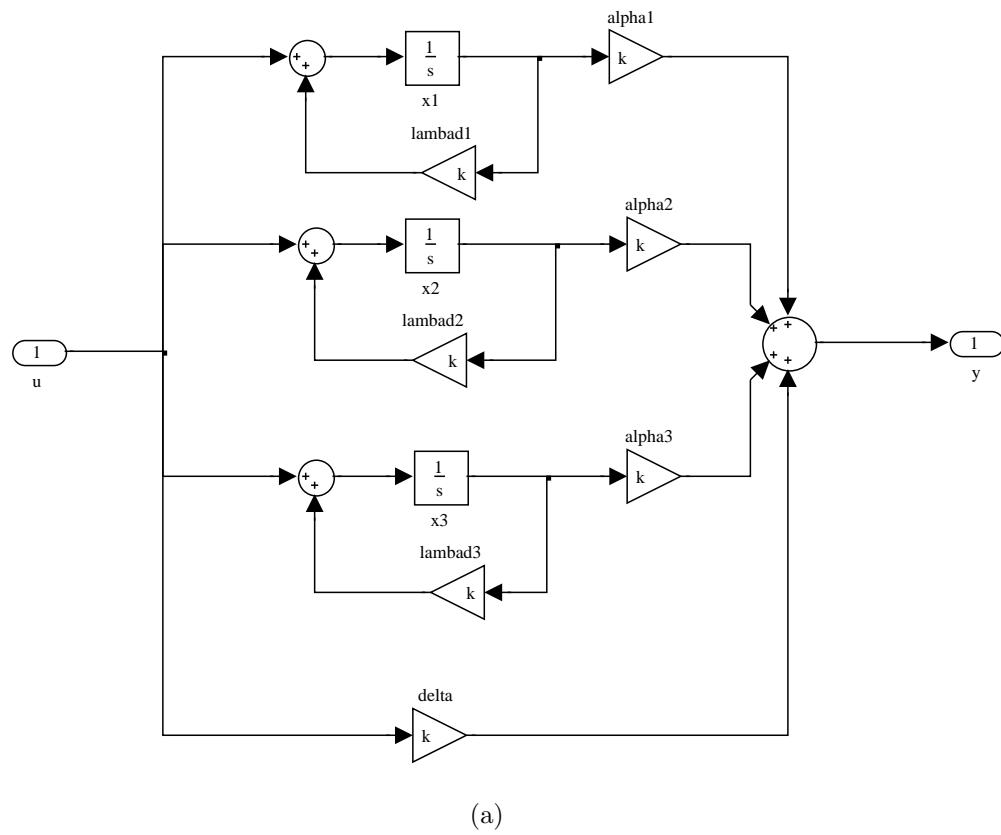
$$g(s) = \frac{\alpha_{11}}{(s - \lambda_1)^3} + \frac{\alpha_{12}}{(s - \lambda_1)^2} + \frac{\alpha_{13}}{(s - \lambda_1)} + \frac{\alpha_4}{s - \lambda_4} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s - \lambda_n} + \delta \quad (1.177)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} = \lim_{s \rightarrow \lambda_1} [(s - \lambda_1)^3 g(s)] \\ \alpha_{12} = \lim_{s \rightarrow \lambda_1} \left[ \frac{d[(s - \lambda_1)^3 g(s)]}{ds} \right] \\ \alpha_{13} = \frac{1}{2!} \lim_{s \rightarrow \lambda_1} \left[ \frac{d^2[(s - \lambda_1)^3 g(s)]}{ds^2} \right] \\ \alpha_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} [(s - \lambda_i) g(s)] \quad (i = 4, 5, \dots, n) \end{array} \right. \quad (1.178)$$

由式(1.177)可以画出系统的模拟结构图，如图1.15所示。在这种结构中，重根分式采取积分器的串联形式，其余的采用积分器并联形式。设置状态变量如图所示，则相应的状态空间表达式为：

LCD 2014年秋季



LCD 2014年秋季

图 1.14 对角标准型

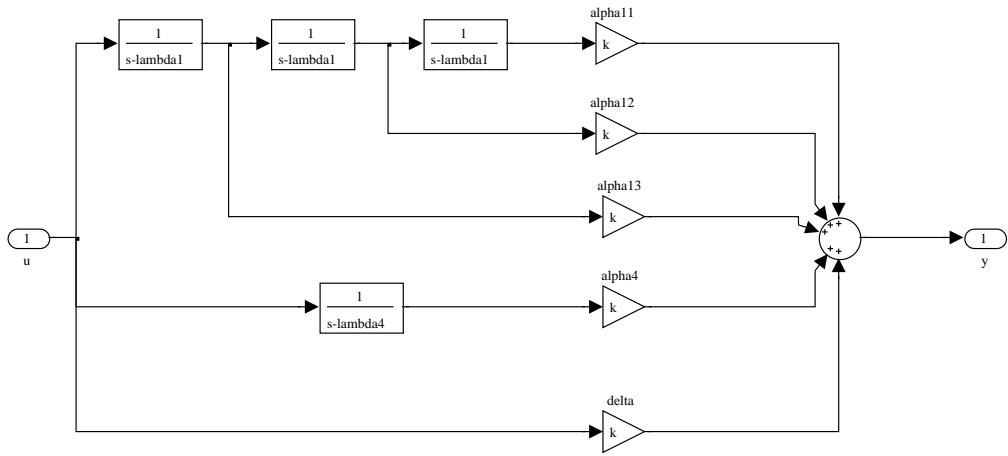


图 1.15 约当标准型

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = \lambda_1 x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = \lambda_1 x_3 + u \\ \dot{x}_4 = \lambda_4 x_4 + u \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \lambda_n x_n + u \end{cases} \quad (1.179)$$

$$y = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_4x_4 + \cdots + \alpha_nx_n + \delta u$$

写成向量矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.180)$$

$$y = [\alpha_{11} \quad \alpha_{12} \quad \alpha_{13} \quad \alpha_4 \quad \cdots \quad \alpha_n] \mathbf{x} + \delta u \quad (1.181)$$

式(1.181) 称为约当标准型。式中系数矩阵A中对应于重特征根虚线框块称为约当块。约当块的特点是主对角元素是特征值，主对角线左下方的元素都为零，主对角线右上面，紧靠重根的元素全为1，其余元素均为零。一个系统有n个多重根，就有n个约当块。例如一系统含有三重 $\lambda_1$ ，二重 $\lambda_2$ 以及 $\lambda_3$ 和 $\lambda_4$ ，则其状态矩阵A为

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & 0 & \lambda_2 \\ 0 & & & & \lambda_3 & 0 \\ & & & & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (1.182)$$

其中有两个约当块，每个从属于一个特征值。

(3) 基于积分器串+常值反馈基于串并联分解或部分分式分解的实现方法，都要求先得到系统的零极点，当系统阶次较高时，有时难以计算，此时如何建立对应于传递函数的状态空间描述？

### 1、能控标准I型

为了方便起见，先来看一个三阶微分方程：

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y + a_3y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2u + b_3u \quad (1.183)$$

其传递函数如下：

$$g(s) = \frac{b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3} \quad (1.184)$$

上式可变换为

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{y(s)}{u(s)} \\ &= b_0 + \frac{(b_1 - a_1b_0)s^2 + (b_2 - a_2b_0)s + b_3 - a_3b_0}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3} \\ &= b_0 + \frac{(b_1 - a_1b_0)s^{-1} + (b_2 - a_2b_0)s^{-2} + (b_3 - a_3b_0)s^{-3}}{1 + a_1s^{-1} + a_2s^{-2} + a_3s^{-3}} \end{aligned} \quad (1.185)$$

令

$$e(s) = \frac{1}{1 + a_1s^{-1} + a_2s^{-2} + a_3s^{-3}}u(s) \quad (1.186)$$

则

$$e(s) = u(s) - a_1 e(s)s^{-1} - a_2 e(s)s^{-2} - a_3 e(s)s^{-3} \quad (1.187)$$

而

$$y(s) = b_0 u(s) + e(s)[(b_1 - a_1 b_0)s^{-1} + (b_2 - a_2 b_0)s^{-2} + (b_3 - a_3 b_0)s^{-3}] \quad (1.188)$$

由(1.187)(1.188) 式画出如图1.16所示的模拟结构图。

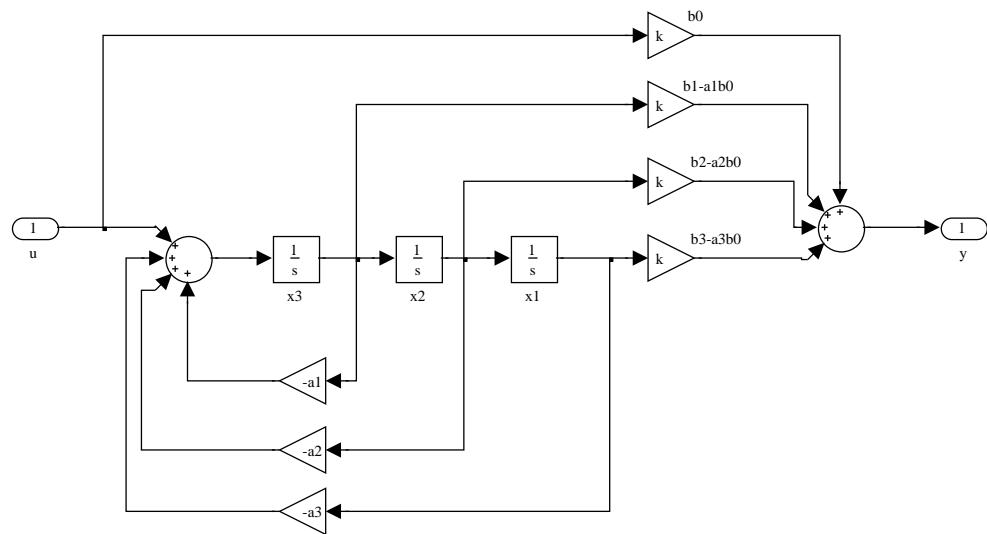


图 1.16 能控标准I型

在图1.16上设置状态变量，则得状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + u \\ y = (b_3 - a_3 b_0)x_1 + (b_2 - a_2 b_0)x_2 + (b_1 - a_1 b_0)x_3 + b_0 u \end{cases} \quad (1.189)$$

将(1.189) 写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.190)$$

$$y = [(b_3 - a_3 b_0) \quad (b_2 - a_2 b_0) \quad (b_1 - a_1 b_0)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + b_0 u \quad (1.191)$$

上述这种方法有人称为直接程序法。

将(1.191)扩大到n阶系统，得：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.192)$$

$$y = [(b_n - a_n b_0)(b_{n-1} - a_{n-1} b_0) \cdots (b_1 - a_1 b_0)] \mathbf{x} + b_0 u \quad (1.193)$$

具有图1.16结构或式(1.192)所示的形式称为能控标准I型，也称控制器规范型。（吴：第二可控规范型）

## 2、能观标准I型

仍从三阶系统(1.183) 式出发，其传递函数为：

$$g(s) = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \quad (1.194)$$

试采用图1.17的模拟结构图来实现它，图中的 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是待求的。

在图1.17上设置状态变量，得到这种结构下的状态空间表达式：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\ \dot{x}_3 = -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + \beta_3 u \\ y = x_1 + \beta_0 u \end{cases} \quad (1.195)$$

式(1.195)的形式即为上面见过的(1.137) 式，这里的待求量 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可见(1.143)式求出，即为

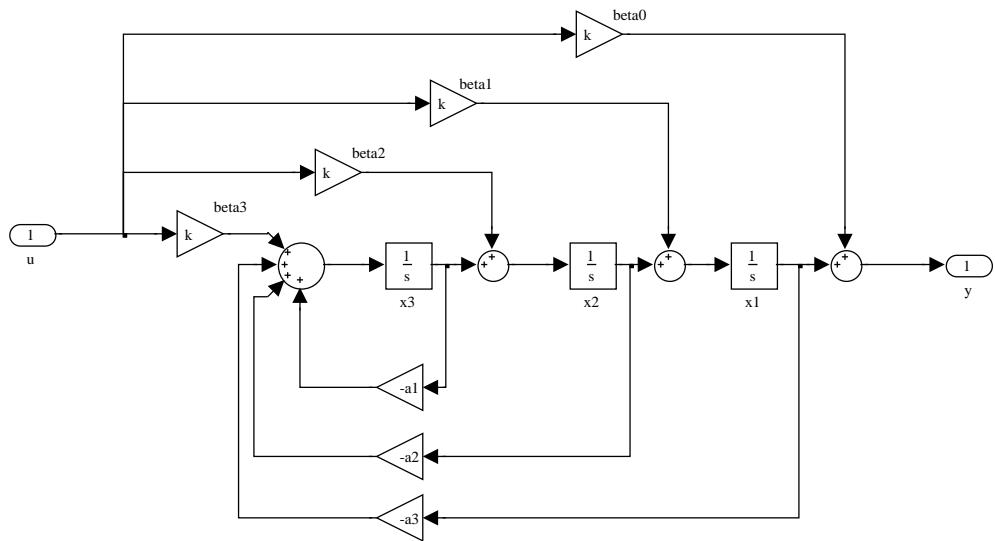


图 1.17 能观标准I型

$$\begin{cases} \beta_0 = b_0 \\ \beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 \\ \beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\ \beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 \end{cases} \quad (1.196)$$

系数公式(1.196)多少有点不方便，特别是阶数高时更是如此，可以给出如下更加紧凑的系数表达式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (1.197)$$

将式写成向量矩阵的形式为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u \quad (1.198)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \beta_0 u \quad (1.199)$$

扩展到 $n$ 阶系统，其状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u \quad (1.200)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u \quad (1.201)$$

式中：

$$\begin{cases} \beta_0 = b_0 \\ \beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 \\ \beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\ \dots \\ \beta_n = b_n - a_1\beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1}\beta_1 - a_n\beta_0 \end{cases} \quad (1.202)$$

或记为：

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ a_1 & 1 & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (1.203)$$

凡  $A$ 、 $b$ 、 $c^T$  具有如式(1.201) 形式或模拟结构如图1.17所示的系统称能观标准I型，也称能观测性规范型（吴：第一可观规范型）。显然这种形式我们在(1.151) 式中已见到过。

### 3、能控标准II型

为了方便，我们仍以三阶系统出发，将(1.183)式重写如下：

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2u \quad (1.204)$$

现在采用图1.10所示的模拟结构来实现它，图中的 $\beta_0$ 、 $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$ 是待定的。

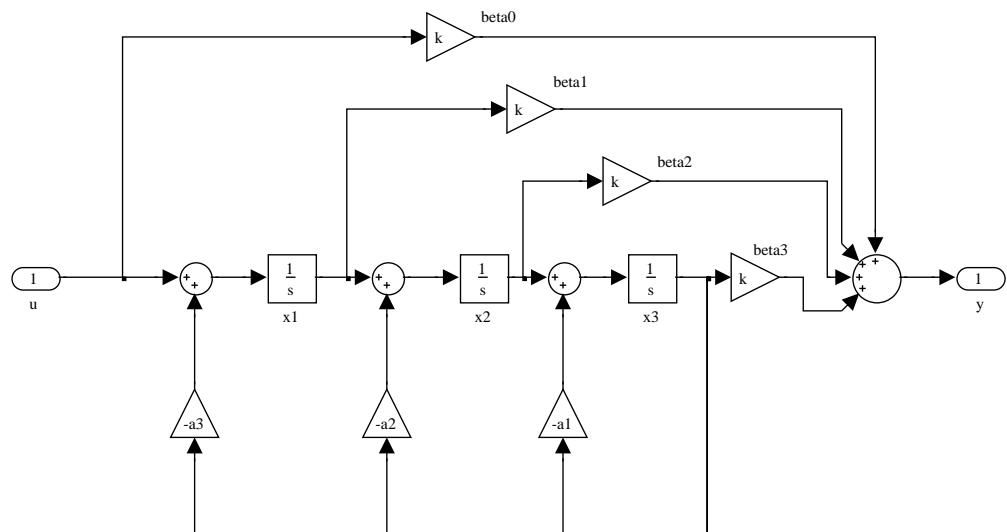


图 1.18 能控标准II型

在图1.18中设置状态变量，得到这种结构下的状态空间表达式：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_3 x_3 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_2 x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 - a_1 x_3 \end{cases} \quad (1.205)$$

以及

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_0 u \quad (1.206)$$

于是问题就变成如何从系数 $a_i$ 、 $b_j$ 、来求 $\beta_0$ 、 $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$ ，由式(1.205)(1.206)可得

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \beta_1 \dot{x}_1 + \beta_2 \dot{x}_2 + \beta_3 \dot{x}_3 + \beta_0 \dot{u} \\ &= \beta_2 x_1 + \beta_3 x_2 - (a_3 \beta_1 + a_2 \beta_2 + a_1 \beta_3) x_3 + \beta_1 u + \beta_0 \dot{u}\end{aligned}\quad (1.207)$$

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \beta_2 \dot{x}_1 + \beta_3 \dot{x}_2 - (a_3 \beta_1 + a_2 \beta_2 + a_1 \beta_3) \dot{x}_3 + \beta_1 \dot{u} + \beta_0 \ddot{u} \\ &= \beta_3 x_1 - (a_3 \beta_1 + a_2 \beta_2 + a_1 \beta_3) x_2 + [(a_3 \beta_1 + a_2 \beta_2 + a_1 \beta_3) a_1 \\ &\quad - a_3 \beta_2 - a_2 \beta_3] x_3 + \beta_2 u + \beta_1 \dot{u} + \beta_0 \ddot{u}\end{aligned}\quad (1.208)$$

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \beta_3 \dot{x}_1 - (a_3 \beta_1 + a_2 \beta_2 + a_1 \beta_3) \dot{x}_2 + [(a_3 \beta_1 + a_2 \beta_2 + a_1 \beta_3) a_1 \\ &\quad - a_3 \beta_2 - a_2 \beta_3] \dot{x}_3 + \beta_2 \dot{u} + \beta_1 \ddot{u} + \beta_0 u \\ &= -(a_3 \beta_1 + a_2 \beta_2 + a_1 \beta_3) x_1 + [(a_3 \beta_1 + a_2 \beta_2 + a_1 \beta_3) a_1 - a_3 \beta_2 \\ &\quad - a_2 \beta_3] x_2 + [(a_3 \beta_1 + a_2 \beta_2 + a_1 \beta_3) a_2 - a_3 \beta_3 - a_1 (a_3 \beta_1 + a_2 \beta_2 \\ &\quad + a_1 \beta_3) a_1 - a_3 \beta_2 - a_2 \beta_3] x_3 + \beta_2 \dot{u} + \beta_1 \ddot{u} + \beta_0 u\end{aligned}\quad (1.209)$$

将(1.208)(1.207)(1.206) 式分别乘以 $a_1, a_2, a_3$ ，然后将它们和(1.209) 相加，于是得：

$$\begin{aligned}\ddot{y} &+ a_1 \ddot{y} + a_2 \ddot{y} + a_3 \ddot{y} \\ &= \beta_0 u + (\beta_1 + a_1 \beta_0) \ddot{u} + (\beta_2 + a_1 \beta_1 + a_2 \beta_0) \dot{u} \\ &\quad + (\beta_3 + a_1 \beta_2 + a_2 \beta_1 + a_3 \beta_0) u \\ &= b_0 u + b_1 \ddot{u} + b_2 \dot{u} + b_3 u\end{aligned}\quad (1.210)$$

由此得：

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = b_0 \\ \beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 \\ \beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\ \beta_3 = b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 \end{array} \right. \quad (1.211)$$

可见待定系数的计算和能观标准I型的待定系数的计算是相同的（见(1.143)式）。将式(1.205)(1.206) 写成向量矩阵的形式则为：

$$y = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3] \mathbf{x} + \beta_0 u \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (1.212)$$

将(1.212) 扩展到n阶系统，则得：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (1.213)$$

$$y = [\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n] \mathbf{x} + \beta_0 u$$

和式(1.201) 比较，可以发现，(1.213) 式的状态矩阵是(1.201) 相应的状态矩阵的转置，而输入矩阵为(1.201) 式输出矩阵的转置，输出矩阵为(1.201) 式输入矩阵的转置。我们将(1.213)(1.201) 两式称为是互为对偶的形式。凡具有(1.213) 形式或图1.18所示模拟结构形式的系统称为能控标准II型，也称能控性规范型（吴：第一可控规范型）。显然，能控标准II型是能观标准I型的对偶形式。

#### 4、能观标准II型

同样以三阶系统为例，将(1.183) 式传递函数重写如下：

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{u(s)} &= \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \\ &= \frac{b_0 + b_1 s^{-1} + b_2 s^{-2} + b_3 s^{-3}}{1 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_3 s^{-3}} \end{aligned} \quad (1.214)$$

则

$$\begin{aligned} y(s) + a_1 s^{-1} y(s) + a_2 s^{-2} y(s) + a_3 s^{-3} y(s) \\ = b_0 u(s) + b_1 s^{-1} u(s) + b_2 s^{-2} u(s) + b_3 s^{-3} u(s) \end{aligned} \quad (1.215)$$

进一步

$$\begin{aligned}
 y(s) = & b_0 u(s) + [b_1 u(s) - a_1 y(s)] s^{-1} + [b_2 u(s) - a_2 y(s)] s^{-2} \\
 & + [b_3 u(s) - a_3 y(s)] s^{-3} = b_0 u(s) \\
 & + s^{-1} \{ b_1 u(s) - a_1 y(s) + s^{-1} [b_2 u(s) - a_2 y(s)] + s^{-2} (b_3 u(s) - a_3 y(s)) \}
 \end{aligned} \tag{1.216}$$

将(1.216)式用模拟结构图来表示，则可画出下面图1.19所示。

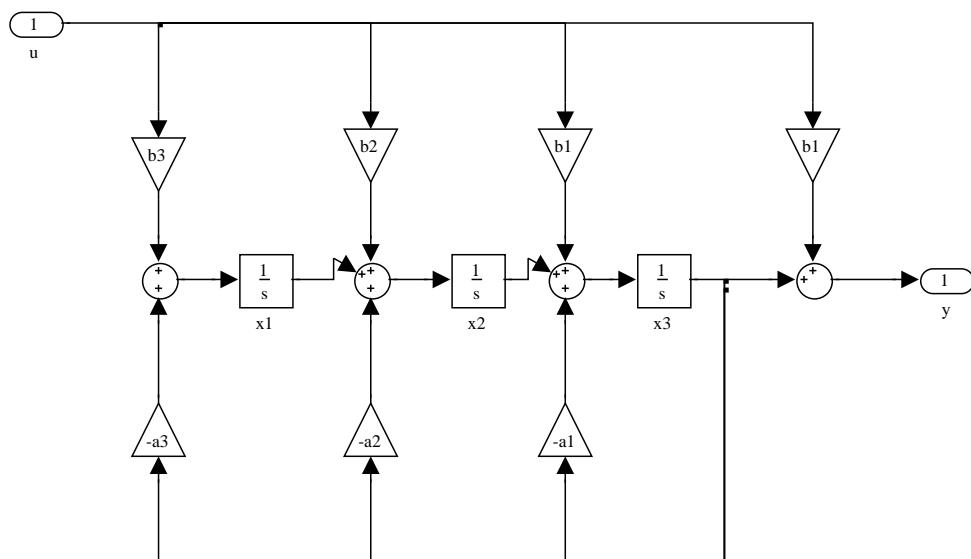


图 1.19 能观标准II型

在图1.19上设置状态变量，则根据图1.19可以写出状态方程和输出方程：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_3(x_3 + b_0 u) + b_3 u \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_2(x_3 + b_0 u) + b_2 u \\ \dot{x}_3 = x_2 - a_1(x_3 + b_0 u) + b_1 u \end{cases} \tag{1.217}$$

$$y = b_0 u + x_3$$

将上式加以整理得：

LCD 2014年秋季

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_3x_3 + (b_3 - a_3b_0)u \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_2x_3 + (b_2 - a_2b_0)u \\ \dot{x}_3 = x_2 - a_1x_3 + (b_1 - a_1b_0)u \end{cases} \quad (1.218)$$

$$y = b_0u + x_3 \quad (1.219)$$

将上式写成向量矩阵式得：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_3 - a_3b_0) \\ (b_2 - a_2b_0) \\ (b_1 - a_1b_0) \end{bmatrix} u \quad (1.220)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x} + b_0u \quad (1.221)$$

上述这种方法称多层积分法。将上式扩展到 $n$ 阶系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_n - a_nb_0) \\ (b_{n-1} - a_{n-1}b_0) \\ (b_{n-2} - a_{n-2}b_0) \\ \vdots \\ (b_1 - a_1b_0) \end{bmatrix} u \quad (1.222)$$

$$y = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1] \mathbf{x} + b_0u \quad (1.223)$$

具有(1.222) 式形式或具有图1.19模拟结构的系统称能观标准II型。同样我们可以看到(1.222) 式和(1.192) 式在形式上是对偶的，即能观标准II型是能控标准I型的对偶形式。能观标准II型也称观测器型规范型（吴：第二可观规范型）。

**Example 1.11** 已知系统的传递函数为

$$g(s) = \frac{3(s+1)}{s^3 + 4s^2 + 3s + 3} \quad (1.224)$$

LCD 2014年秋季

对于(1.224)式，我们可以应用前述方法中的任何一种写出它的状态空间表达式。熟练之后，可以不必画出状态变量图，而直接由式(1.224)列写方程。上式中

$$\begin{aligned} a_1 &= 4, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 3 \\ b_0 &= 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 3, \quad b_3 = 3 \end{aligned} \quad (1.225)$$

能控标准I型为（吴：第二可控规范型）：

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (1.226)$$

而能观标准II型（吴：第二可观规范型）为上式的对偶形式，即为

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (1.227)$$

能控标准II型（吴：第一可控规范型），则根据(1.213)式写出：

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \ 3 \ -9] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (1.228)$$

上式的对偶形式即为能观标准I型（吴：第一可观规范型）：

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (1.229)$$

通常能控标准I型，能观标准II型用得较多，以后如不加特殊说明，能控标准型就是指其I型，而能观标准型就是指其II型。

**Example 1.12** 设系统的传递函数为

$$g(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s^2 + 7s + 12)} = \frac{1/6}{s} + \frac{-2/3}{s+3} + \frac{3/2}{s+4} \quad (1.230)$$

可画出如图1.20所示的模拟结构图，并在图上设置状态变量。状态方程及输出方程为：

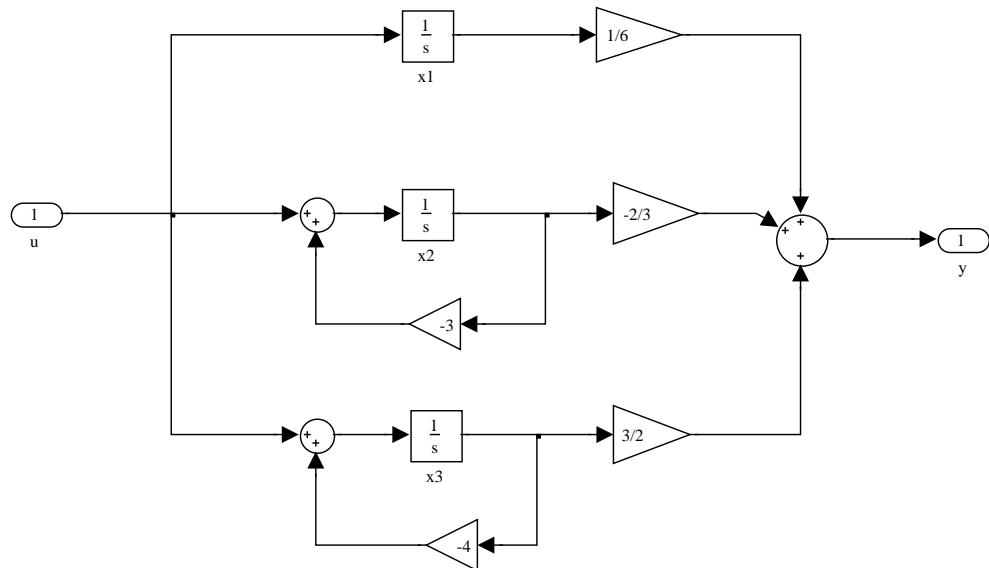


图 1.20

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + u \\ \dot{x}_3 = -4x_3 + u \end{cases} \quad (1.231)$$

$$y = \frac{1}{6}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \quad (1.232)$$

写成向量矩阵形式即为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.233)$$

$$y = \left[ \frac{1}{6} \quad -\frac{2}{3} \quad \frac{3}{2} \right] \mathbf{x} \quad (1.234)$$

### 三、通过系统的物理机理直接写出系统的状态空间表达式

状态空间表达式也可以直接由物理系统写出。我们已在§1.1中举出了许多个例子。这里进一步举例说明。

**Example 1.13** 一动态系统如图1.21所示，它包含有一个小车和一个倒置摆，因为用一个外力 $u(t)$ 保持摆直立不倒的问题和手握摆杆维持平衡很相似，所以通常称之为自动搜索平衡车。为了简化，设车与摆只在一个平面内运动，并且忽略杆的质量、电机本身的动力学摩擦、风力等因素，但保留问题的实质。很显然，系统本来是不稳定的，因为如果不加控制力，杆必然会倒下来。

设小车和球的质量分别为 $M$ ，摆杆的长度和角位移分别为 $L$ 和 $\theta$ ，小车的位置为 $Z$ 。则本系统的动态特征可用小车的位移和速度及单摆的角位移和角速度来完整地描述。其状态向量为：

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} Z(t) \\ \dot{Z}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad (1.235)$$

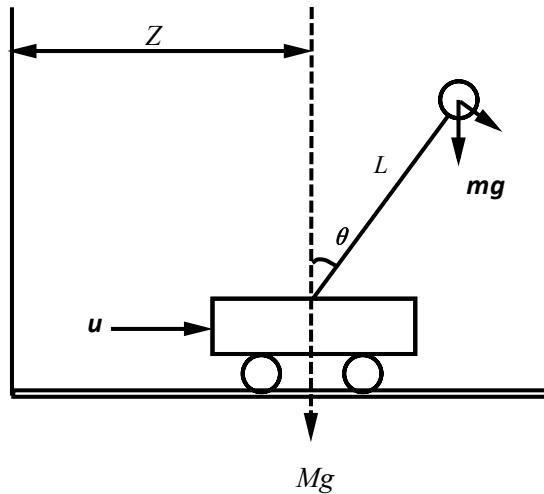


图 1.21

为了确定系统的微分方程，首先应注意小车的水平位置是 $Z$ ，此时摆心的位置是 $Z + L \sin(\theta)$ 。这样，在水平方向根据牛顿第二定律：

$$M \frac{d^2 Z}{dt^2} + m \frac{d^2}{dt^2}(Z + L \sin(\theta)) = u \quad (1.236)$$

同样的定律也可以用摆的质量，在垂直于摆杆方向可得：

$$m(\ddot{Z} \cos \theta + L \ddot{\theta}) = mg \sin \theta \quad (1.237)$$

这些微分方程是非线性的，需要进行简化。由于控制本系统的目的是保持单摆直立，因此可假设 $\theta(t)$ 和 $\dot{\theta}(t)$ 接近于零。因此， $\cos \theta \approx 1$ ， $\sin(\theta) \approx \theta$ 。得近似微分方程式为：

$$(M + m)\ddot{Z} + mL\ddot{\theta} = u \quad (1.238)$$

$$\ddot{Z} + L\ddot{\theta} = g\theta \quad (1.239)$$

假定以 $u$ 为系统输入， $Z$ 为输出，则系统的传递函数为：

$$g(s) = \frac{Z(s)}{u(s)} = \frac{1}{M} \cdot \frac{s^2 - g/L}{s^2[s^2 - (1 + \frac{m}{M}g/L)]} \quad (1.240)$$

方程(1.238)(1.239) 两式对  $\ddot{Z}$  和  $\ddot{\theta}$  联立求解得:

$$\begin{cases} \ddot{Z} = -\frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}u \\ \ddot{\theta} = \frac{(M+m)}{ML}g\theta - \frac{1}{ML}u \end{cases} \quad (1.241)$$

如果把恒等式

$$\frac{dZ}{dt} = \dot{Z} \quad \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (1.242)$$

也包括在内, 就可以用状态变量形式表示这些关系:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(m+M)g}{ML} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{ML} \end{bmatrix} u \quad (1.243)$$

若以  $y$  表示输出 (即为位移  $Z$ ) 则输出方程为:

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} Z \\ \dot{Z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (1.244)$$

若  $M = 1kg$ ,  $m = 0.1kg$ ,  $L = 1m$ ,  $g = 9.81m/sec^2$ , 并用  $\mathbf{x} = [Z \ \dot{Z} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$  来表示状态向量,  $y$  表示输出, 则(1.243)式变为:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \quad (1.245)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \quad (1.246)$$

这是状态变量形式的线性化微分方程组, 当  $\theta$  很小时, 本方程确定了自动搜索平衡装置的动态特性。在以后各章将研究这种系统的各种性质和控制方法。

### §1.5 多输入一一多输出系统的状态空间表达式

到目前为止，我们所研究的系统全是单输入单输出的系统，但很多系统是多输入和多输出的。

**Example 1.14** 如图1.22所示的系统

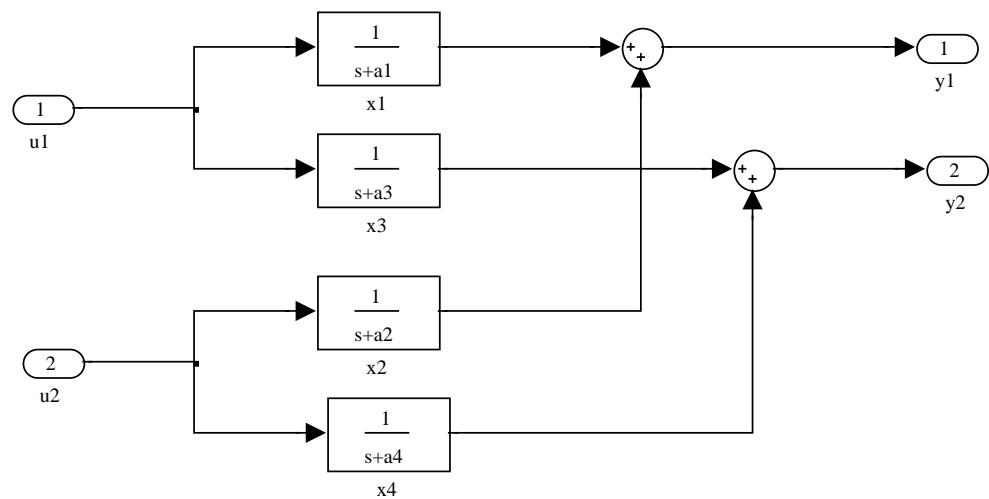


图 1.22

由图1.22可写出系统方程为：

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+a_1} & \frac{1}{s+a_2} \\ \frac{1}{s+a_3} & \frac{1}{s+a_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (1.247)$$

简写成

$$\mathbf{Y}(s) = G(s)\mathbf{u}(s) \quad (1.248)$$

其中 $G(s)$ 称为传递函数矩阵。

在图1.22上可直接设置状态变量 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 。由此可写出状态空间表达式：

LCD 2014年秋季

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 x_1 + u_1 \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_2 + u_2 \\ \dot{x}_3 = -a_3 x_3 + u_1 \\ \dot{x}_4 = -a_4 x_4 + u_2 \end{cases} \quad (1.249)$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_3 + x_4 \end{cases} \quad (1.250)$$

其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (1.251)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (1.252)$$

这是一个具有两个输入量和两个输出量的系统，并有四个状态变量。

**Example 1.15** 已知系统的传递函数矩阵为

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+5}{s^2+5s+6} & \frac{2s^2+7s+7}{s^3+6s^2+11s+6} \\ \frac{3s^2+12s+11}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{s+1}{s^2+5s+6} \end{bmatrix} \quad (1.253)$$

要求写出其状态空间表达式。

初看起来，相应的形式应当如图1.15所示，它需要两个三阶传递函数 $g_{12}(s)$ 和 $g_{21}(s)$ ，两个二阶传递函数 $g_{11}(s)$ 和 $g_{22}(s)$ 。这里共有十个状态变量。相应地需要十个单独的积分器。实际上状态变量的数目可以减少。这里引进一个概念——最小实现。所谓最小实现简单地说就是用最少积分器的实现。有关最小实现的问题下面还会碰到。为了得到最小实现，一般的做法是将 $G(s)$ 按部分分式展开。下式是一般的形式：

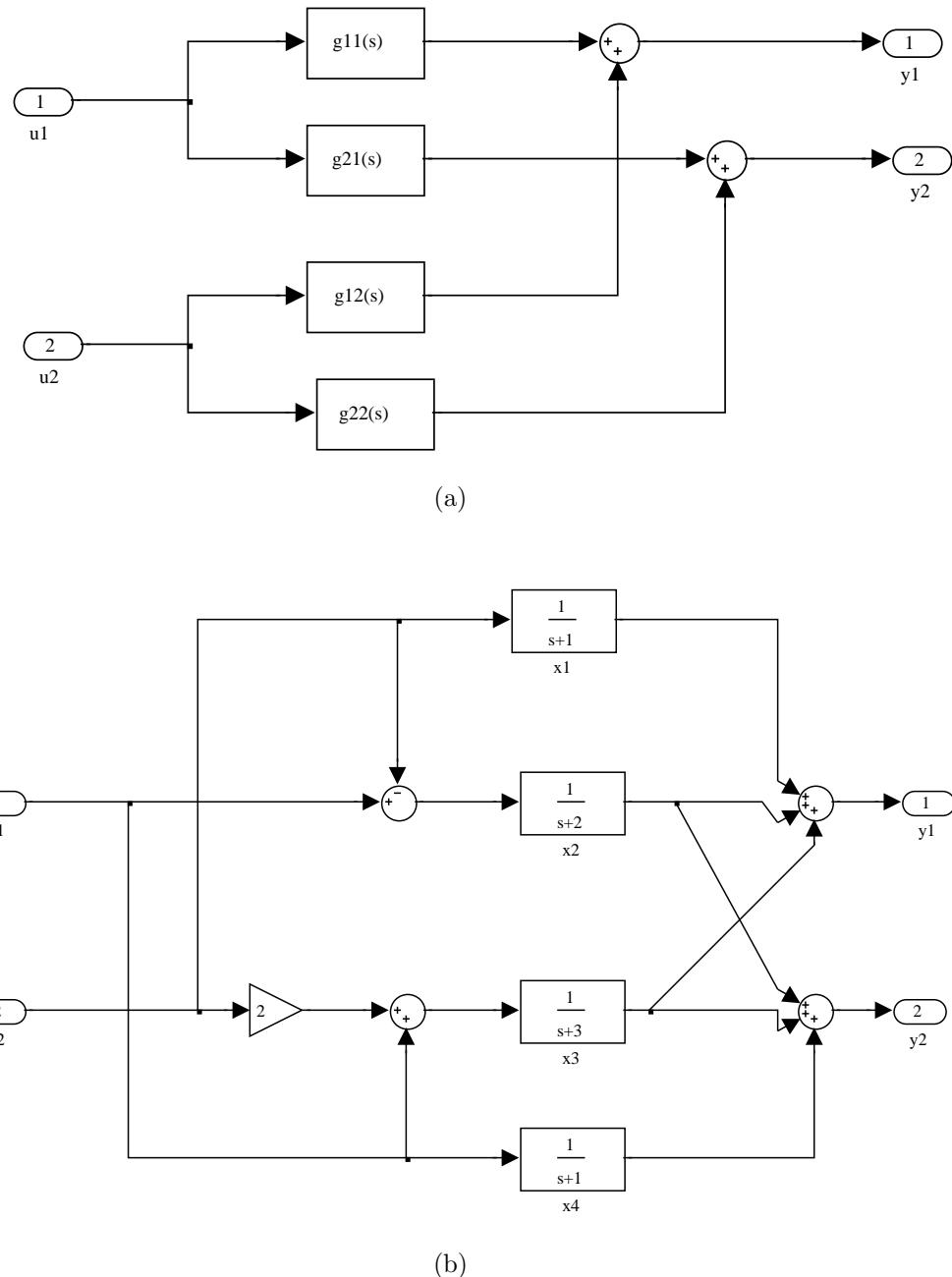


图 1.23

LCD 2014年秋季

$$G(s) = \frac{1}{s - \lambda_1} R_1 + \frac{1}{s - \lambda_2} R_2 + \cdots + \frac{1}{s - \lambda_P} R_P \quad (1.254)$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_P$  是各传递函数元素的极点；  $R_1, R_2, \dots, R_P$  是极点的留数矩阵，在留数矩阵  $R_K$  中，各列  $[r_{k1}, r_{k2}, \dots, r_{kr}]$  把相应的基本传递函数  $\frac{1}{s - \lambda_k}$  分配到输出端去。

$$\mathbf{y}(s) = \cdots + \frac{1}{s - \lambda_K} [\mathbf{r}_{k1}, \mathbf{r}_{k2}, \dots, \mathbf{r}_{kr}] \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_r(s) \end{bmatrix} + \cdots \quad (1.255)$$

如果  $R_K$  是满秩的，将有  $r$  个独立的列，需要  $r$  个独立的  $\frac{1}{s - \lambda_k}$  的描述，如果  $R_K$  不满秩，则需要较少的描述，其中每一个  $\frac{1}{s - \lambda_k}$  的描述与独立的列对应。

本题的传递函数部分分式展开式为：

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} & \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+3} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.256)$$

上式中  $R_1$  是满秩的，但  $R_2$  和  $R_3$  的秩为 1，因此， $G(s)$  继续可以表示为：

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad -1] + \frac{1}{s+3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad 2] \quad (1.257)$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(s) = G(s) \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} &= \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} u_2(s) \\ u_1(s) \end{bmatrix} + \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [u_1(s) - u_2(s)] \\ &+ \frac{1}{s+3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [u_1(s) + 2u_2(s)] \end{aligned} \quad (1.258)$$

由上式可画出图1.23，显然这个描述仅含四个状态变量 $x_1, x_2, x_3, x_4$ ，由图可直接写出状态空间表达式：

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & & 0 & \\ & -2 & & \\ & & -3 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{array} \right. \quad (1.259)$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (1.260)$$

可见实现的状态变量数目由原来的十个减少到四个。上述实现实际上就是一个最小实现，是否是最小实现是可以检验的，以后我们将会涉及。

**Example 1.16** 设给定的多输入多输出系统为如下微分方程组的形式：

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y}_1 + a_1 \dot{y}_1 + a_2 y_2 = b_1 \dot{u}_1 + b_2 u_1 + b_3 u_2 \\ \dot{y}_2 + a_3 y_2 + a_4 y_1 = b_4 u_2 \end{array} \right. \quad (1.261)$$

式(1.261)的实现也是非唯一的，现采用模拟结构图的方法。首先按最高阶导数求解。

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y}_1 = -a_1 \dot{y}_1 + b_1 \dot{u}_1 - a_2 y_2 + b_2 u_1 + b_3 u_2 \\ \dot{y}_2 = -a_3 y_2 - a_4 y_1 + b_4 u_2 \end{array} \right. \quad (1.262)$$

对每一个方程积分，得：

$$\begin{cases} y_1 = \int \int [(-a_1 \dot{y}_1 + b_1 \dot{u}_1) - a_2 y_2 + b_2 u_1 + b_3 u_2] dt^2 \\ = \int [(-a_1 y_1 + b_1 u_1) + \int (b_2 u_1 + b_3 u_2 - a_2 y_2) dt] dt \\ y_2 = \int (-a_3 y_2 - a_4 y_1 + b_4 u_2) dt \end{cases} \quad (1.263)$$

由上式得模拟构图如图1.24所示。

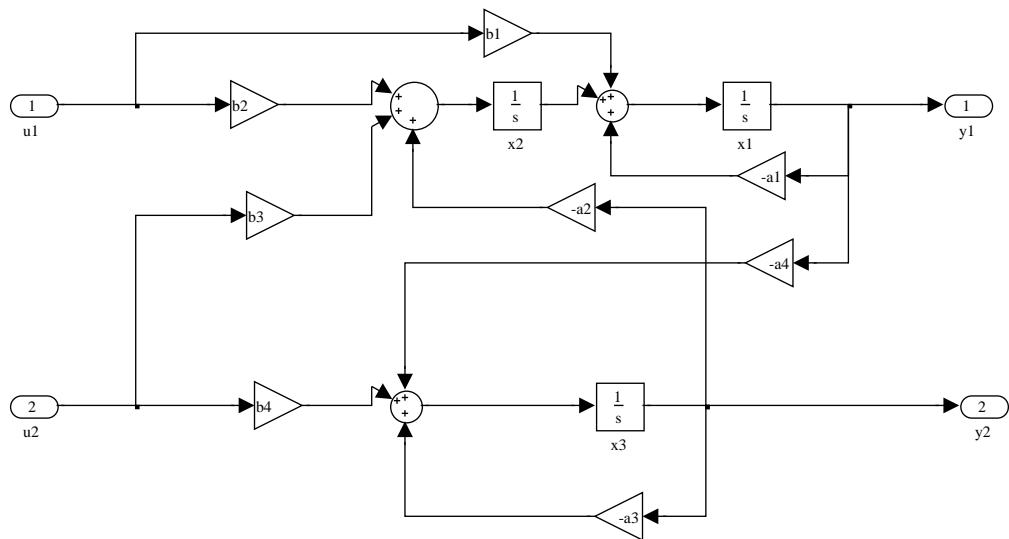


图 1.24

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 x_1 + x_2 + b_1 u_1 \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_3 + b_2 u_1 + b_3 u_2 \\ \dot{x}_3 = -a_4 x_1 - a_3 x_3 + b_4 u_2 \end{cases} \quad (1.264)$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{cases} \quad (1.265)$$

写成向量矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 \\ -a_4 & 0 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (1.266)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (1.267)$$

## §1.6 离散时间系统的状态空间表达式

连续时间系统的状态空间表达法也可以推广到离散时间系统。在连续时间系统中，可以从微分方程或传递函数来建立状态空间表达式。而在离散系统中，可以从差分方程或脉冲传递函数来建立离散状态空间表达式。

设离系统的差分方程为：

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_1y(k+n-1) + \cdots + a_{n-1}y(k+1) + a_ny(k) \\ = b_0u(k+n) + b_1u(k+n-1) + \cdots + b_nu(k) \end{aligned} \quad (1.268)$$

相应地脉冲传递函数为：

$$G(z) = \frac{b_0Z^n + b_1Z^{n-1} + \cdots + b_{n-1}Z + b_n}{Z^n + a_1Z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}Z + a_n} \quad (1.269)$$

实现的任务就是确定一种状态空间表达式

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = G\mathbf{x}(k) + \mathbf{h}u(k) \\ y(k) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(k) + du(k) \end{cases} \quad (1.270)$$

式(1.270)可以用方块图1.25来表示，图中 $Z^{-1}$ 代表右移算子，类似于连续系统中的积分算子。

当然离散状态空间表达式也可以直接由连续系统离散化获得（见§2.3）或由离散物理系统直接建立。

### 一、由差分方程导出离散状态方程

由差分方程（即时域模型）导出离散状态方程和连续系统类似，同样可分两种情况讨论。

差分方程作用函数中不包含高阶差分的情况。

差分方程作用函数中不包含高阶差分时，(1.268) 式可以写成：

LCD 2014年秋季

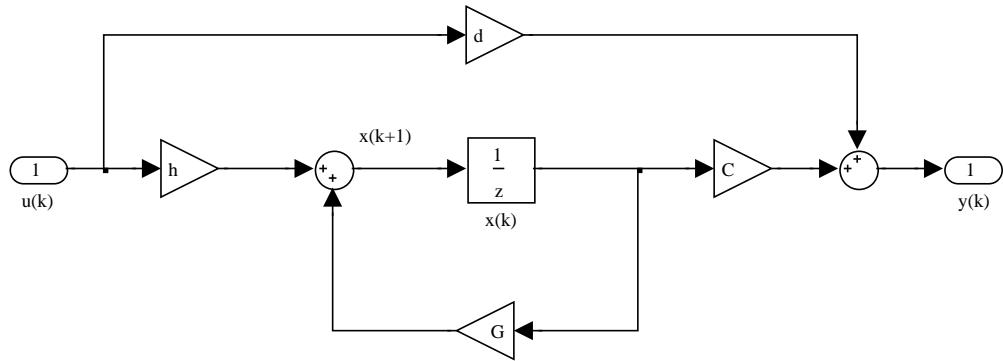


图 1.25

$$\begin{aligned} & y(k+n) + a_1y(k+n-1) + \cdots + a_{n-1}y(k+1) + a_ny(k) \\ & = bu(k) \end{aligned} \quad (1.271)$$

选取各采样时刻的 $y(k)$ ,  $y(k+1)$ ,  $\dots$ ,  $y(k+n-1)$ 为 $n$ 个状态变量, 即令

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(k) = y(k) \\ x_2(k) = y(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k) = y(k+n-1) \end{array} \right. \quad (1.272)$$

根据(1.271)(1.272)两式可得:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ \dots \\ x_{n-1}(k+1) = x_n(k) \\ x_n(k+1) = y(k+n) = -a_nx_1(k) - a_{n-1}x_2(k) - \cdots - a_1x_n(k) + bu(k) \end{array} \right. \quad (1.273)$$

而 $y(k) = x_1(k)$ , 从而(1.273)式可写成:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} u(k) \quad (1.274)$$

$$y(k) = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \mathbf{x}(k) \quad (1.275)$$

2、差分方程作用函数中包含高阶差分的情况

首先来考察一个三阶差分方程

$$\begin{aligned} y(k+3) + a_1y(k+2) + a_2y(k+1) + a_3y(k) \\ = b_0u(k+3) + b_1u(k+2) + b_2u(k+1) + b_3u(k) \end{aligned} \quad (1.276)$$

希望将上述三阶差分方程变成如下形式的三阶状态方程：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} u(k) \quad (1.277)$$

$$y(k) = x_1(k) + h_0u(k) \quad (1.278)$$

即定义：

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + h_1u(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) + h_2u(k) \\ x_3(k+1) = -a_3x_1(k) - a_2x_2(k) - a_1x_3(k) + h_3u(k) \end{cases} \quad (1.279)$$

以及

$$y(k) = x_1(k) + h_0u(k) \quad (1.280)$$

于是问题变成如何从系数  $a_i, b_j$  求  $h_0, h_1, h_2, h_3$ 。由上两式可知：

$$\begin{aligned} y(k+1) &= x_1(k+1) + h_0 u(k+1) \\ &= x_2(k) + h_0 u(k+1) + h_1 u(k) \end{aligned} \quad (1.281)$$

$$\begin{aligned} y(k+2) &= x_2(k+1) + h_0 u(k+2) + h_1 u(k+1) \\ &= x_3(k) + h_0 u(k+2) + h_1 u(k+1) + h_2 u(k) \end{aligned} \quad (1.282)$$

$$\begin{aligned} y(k+3) &= x_3(k+1) + h_0 u(k+3) + h_1 u(k+2) + h_2 u(k+1) \\ &= -a_3 x_1(k) - a_2 x_2(k) - a_1 x_3(k) + h_0 u(k+3) + h_1 u(k+2) \\ &\quad + h_2 u(k+1) + h_3 u(k) \end{aligned} \quad (1.283)$$

以上式(1.280), (1.281), (1.282), (1.283) 分别乘以  $a_3, a_2, a_1, 1$ , 并相加得

$$\begin{aligned} &y(k+3) + a_1 y(k+2) + a_2 y(k+1) + a_3 y(k) \\ &= h_0 u(k+3) + (h_1 + a_1 h_0) u(k+2) + (h_2 + a_1 h_1 + a_2 h_0) u(k+1) \\ &\quad + (h_3 + a_1 h_2 + a_2 h_1 + a_3 h_0) u(k) \\ &= b_0 u(k+3) + b_1 u(k+2) + b_2 u(k+1) + b_3 u(k) \end{aligned} \quad (1.284)$$

由此可得:

$$\begin{cases} h_0 = b_0 \\ h_1 = b_1 - a_1 h_0 \\ h_2 = b_2 - a_1 h_1 - a_2 h_0 \\ h_3 = b_3 - a_1 h_2 - a_2 h_1 - a_3 h_0 \end{cases} \quad (1.285)$$

不难看出, 这里所选的一组变量是:

$$\begin{cases} x_1(k) = y(k) - h_0 u(k) \\ x_2(k) = y(k+1) - h_0 u(k+1) - h_1 u(k) \\ x_3(k) = y(k+2) - h_0 u(k+2) - h_1 u(k+1) - h_2 u(k) \end{cases} \quad (1.286)$$

上面以三阶为例的状态方程可以推广到一般情况。 $n$ 阶差分方程为:

$$\begin{aligned} &y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) \\ &= b_0 u(k+n) + b_1 u(k+n-1) + \cdots + b_n u(k) \end{aligned} \quad (1.287)$$

和连续系统类似，我们选择

$$\begin{cases} x_1(k) = y(k) - h_0 u(k) \\ x_2(k) = x_1(k+1) - h_1 u(k) \\ x_3(k) = x_2(k+1) - h_2 u(k) \\ \dots \\ x_n(k) = x_{n-1}(k+1) - h_{n-1} u(k) \end{cases} \quad (1.288)$$

其中，待定系数  $h_0, h_1, \dots, h_n$  的计算关系式为

$$\begin{cases} h_0 = b_0 \\ h_1 = b_1 - a_1 h_0 \\ h_2 = b_2 - a_1 h_1 - a_2 h_0 \\ \dots \\ h_n = b_n - a_1 h_{n-1} - \dots - a_{n-1} h_1 - a_n h_0 \end{cases} \quad (1.289)$$

由式(1.287)(1.288) 即可导出

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + h_1 u(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) + h_2 u(k) \\ \dots \\ x_{n-1}(k+1) = x_n(k) + h_{n-1} u(k) \\ x_n(k+1) = -a_n x_1(k) - a_{n-1} x_2(k) - \dots - a_1 x_n(k) + h_n u(k) \end{cases} \quad (1.290)$$

从而，其相应的状态方程和输出方程为：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{bmatrix} u(k) \quad (1.291)$$

$$y(k) = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \mathbf{x}(k) + h_0 u(k) \quad (1.292)$$

**Example 1.17** 设一个三阶差分方程为:

$$\begin{aligned} & y(k+3) + 5y(k+2) + 7y(k+1) + 3y(k) \\ & = u(k+1) + 2u(k) \end{aligned} \quad (1.293)$$

求相应的离散状态方程和输出方程。

解: 差分方程的系数为

$$a_1 = 5, a_2 = 7, a_3 = 3,$$

$$b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 2,$$

则由(1.289) 式可求得相应的系数  $h_i$  为:

$$h_0 = 0, h_1 = 0, h_2 = 1, h_3 = -3,$$

由式(1.289)得离散状态空间表达式为:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} u(k) \quad (1.294)$$

$$y(k) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad (1.295)$$

## 二、由脉冲传递函数推导离散状态方程

由脉冲传递函数 (或由模拟结构图) 推导离散状态方程也和连续系统中类似, 常见而又较简单的一些实现如前所述为能控标准型 (I、II), 能观标准型 (I、II) 或约当标准型等, 这里仅举例说明。

**Example 1.18** 已知一离散系统的传递函数为

$$g(z) = \frac{b_1 Z + b_2}{Z^2 + a_1 Z + a_2} \quad (1.296)$$

求其状态空间表达式。

首先, 上式可写成:

LCD 2014年秋季

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2}}{1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2}} \quad (1.297)$$

所以

$$y(z) = (b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2}) \frac{u(z)}{1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2}} \quad (1.298)$$

令

$$e(z) = \frac{u(z)}{1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2}} \quad (1.299)$$

则

$$\begin{aligned} y(z) &= b_1 Z^{-1} e(z) + b_2 Z^{-2} e(z) \\ e(z) &= u(z) - a_1 Z^{-1} e(z) - a_2 Z^{-2} e(z) \end{aligned} \quad (1.300)$$

由此可画出如图1.26所示的模拟结构图。

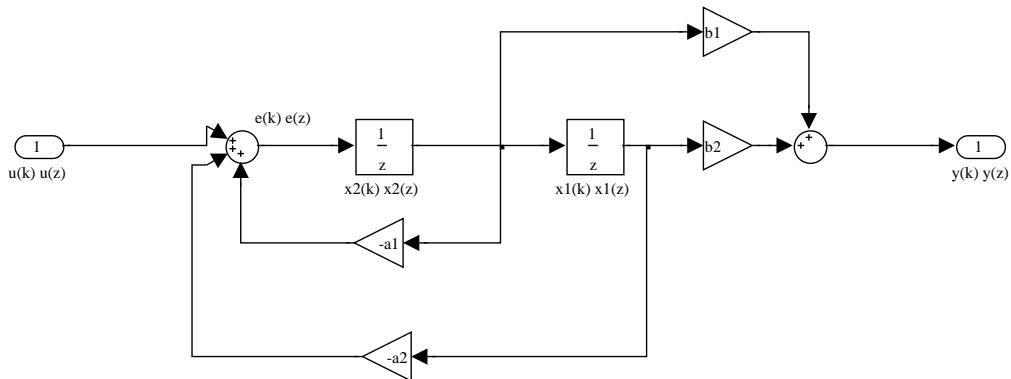


图 1.26 能控标准I型

在图上设置状态变量，由图1.26可直接写出状态空间表达式：

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = -a_2 x_1(k) - a_1 x_2(k) + u(k) \\ y(k) = b_2 x_1(k) + b_1 x_2(k) \end{cases} \quad (1.301)$$

写成矩阵形式：

LCD 2014年秋季

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (1.302)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (1.303)$$

上式即为能控标准I型，显然其能观标准II型为：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} u(k) \quad (1.304)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (1.305)$$

其模拟结构图如图1.27所示。

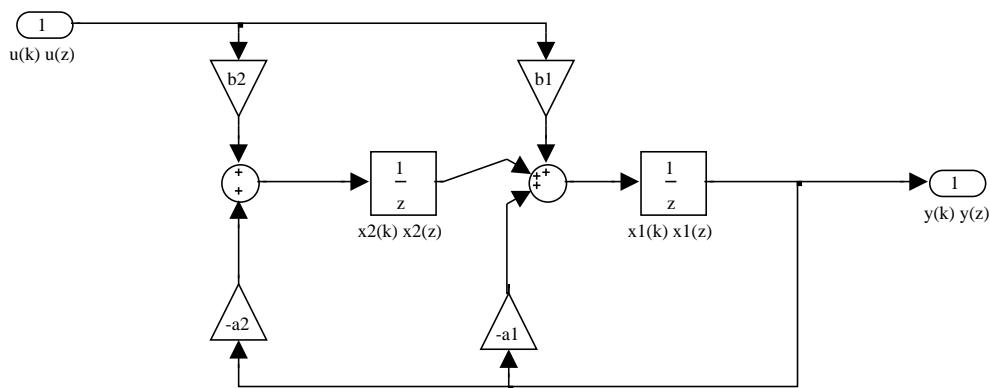


图 1.27 能观标准II型

**Example 1.19** 已知一离散系统的传递函数为：

$$g(z) = \frac{0.368Z + 0.264}{Z^2 - 1.368Z + 0.368} \quad (1.306)$$

试写出它的状态空间表达式，并且具有对角标准形式。

解：将 $g(z)$ 用部分分式展开

$$g(z) = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368} = \frac{1}{z-1} - \frac{0.632}{z-0.368} \quad (1.307)$$

$$y(z) = \frac{u(z)}{Z-1} - \frac{0.632u(z)}{Z-0.368} \quad (1.308)$$

由上式可以画出模拟结构图，如图1.28，在图上设置状态变量，即可将状态空间表达式为：

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = 0.368x_2(k) + u(k) \end{cases} \quad (1.309)$$

$$y(k) = x_1(k) - 0.632x_2(k) \quad (1.310)$$

写成向量矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.368 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (1.311)$$

$$y(k) = [1 \ -0.632] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (1.312)$$

## §1.7 状态变量的线性变换

### 一、线性变换

从前两节可以看出，对于一个给定的动态系统，可以选择不同的状态变量组，从而得到不同结构的状态空间表达式，例如能控标准型，能观标准型或约当标准型。不同的状态变量组之间的关系实质上是一种线性变换的关系，或称坐标变换。设给定系统为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1.313)$$

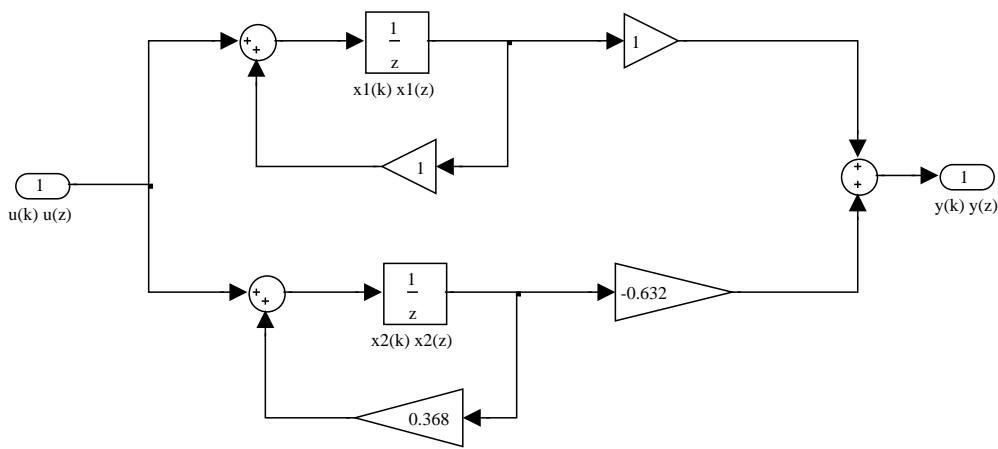


图 1.28 对角标准型

我们总可以找到任意一个非奇异矩阵  $T$ , 将原状态向量  $\mathbf{x}$  作线性变换, 得到另一个状态向量  $\mathbf{z}$ , 即

$$\mathbf{x} = T\mathbf{z} \text{ 或 } \mathbf{z} = T^{-1}\mathbf{x} \quad (1.314)$$

将式(1.314) 代入式(1.313) 则得新状态空间表达式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = T^{-1}AT\mathbf{z} + T^{-1}B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = CT\mathbf{z} + D\mathbf{u} \end{cases} \quad (1.315)$$

令

$$\begin{cases} \tilde{A} = T^{-1}AT & \tilde{B} = T^{-1}B \\ \tilde{C} = CT & \tilde{D} = D \end{cases} \quad (1.316)$$

则得

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \tilde{A}\mathbf{z} + \tilde{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \tilde{C}\mathbf{z} + \tilde{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (1.317)$$

可以看出, 用式(1.314) 的变换而联系起来的两个系统(1.313)和(1.317) 式, 对于相同的输入, 必定给出相同的输出, 此时称这两个系统为代数上等价的系统。由于非奇异变换矩阵是任意选择的, 所以和某系统代数上等价的

系统有无穷多。反过来说，尽管系统的状态空间表达式不是唯一的，但不同的表达式之间，也仅仅只是(1.316)关系式所确定的线性非奇异变换的关系。

**Example 1.20** 设原系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases} \quad (1.318)$$

若取  $T = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  即  $T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$  则

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (1.319)$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.320)$$

$$\tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.321)$$

所以新状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 6 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} \end{cases} \quad (1.322)$$

显然上式为能控标准I型。

## 二、系统特征值不变性及系统的不变量

状态方程中的系数矩阵  $A$ ，也称为状态矩阵，是一个很重要的矩阵。它包含了许多有关系统特征的重要信息，这里讨论  $A$  的特征值。

系统特征值就是状态矩阵  $A$  的特征值，也即特征方程

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (1.323)$$

LCD 2014年秋季

的根。 $n \times n$  方阵  $A$  有  $n$  个特征值。实际的物理系统， $A$  为实数矩阵，故特征值或为实数，或为共轭复数对。

**Example 1.21** 若系统矩阵为：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (1.324)$$

求它的特征值。

矩阵  $A$  的特征方程为：

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0 \quad (1.325)$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2 \quad (1.326)$$

即为特征方程的根。

状态矩阵  $A$  的一个重要性质是其特征值的不变性，即在状态变量的线性变换中，新老状态方程的  $A$  阵和  $\tilde{A}$  阵的特征值是相同的。为了证明这一点，只要证明  $|\lambda I - A| == |\lambda I - \tilde{A}|$  即可，证明如下：

$$\begin{aligned} |\lambda I - \tilde{A}| &= |\lambda I - T^{-1}AT| = |\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT| \\ &= |T^{-1}(\lambda I - A)T| \\ &= |T^{-1}| |\lambda I - A| |T| \\ &= |T^{-1}T| |(\lambda I - A)| \\ &= |\lambda I - A| \end{aligned} \quad (1.327)$$

从而我们证明了在对状态变量作线性变换的情况下， $A$  阵的特征值是不变的。这还意味着  $A$  阵和  $\tilde{A}$  阵的特征方程是相同的。即如设系统的特征方程为：

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (1.329)$$

则方程的系数是不变的量，故称特征多项式的系数为系统的不变量。

同样可以证明，对于给定的系统，尽管其状态空间表达式不同，但反映输入—输出的特性的传递函数阵却是具有相同的形式。

$$\tilde{G}(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} \quad (1.330)$$

$$\begin{aligned} &= CT(sT^{-1}T - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D \\ &= CT[T^{-1}(sI - A)T]^{-1}T^{-1}B + D \\ &= CTT^{-1}(sI - A)^{-1}TT^{-1}B + D \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= G(s) \end{aligned} \quad (1.331)$$

可见一切代数上等价的线性系统都有相同的传递函数阵。

### 三、特征向量

设  $\mathbf{P}_i$  为  $n$  维向量， $\lambda_i$  为标量，它是矩阵  $A$  的特征值，若下式成立

$$A\mathbf{P}_i = \lambda_i \mathbf{P}_i \quad (1.332)$$

则称向量  $\mathbf{P}_i$  为矩阵  $A$  的对应于特征值  $\lambda_i$  的特征向量。从上式可以看出，特征向量  $\mathbf{P}_i$  经  $A$  线性变换后，方向不变，仅长度增加了  $\lambda_i$  倍。

### 四、化状态空间表达式为约当标准型

这里介绍化状态空间表达式为约当标准型的方法。显然，约当标准型可由线性变换而获得。这里分两种情况：若矩阵有两两相异的特征值，则可化为对角标准型；若系统矩阵有重根，则可化为一般的约当标准型。

#### 1、状态矩阵 $A$ 无重根时

对线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (1.333)$$

如果  $A$  有  $n$  个两两相异特征值，则存在非奇异矩阵  $T$ ，通过线性变换  $\tilde{\mathbf{x}} = T^{-1}\mathbf{x}$ ，使之化为对角线规范形式

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{B}\mathbf{u} \quad (1.334)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1.335)$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为矩阵  $A$  的特征值。

证明：首先令  $\mathbf{P}_i$  为  $A$  的属于特征值  $\lambda_i$  的特征向量，且

$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 因为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为两两相异，故  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$  必线性无关，由这些特征向量组成矩阵  $T$ :

$$T = [\mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2 \ \dots \ \mathbf{P}_n] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.336)$$

必是非奇异的。进而，根据特征向量的关系式

$$A\mathbf{P}_i = \lambda_i \mathbf{P}_i \quad (1.337)$$

我们有

$$\begin{aligned} AT &= A \left[ \mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2 \ \dots \ \mathbf{P}_n \right] = \left[ A\mathbf{P}_1 \ A\mathbf{P}_2 \ \dots \ A\mathbf{P}_n \right] \\ &= \left[ \lambda_1 \mathbf{P}_1 \ \lambda_2 \mathbf{P}_2 \ \dots \ \lambda_n \mathbf{P}_n \right] \\ &= \left[ \mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2 \ \dots \ \mathbf{P}_n \right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.338)$$

因为  $T$  是非奇异阵，必有逆。将上式左乘  $T^{-1}$ ，即得

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1.339)$$

对(1.333)式, 令  $\dot{\boldsymbol{x}} = T\tilde{\boldsymbol{x}}$ , 则得

$$T\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = AT\tilde{\boldsymbol{x}} + B\boldsymbol{u} \quad (1.340)$$

上式两边左乘  $T^{-1}$  得

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = T^{-1}AT\tilde{\boldsymbol{x}} + T^{-1}B\boldsymbol{u} \quad (1.341)$$

即

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \tilde{A}\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{B}\boldsymbol{u} \quad (1.342)$$

其中:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \quad \tilde{B} = T^{-1}B \quad (1.343)$$

由此, 上述命题得证。

**Example 1.22** 已知系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u \quad (1.344)$$

将此状态空间表达式化为对角标准型。

解:  $A$ 的特征方程为:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda - 1) \quad (1.345)$$

所以 $A$ 的特征值为:

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -1 \quad (1.346)$$

可见此系统的特征值两两相异。进而可确定线性变换矩阵 $T$ , 根据特征向量关系式:

$$A\mathbf{P}_i = \lambda_i \mathbf{P}_i \quad (1.347)$$

定出 $A$ 的分别属于 $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\lambda_3$ 的特征向量。

由

$$A\mathbf{P}_1 = \lambda_1 \mathbf{P}_1 \quad (1.348)$$

即

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} \quad (1.349)$$

$$\text{得到} \begin{cases} p_{21} + p_{31} = 0 \\ 3p_{21} = 0 \\ -2p_{21} + p_{31} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{11} = K(\text{任意常值}) \\ p_{21} = 0 \\ p_{31} = 0 \end{cases} \quad \text{我们任选一组:}$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.350)$$

同理可定出

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1.351)$$

于是得到

$$T = [\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \mathbf{P}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.352)$$

从而可以求得

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.353)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.354)$$

$$\tilde{b} = T^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (1.355)$$

这样，给定系统的状态方程的对角标准型为

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

## 2、状态矩阵A有重根时

对线性定常系统(1.333)式，设A的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 其中特征值 $\lambda_j$ 为 $m_j$ 重特征值，所以有

$$\sum_{j=1}^k m_j = n \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1.356)$$

对于上述有重根的情况，可以回顾§1.3中传递函数状态空间表达式的实现，这时导出的形式叫约当标准型，就是说总可以找到变换矩阵T，使得

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & 0 & \\ & & J_3 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & J_K \end{bmatrix} \quad (1.357)$$

这里

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \lambda_j & \ddots \\ 0 & & & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}_{m_j \times m_j} \quad (1.358)$$

称为第  $j$  个约当块。

现在的问题是怎样得到变换矩阵  $T$ 。因为特征值重复，所以得不到  $n$  个线性无关的特征向量。即不能用化对角标准型的方法，假设对  $m_1$  重特征值  $\lambda_1$ ，只能得到一个特征向量  $P_1$ ，其余向量  $P_2, P_3, \dots, P_{m_1}$  尚未求出，但由于

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & 0 & \\ & & J_3 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & J_K \end{bmatrix} \quad (1.359)$$

得

$$AT = T\tilde{A} \quad (1.360)$$

将此式展开

$$A[\ P_1 \ P_2 \ \cdots \ P_{m_1} \ \cdots \ P_n \ ] \quad (1.361)$$

$$= [\mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2 \ \cdots \ \mathbf{P}_{m_1} \ \cdots \ \mathbf{P}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & \ddots & 1 & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & J_2 \\ 0 & & & \\ & & & J_3 \\ 0 & & & \\ & & & \ddots \\ & & & J_k \end{bmatrix} \quad (1.362)$$

现在研究上式两边矩阵的第2列到第 $m_1$ 列，得下列关系式：

$$\begin{cases} A\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + \lambda_1 \mathbf{P}_2 \\ A\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 + \lambda_1 \mathbf{P}_3 \\ \vdots \\ A\mathbf{P}_{m_1} = \mathbf{P}_{m_1-1} + \lambda_1 \mathbf{P}_{m_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A - \lambda_1 I)\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 \\ (A - \lambda_1 I)\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ (A - \lambda_1 I)\mathbf{P}_{m_1} = \mathbf{P}_{m_1-1} \end{cases} \quad (1.363)$$

上式有 $m_1 - 1$ 个方程和 $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \dots, \mathbf{P}_{m_1}$ 共 $m_1 - 1$ 个未知量，由上式可求得 $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \dots, \mathbf{P}_{m_1}$ 。

同理可求得 $\mathbf{P}_{m_1}$ 以后的特征向量，于是可组成 $T$ 矩阵。

**Example 1.23** 已知系统状态空间表达式为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} u \quad (1.364)$$

试将此表达式化为约当标准型。

解：求 $A$ 的特征值

LCD 2014年秋季

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + 3 & -1 \\ 4 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 3)^2\lambda + 4 = (\lambda + 1)^2(\lambda + 4) = 0 \quad (1.365)$$

所以特征值为：

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -4 \quad (1.366)$$

求特征向量，由

$$A\mathbf{P}_1 = \lambda_1 \mathbf{P}_1 \quad (1.367)$$

$$\text{即 } \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix} \text{ 得}$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (1.368)$$

$$\text{由 } (A - \lambda_1 I)\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1$$

$$\text{即 } \left\{ \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} - (-1)I \right\} \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ 得}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (1.369)$$

由  $A\mathbf{P}_3 = \lambda_3 \mathbf{P}_3$  得

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.370)$$

所以

$$T = [\ P_1 \ P_2 \ P_3 \ ] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.371)$$

$$T^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 11 & 7 & -4 \\ -6 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.372)$$

因而

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad (1.373)$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.374)$$

此系统的约当标准型为：

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.375)$$

## 第二章 线性系统状态方程的解

上一章我们讨论了如何建立系统的状态空间表达式，这一章将讨论如何解系统的状态方程。

### § 2.1 线性定常系统状态方程的解

线性定常系统的状态方程为：

$$\dot{\underline{x}} = \mathbf{A} \underline{x} + \mathbf{B} \underline{u} \quad , \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (t \geq t_0) \quad (2.1)$$

其中  $\underline{x}$ ,  $\underline{u}$  分别为  $n$ ,  $r$  维向量, 系数矩阵  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  分别为  $n \times n$ ,  $n \times r$  常数矩阵。

对于上述方程, 现讨论具体求解的方法。

#### 一、齐次方程的解

在求微分方程式 (2.1) 的解之前, 首先考虑输入项  $\underline{u}$  为零的齐次方程式

$$\dot{\underline{x}} = \mathbf{A} \underline{x} \quad (2.2)$$

的解。此时无控制作用, 系统处于由初始状态引起的自由运动状态, 所以齐次方程式的解也称自由解。

若初始时刻  $t_0$  时的状态给定为  $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ , 则式 (2.2) 有唯一确定解:

$$\underline{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \underline{x}_0 \quad (t \geq t_0) \quad (2.3)$$

若初始时刻从  $t = 0$  开始, 即  $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ , 则 (2.2) 解形式为:

$$\underline{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \underline{x}_0 \quad (t \geq 0) \quad (2.4)$$

其中  $e^{\mathbf{A}t}$  或  $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$  称为矩阵指数, 为  $n \times n$  方阵。

#### 1. 用直接法证明

首先我们用直接法来证明上述基本结论。和通常的标量微分方程类似，先假定(2.2)式的解 $\underline{x}(t)$ 为时间 $t$ 的向量幂级数形式，即

$$\underline{x}(t) = \underline{b}_0 + \underline{b}_1 t + \underline{b}_2 t^2 + \cdots + \underline{b}_k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{b}_k \cdot t^k \quad (2.5)$$

式中： $t \geq 0$ ，将(2.5)式代入方程(2.2)式得

$$\begin{aligned} & \underline{b}_1 + 2\underline{b}_2 t + 3\underline{b}_3 t^2 + \cdots + k\underline{b}_k t^{k-1} + \cdots \\ &= A(\underline{b}_0 + \underline{b}_1 t + \cdots + \underline{b}_k t^k + \cdots) \quad (t \geq 0) \end{aligned} \quad (2.6)$$

因为上式对 $t \geq 0$ 均成立，故等式两边 $t$ 的同次幂项的系数应相等，可得如下一组关系式：

$$\begin{aligned} \underline{b}_1 &= A \underline{b}_0 \\ \underline{b}_2 &= \frac{1}{2} A \underline{b}_1 = \frac{1}{2!} A^2 \underline{b}_0 \\ \underline{b}_3 &= \frac{1}{3} A \underline{b}_2 = \frac{1}{3!} A^3 \underline{b}_0 \\ &\dots\dots\dots \\ \underline{b}_k &= \frac{1}{k} A \underline{b}_{k-1} = \frac{1}{k!} A^k \underline{b}_0 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

在式(2.5)中，令 $t = 0$ ，可得

$$\underline{b}_0 = \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

将以上结果代入(2.5)中，即有

$$\underline{x}(t) = (I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots) \underline{x}_0 \quad (2.7)$$

或写成

$$\underline{x}(t) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k \right) \underline{x}_0 \quad (2.8)$$

仿照标量指数的定义

$$\begin{aligned} e^{at} &= 1 + at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} a^k t^k + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k t^k \end{aligned}$$

我们可定义矩阵指数为：

$$\begin{aligned}
e^{At} &= 1 + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k
\end{aligned} \tag{2.9}$$

故 (2.7) 式可表示为

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}_0$$

若用  $(t - t_0)$  代替  $t$ , 即初始时刻为  $t_0$ , 同样可证明

$$\underline{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \underline{x}_0$$

的正确性。

## 2. 用 Laplace 变换法证明

式 (2.4) 也可以采用 *Laplace* 变换法来证明。对 (2.2) 式两边取 *Laplace* 变换。可得

$$S \cdot \underline{x}(s) - \underline{x}_0 = A \cdot \underline{x}(s)$$

其中  $\underline{x}(s) = L[\underline{x}(t)]$  为状态向量  $\underline{x}(t)$  的拉氏变换, 经整理有:

$$(SI - A) \underline{x}(s) = \underline{x}_0$$

将上式两边左乘  $(SI - A)^{-1}$ , 从而有

$$\underline{x}(s) = (SI - A)^{-1} \cdot \underline{x}_0$$

将上式作反变换得齐次方程的解, 即

$$\underline{x}(t) = L^{-1}[(SI - A)^{-1}] \cdot \underline{x}_0 \tag{2.10}$$

因为  $(SI - A)(\frac{I}{S} + \frac{A}{S^2} + \frac{A^2}{S^3} + \cdots + \frac{A^k}{S^{k+1}} + \cdots) = I$

所以  $(SI - A)^{-1} = \frac{I}{S} + \frac{A}{S^2} + \frac{A^2}{S^3} + \cdots + \frac{A^k}{S^{k+1}} + \cdots$

将上式代入 (2.10) 式, 即得

$$\begin{aligned}
\underline{x}(t) &= L^{-1}\left[ \frac{I}{S} + \frac{A}{S^2} + \frac{A^2}{S^3} + \cdots + \frac{A^k}{S^{k+1}} + \cdots \right] \underline{x}_0 \\
&= (I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots) \underline{x}_0 \\
&= e^{At} \underline{x}_0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

可见  $e^{At} = L^{-1}[(SI - A)^{-1}]$ ，从而 (2.4) 式得到证明。

## 二、矩阵指数函数——状态转移矩阵

### 1. 状态转移矩阵

前面已经得齐次方程 (2.2) 的自由解为：

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}_0 \quad \text{或} \quad \underline{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot \underline{x}_0$$

上式的物理意义是系统在  $t \geq 0$  或  $t \geq t_0$  的任一瞬时的状态  $\underline{x}(t)$ ，只是初始时刻状态向量  $\underline{x}_0$  的一种变换关系。变换矩阵为  $e^{At}$  或  $e^{A(t-t_0)}$ 。指数矩阵  $e^{At}$  或  $e^{A(t-t_0)}$  是一个  $n \times n$  的时间  $t$  的函数矩阵。这意味着它使状态向量随着时间的推移在不断地作坐标变换，即不断在状态空间中作转移。因此指数矩阵  $e^{At}$  或  $e^{A(t-t_0)}$  也称状态转移矩阵。通常表示为：

$$\phi(t) = e^{At} \quad \text{或} \quad \phi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

其中  $\phi(t)$  表示为  $\underline{x}(0)$  到  $\underline{x}(t)$  的状态转移矩阵， $\phi(t-t_0)$  表示为  $\underline{x}(t_0)$  到  $\underline{x}(t)$  的状态转移矩阵。因此齐次状态方程 (2.2) 式的解也可表示为：

$$\underline{x}(t) = \phi(t) \cdot \underline{x}_0$$

$$\text{或 } \underline{x}(t) = \phi(t-t_0) \cdot \underline{x}_0$$

可以看出，系统作自由运动时，它的运动形态将是唯一地由状态转移矩阵所决定，它包含了系统自由运动的全部信息。它的几何意义，以二维状态向量为例，表示在图 (2.1) 中。

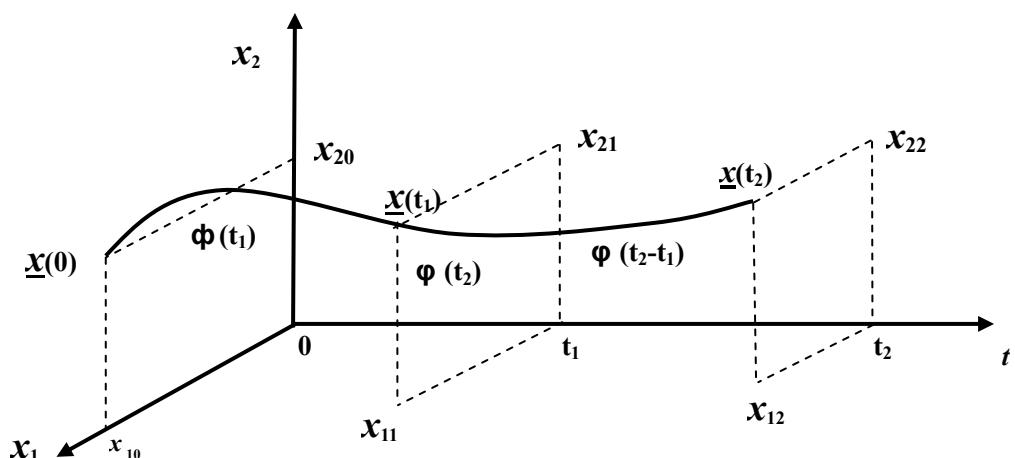


图 2.1

图中设  $t = 0$  时，状态的初态为  $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$ ，若已知状态转移矩阵  $\phi(t_1)$ ，则  $t = t_1$  的状态为：

$$\underline{x}(t_1) = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \phi(t_1) \underline{x}(0) \quad (2.12)$$

如果已知状态转移矩阵  $\phi(t_2)$ ，则  $t = t_2$  的状态为

$$\underline{x}(t_2) = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \phi(t_2) \cdot \underline{x}(0) \quad (2.13)$$

这就清楚地表明状态从  $\underline{x}(0)$  开始，随着时间的推移，它将按  $\phi(t_1)$  或  $\phi(t_2)$  作自由运动，最后状态转移到  $\underline{x}(t_1)$  或  $\underline{x}(t_2)$ ，相应地在状态空间中描绘出一条如图 2.1 所示的运动轨线。

若  $t_1$  为初始时刻， $\underline{x}(t_1)$  为初始状态，则  $t = t_2$  的状态为：

$$\underline{x}(t_2) = \phi(t_2 - t_1) \cdot \underline{x}(t_1) \quad (2.14)$$

将式 (2.12) 的  $\underline{x}(t_1)$  代入上式，则得

$$\underline{x}(t_2) = \phi(t_2 - t_1) \cdot \phi(t_1) \underline{x}(0) \quad (2.15)$$

式 (2.15) 表示从  $\underline{x}(0)$  转移到  $\underline{x}(t_1)$ ，再由  $\underline{x}(t_1)$  转移到  $\underline{x}(t_2)$  的运动轨线。

$$\phi(t_2 - t_1) \phi(t_1) = \phi(t_2)$$

$$\text{或 } e^{A(t_2 - t_1)} e^{At_1} = e^{At_2} \quad (2.16)$$

这种关系称为组合性质。

我们知道在经典控制理论中，求解高阶微分方程时，对初始条件的处理是相当困难的，通常都是假定初始时刻  $t = 0$ ,  $\underline{x}(0) = \mathbf{0}$ ，即从零初始条件出发去计算系统的输出响应，而从上面分析中可以看出，在现代控制理论中，利用状态转移矩阵，对任意时刻的状态量  $\underline{x}(t)$ ，可以由任意指定的初始时刻  $t_0$  的初始向量  $\underline{x}(t_0)$  求得。就是说，矩阵微分方程的解，在时间上可以任意分段求取。这是系统用状态方程描述的又一优点。

## 2. 状态转移矩阵的性质

现在我们来简单地阐明状态转移矩阵的几个重要性质。

### (1)性质一

$$\left. \begin{array}{l} \phi(t-t) = \phi(0) = I \\ \text{或 } e^{A(t-t)} = e^{A0} = I \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

本性质直接根据定义 (2.9) 式证得。意味着状态向量从  $t$  时刻又转移到  $t$  时刻，显然状态向量是不变的。

### (2)性质二

$$\left. \begin{array}{l} \phi(t) \cdot \phi(\tau) = \phi(t+\tau) \\ \text{或 } e^{At} \cdot e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)} \end{array} \right\} \quad (2.18)$$

这是组合性质，意味着从  $t = -\tau$  转移到  $t = 0$ ，再从  $t = 0$  转移到  $t = t$  的组合，即

$$\phi(t-0) \cdot \phi(0-(-\tau)) = \phi(t-(-\tau)) = \phi(t+\tau)$$

本性质也可由定义 (2.9) 式直接证明。

### (3)性质三

$$\left. \begin{array}{l} [\phi(t)]^{-1} = \phi(-t) \\ (e^{At})^{-1} = e^{-At} \end{array} \right\} \quad (2.19)$$

这意味着转移矩阵总是非奇异的，必有逆。利用这个性质，可以在已知  $\underline{x}(t)$  的情况下，求出  $t$  时刻以前的  $\underline{x}(t_0)$ ，( $t_0 < t$ )。

证明：由式 (2.18)

$$\phi(t+\tau) = \phi(t) \cdot \phi(\tau)$$

$$\text{或 } e^{A(t+\tau)} = e^{At} \cdot e^{A\tau}$$

现令  $\tau = -t$ ，得

$$\phi(t) \cdot \phi(-t) = \phi(t-t) = I$$

$$\text{或 } e^{At} \cdot e^{-At} = e^{A(t-t)} = I$$

$$\text{同样 } \phi(\tau+t) = \phi(\tau) \cdot \phi(t)$$

$$\text{或 } e^{A(\tau+t)} = e^{A\tau} \cdot e^{At}$$

令  $\tau = -t$ ，得

$$\phi(-t) \cdot \phi(t) = \phi(-t+t) = I$$

$$\text{或 } e^{-At} \cdot e^{At} = e^{A(-t+t)} = I$$

从而证明了  $\phi(-t)$  为  $\phi(t)$  的逆。或  $e^{-At}$  为  $e^{At}$  的逆。

#### (4) 性质四

对转移矩阵有

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\phi}(t) = A \cdot \phi(t) = \phi(t) \cdot A \\ \frac{d}{dt} e^{At} = A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A \end{array} \right\} \quad (2.20)$$

证明：据定义

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots$$

由于此无穷级数对有限  $t$  值是绝对收敛的，所以可将上式两边对  $t$  求导，有

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} + \frac{A^4 t^3}{3!} + \dots$$

$$\text{因此 } \frac{d}{dt} e^{At} = A(I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots) = A \cdot e^{At}$$

$$\text{或者 } \frac{d}{dt} e^{At} = (I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots) \cdot A = e^{At} \cdot A$$

$$\text{即: } \dot{\phi}(t) = A \cdot \phi(t) = \phi(t) \cdot A$$

此性质得证。

#### (5) 性质五

设有  $n \times n$  矩阵  $A$  和  $B$ ，当且仅当  $AB = BA$  时，有  $e^{At} e^{Bt} = e^{(A+B)t}$ ，而当  $AB \neq BA$  时，则  $e^{At} e^{Bt} \neq e^{(A+B)t}$ 。

证明：根据定义式

$$\begin{aligned}
e^{(A+B)t} &= I + (A + B)t + \frac{(A + B)^2}{2!}t^2 + \frac{(A + B)^3}{3!}t^3 + \dots \\
&= I + (A + B)t + \left( \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{ABt^2}{2!} + \frac{BAt^2}{2!} + \frac{B^2 t^2}{2!} \right) \\
&\quad + \left( \frac{A^3 t^3}{3!} + \frac{A^2 Bt^3}{3!} + \frac{ABAt^3}{3!} + \frac{AB^2 t^3}{3!} + \frac{BA^2 t^3}{3!} + \frac{BABt^3}{3!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{B^2 At^3}{3!} + \frac{B^3 t^3}{3!} \right) + \dots
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
e^{At} \cdot e^{Bt} &= (I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots)(I + Bt + \frac{B^2 t^2}{2!} \\
&\quad + \frac{B^3 t^3}{3!} + \dots) \\
&= I + (A + B)t + \left( \frac{A^2 t^2}{2!} + ABt^2 + \frac{B^2 t^2}{2!} \right) \\
&\quad + \left( \frac{A^3 t^3}{3!} + \frac{A^2 Bt^3}{2!} + \frac{AB^2 t^3}{2!} + \frac{B^3 t^3}{3!} \right) + \dots
\end{aligned}$$

将上述两式相减得：

$$\begin{aligned}
e^{(A+B)t} - e^{At} \cdot e^{Bt} \\
= \frac{BA - AB}{2!}t^2 + \frac{BA^2 + ABA + B^2 A + BAB - 2A^2 B - 2AB^2}{3!}t^3 + \dots
\end{aligned}$$

上式说明，当  $A$  和  $B$  是可交换的，等式右边为零，故  $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$ ；当  $A$  和  $B$  是不可交换时，等式右边不为零，故  $e^{(A+B)t} \neq e^{At} \cdot e^{Bt}$ ，可以看出这与标量指数函数的性质是不同的，此性质得证。

## (6) 性质六

若  $A$  为对角矩阵。即

$$A = A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

LCD 2014年秋季

$$\text{则 } e^{At} = \phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & e^{\lambda_n t} & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

证明：根据定义

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 t & & & & & \\ & \lambda_2 t & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_n t & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{\lambda_n^2 t^2}{2!} & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & & \frac{\lambda_n^2 t^2}{2!} \end{bmatrix} + \dots = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & & & & & \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k t^k}{k!} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k t^k}{k!} & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & e^{\lambda_n t} & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

则式 (2.21) 得证。

### (7) 性质七

若  $A$  能通过非奇异变换予以对角线化，即

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D$$

则

$$e^{At} = \phi(t) = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \mathbf{0} \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \cdot T^{-1} \quad (2.22)$$

证明：根据定义式

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

因为  $A$  能通过非奇异变换予以对角线化，即

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

同理有

$$T^{-1} \cdot A^2 \cdot T = T^{-1} AT \cdot T^{-1} AT = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n^2 \end{bmatrix}$$

对于一般项有

$$T^{-1} \cdot A^k \cdot T = (T^{-1} AT) \cdots (T^{-1} AT) = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

于是得

$$\begin{aligned}
 T^{-1} e^{At} \cdot T &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k T^{-1} A^k T \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \lambda_1^k & & & \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \lambda_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

所以：

$$e^{At} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}$$

于是 (2.22) 式得证。

### (8) 性质八

若  $A$  为  $Jordan$  型矩阵

$$A = J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & 0 & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \lambda \end{bmatrix}, \text{ 则可得}$$

$$e^{At} = \phi(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

式 (2.23) 证明可仿照性质六式(2.21)证明方法, 同学们可自行证明。

### (9) 性质九

若  $A$  能通过非奇异变换变成约当标准型, 即

$$T^{-1}AT = J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{则}$$

$$e^{At} = \phi(t) = Te^{Jt}T^{-1} \quad (2.24)$$

读者可仿照性质七式(2.22)方法来证明。

### 3. 状态转移矩阵 $\phi(t)$ 或 $e^{At}$ 的计算

上面我们介绍了状态转移矩阵的性质, 在具体分析线性定常系统时, 不可避免地要碰到计算  $\phi(t)$  或  $e^{At}$  的问题, 这里将介绍几种主要计算方法。

#### (1) 直接利用 $e^{At}$ 的级数展开法

根据矩阵指数的定义,  $e^{At}$  可以展开成幂级数:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \cdots + \frac{A^k t^k}{k!} + \cdots \quad (2.25)$$

即

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + \frac{At}{1!} + \frac{At}{2!} \left( \frac{At}{1!} \right) + \frac{At}{3!} \left( \frac{A^2 t^2}{2!} \right) + \cdots \\ &+ \frac{At}{k!} \left( \frac{A^{(k-1)} t^{(k-1)}}{(k-1)!} \right) + \cdots \cdots \end{aligned} \quad (2.26)$$

从式(2.25)可以看出,即使 $A$ 很简单,手算也是不容易的。式(2.25)不是闭合表达式,只能取有限项作近似计算,高阶项忽略。式(2.26)中圆括号内每一项完全等于前一项。它给出了一种方便的递推方案,可用计算机实现。显然编程简单,但是由于 $e^{At}$ 的收敛比较慢,与其它方法相比计算时间较长。

**例 2.1** 已知  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$  求  $e^{At}$

解: 将 $A$ 直接代入(2.25)式

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^2 \frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 - t^2 + t^3 + \dots & t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{7}{6}t^3 + \dots \\ -2t + 3t^2 - \frac{7}{3}t^3 + \dots & 1 - 3t + \frac{7}{2}t^2 - \frac{5}{2}t^3 + \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## (2) 应用 Cayley – Hamilton 定理求 $e^{At}$

(a) Cayley – Hamilton 定理

设  $n \times n$  矩阵  $A$  的特征多项式为:

$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$ , 则  $A$  必满足其自身的特征方程, 即

$$f(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I = 0 \quad (2.27)$$

证明: 由下式

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(\lambda I - A)}{|\lambda I - A|}$$

两边右乘  $(\lambda I - A)$  得

$$(\lambda I - A)^{-1} \cdot (\lambda I - A) = \frac{\text{adj}(\lambda I - A)}{|\lambda I - A|} \cdot (\lambda I - A) = I$$

可导出:

$$|\lambda I - A|I = \text{adj}(\lambda I - A) \cdot (\lambda I - A) \quad (2.28)$$

其中  $\text{adj}(\lambda I - A)$  的元为  $\lambda$  的  $(n-1)$  次多项式，所以可表示为：

$$\text{adj}(\lambda I - A) = H_1 \lambda^{n-1} + H_2 \lambda^{n-2} + \cdots + H_{n-1} \lambda + H_n \quad (2.29)$$

$$\text{而 } |\lambda I - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (2.30)$$

将 (2.29)、(2.30) 式代入 (2.28) 式得

$$\begin{aligned} & I\lambda^n + a_1 I\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} I\lambda + a_n I \\ &= (H_1 \lambda^{n-1} + H_2 \lambda^{n-2} + \cdots + H_{n-1} \lambda + H_n)(\lambda I - A) \end{aligned}$$

将上式展开得

$$\begin{aligned} & H_1 \lambda^n + (H_2 - H_1 A) \lambda^{n-1} + \cdots + (H_n - H_{n-1} A) \lambda + H_n A \\ &= I\lambda^n + a_1 I\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} I\lambda + a_n I \end{aligned}$$

上式中，等式两边  $\lambda$  之同次幂项的系数应相等。因而可得。

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = I \\ H_2 - H_1 A = a_1 I \\ H_3 - H_2 A = a_2 I \\ \dots \dots \dots \\ H_n - H_{n-1} A = a_{n-1} I \\ -H_n A = a_n I \end{array} \right.$$

将上述关系式，从上到下依次右乘  $A^n, A^{n-1}, \dots, A, I$ ，然后把等式左右各式相加，得

$$\begin{aligned} & A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n I \\ &= H_1 A^n + (H_2 A^{n-1} - H_1 A^n) + \cdots + (H_n A - H_{n-1} A^2) - H_n A = 0 \end{aligned}$$

这就证明了  $f(A) = 0$

(b) 由 **Cayley – Hamilton 定理** 我们很容易得到如下命题。

即：设  $A$  为  $n \times n$  矩阵，则矩阵指数  $e^{At}$  可表示为  $A$  的一个不高于  $(n-1)$  次的有限多项式，即可表示为：

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \cdots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)A^k \quad (2.31)$$

式中  $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$  为  $t$  的函数。

证明：根据矩阵指数的定义，有

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \cdots + \frac{A^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{A^n t^n}{n!} + \cdots \quad (2.32)$$

而根据 **Cayley – Hamilton 定理**:

$$f(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n I = 0$$

$$\text{故 } A^n = -a_1 A^{n-1} - a_2 A^{n-2} - \cdots - a_{n-1} A - a_n I$$

即  $A^n$  是  $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A, I$  的线性组合。

同理

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \cdot A^n = -a_1 A^n - (a_2 A^{n-1} + a_3 A^{n-2} + \cdots + a_{n-1} A^2 + a_n A) \\ &= -a_1(-a_1 A^{n-1} - a_2 A^{n-2} - \cdots - a_{n-1} A - a_n I) - (a_2 A^{n-1} + a_3 A^{n-2} + \cdots \\ &\quad + a_{n-1} A^2 - a_n A) \\ &= (a_1^2 - a_2) A^{n-1} + (a_1 a_2 - a_3) A^{n-2} + \cdots + (a_1 a_{n-1} - a_n) A + a_1 a_n I \end{aligned}$$

类此,  $A^{n+1}, A^{n+2}, \dots$  都可用  $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A, I$  表示。

在  $e^{At}$  的定义式 (2.32) 中用上述方法可以消去  $A$  的  $n$  及  $n$  以上的幂次项, 表明  $e^{At}$  的表达式 (2.32) 中有且仅有  $n$  个  $A$  的乘幂  $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A, I$  是独立的, 而所有高于  $(n-1)$  次的乘幂  $A^n, A^{n+1}, \dots$  都可以表为  $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A, I$  的线性组合, 把这些表达式代入 (2.32) 式, 即可得

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)A^k$$

**例 2.2** 已知  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ , 应用 **Cayley-Hamilton 定理** 求  $e^{At}$ 。

$$\text{解: } f(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

根据 **Cayley – Hamilton 定理** 有  $A^2 + 3A + 2I = 0$

所以  $A^2 = -3A - 2I$

$$\begin{aligned} A^3 &= A \cdot A^2 = A(-3A - 2I) = -3A^2 - 2A \\ &= -3(-3A - 2I) - 2A = 7A + 6I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } A^4 &= A \cdot A^3 = 7A^2 + 6A = 7(-3A - 2I) + 6A \\ &= -15A - 14I \end{aligned}$$

……

将  $A$ 、 $A^2$ 、 $A^3$ 、……代入(2.32)式，即得：

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 + \cdots \\ &= (t - \frac{3}{2!}t^2 + \frac{7}{3!}t^3 - \frac{15}{4!}t^4 + \cdots)A \\ &\quad + (1 - t^2 + t^3 - \frac{14}{4!}t^4 + \cdots)I \\ &= \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A \end{aligned}$$

其中  $\begin{cases} \alpha_0(t) = 1 - t^2 + t^3 - \frac{14}{4!}t^4 + \cdots \\ \alpha_1(t) = t - \frac{3}{2!}t^2 + \frac{7}{3!}t^3 - \frac{15}{4!}t^4 + \cdots \end{cases}$

上面例题只是为了加深对(2.31)式的理解，并说明  $\alpha_i(t)$  是  $t$  的函数，实际却不宜用来作为计算  $\alpha_i(t)$  的方法，因为在阶数高时，这种计算很繁杂，且得不到解析表达式。下面将介绍  $\alpha_i(t)$  的一般计算方法。

(c) 设  $n \times n$  矩阵  $A$  的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是两两相异的，则计算  $\alpha_i(t)$  的关系式为：

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

证明：根据  $A$  满足其自身特征方程式的定理，可知特征值  $\lambda$  和  $A$  是可以互换的，因此  $\lambda$  也满足式(2.31)。

$$\begin{aligned} e^{At} &= \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \cdots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} \\ \text{从而有 } &\begin{cases} \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} = e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} = e^{\lambda_2 t} \\ \cdots \cdots \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_n + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} = e^{\lambda_n t} \end{cases} \end{aligned}$$

将上式写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

例 2.3 已知  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ , 利用 (2.33) 式求  $e^{At}$

$$\text{解: } f(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

解此方程组即得 (2.33) 式。

得:  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ , 根据式 (2.33) 可写出:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{cases} \alpha_0(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \\ \alpha_1(t) = e^{-t} - e^{-2t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A \\ &= [2e^{-t} - e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}] \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(d) 设  $n \times n$  的矩阵  $A$  有  $n$  重特征值  $\lambda_1$ , 则其计算  $\alpha_i(t)$  的关系式为:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-2}(t) \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & (n-1)\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \cdots & \frac{(n-1)(n-2)\lambda_1^{n-3}}{2!} & \frac{(n-1)}{1!}\lambda_1^{n-2} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & \cdots \cdots & \lambda_1^{n-1} & \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{1!}te^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \\
& \quad (2.34)
\end{aligned}$$

证明：同上已证明有

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} = e^{\lambda_1 t}$$

上式对 $\lambda_1$ 求一次导数，有

$$\alpha_1(t) + 2\alpha_2(t)\lambda_1 + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-2} = te^{\lambda_1 t}$$

再将上式再求导一次，有

$$2\alpha_2(t) + 6\alpha_3(t)\lambda_1 + \cdots + (n-1)(n-2)\alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-3} = t^2e^{\lambda_1 t}$$

重复上述步骤，最后有

$$(n-1)!\alpha_{n-1}(t) = t^{n-1}e^{\lambda_1 t}$$

将上面几个方程写成矩阵的形式，有

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\
 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & (n-1)\lambda_1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 1 & \cdots \cdots & \frac{(n-1)(n-2)}{2!} \lambda_1^{n-3} \\
 0 & 1 & 2\lambda_1 & \cdots \cdots & \frac{(n-1)}{1!} \lambda_1^{n-2} \\
 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots \cdots & \lambda_1^{n-1}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \alpha_0(t) \\
 \alpha_1(t) \\
 \vdots \\
 \alpha_{n-3}(t) \\
 \alpha_{n-2}(t) \\
 \alpha_{n-1}(t)
 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}
 \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\lambda_1 t} \\
 \frac{1}{(n-2)!} t^{n-2} e^{\lambda_1 t} \\
 \vdots \\
 \frac{1}{2!} t^2 e^{\lambda_1 t} \\
 t e^{\lambda_1 t} \\
 e^{\lambda_1 t}
 \end{bmatrix}$$

解此方程即得 (2.34) 式。

例 2.4 已知  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$  求  $e^{At}$

解:  $f(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -2$

由式 (2.34), 得

$$\begin{bmatrix}
 \alpha_0(t) \\
 \alpha_1(t)
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

即:

$$\begin{cases}
 \alpha_1(t) = t \cdot e^{-2t} \\
 \alpha_0(t) = e^{-2t} + 2t \cdot e^{-2t}
 \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A \\
&= (e^{-2t} + 2te^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{-2t} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{-2t} + te^{-2t} & te^{-2t} \\ -te^{-2t} & e^{-2t} - te^{-2t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

### (3) 利用拉普拉斯反变换法求 $e^{At}$

由 (2.11) 式可知

$$e^{At} = L^{-1}\{(SI - A)^{-1}\}$$

可见这种方法归结为计算  $(SI - A)^{-1}$ , 而  $(SI - A)^{-1}$  也称预解矩阵, 这里仅介绍两种计算  $(SI - A)^{-1}$  的方法。

**a)** 根据公式

$$(SI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(SI - A)}{|SI - A|} \quad (2.35)$$

这是一种最常用的计算方法, 这种方法在维数较大时, 其计算往往比较复杂。

**b)** 根据下面公式来计算

$$\begin{aligned}
&(SI - A)^{-1} \\
&= \frac{(\alpha_0 I)S^{m-1} + (\alpha_1 I + \alpha_0 A)S^{m-2} + \cdots + (\alpha_{m-2} I + \cdots + \alpha_0 A^{m-2})S + (\alpha_{m-1} I + \cdots + \alpha_0 A^{m-1})}{\phi(s)} \\
&= \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \left[ S^j \sum_{i=j+1}^m a_{m-i} A^{i-j-1} \right]}{\phi(s)} \quad (2.36)
\end{aligned}$$

其中  $\phi(s)$  为  $n \times n$  矩阵  $A$  的最小多项式<sup>(注1)</sup>, 即令  $d(s)$  为  $n \times n$  矩阵  $A$  的特征矩阵  $(SI - A)$  的所有  $(n-1)$  维余子式的最大公因子, 如果  $d(s)$  中的  $s$  的最高幂项的系数选择为 1, 则最小多项式  $\phi$  就为

$$\phi(s) = \frac{|SI - A|}{d(s)}$$

$$\phi(s) = \alpha_0 S^m + \alpha_1 S^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1} S + \alpha_m$$

式中  $\alpha_0 = 1$ ,  $m \leq n$ 。

上式证明如下：

令  $P = (SI - A)^{-1}$ , 将此式左乘  $(SI - A)$ , 得

$$(SI - A)P = I \Rightarrow SP = AP + I$$

再把上式左乘  $(SI + A)$  得,

$$(SI + A) \cdot SP = (SI + A)(AP + I) \Rightarrow S^2 P = A^2 P + A + SI$$

类似地再把上式左乘  $(SI + A)$ , 得

$$(SI + A)S^2 P = (SI + A)(A^2 P + A + SI) \Rightarrow S^3 P = A^3 P + A^2 + SA + S^2 I$$

依次类推, 可组成如下一组关系式

$$\begin{cases} P = P \\ SP = AP + I \\ S^2 P = A^2 P + A + SI \\ S^3 P = A^3 P + A^2 + SA + S^2 I \\ \dots \dots \dots \\ S^m P = A^m P + A^{m-1} + SA^{m-2} + \dots + S^{m-2} A + S^{m-1} I \end{cases}$$

现将上式自上而下依次乘  $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ , 然后依等式左右进行相加。等式左边相加结果是:

$$\begin{aligned} & \alpha_m P + \alpha_{m-1} SP + \dots + \alpha_1 S^{m-1} P + \alpha_0 S^m P \\ &= (\alpha_m + \alpha_{m-1} S + \dots + \alpha_1 S^{m-1} + \alpha_0 S^m) P = \phi(s) P \end{aligned}$$

而等式右边相加结果为:

$$\begin{aligned} & (\alpha_m I + \alpha_{m-1} A + \dots + \alpha_0 A^m) P + (\alpha_{m-1} I + \alpha_{m-2} A + \dots + \alpha_0 A^{m-1}) \\ &+ (\alpha_{m-2} I + \alpha_{m-3} A + \dots + \alpha_0 A^{m-2}) S + \dots + (\alpha_1 I + \alpha_0 A) S^{m-2} + (\alpha_0 I) S^{m-1} \\ &= \phi(A) P + \sum_{i=1}^m \alpha_{m-i} A^{i-1} + S \sum_{i=2}^m \alpha_{m-i} A^{i-2} + \dots + S^{m-1} \sum_{i=m}^m \alpha_{m-i} A^{i-m} \\ &= \phi(A) P + \sum_{j=0}^{m-1} \left[ S^j \sum_{i=j+1}^m \alpha_{m-i} A^{i-j-1} \right] \end{aligned}$$

---

(注 1) 最小多项式:

尽管 Cayley – gamilton 定理指明有  $f(A) = 0$ , 但可能有一些比  $f(s)$  次数更低的多项式  $\delta(s)$ , 使  $\delta(A) = 0$ 。使  $\phi(A) = 0$  的次数最低的首一多项式, 叫做  $A$  的最小多项式。

上述两式相等，且  $\phi(A) = 0$ ，从而就证明了

$$(SI - A)^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \left[ S^j \sum_{i=j+1}^m \alpha_{m-i} A^{i-j-1} \right]}{\phi(s)}$$

例 2.5 已知  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ，求预解矩阵  $(SI - A)^{-1}$

解：  $f(s) = |SI - A| = (S - 2)^2(S - 1)$

$$\text{adj}(SI - A) = \begin{bmatrix} (S - 2)(S - 1) & 0 & 0 \\ 0 & (S - 2)(S - 1) & 0 \\ 0 & -3(S - 2) & (S - 2)^2 \end{bmatrix}$$

所以  $\text{adj}(SI - A)$  的最大公因子  $d(s) = (S - 2)$ 。

则  $A$  的最小多项式

$$\phi(s) = \frac{|SI - A|}{d(s)} = \frac{(S - 2)^2(S - 1)}{(S - 2)} = (S - 2)(S - 1) = S^2 - 3S + 2$$

由最小多项式  $\phi(s)$  可知： $m = 2, \alpha_0 = 1, \alpha_1 = -3, \alpha_2 = 2$ 。

于是得：

$$\begin{aligned} (SI - A)^{-1} &= \frac{\alpha_0 IS + (\alpha_1 I + \alpha_0 A)}{\phi(s)} = \frac{A + (S - 3)I}{S^2 - 3S + 2} \\ &= \frac{1}{S^2 - 3S + 2} \begin{bmatrix} 2 + (S - 3) & 0 & 0 \\ 0 & 2 + (S - 3) & 0 \\ 0 & 3 & 1 + (S - 3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{S - 2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S - 2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{(S - 1)(S - 2)} & \frac{1}{S - 1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式 (2.36) 也可以写成下面两种形式

形式 I：

LCD 2014年秋季

$$\begin{aligned}
 (SI - A)^{-1} &= \frac{P_{m-1}(S)I + P_{m-2}(S)A + \cdots + P_1(S)A^{m-2} + P_0(S)A^{m-1}}{\phi(S)} \\
 &= \frac{\sum_{i=0}^{m-1} P_{m-i-1}(S) \cdot A^i}{\phi(S)} \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

其中

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 P_{m-1}(s) = \alpha_0 S^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-2} S + \alpha_{m-1} \\
 P_{m-2}(s) = \alpha_0 S^{m-2} + \alpha_1 S^{m-3} + \cdots + \alpha_{m-2} \\
 \cdots \cdots \cdots \cdots \\
 P_1(s) = \alpha_0 S + \alpha_1 \\
 P_0(s) = \alpha_0
 \end{array}
 \right.$$

### 形式II

如果  $n \times n$  方阵的特征为两两相异，则 (2.36) 式也可以写成如下形式

$$(SI - A)^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \left[ S^j \sum_{i=j+1}^m \alpha_{m-i} A^{i-j-1} \right]}{|SI - A|} \quad (2.38)$$

### (4) 利用 *Sylvester* 的插补公式法计算 $e^{At}$

设  $n \times n$  矩阵  $A$  有两两相异的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ ，则  $e^{At}$  可表示为：

$$e^{At} = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k t} \frac{(A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_{k-1} I)(A - \lambda_{k+1} I) \cdots (A - \lambda_n I)}{(\lambda_k - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_n)} \quad (2.39)$$

这是对于矩阵指数的 *Sylvester* 内插公式。用它可以直接求  $e^{At}$ 。

**例 2.6** 已知  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$ , 求  $e^{At}$  (用内插公式求)

**解：**由式 (2.39) 可知，首先应求出特征值。

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{array}{ccc} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{array} \right|$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)$$

所以  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} \frac{(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} + e^{\lambda_2 t} \frac{(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_3 I)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}$$

$$+ e^{\lambda_3 t} \frac{(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-t} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -6 & -11 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -6 & -11 & -3 \end{vmatrix}$$

$$- e^{-2t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & -11 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -6 & -11 & -3 \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-3t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & -11 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -6 & -11 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{e^{-t}}{2} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ -6 & -5 & -1 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{-2t}}{2} \begin{bmatrix} -6 & -8 & -2 \\ 12 & 16 & 4 \\ -24 & -32 & -8 \end{bmatrix} + \frac{e^{-3t}}{2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -6 & -9 & -3 \\ 18 & 27 & 9 \end{bmatrix}$$

(5) 变换  $A$  为对角标准型或 Jordan 标准型来计算  $e^{At}$

a)  $A$  特征值互异

当  $A$  有两两相异特征值时, 必能找到非奇异矩阵  $T$ , 使下式成立,

即  $A = T^{-1}AT$

由式 (2.22) 性质七有

$$e^{At} = \phi(t) = T \cdot e^{\Lambda t} \cdot T^{-1}$$

例 2.7 已知  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ , 求  $e^{At}$ 。

$$\text{解: } f(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

所以  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

$$\text{由 } A \underline{P}_1 = \lambda_1 \underline{P}_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix}$$

$$\text{得 } \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{同理 } A \underline{P}_2 = \lambda_2 \underline{P}_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{得 } \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } e^{At} &= Te^{At}T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### b) $A$ 的特征值有重根

在  $A$  的特征值有重根的情况下, 根据公式 (2.24) 性质九可知

$$e^{At} = T \cdot e^{Jt} \cdot T^{-1}$$

其中  $J = T^{-1}AT$

$$\text{例 2.8 已知 } A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 求 } e^{At}$$

解: 先求  $A$  的特征值

$$f(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 3 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + 3 & -1 \\ 4 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda + 3)^2 + 4 = (\lambda + 1)^2(\lambda + 4)$$

所以  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -4$

$$\text{则 } J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

由上一章例 1.18 可知

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 11 & 7 & -4 \\ -6 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} e^{At} &= T \cdot e^{Jt} \cdot T^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 7 & -4 \\ -6 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} + e^{-t} & e^{-4t} \\ 2e^{-t} & 2e^{-t} + 3e^{-t} & -e^{-4t} \\ 4e^{-t} & 4te^{-t} + 8e^{-t} & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 7 & -4 \\ -6 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5e^{-t} - 6te^{-t} + 4e^{-4t} & 4e^{-t} - 3te^{-t} - 4e^{-4t} & -e^{-t} + 3te^{-t} + e^{-4t} \\ 4e^{-t} - 12te^{-t} - 4e^{-4t} & 5e^{-t} - 6te^{-t} + 4e^{-4t} & e^{-t} + 6te^{-t} - e^{-4t} \\ -4e^{-t} - 24te^{-t} + 4e^{-4t} & 4e^{-t} - 12te^{-t} - 4e^{-4t} & 8e^{-t} + 12te^{-t} + e^{-4t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 三、非齐次方程的解

现在来讨论线性定常系统在控制作用  $\underline{u}(t)$  下的强制运动。此时状态方程为一般的非齐次方程

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} \quad (2.40)$$

在初始时刻  $t_0$  时，初始状态为  $\underline{x}(t_0)$ ，则其解为：

$$\underline{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \quad (2.41)$$

初始时刻  $t_0 = 0$  时，初始状态  $\underline{x}(t_0) = \underline{x}(0)$ ，其解为：

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot \underline{u}(\tau) d\tau \quad (2.42)$$

很明显，线性系统(2.40)式的解由两部分组成。(2.41)式和(2.42)

式的第一项表示由初始状态引起的自由运动，第二项表示由控制作用引起的强制运动。

证明：将式（2.40）写成

$$\dot{\underline{x}} - A \underline{x} = B \underline{u}(t)$$

两边同左乘  $e^{-At}$  得

$$e^{-At} (\dot{\underline{x}} - A \underline{x}) = e^{-At} B \underline{u}(t)$$

$$\text{即 } \frac{d}{dt} [e^{-At} \underline{x}(t)] = e^{-At} B \underline{u}(t) \quad (2.43)$$

对上式在  $t_0 \sim t$  之间积分，有

$$e^{-At} \underline{x}(t) \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t e^{-A\tau} B \underline{u}(\tau) d\tau$$

$$\text{即 } e^{-At} \underline{x}(t) = e^{-At_0} \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A\tau} B \underline{u}(\tau) d\tau$$

两边同左乘  $e^{At}$ ，得

$$\underline{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau$$

故（2.41）式得证。

若对（2.43）式在  $0 \sim t$  间积分，即可证明（2.42）式。式（2.41）和（2.42）可分别写成如下形式：

$$\underline{x}(t) = \phi(t - t_0) \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t - \tau) B \underline{u}(\tau) d\tau$$

$$\text{及 } \underline{x}(t) = \phi(t) \underline{x}(0) + \int_0^t \phi(t - \tau) B \underline{u}(\tau) d\tau$$

### 例 2.9 求状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

在  $u(t) = 1(t)$ ，初状态为  $x_1(0), x_2(0)$  时的解。

解：在上面例题中，我们已经求出

$$e^{At} = \phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

因此，根据（2.42）式，有

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\
&+ \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{1}(\tau) d\tau \\
&= \begin{bmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t})x_1(0) + (e^{-t} - e^{-2t})x_2(0) \\ (-2e^{-t} + 2e^{-2t})x_1(0) + (-e^{-t} + 2e^{-2t})x_2(0) \end{bmatrix} \\
&+ \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau \\
&= \begin{bmatrix} (2e^{-t} - 2e^{-2t})x_1(0) + (e^{-t} - e^{-2t})x_2(0) \\ (-2e^{-t} + 2e^{-2t})x_1(0) + (-e^{-t} + 2e^{-2t})x_2(0) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + [2x_1(0) + x_2(0) - 1]e^{-t} - \left[ x_1(0) + x_2(0) - \frac{1}{2} \right] e^{-2t} \\ -[2x_1(0) + x_2(0) - 1]e^{-t} + [2x_1(0) + 2x_2(0) - 1]e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (t \geq 0)
\end{aligned}$$

在特殊的控制作用下，例如在脉冲函数，阶跃函数或斜坡函数的作用下，系统解 (2.42) 可简化为如下公式：

(1)  $\underline{u}(t)$  为脉冲函数时，即  $\underline{u}(t) = \underline{k}\delta(t)$ ,  $\underline{x}(0_-) = \underline{x}(0)$  时，

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}(0) + e^{At} B \underline{k}$$

式中  $\underline{k}$  是与  $\underline{u}(t)$  同维常数向量。

(2)  $\underline{u}(t)$  为阶跃函数时，即  $\underline{u}(t) = \underline{k} \cdot \mathbf{1}(t)$ ,  $\underline{x}(0_-) = \underline{x}(0)$  时，

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}(0) + A^{-1}(e^{At} - I)B \underline{k}$$

(3)  $\underline{u}(t)$  为斜坡函数时，即  $\underline{u}(t) = \underline{k} \cdot t \cdot \mathbf{1}(t)$ ,  $\underline{x}(0_-) = \underline{x}(0)$  时

$$\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}(0) + [A^{-2}(e^{At} - I) - A^{-1}t]B \underline{k}$$

非齐次方程也可以用拉氏变换方法求解。对非齐次方程 (2.40) 式

两边进行拉氏变换:

$$S \underline{x}(s) - \underline{x}(0) = A \underline{x}(s) + B \underline{u}(s)$$

化简为

$$(SI - A) \underline{x}(s) = \underline{x}(0) + B \underline{u}(s)$$

$$\text{所以 } \underline{x}(s) = (SI - A)^{-1} [\underline{x}(0) + B \underline{u}(s)]$$

对上式进行反拉氏变换, 得

$$\underline{x}(t) = L^{-1}\{\underline{x}(s)\} = L^{-1}\{(SI - A)^{-1}[\underline{x}(0) + B \underline{u}(s)]\}$$

**例 2.10** 已知系统的状态方程为

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -12 & 2 \\ -36 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \underline{u}(t), \quad \underline{u}(t) = 1(t) \text{ 为单位阶跃函数, 初始}$$

条件  $x_1(0) = 2, x_2(0) = 1$ , 求此状态方程的解。

解:

$$(SI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} S + 12 & -\frac{2}{3} \\ 36 & S + 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{S + 1}{(S + 4)(S + 9)} & \frac{2/3}{(S + 4)(S + 9)} \\ \frac{-36}{(S + 4)(S + 9)} & \frac{S + 12}{(S + 4)(S + 9)} \end{bmatrix}$$

$$\text{又 } \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{u}(s) = \frac{1}{s}$$

所以

$$\underline{b} \underline{u}(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3s} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix}, \quad \underline{x}(0) + \underline{b} \underline{u}(s) = \begin{bmatrix} \frac{6s + 1}{3s} \\ \frac{s + 1}{s} \end{bmatrix}$$

从而有

$$\underline{x}(s) = (SI - A)^{-1} [\underline{x}(0) + \underline{b} \underline{u}(s)]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{S + 1}{(S + 4)(S + 9)} & \frac{2/3}{(S + 4)(S + 9)} \\ \frac{-36}{(S + 4)(S + 9)} & \frac{S + 12}{(S + 4)(S + 9)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6s + 1}{3s} \\ \frac{s + 1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2s^2 + 3s + 1}{s(S + 4)(S + 9)} \\ \frac{s - 59}{(S + 4)(S + 9)} \end{bmatrix}$$

将上式进行部份分式展开:

$$\underline{x}(s) = \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{36} - \frac{21}{s+4} + \frac{136}{s+9} \\ -\frac{63}{s+4} + \frac{68}{s+9} \end{array} \right]$$

并作拉氏反变换, 得

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{36} - \frac{21}{20}e^{-4t} + \frac{136}{45}e^{-9t} \\ -\frac{63}{5}e^{-4t} + \frac{68}{5}e^{-9t} \end{bmatrix} \quad (t \geq 0)$$

## § 2.2 线性时变系统状态方程的解

状态变量法的优点之一就是具有广泛的适应性, 它可以推广到线性时变系统。设线性时变系统的状态方程为:

$$\dot{\underline{x}} = A(t)\underline{x} + B(t)\underline{u} \quad (2.44)$$

时变系统不一定有解析解, 但当系统矩阵  $A(t), B(t)$  的元素在定义区间  $[t_0, t_\alpha]$  上是绝对可积时, 对每一初始状态  $\underline{x}(t_0)$  存在唯一解。

### 一、线性时变齐次状态方程的解

首先来研究线性时变齐次状态方程的解。状态方程为:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A(t)\underline{x} \\ \underline{x}(t)|_{t=t_0} = \underline{x}(t_0) \end{cases} \quad (2.45)$$

其解为

$$\underline{x}(t) = \phi(t, t_0)\underline{x}(t_0) \quad (2.46)$$

式中  $\phi(t, t_0)$  类似于前述线性时不变系统中的  $\phi(t - t_0)$  它也是  $n \times n$  非奇异方阵, 并满足如下的矩阵微分方程和初始条件

$$\dot{\phi}(t, t_0) = A(t)\phi(t, t_0) \quad (2.47)$$

$$\text{和 } \phi(t_0, t_0) = I \quad (2.48)$$

证明: 将解式 (2.46) 代入原方程 (2.45) 式, 有

$$\frac{d}{dt}[\phi(t, t_0)]\underline{x}(t_0) = A(t)\phi(t, t_0)\underline{x}(t_0)$$

即有  $\dot{\phi}(t, t_0) = A(t)\phi(t, t_0)$

在解 (2.46) 式中令  $t = t_0$  时有

$$\underline{x}(t_0) = \phi(t_0, t_0)\underline{x}(t_0)$$

即  $\phi(t_0, t_0) = I$

这就证明了由满足式 (2.47), (2.48) 的  $\phi(t, t_0)$ , 按 (2.46) 式所求得的  $\underline{x}(t)$  确是原齐次状态方程式 (2.45) 的解。和前节所述的时不变系统一样, 也是初始状态的转移, 故  $\phi(t, t_0)$  也称为时变线性系统状态转移矩阵。在一般情况下, 只需将  $\phi(t)$  或  $\phi(t - t_0)$  改为  $\phi(t, t_0)$ , 上节关于时不变系统所得到的大部分结论, 均可推广应用于时变系统。

## 二、状态转移矩阵 $\phi(t, t_0)$ 的基本性质

$$(1) \quad \phi(t_2, t_1)\phi(t_1, t_0) = \phi(t_2, t_0) \quad (2.49)$$

证明: 由式 (2.46) 可导出

$$\begin{aligned}\underline{x}(t_1) &= \phi(t_1, t_0)\underline{x}(t_0) \\ \underline{x}(t_2) &= \phi(t_2, t_0)\underline{x}(t_0) \\ \underline{x}(t_2) &= \phi(t_2, t_1)\underline{x}(t_1) \\ &= \phi(t_2, t_1)\phi(t_1, t_0)\underline{x}(t_0)\end{aligned}$$

故  $\phi(t_2, t_1)\phi(t_1, t_0) = \phi(t_2, t_0)$

$$(2) \quad \phi(t, t) = I \quad (2.50)$$

见式 (2.48) 定义

$$(3) \quad \phi(t, t_0) = \phi^{-1}(t_0, t)$$

根据式 (2.48), (2.49) 可知

$$\phi(t, t_0)\phi(t_0, t) = \phi(t, t) = I$$

又  $\phi(t_0, t)\phi(t, t_0) = \phi(t_0, t_0) = I$

所以  $\phi(t, t_0)$  与  $\phi(t_0, t)$  为互逆矩阵。

$$(4) \quad \dot{\phi}(t, t_0) = A(t)\phi(t, t_0)$$

见定义 (2.47), 在这里,  $A(t)$  和  $\phi(t, t_0)$  一般的说是不能交换的。

## 三、状态转移矩阵 $\phi(t, t_0)$ 的计算

时变系统的状态转移矩阵  $\phi(t, t_0)$  和定常系统的  $\phi(t - t_0)$  或  $\phi(t)$  在形式上和某些性质上有类似之处，但在本质上两者是有区别的。可以看出  $\phi(t - t_0)$  或  $\phi(t)$  是  $(t - t_0)$  或  $t$  的函数，而  $\phi(t, t_0)$  则是  $t$  和  $t_0$  的函数。在线性定常系统中  $\phi(t - t_0)$  或  $\phi(t)$  一般可写成指数矩阵形式，即写成  $e^{A(t-t_0)}$  或  $e^{At}$ ，但在时变系统中  $\phi(t, t_0)$  往往不能写成指数矩阵形式，除非它满足某种条件。

设 (2.45) 式的解可以写成如下形式：

$$\underline{x}(t) = e^{\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau} \underline{x}(t_0) \quad (2.51)$$

根据指数矩阵的展开法则，上式可写成

$$\underline{x}(t) = \{I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \left[ \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right]^2 + \frac{1}{3!} \left[ \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right]^3 + \dots\} \underline{x}(t_0) \quad (2.52)$$

对 (2.52) 式两边求导，得：

$$\dot{\underline{x}}(t) = \left\{ A(t) + \frac{1}{2} A(t) \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau A(t) + \dots \right\} \underline{x}(t_0) \quad (2.53)$$

将 (2.52) 和 (2.53) 式代入 (2.45) 式，可以看出，等式左右两边只有当  $A(t)$  和  $\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$  是可交换的，等式才能成立。即若等式

$$A(t) \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau A(t) \quad (2.54)$$

成立时，式 (2.53) 将变为：

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \left[ A(t) + A(t) \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \dots \right] \underline{x}(t_0) \\ &= A(t) \left[ I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \dots \right] \underline{x}(t_0) \\ &= A(t) \underline{x}(t) \end{aligned}$$

所以式 (2.51) 是原方程 (2.45) 式的解。

那么，在什么条件下  $A(t)$  和  $\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$  才是可交换的呢？以下对此问题作简单说明。

若 (2.54) 式成立，显然有

$$\begin{aligned} A(t) \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau A(t) \\ = \int_{t_0}^t [A(t)A(\tau) - A(\tau)A(t)] d\tau = 0 \end{aligned}$$

若上式对任意  $t$  皆成立，则对于任意  $t_1$  和  $t_2$ ，等式

$$A(t_1) \cdot A(t_2) = A(t_2)A(t_1) \quad (2.55)$$

应能成立。反之，若等式 (2.55) 成立， $A(t)$  和  $\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$  就是可交换的。以上便是要求的条件，由此可以得出如下结论：当 (2.55) 式对任意  $t_1$  和  $t_2$  都成立时，式 (2.51) 即为式 (2.45) 的解，这时系统的状态转移矩阵可写成：

$$\begin{aligned}\phi(t, t_0) &= e^{\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau} = I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \\ &+ \frac{1}{2!} \left[ \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right]^2 + \frac{1}{3!} \left[ \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right]^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.56)$$

一般地说，上式不能表达成封闭的形式，或者说，上式一般不能用有限多项式表示，但在特殊情况下也是可能的。

**例 2.11** 已知对象的状态方程为

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{(t+1)^2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} x(t)$$

求系统的状态转移矩阵。

解：由于

$$A(t_1)A(t_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{(t_1+1)^2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{(t_2+1)^2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0} = A(t_2) \cdot A(t_1)$$

满足 (2.55) 式所给出的条件，从而  $A(t)$  和  $\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$  是可交换的。

而系统的状态转移矩阵可由式 (2.56) 所给出，即

$$\begin{aligned}\phi(t, t_0) &= e^{\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau} = I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \left[ \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right]^2 + \dots \dots \\ &= I + \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{(\tau+1)^2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} d\tau + \frac{1}{2!} \left[ \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{(\tau+1)^2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} d\tau \right]^2 + \dots\end{aligned}$$

$$\text{上式中 } \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{(\tau+1)^2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\text{而 } \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^k = \mathbf{0} \quad (k = 2, 3, \dots)$$

将上述结果代入  $\phi(t, t_0)$  表达式后，得

$$\phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{t - t_0}{(t+1)(t_0+1)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t - t_0}{(t+1)(t_0+1)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一般情况下， $A(t)$  不能满足可交换的条件 (2.55) 式。这时， $\phi(t, t_0)$  的计算，是用级数近似法，即：

$$\begin{aligned} \phi(t, t_0) &= I + \int_{t_0}^t A(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \\ &+ \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) \int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 + \dots \end{aligned} \quad (2.57)$$

证明：在上述情况下，可有

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t, t_0) &= \frac{d}{dt} \left\{ I + \int_{t_0}^t A(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) \int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 + \dots \right\} \\ &= A(t) + A(t) \int_{t_0}^t A(\tau_1) d\tau_1 + A(t) \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots \\ &= A(t) \left\{ I + \int_{t_0}^t A(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots \right\} \\ &= A(t) \cdot \phi(t, t_0) \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\text{又 } \phi(t_0, t_0) = I + 0 + 0 + \dots = I \quad (2.59)$$

可知式 (2.57) 满足式 (2.58) 和式 (2.59)。

**例 2.12** 已知线性时变系统的状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} x, \text{ 计算 } \phi(t, 0)$$

解：因为

$$\begin{aligned} A(t_1) \cdot A(t_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t_2 \\ 0 & t_1 t_2 \end{bmatrix} \\ A(t_2) \cdot A(t_1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t_1 \\ 0 & t_1 t_2 \end{bmatrix} \neq A(t_1) \cdot A(t_2) \end{aligned}$$

所以  $A(t)$  和  $\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$  是不能交换的， $\phi(t, t_0)$  不能写成矩阵指数

$$\begin{aligned} \int_0^t A(\tau) d\tau &= \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \tau \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} \\ \int_0^t A(\tau_1) \int_0^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 &= \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} \int_0^{\tau_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix} d\tau_2 d\tau_1 \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\tau_1^2 \\ 0 & \frac{1}{2}\tau_1^3 \end{bmatrix} d\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6}t^3 \\ 0 & \frac{1}{8}t^4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

形式，只能用级数展开。故按式(2.57)作 $\phi(t, t_0)$ 的近似计算。

$$\begin{aligned} \int_0^t A(\tau_1) \int_0^{\tau_1} A(\tau_2) \int_0^{\tau_2} A(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 &= \int_0^t A(\tau_1) \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6}\tau_1^3 \\ 0 & \frac{1}{8}\tau_1^4 \end{bmatrix} d\tau_1 \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6}\tau_1^3 \\ 0 & \frac{1}{8}\tau_1^4 \end{bmatrix} d\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{40}t^5 \\ 0 & \frac{1}{48}t^6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

..... .....

所以

$$\begin{aligned} \phi(t, 0) &= I + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6}t^3 \\ 0 & \frac{1}{8}t^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{40}t^5 \\ 0 & \frac{1}{48}t^6 \end{bmatrix} + \dots \\ &\quad \begin{bmatrix} 1 & t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{40}t^5 + \dots \\ 0 & 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{48}t^6 + \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例 2.13 已知时变系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix} x$$

试求其 $\phi(t, 0)$

$$\text{解: } \int_0^t A(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} \tau & 1 \\ 1 & \tau \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 & t \\ t & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix}$$

由于

$$\begin{aligned} A(t) \int_0^t A(\tau) d\tau &= \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 & t \\ t & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 & t \\ t & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^3 + t & \frac{3}{2}t^2 \\ \frac{3}{2}t^2 & \frac{1}{2}t^3 + t \end{bmatrix} = \int_0^t A(\tau) d\tau A(t) \end{aligned}$$

即  $A(t)$  和  $\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$  是可交换的，状态转移矩阵可按式 (2.56) 计算。

$$\begin{aligned}\phi(t, 0) &= e^{\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 & t \\ t & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 & t \\ t & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix}^2 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + t^2 + \frac{t^4}{8} + \dots & t + \frac{t^3}{2} + \dots \\ t + \frac{t^3}{2} + \dots & 1 + t^2 + \frac{t^4}{8} + \dots \end{bmatrix}\end{aligned}$$

当然也可按 (2.57) 式计算。

$$\begin{aligned}\phi(t, 0) &= I + \int_{t_0}^t A(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 & t \\ t & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{2}t^3 \\ \frac{1}{2}t^3 & \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + t^2 + \frac{1}{8}t^4 + \dots & t + \frac{1}{2}t^3 + \dots \\ t + \frac{1}{2}t^3 + \dots & 1 + t^2 + \frac{1}{8}t^4 + \dots \end{bmatrix}\end{aligned}$$

可知它们的计算结果是一致的。

#### 四、线性时变非齐次方程的解

线性时变非齐次方程 (2.44) 式的解，类似于时不变系统为

$$\underline{x}(t) = \phi(t, t_0) \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau \quad (2.60)$$

证明：因线性系统满足叠加定理，故可将式 (2.44) 的解看成由初始状态  $\underline{x}(t_0)$  的转移和由控制作用激励的状态  $\underline{x}_u(t)$  的转移两部分组成，即

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= \phi(t, t_0)\underline{x}(t_0) + \phi(t, t_0)\underline{x}_u(t) \\ &= \phi(t, t_0)[\underline{x}(t_0) + \underline{x}_u(t)]\end{aligned}\tag{a}$$

代入式 (2.44), 有

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t, t_0)[\underline{x}(t_0) + \underline{x}_u(t)] + \phi(t, t_0)\dot{\underline{x}}_u(t) \\ = A(t)\underline{x}(t) + B(t) \cdot \underline{u}(t)\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}A(t)\phi(t, t_0)[\underline{x}(t_0) + \underline{x}_u(t)] + \phi(t, t_0)\dot{\underline{x}}_u(t) \\ = A(t)\underline{x}(t) + B(t)\underline{u}(t)\end{aligned}$$

进一步可写成

$$\begin{aligned}A(t)\underline{x}(t) + \phi(t, t_0)\dot{\underline{x}}_u(t) \\ = A(t)\underline{x}(t) + B(t)\underline{u}(t)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}_u(t) &= \phi(t, t_0)^{-1} B(t) \underline{u}(t) \\ &= \phi(t_0, t) B(t) \underline{u}(t)\end{aligned}$$

在  $t_0 \sim t$  区间内对上式两边进行积分, 有

$$\underline{x}_u(t) = \int_{t_0}^t \phi(t_0, \tau) B(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau + \underline{x}_u(t_0) \tag{b}$$

于是将 (b) 式代入 (a) 式, 得:

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= \phi(t, t_0)\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, t_0)\phi(t_0, \tau) B(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau + \phi(t, t_0)\underline{x}_u(t_0) \\ &= \phi(t, t_0)\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau + \phi(t, t_0)\underline{x}_u(t_0)\end{aligned}$$

上式中令  $t = t_0$ , 因为  $\phi(t_0, t_0) = I$ , 可知  $\underline{x}_u(t_0) = \mathbf{0}$ ,

故  $\underline{x}(t) = \phi(t, t_0)\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau$

为原非齐次方程 (2.44) 式的解。

### § 2.3 线性连续时间状态空间表达式的离散化

如果用数字计算机对连续时间状态方程求解，或者对连续受控对象采用数字计算机进行在线控制，都要碰到一个将连续时间系统化为离散时间系统的问题。本节将讨论线性连续时间状态空间表达式的离散化方法。

#### 一、线性时变系统的离散化

设原线性系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A(t)\underline{x}(t) + B(t)\underline{u}(t) \\ \underline{y} = C(t)\underline{x}(t) + D(t)\underline{u}(t) \end{cases} \quad (2.61)$$

离散化后状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \underline{x}[(k+1)T] = G(kT)\underline{x}(kT) + H(kT)\underline{u}(kT) \\ \underline{y}(kT) = C(kT)\cdot\underline{x}(kT) + D(kT)\cdot\underline{u}(kT) \end{cases} \quad (2.62)$$

式 (2.61)、(2.62) 之间的系数关系如下

$$\begin{aligned} G(kT) &= \phi[(k+1)T, kT] \\ H(kT) &= \int_{kT}^{(k+1)T} \phi[(k+1)T, \tau]B(\tau)d\tau \\ C(kT) &= C(t)|_{t=kT} \\ D(kT) &= D(t)|_{t=kT} \end{aligned} \quad (2.63)$$

式中  $\phi[(k+1)T, kT]$  表示  $\phi(t, t_0)$  在  $kT \leq t \leq (k+1)T$  区段内的状态转移矩阵，而  $\phi(t, t_0)$  则表示原连续系统 (2.61) 式的状态转移矩阵。

**证明：**由上节 (2.60) 式可知 (2.61) 式的解为：

$$\underline{x}(t) = \phi(t, t_0)\underline{x}_0 + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau)B(\tau)\underline{u}(\tau)d\tau \quad (2.64)$$

对上式离散化，令  $t = (k+1)T$ ， $t_0 = hT$ ， $T$  为采样周期，则得

$$\underline{x}[(k+1)T] = \phi[(k+1)T, hT]\underline{x}_0 + \int_{hT}^{(k+1)T} \phi[(k+1)T, \tau]B(\tau)\underline{u}(\tau)d\tau \quad (2.65)$$

再以  $t = kT$ ,  $t_0 = hT$  代入 (2.64) 式, 则得

$$\underline{x}(kT) = \phi(kT, hT)\underline{x}_0 + \int_{hT}^{kT} \phi(kT, \tau)B(\tau)\underline{u}(\tau)d\tau \quad (2.66)$$

将 (2.66) 式两边同左乘  $\phi[(k+1)T, kT]$ , 得

$$\begin{aligned} & \phi[(k+1)T, kT]\underline{x}(kT) = \phi[(k+1)T, kT] \\ & \cdot \phi(kT, hT)\underline{x}_0 + \phi[(k+1)T, kT] \int_{hT}^{kT} \phi(kT, \tau)B(\tau)\underline{u}(\tau)d\tau \\ & = \phi[(k+1)T, hT]\underline{x}_0 + \int_{hT}^{kT} \phi[(k+1)T, \tau]B(\tau)\underline{u}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.67)$$

将 (2.65) 式减去 (2.67) 式得:

$$\underline{x}[(k+1)T] = \phi[(k+1)T, kT]\underline{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \phi[(k+1)T, \tau]B(\tau)\underline{u}(\tau)d\tau \quad (2.68)$$

上式中, 令

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(kT) &= \phi[(k+1)T, kT] \\ \mathbf{H}(kT) &= \int_{kT}^{(k+1)T} \phi[(k+1)T, \tau]B(\tau)d\tau \end{aligned}$$

设在区间  $[kT, (k+1)T]$  内,  $u(\tau) = u(kT)$ , 则 (2.68) 式可简写成:

$$\underline{x}[(k+1)T] = \mathbf{G}(kT) \cdot \underline{x}(kT) + \mathbf{H}(kT) \cdot \underline{u}(kT)$$

同时, 对 (2.61) 式输出方程离散化, 则证明了

$$\underline{y}(kT) = \mathbf{C}(kT)\underline{x}(kT) + \mathbf{D}(kT)\cdot\underline{u}(kT)$$

## 二、线性时不变系统的离散化

对于线性时不变系统

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases} \quad (2.69)$$

离散化状态空间表达式为

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1)T = \mathbf{G}(T)\underline{x}(kT) + \mathbf{H}(T)\underline{u}(kT) \\ \underline{y}(kT) = \mathbf{C}\underline{x}(kT) + \mathbf{D}\underline{u}(kT) \end{cases} \quad (2.70)$$

其中  $\mathbf{G}(T), \mathbf{H}(T), \mathbf{C}, \mathbf{D}$  均为常数阵, 且

$$\begin{cases} \mathbf{G}(T) = e^{AT} \\ \mathbf{H}(T) = (\int_0^T e^{At} dt)B \end{cases} \quad (2.71)$$

证明：由于时不变系统是时变系统的一种特殊情况，所以只需要证明式 (2.71) 成立即可。由 (2.63) 式可得

$$G(kT) = \phi[(k+1)T - kT] = \phi(T) = e^{AT} = G(T)$$

$$H(kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} \phi[(k+1)T - \tau] B d\tau$$

上式中，令  $t = (k+1)T - \tau$ ，则  $dt = -d\tau$

积分项  $\int_{kT}^{(k+1)T} d\tau = \int_T^0 -dt = \int_0^T dt$ ，因此

$$H(kT) = (\int_0^T \phi(t) dt) B = (\int_0^T e^{At} dt) B = H(T)$$

所以时不变系统的状态方程为：

$$\underline{x}(k+1)T = G(T)\underline{x}(kT) + H(T)\underline{u}(kT)$$

因为输出方程是状态向量和控制向量的某种线性组合，离散化后，这种组合关系不变，故  $C$ 、 $D$  是不变的。

#### 例 2.14 求连续系统

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{u}(t)$$

的离散状态空间表达式。

解：由式 (2.71) 计算

$$G(T) = e^{AT} = L^{-1}\{(SI - A)^{-1}\} = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\right\}$$

$$= L^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$H(T) = \int_0^T e^{At} dt \underline{b} = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} dt \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T & \frac{1}{2}(T + \frac{1}{2}e^{-2T} - \frac{1}{2}) \\ 0 & -\frac{1}{2}e^{-2T} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(T + \frac{e^{-2T} - 1}{2}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix}$$

从而可求得离散化状态方程为：

$$\underline{x}[(k+1)T] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} \underline{x}(kT) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(T + \frac{e^{-2T} - 1}{2}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix} \underline{u}(kT)$$

假如采样周期  $T$  为 1 秒，则上述状态方程为：

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.432 \\ 0 & 0.135 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.284 \\ 0.432 \end{bmatrix} \underline{u}(k)$$

### 三、近似离散化

在采样周期  $T$  较小，一般当其为系统最短时间常数的十分之一左右时，时不变系统离散化状态方程可近似表达为：

$$\underline{x}[(k+1)T] = (TA + I)\underline{x}(kT) + TB\underline{u}(kT) \quad (2.72)$$

$$\text{即 } \begin{cases} G(T) \doteq AT + 1 \\ H(T) \doteq TB \end{cases} \quad (2.73)$$

证明：根据导数的定义

$$\dot{\underline{x}}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{x}(t_0 + \Delta t) - \underline{x}(t_0)}{\Delta t}$$

现研究  $t_0 = kT$  时，和  $t = (k+1)T$  这一段的导数，有

$$\dot{\underline{x}}(kT) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\underline{x}[(k+1)T] - \underline{x}(kT)}{T} \approx \frac{\underline{x}[(k+1)T] - \underline{x}[kT]}{T}$$

以此代入原方程

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t)$$

可得

$$\frac{\underline{x}(k+1)T - \underline{x}(kT)}{T} = A\underline{x}(kT) + B\underline{u}(kT)$$

$$\text{即 } \underline{x}[(k+1)T] = (I + AT)\underline{x}(kT) + TB\underline{u}(kT)$$

例 2.15 将例 2.14 按 (2.72)、(2.73) 两式计算来进行离散化。

解：

$$G(T) = TA + I = T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 - 2T \end{bmatrix}$$

$$H(T) = TB = T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}$$

将例[2.14]、例[2.15]两种计算方法在不同采样周期  $T$  时的计算结果列表如表 2.1 所示，可知  $T = 0.05$  时，两者更为接近。

表 2.1

$T$	$G(T)$	$H(T)$		
$T$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(T - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 - 2T \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(T + \frac{e^{-2T} - 1}{2}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix} 1 & 0.432 \\ 0 & 0.135 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.284 \\ 0.432 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
0.5	$\begin{bmatrix} 1 & 0.316 \\ 0 & 0.368 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.092 \\ 0.316 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$
0.05	$\begin{bmatrix} 1 & 0.048 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0.05 \\ 0 & 0.90 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0012 \\ 0.0475 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.05 \end{bmatrix}$

对线性时变系统也可仿上面时不变系统近似离散化的方法，得近似的计算公式如下：

## § 2.4 离散状态方程的解

### 一、线性时不变离散状态方程的解

现讨论离散状态方程的解，首先研究时不变系统的情况，设时不

变系统状态方程为：

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = G \underline{x}(k) + H \underline{u}(k) \\ \underline{x}(k)|_{k=0} = \underline{x}(0) \end{cases} \quad (2.75)$$

对于时不变系统的求解，主要有两类方法，一类是用矩阵差分方程的迭代法，另一类是用  $z$  变换法。

### 1. 迭代法求解

对于任意采样时刻  $k > 0$ ，方程 (2.75) 的解可用迭代法求得，即先令  $k = 0$ ，由已知条件  $\underline{x}(0)$ ,  $\underline{u}(0)$  可先求得  $\underline{x}(1)$ ，再令  $k = 1$ ，由

求得的  $\underline{x}(1)$  和已知  $\underline{u}(1)$  可求得  $\underline{x}(2)$ ，如此进行，即可得  $\underline{x}(k)$ 。显然，这种解法便于在数字计算机上进行运算。由方程 (2.75) 式，由迭代法，有

$$\begin{aligned} k = 0 \quad & \underline{x}(1) = G \underline{x}(0) + H \underline{u}(0) \\ k = 1 \quad & \underline{x}(2) = G \underline{x}(1) + H \underline{u}(1) = G^2 \underline{x}(0) + GH \underline{u}(0) + H \underline{u}(1) \\ k = 2 \quad & \underline{x}(3) = G \underline{x}(2) + H \underline{u}(2) = G^3 \underline{x}(0) + G^2 H \underline{u}(0) + GH \underline{u}(1) + H \underline{u}(2) \\ \dots \dots \\ k - 1 \quad & \underline{x}(k) = G \underline{x}(k-1) + H \underline{u}(k-1) \\ & = G^k \underline{x}(0) + G^{k-1} H \underline{u}(0) + \dots + GH \underline{u}(k-2) + H \underline{u}(k-1) \end{aligned}$$

从而

$$\underline{x}(k) = G^k \underline{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} H \cdot \underline{u}(j) \quad (2.76a)$$

$$\text{或 } \underline{x}(k) = G^k \underline{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^j H \cdot \underline{u}(k-j-1) \quad (2.76b)$$

上两式可以用向量矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(1) \\ \underline{x}(2) \\ \underline{x}(3) \\ \vdots \\ \underline{x}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 \\ G^2 \\ G^3 \\ \vdots \\ G^k \end{bmatrix} \underline{x}(0) + \begin{bmatrix} H & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ GH & H & 0 & \cdots & 0 \\ G^2H & GH & H & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G^{k-1}H & G^{k-2}H & G^{k-3}H & \cdots & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}(0) \\ \underline{u}(1) \\ \underline{u}(2) \\ \vdots \\ \underline{u}(k-1) \end{bmatrix}$$

(2.76 c)

解式 (2.76) 是按初始时刻为  $k = 0$  得到的, 若初始时刻从  $k = h$  开始, 且相应的初始状态为  $\underline{x}(h)$ , 则其解为:

$$\underline{x}(k) = G^{k-h} \underline{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1} G^{k-j-1} H \underline{u}(j) \quad (2.77 a)$$

$$\text{或 } \underline{x}(k) = G^{k-h} \underline{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1} G^{j-h} H \underline{u}(k-j-1+h) \quad (2.77 b)$$

由解式 (2.76) 式 (2.77) 可以看出, 离散系统的解和连续系统的解

是很类似的, 也由两部分组成。第一部分是由初始状态  $\underline{x}(0)$  转移而来, 第二部分是由控制作用所激励的状态转移产生的, 而且其中  $G^k$  或  $G^{k-h}$  相当于连续时间系统中的  $\phi(t) = e^{At}$  或  $\phi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}$ , 类似地, 这里也定义:

$$\phi(k) = G^k \quad (2.78 a)$$

$$\text{或 } \phi(k-h) = G^{k-h} \quad (2.78 b)$$

称为离散时间系统的状态转移矩阵, 很明显它满足:

$$\begin{cases} \phi(k+1) = G\phi(k) \\ \phi(0) = I \end{cases} \quad (2.79)$$

状态转移矩阵具有如下性质:

$$(1) \phi(k-h) = \phi(k-h_1)\phi(h_1-h), \quad (k > h_1 \geq h) \quad (2.80)$$

$$(2) \text{ 当且仅当 } G(k) \text{ 是非奇异时, } \phi^{-1}(k) = \phi(-k) \quad (2.81)$$

(3) 如果  $G$  为对角线矩阵, 且  $G = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_n)$  则  $\phi(k)$  也必为对角线矩阵, 即为

$$\phi(k) = \text{diag} (g_1^k, g_2^k, \dots, g_n^k)$$

(4) 设连续系统系数矩阵为  $A$  具有两两相异的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ ,  $G = e^{AT}$ ,  $T$  为采样周期, 记  $\mu_i = e^{\lambda_i T}$ , 则

$$\phi(k) = \sum_{i=1}^n \mu_i^k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[ \frac{G - \mu_j I}{\mu_i - \mu_j} \right] \quad (2.82)$$

这可由 *Sylvester* 展开定理来证明, 此略。

(5) 因为当且仅当  $G$  是非奇异时,  $\phi(k)$  才是非奇异的, 对于由连续系统离散化得到的系统,  $G = e^{AT}$  总是非奇异的, 所以  $\phi(k)$  必是非奇异的。

利用状态转移  $\phi(k)$ , 离散时间状态方程的解 (2.76) 可写成

$$\begin{aligned} \underline{x}(k) &= \phi(k) \underline{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \phi(k-j-1) H \underline{u}(j) \\ \text{或 } \underline{x}(k) &= \phi(k) \underline{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \phi(j) H \underline{u}(k-j-1) \end{aligned} \quad (2.83)$$

而 (2.77) 式可写成:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k) &= \phi(k-h) \underline{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1} \phi(k-j-1) H \underline{u}(j) \\ \text{或 } \underline{x}(k) &= \phi(k-h) \underline{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1} \phi(j-h) H \underline{u}(k-j-1+h) \end{aligned} \quad (2.84)$$

### 例 2.16 离散状态方程

$$\underline{x}(k+1) = G \underline{x}(k) + h \underline{u}(k)$$

$$\text{其中 } G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试求当初始状态  $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  和控制作用为  $\underline{u}(k) = 1$  时, 此系统的

$\phi(k)$  和  $\underline{x}(k)$ 。

解: 根据定义

$$\phi(k) = G^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}^k$$

LCD 2014年秋季

按上式直接计算  $\phi(k)$  有一定困难。为此，将原状态方程变换为约当标准型，即将  $G$  变换为对角型。

令  $\underline{x}(k) = T \tilde{\underline{x}}(k)$  代入原方程得：

$$\tilde{\underline{x}}(k+1) = T^{-1}GT \tilde{\underline{x}}(k) + T^{-1}\underline{h}u(k)$$

相应地有

$$\begin{aligned} T^{-1}GT &= \Lambda & \tilde{\phi}(k) &= (T^{-1}GT)^k = (\Lambda)^k \\ \tilde{\underline{x}}(k) &= \tilde{\phi}(k) \cdot \tilde{\underline{x}}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{\phi}(j) T^{-1} \underline{h}u(k-j-1) \end{aligned} \quad (2.85)$$

为此求特征值

$$\begin{aligned} |\lambda I - G| &= \left| \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0.16 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \right| = (\lambda + 0.2)(\lambda + 0.8) = 0 \\ \lambda_1 &= -0.2 \quad \lambda_2 = -0.8 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \Lambda = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\phi}(k) = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} (-0.2)^k & 0 \\ 0 & (-0.8)^k \end{bmatrix}$$

$$\text{又求得 } T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.2 & -0.8 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 4/3 & 5/3 \\ -1/3 & -5/3 \end{bmatrix}$$

从而求得

$$\begin{aligned} \phi(k) &= T \tilde{\phi}(k) T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.2 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-0.2)^k & 0 \\ 0 & (-0.8)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/3 & 5/3 \\ -1/3 & -5/3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4(-0.2)^k - (-0.8)^k & 5[(-0.2)^k - (-0.8)^k] \\ -0.8[(-0.2)^k - (-0.8)^k] & -(-0.2)^k + 4(-0.8)^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

现按 (2.85) 式求  $\tilde{\underline{x}}(k)$ ，该式右边第一项为：

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(k) \tilde{\underline{x}}(0) &= \tilde{\phi}(k) T^{-1} \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} (-0.2)^k & 0 \\ 0 & (-0.8)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/3 & 5/3 \\ -1/3 & -5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -(-0.2)^k \\ 4(-0.8)^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

该式右边第二项为：

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{\phi}(j) T^{-1} \underline{h} u(k-j-1) = \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{\phi}(j) \begin{bmatrix} 4/3 & 5/3 \\ -1/3 & -5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \begin{bmatrix} (-0.2)^j & 0 \\ 0 & (-0.8)^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{k-1} \begin{bmatrix} 3(-0.2)^j \\ -2(-0.8)^j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3[1 + (-0.2) + (-0.2)^2 + \cdots + (-0.2)^{k-1}] \\ -2[1 + (-0.8) + (-0.8)^2 + \cdots + (-0.8)^{k-1}] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3[1 - (-0.2)^k] / 1.2 \\ -2[1 - (-0.8)^k] / 1.8 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(k) &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -(0.2)^k \\ 4(-0.8)^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{0.4} [1 - (-0.2)^k] \\ -\frac{1}{0.9} [1 - (-0.8)^k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{5}{2} \\ \frac{22}{9}(-0.8)^k - \frac{10}{9} \end{bmatrix} \\
x(k) &= T \tilde{x}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.2 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{5}{2} \\ \frac{22}{9}(-0.8)^k - \frac{10}{9} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18} \\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k - \frac{17.6}{9}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix} \quad (k \geq 0)
\end{aligned}$$

## 2. Z 变换求解

离散状态方程也可以用  $z$  变换法求解，对式 (2.75) 两边  $Z$  变换，

得  $\underline{zx}(z) - z \underline{x}(0) = G \underline{x}(z) + H \underline{u}(z)$   
 $(zI - G) \underline{x}(z) = \underline{zx}(0) + H \underline{u}(z)$

即  $\underline{x}(z) = (zI - G)^{-1} [z \underline{x}(0) + H \underline{u}(z)]$

对上式两边取  $Z$  反变换。即得解  $x(k)$ ：

LCD 2014年秋季

$$\underline{x}(k) = Z^{-1}[(zI - G)^{-1} z] \underline{x}(0) + Z^{-1}[(zI - G)^{-1} H \underline{u}(z)] \quad (2.86)$$

式 (2.86) 和式 (2.76) 形式虽不相同, 但实际上是一致的。

$$\text{即有 } G^k = \phi(k) = Z^{-1}[(zI - G)^{-1} z] \quad (2.87)$$

$$\text{和 } \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} H \underline{u}(j) = Z^{-1}[(zI - G)^{-1} H \underline{u}(z)] \quad (2.88)$$

上两式可用如下证明:

先求  $G^k$  的  $Z$  变换,

$$Z[G^k] = \sum_{k=0}^{\infty} G^k z^{-k} = I + Gz^{-1} + G^2 z^{-2} + \dots \quad (2.89)$$

式 (2.89) 两边同左乘  $Gz^{-1}$

$$Gz^{-1} Z[G^k] = Gz^{-1} + G^2 z^{-2} + G^3 z^{-3} + \dots \quad (2.90)$$

式 (2.89) 减式 (2.90) 有:  $(I - Gz^{-1}) Z[G^k] = I$

对  $Z[G^k]$  求解, 有

$$Z(G^k) = (I - Gz^{-1})^{-1} = (zI - G)^{-1} z \quad (2.91)$$

式 (2.91) 两边取  $Z$  反变换, 故得式 (2.87),

$$G^k = Z^{-1}[(zI - G)^{-1} z]$$

再利用卷积求和公式证明式 (2.88),

$$\begin{aligned} Z\left[\sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} H \underline{u}(j)\right] &= Z[G^{k-1}] H Z[\underline{u}(k)] \\ &= Z[G^k] z^{-1} H Z[\underline{u}(k)] = (zI - G)^{-1} H \underline{u}(z) \end{aligned} \quad (2.92)$$

式 (2.92) 两边取  $Z$  反边换, 即得式 (2.88):

$$\sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} H \cdot \underline{u}(j) = Z^{-1}[(zI - G)^{-1} H \underline{u}(z)]$$

**例 2.17** 同例 2.16 试用  $Z$  变换法求  $\phi(k)$  和  $\underline{x}(k)$ 。

解：因为  $u(k) = 1$ ，所以  $u(z) = \frac{z}{z-1}$

由式 (2.87)

$$\begin{aligned}
G^k &= \phi(k) = Z^{-1}[(zI - G)^{-1}z] \\
&= Z^{-1}\left\{\begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z+1 \end{bmatrix}^{-1}z\right\} \\
&= Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z+0.2)(z+0.8)}\begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ -0.16 & z \end{bmatrix}\right\} \\
&= Z^{-1}\left\{\frac{z}{3}\begin{bmatrix} \frac{4}{z+0.2} + \frac{-1}{z+0.8} & \frac{5}{z+0.2} + \frac{-5}{z+0.8} \\ \frac{-0.8}{z+0.2} + \frac{0.8}{z+0.8} & \frac{-1}{z+0.2} + \frac{4}{z+0.8} \end{bmatrix}\right\} \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4(-0.2)^k - (-0.8)^k & 5(-0.2)^k - 5(-0.8)^k \\ -0.8(-0.2)^k + 0.8(-0.8)^k & -(-0.2)^k + 4(-0.8)^k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

再计算

$$z \underline{x}(0) + H \underline{u}(z) = \begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{z}{z-1} \\ \frac{z}{z-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z^2}{z-1} \\ \frac{-z^2 + 2z}{z-1} \end{bmatrix}$$

故

$$\begin{aligned}
\underline{x}(z) &= (zI - G)^{-1}[z \underline{x}(0) + H \underline{u}(z)] \\
&= \frac{1}{(z+0.2)(z+0.8)} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ -0.16 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{z^2}{z-1} \\ \frac{-z^2 + 2z}{z-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} (z^2 + 2)z \\ (z + 0.2)(z + 0.8)(z - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}z & \frac{22}{9}z & \frac{25}{18}z \\ z + 0.2 & z + 0.8 & z - 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-z^2 + 1.84z)z \\ (z + 0.2)(z + 0.8)(z - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3.4}{6}z & -\frac{17.6}{9}z & \frac{7}{18}z \\ z + 0.2 & z + 0.8 & z - 1 \end{bmatrix}$$

从而得离散状态方程的解为：

$$\underline{x}(k) = Z^{-1}\{\underline{x}(z)\} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18} \\ \frac{17}{30}(-0.2)^k - \frac{88}{45}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix} \quad (k \geq 0)$$

显然和例[2.16]的结果是一致的。

### 3. 线性时不变离散系统稳定条件

对线性时不变离散自由运动方程

$$\underline{x}(k+1) = G \underline{x}(k)$$

其解为  $\underline{x}(k) = \phi(k) \underline{x}_0$

依定义，当系统渐近稳定时，必有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(k) \underline{x}_0 = \mathbf{0}$$

由于起始条件  $\underline{x}_0$  是任意的非零向量，上式即等价于

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(k) = \mathbf{0}$$

现设  $G$  具有两两相异特征值  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ （当有重根时也可进行类似地推导，为简单起见，这里考虑为单值的情况）。则由 (2.82) 式，可导出：

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \mu_i^k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[ \frac{G - \mu_j I}{\mu_i - \mu_j} \right] \right\} = \mathbf{0}$$

显然，欲使上式成立即要求

LCD 2014年秋季

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_i^k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{也即 } |\mu_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.93)$$

这即表明，线性时不变离散系统稳定的充分必要条件为其系数矩阵  $\mathbf{G}$  的特征值的模均小于 1，即分布在  $z$  平面上以原点为中心的单位圆内。而且，如果原连续系统是稳定的，即  $R_e[\lambda_i] < 0, (i = 1, 2, \dots, n)$  则其离散化系统，由于  $|\mu_i| = |e^{\lambda_i T}| = e^{R_e[\lambda_i]T} < 1, (i = 1, 2, \dots, n)$  也将一定是稳定的。事实上，这个结论是和经典控制理论中所指出的“时不变线性离散系统稳定的充要条件为其脉冲传递函数的极点的模均小于 1”的条件相等价的。

## 二、线性时变离散状态方程的解

现简单地研究一下时变离散系统状态方程的解。设时变系统的状态方程为：

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1)T = \mathbf{G}(kT)\underline{x}(kT) + \mathbf{H}(kT)\underline{u}(kT) \\ \underline{x}(hT) = \underline{x}_0 \end{cases} \quad (2.94)$$

那么它的解是

$$\underline{x}(kT) = \phi(kT, hT)\underline{x}_0 + \sum_{j=h}^{k-1} \phi[kT, (j+1)T]\mathbf{H}(jT)\underline{u}(jT) \quad (2.95)$$

证明：只需证明 (2.95) 式满足原方程和起始条件 (2.94) 式即可，为此，有

$$\begin{aligned} \underline{x}[(k+1)T] &= \phi[(k+1)T, hT]\underline{x}_0 + \sum_{j=h}^k \phi[(k+1)T, (j+1)T]\mathbf{H}(jT)\underline{u}(jT) \\ &= \phi[(k+1)T, hT]\underline{x}_0 + \phi[(k+1)T, hT] \sum_{j=h+1}^{k+1} \phi^{-1}(jT, hT)\mathbf{H}[(j-1)T] \cdot \underline{u}[(j-1)T] \end{aligned}$$

而

LCD 2014年秋季

$$\begin{aligned}
\phi(kT, hT) &= G[(k-1)T] \cdot G[(k-2)T] \cdots G[(h+1)T] \cdot G(hT) \\
\phi[(k+1)T, hT] &= G(kT) \cdot G[(k-1)T] \cdots G[(h+1)T] \cdot G(hT) \\
&= G(kT) \phi(kT, hT) \\
\underline{x}[(k+1)T] &= G(kT) \phi(kT, hT) \underline{x}_0 + G(kT) \phi(kT, hT) \\
&\quad \cdot \sum_{j=h+1}^k \phi^{-1}(jT, hT) \cdot H[(j-1)T] \underline{u}[(j-1)T] \\
&\quad + \phi[(k+1)T, hT] \phi^{-1}[(k+1)T, hT] H(kT) \underline{u}(kT) \\
&= G(kT) \left\{ \phi(kT, hT) \underline{x}_0 + \phi(kT, hT) \sum_{j=h+1}^k \phi^{-1}(jT, hT) \cdot H[(j-1)T] \cdot \underline{u}[(j-1)T] \right\} \\
&\quad + H(kT) \cdot \underline{u}(kT) \\
&= G(kT) \left\{ \phi(kT, hT) \underline{x}_0 + \sum_{j=h}^{k-1} \phi[(kT, (j+1)T] \cdot H(jT) \underline{u}(jT) \right\} + H(kT) \underline{u}(kT) \\
&= G(kT) \underline{x}(kT) + H(kT) \underline{u}(kT)
\end{aligned}$$

所以 (2.95) 式满足原方程 (2.94)。再有令  $k=h$  代入 (2.95) 式：

$$\begin{aligned}
\underline{x}(hT) &= \phi(hT, hT) \underline{x}_0 + \sum_{j=h}^{h-1} \phi[hT, (j+1)T] \cdot H(jT) \underline{u}(jT) \\
&= \phi(hT, hT) \underline{x}_0 \\
&= \underline{x}_0
\end{aligned}$$

表明式 (2.95) 也满足起始条件。由此结论得证。

### 第三章 状态变量的能控性与能观测性

在现代控制理论中，能控性和能观测性是两个重要的概念。它是最优控制和最优估计的理论基础。能控性及能观测性概念是 **R • E • Kalman** 首先提出的。

简单地说，能控性是控制作用  $\underline{u}(t)$  支配系统状态向量  $\underline{x}(t)$  的能力；而能观测性是系统的输出  $\underline{y}(t)$  反映系统状态向量  $\underline{x}(t)$  的能力。前者回答  $\underline{u}(t)$  能否使  $\underline{x}(t)$  作任意转移的问题，后者则回答能否通过  $\underline{y}(t)$  的量测确定状态  $\underline{x}(t)$  的问题。

为什么在经典控制理论中，不涉及能控性和能观测性的问题。而在现代控制理论中特别提出状态的能控性和能观测性呢？这是由于在经典控制理论中，只限于讨论控制作用（输入）对输出的控制。输入与输出这两个量的关系，唯一地由系统的传递函数所确定，只要系统是稳定的，系统就是能控的。另一方面，系统的输出量本身就是被控量，对于一个实际的物理系统来说，它当然是可以观测到的，所以在经典控制理论中没有必要涉及能控性和能观性。然而在现代控制理论中，是把反映系统内部运动状态的状态向量作为被控量，而且它们不一定是实际上可观测到的物理量，至于输出量则是状态向量的线性组合，这就产生了从输入量  $\underline{u}(t)$  到状态量  $\underline{x}(t)$  的能控性问题和从输出量  $\underline{y}(t)$  到状态量  $\underline{x}(t)$  的能观测性问题。

所谓最优控制，目的在于根据  $\underline{x}(t)$  的值确定  $\underline{u}(t)$ ，使  $\underline{x}(t)$  达到预期的轨线，如果  $\underline{x}(t)$  不受控于  $\underline{u}(t)$ ，当然就无从实现最优控制；又由于  $\underline{x}(t)$  的值难以测取，往往需要从测到的  $\underline{y}(t)$  来估计出  $\underline{x}(t)$ ，这就不难理解能控性和能观测性，是最优控制器和最优估计器的设计基础。

本章将较详细地讨论确定性系统的能控性和能观测性问题。我们将发现系统的能控制性和能观测性完全是由系统的结构所确定的，所以本章还将讨论常系数系统的结构问题。

## § 3.1 能控性

### § 3.1.1 能控性概念

能控制的问题涉及到一个线性系统的输入对状态影响的程度，为了说明这个概念，本节从具体例子入手，说明系统状态确实存在可控性问题，从而引出能控性定义。

#### 一、几个例子

例 3.1 已知如下系统

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

将此状态方程展开得：

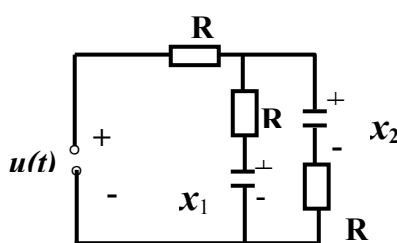
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u \end{cases}$$

既然能控性反映的是输入  $u$  对状态  $\underline{x}(t)$  的控制程度，这就首先要求输入与状态发生联系。上述系统中状态变量  $x_2$  与  $u$  有联系，有可能用  $u$  去控制  $x_2$ ；而状态变量  $x_1$  与控制量  $u$  既没有直接连系又没有间接连系，故不可能用  $u$  去控制  $x_1$ ，就是说状态变量  $x_1$  是不可控的。

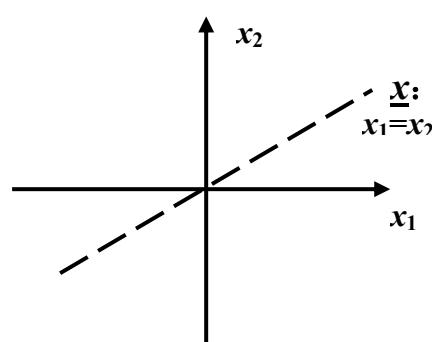
输入  $u$  和状态  $\underline{x}$  有联系就一定可控吗？我们再看一个例子。

例 3.2 图 3.1 (a) 所示为一电容电阻构成的电路，设  $RC = \frac{1}{3}$ ，则

得系统的状态方程



(a)



(b)

图 3.1

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

将此系统展开，可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + u \end{cases}$$

从上述方程可以看出：状态  $x_1$  和  $x_2$  都和  $u$  有联系，能否说此系统一定是完全能控呢？我们作如下进一步分析。上述方程的状态转移矩阵为：

$$e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} + e^{-3t} \end{bmatrix}$$

在此讨论  $u$  对状态向量  $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  的控制能力。

(1)、状态方程解中强制分量的两个状态变量相等，即  
 $x_1(t)_{\text{强}} = x_2(t)_{\text{强}}$

$$\begin{aligned} \underline{x}(t)_{\text{强}} &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}_{\text{强}} = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \underline{b} u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} + e^{-3(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} + e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} u(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

由上式明显地看出，不论如何选择  $u(t)$ ，强制分量  $\underline{x}(t)_{\text{强}}$  总是正比于向量  $[1 \ 1]^T$ ，如图 3.1 (b)，强制分量始终落在直线  $x_1 = x_2$  上。

(2) 由直线  $x_1 = x_2$  上出发的自由运动也始终在直线  $x_1 = x_2$  上。

设在直线  $x_1 = x_2$  上的初态为：

$\underline{x}_0 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，其中  $\alpha$  是任意常数，则方程的自由分量是：

$$e^{At} \underline{x}_0 = e^{At} \cdot \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} + e^{-3t} \end{bmatrix} \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3) 由直线  $x_1 = -x_2$  上出发的自由运动始终在直线  $x_1 = -x_2$  上。

在图 3.1 (c) 中，直线  $x_1 = -x_2$  是直线  $x_1 = x_2$  的垂线。直线  $x_1 = -x_2$  上

的动态点可表为  $\underline{x}_0 = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 。其中  $\beta$  是任意常数，则方程的自由分量

$$\text{为: } e^{At} \cdot \underline{x}_0 = e^{At} \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \beta e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

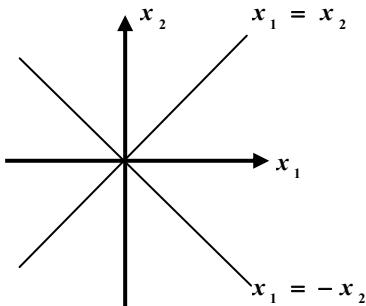


图 3.1 (c)

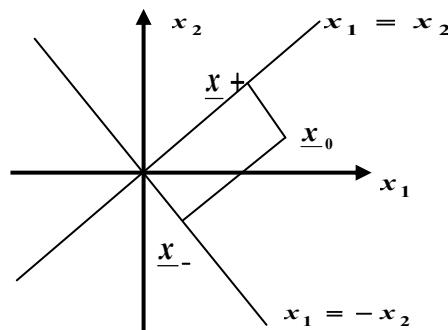


图 3.1(d)

综上所述，二维状态空间中，在直线  $x_1 = x_2$  上的状态，总可以找到一个控制  $u(t)$ ，使系统状态运动有限时间内所达到的状态（即末态）为状态空间的原点；而在直线  $x_1 = -x_2$  上的状态，就不可能找到控制  $u(t)$ ，使运动的末态是原点。

二维状态空间的任意动态  $\underline{x}_0$ ，总可以分解为上述两条直线上的投影之和，即： $\underline{x}_0 = \underline{x}_+ + \underline{x}_-$ ，见图 3.1 (d)。

其中  $\underline{x}_+$  是  $\underline{x}_0$  在  $x_1 = x_2$  上的投影，是可以控制的； $\underline{x}_-$  是  $\underline{x}_0$  在直线  $x_1 = -x_2$  上的投影。这样，总可以找到控制  $u(t)$ ，使动态  $\underline{x}_0$  的  $\underline{x}_+$  部分在有限时间内回到零，而  $\underline{x}_-$  部分不可能在有限时间内回到零。

从物理意义上很好理解，因为加入任何输入电压  $u(t)$ ，必然同样地影响到两个支路，所以如果  $x_1(0) = x_2(0)$ ，那么对一切  $t$  必有  $x_1(t) = x_2(t)$ 。

如果将例 3.2 的状态方程作线性变换，可以看得更清楚。系统特征值为  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -3$ ，若变换矩阵取为：

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

则有  $\tilde{\underline{x}} = T^{-1}AT \underline{x} + T^{-1}Bu$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tilde{\underline{x}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \tilde{\underline{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u
\end{aligned}$$

将上式展开得

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -\tilde{x}_1 + u \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -3\tilde{x}_2 \end{cases}$$

显然，状态变量  $\tilde{x}_1$  和输入  $u$  有联系，可以被控制，而分量  $\tilde{x}_2$  和  $u$  没有联系，不可能被  $u$  所控制，有的文献上称  $e^{-t}$ ,  $e^{-3t}$  为模态，显然，模态  $e^{-t}$  可以被控制，而模态  $e^{-3t}$  不可能被  $u$  控制。

从以上例子可以看出，如果将系统变换为对角标准型，那么状态的能控性可以看得很清楚，因为对角标准型中，变量的耦合关系消除了。状态方程变为单个状态和输入的关系。

## 二、能控性定义

能控性所研究的只是系统在  $u(t)$  的控制作用下，状态向量  $\underline{x}(t)$  的转移情况。这与输出  $y(t)$  无关，所以只需要研究系统的状态方程。

设线性系统的状态方程如下：

$$\dot{\underline{x}} = A(t) \underline{x} + B(t) u \quad (3.1)$$

对初始时刻  $t_0$ ，在系统的时间定义域内存在着另一时刻  $t_\alpha > t_0$ ，可找到无约束的控制向量  $u(t)$ ，使得系统从初始状态  $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$  推向状态  $\underline{x}(t_\alpha) = \underline{x}_1$ ，则称系统 (3.1) 式的这一特定状态  $\underline{x}_1$  是能控的，若  $\underline{x}_1$  为状态空间的任意一点，那么就称此系统是状态完全能控的，简称系统是能控的或能控系统。若系统存在某个状态不满足上述条件，那么是不能控系统。如果存在将系统 (3.1) 式从零态  $\underline{x}(t_0) = \underline{0}$  推向末态  $\underline{x}(t_\alpha) = \underline{x}_1$  的控制作用  $u(t)$ ，则称  $\underline{x}_1$  是能达到的，若  $\underline{x}_1$  可为状态空间的任一点，则称系统 (3.1) 式是在  $[t_0, t_\alpha]$  上状态完全能达的。

式 (3.1) 所示系统的解为

LCD 2014年秋季

$$\underline{x}(t) = \Phi(t, t_0) \underline{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

依上面能控性定义，如果系统在  $[t_0, t_\alpha]$  上是完全能控的，那么就有

$$\underline{0} = \Phi(t_\alpha, t_0) \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_\alpha, \tau) B(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau$$

可导出

$$\begin{aligned} \underline{x}_0 &= -\Phi^{-1}(t_\alpha, t_0) \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_\alpha, \tau) B(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau \\ &= -\Phi(t_0, t_\alpha) \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_\alpha, \tau) B(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau \\ &= -\int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.3)$$

(3.3) 式表明，所谓完全能控的，就是对任意非零  $\underline{x}_0$ ，满足 (3.3) 式的  $\underline{u}(\tau)$  总是存在的。或者，也可以这样说，对于任意无约束控制  $\underline{u}$ ，满足式 (3.3) 的相应状态空间中的点  $\underline{x}_0$  必是系统的能控状态。

反之，根据定义，如果状态空间中某个非零状态  $\bar{\underline{x}}$  是能达状态，那么它必满足下式：

$$\bar{\underline{x}} = \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_\alpha, \tau) B(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

(3.4) 式表明，若  $\bar{\underline{x}}$  为可达态，则必存在满足式 (3.4) 的无约束的控制  $\underline{u}(t)$ ，或者也可以这样说，对完全可达的系统，对任一无约束控制  $\underline{u}(t)$ ，由 (3.4) 式导出  $\bar{\underline{x}}$  必是系统的能达态。

对于能控状态  $\underline{x}_0$  和能达态  $\bar{\underline{x}}$  由 (3.3) 式和式 (3.4) 可导出

$$\bar{\underline{x}} = \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_\alpha, t_0) \Phi(t_0, \tau) B(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau = -\Phi(t_\alpha, t_0) \underline{x}_0 \quad (3.5)$$

其中  $\Phi(t_\alpha, t_0)$  为非奇异常阵，这表明能控状态和能达态之间为线性非奇异变换的关系。对状态空间中任一能控状态必有相应的一个能达状态存在于状态空间：反之，对状态空间中任一能达状态必有相应的一个能控状态存在于状态空间，所以可以说能控性和能达性二者对线系统来说是等价的，我们将着重讨论能控性，而较少提及能达性。

### 三、输出能控性

输出能控性定义：对如下系统

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A(t)\underline{x} + B(t)\underline{u} \\ \underline{y} = C(t)\underline{x} + D(t)\underline{u} \end{cases} \quad (3.6)$$

对任意初始时刻  $t_0$ ，在时间定义域内存着时刻  $t_\alpha > t_0$ ，且对  $t_0$  时刻的任意初值  $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$ ，可找到无约束控制  $\underline{u}(t)$ ，使得  $\underline{y}(t_\alpha) = \underline{y}_{t_\alpha}$ ，则称系统在  $[t_0, t_\alpha]$  上是输出能控的，如果对在时间定义域中的任意  $t_0$ ，系统 (3.6) 都是在  $[t_0, t_\alpha]$  上输出能控的，则称系统是输出完全能控的。应该指出，一般地说，输出能控和状态能控之间是不等价的，即输出能控不能必然导致状态能控，反之状态能控也不能必然导致输出能控。

#### 四、能稳定性

能控性不仅系统分析中极为重要。而且在系统的综合中也是一个先决条件，但实际系统并非都是完全能控的，如果系统的不能控模态都是稳定的，则称系统是能稳定的或能镇定的，能稳定性 (Stabilizability) 也是系统的重要性质，它的意义到系统的综合一章进一步体会到。

##### § 3.1.2 连续线性定常系统的能控性判据

这一节首先讨论连续线性定常系统的能控性问题，其状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} \\ \underline{y} = C \underline{x} + D \underline{u} \end{cases} \quad (3.7)$$

从上节可以看出，若一个系统是对角标准型形式。则系统的能控性就很清楚地表现出来，所以常常将一个系统化为对角标准型。然后再判别其能控性。

##### 一、状态能控性判据形式之一（模态判据）

(1) 如果系统  $\Sigma = (A, B)$  具有两两相异的特征值，那么其状态完

全能控的充分必要条件是其对角标准形式

$$\tilde{\dot{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} u$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \cdots & \tilde{b}_{1r} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \cdots & \tilde{b}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{n1} & \tilde{b}_{n2} & \cdots & \tilde{b}_{nr} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

中，输入矩阵  $\tilde{B}$  不存在全零的行。如果存在全零的行，那么和该行相对应的状态变量就是不能控的。或者说该行对应的特征值形式的模态  $e^{\lambda_i t}$  是不可控模态。

证明：

1) 首先证明系统在非奇异变换后能控性不变。因为  $\Sigma = (A \ B)$  和  $\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}, \tilde{B})$  之间为非奇异变换，所以有  $\underline{x}_0 = T \tilde{x}_0$  和  $\tilde{x}_0 = T^{-1} \underline{x}_0$ 。表明任意的  $\underline{x}_0 \in \underline{x}$  为能控状态，则相应的  $\tilde{x}_0$  也必为能控状态，反之也成立，从而说明两者之间能控等价性。

2) 证明  $\tilde{B}$  不包含元素全为零的行是  $\Sigma = (A \ B)$  状态完全能控的充分必要条件。将 (3.8) 式写成展开形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}}_1 = \lambda_1 \tilde{x}_1 + (\tilde{b}_{11} u_1 + \tilde{b}_{12} u_2 + \cdots + \tilde{b}_{1r} u_r) \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \lambda_2 \tilde{x}_2 + (\tilde{b}_{21} u_1 + \tilde{b}_{22} u_2 + \cdots + \tilde{b}_{2r} u_r) \\ \dots \quad \dots \\ \dot{\tilde{x}}_n = \lambda_n \tilde{x}_n + (\tilde{b}_{n1} u_1 + \tilde{b}_{n2} u_2 + \cdots + \tilde{b}_{nr} u_r) \end{array} \right.$$

上述方程组中，没有状态变量之间的耦合，因此  $\tilde{x}_i (i = 1, 2, \dots, n)$  能控的充要条件是不能同时有：  $b_{i1} = 0, b_{i2} = 0 \dots b_{ir} = 0$ 。

例 3.3 试判断如下系统是否能控

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解：首先将其化为对角标准型

LCD 2014年秋季

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & -5 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - 5 = (\lambda + 5)(\lambda - 1) = 0$$

得:  $\lambda_1 = -5$ ,  $\lambda_2 = 1$

$$\text{变换阵 } T = [P_1 \quad P_2] = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

$$\text{故 } T^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

变换后的对角标准形式为:

$$\tilde{\underline{x}} = T^{-1} A T \underline{x} + T^{-1} \underline{b} u = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

显然有一行元素为零, 故系统是不完全能控的, 其不能控的模态为  $e^t$ 。

**例 3.4** 有如下各系统

$$1) \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$2) \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$3) \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

显然, 1) 和 2) 是状态完全能控的, 而 3) 是状态不完全能控的。

(2) 当 系 统  $\Sigma = (A, B)$  具 有 重 特 征 值  $\lambda_1(m_1 \text{ 重})$ ,

$\lambda_2(m_2 \text{ 重}), \dots, \lambda_k(m_k \text{ 重})$ ,  $\sum_{i=1}^k m_i = n$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j$  ( $i \neq j$ ) 则系统状态完全

能控的充分必要条件是其经非奇异变换后的约当标准形式

$$\tilde{\underline{x}} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \mathbf{0} \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & J_K \end{bmatrix} \tilde{\underline{x}} + \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u} \quad (3.9)$$

中,  $\tilde{\mathbf{B}}$  和每个约当块  $J_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) 最后一行相对应的那些行其元素不全为零。

证明: 类似于 (1) 中将 (3.9) 式中对应于  $J_i$  块写成展开形式, 有

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_{i1} = \lambda_i \tilde{x}_{i1} + \tilde{x}_{i2} + (\tilde{b}_{11}^{(i)} u_1 + \tilde{b}_{12}^{(i)} u_2 + \cdots + \tilde{b}_{1r}^{(i)} u_r) \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \tilde{x}_{i, m_i-1} = \lambda_i \tilde{x}_{i, m_i-1} + \tilde{x}_{i, m_i} + (\tilde{b}_{(m_i-1), 1}^{(i)} u_1 + \cdots + \tilde{b}_{(m_i-1), r}^{(i)} u_r) \\ \tilde{x}_{i, m_i} = \lambda_i \tilde{x}_{i, m_i} + (\tilde{b}_{m_i, 1}^{(i)} u_1 + \cdots + \tilde{b}_{m_i, r}^{(i)} u_r) \quad (i = 1, 2, \dots, k) \end{array} \right.$$

上式表明, 当且仅当相应于  $J_i$  的最后一行的  $\tilde{\mathbf{B}}$  的行的元素  $\tilde{b}_{m_i, 1}^{(i)}, \tilde{b}_{m_i, 2}^{(i)}, \dots, \tilde{b}_{m_i, r}^{(i)}$  不全为零时,  $\tilde{x}_{i1}, \tilde{x}_{i2}, \dots, \tilde{x}_{i, m_i}$  全都和  $u_1, u_2, \dots, u_r$  中的至少一个有直接或间接的关联, 即能控的。

**例 3.5** 已知如下系统, 判断能控性,

$$1) \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 1 & | & \mathbf{0} \\ 0 & \lambda_2 & | & \mathbf{0} \\ \hline 0 & 0 & | & \lambda_3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (b_2 \neq 0, b_3 \neq 0)$$

$$2) \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & | & \mathbf{0} \\ 0 & -3 & | & \\ \hline 0 & & | & -4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$3) \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & | & \mathbf{0} \\ 0 & -3 & | & \\ \hline 0 & & | & -4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}$$

显然 1), 2) 是状态完全能控的, 而 3) 状态不完全能控。

(3) 当系统的约当型存在多个约当块对应同一个特征值时,  $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B})$  状态完全能控的充分必要条件是, 输入矩阵  $\tilde{B}$  中对应  $\tilde{A}$  矩阵中相等特征值的全部约当块末行的那些行之间是线性无关的.

## 二、状态能控判据形式之二（代数判据）

(1) 系统  $\Sigma(A, B)$  是状态完全能控的充分必要条件是其能控矩阵

$$Q_k = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$$

满秩, 即  $\text{Rank } Q_k = n$

证明: 系统 (3.7) 式的解为:

$$\underline{x}(t) = \Phi(t - t_0)\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)B\underline{u}(\tau)d\tau \quad (3.10)$$

根据能控性定义, 对任意给定的初始状态  $\underline{x}(t_0)$  应能找到  $\underline{u}(t)$ , 使之在有限时间  $t_\alpha > t_0$  内转换到零 ( $\underline{x}(t_\alpha) = \underline{0}$ ), 称  $\underline{x}(t_0)$  为能控状态, 那么从式 (3.10), 令  $t = t_\alpha$ , 并令  $\underline{x}(t_\alpha) = \underline{0}$ , 得

$$\Phi(t_\alpha - t_0)\underline{x}(t_0) = - \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_\alpha - \tau)B\underline{u}(\tau)d\tau$$

$$\text{即 } \underline{x}(t_0) = - \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_0 - \tau)B\underline{u}(\tau)d\tau \quad (3.11)$$

上式中,  $\Phi(t_0 - \tau) = e^{A(t_0 - \tau)}$ . 根据 Cayley-Hamilton 定理

$$\begin{aligned} \Phi(t_0 - \tau) &= e^{A(t_0 - \tau)} = \alpha_0(\tau)I + \alpha_1(\tau)A + \cdots + \alpha_{n-1}(\tau)A^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)A^k \end{aligned} \quad (3.12)$$

将(3.12)式代入(3.11)式, 得:

$$\underline{x}(t_0) = - \int_{t_0}^{t_\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)A^k B\underline{u}(\tau)d\tau = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_{t_0}^{t_\alpha} \alpha_k(\tau)\underline{u}(\tau)d\tau \quad (3.13)$$

$$\text{令 } \underline{\beta}_k = \int_{t_0}^{t_\alpha} \alpha_k(\tau)\underline{u}(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} \underline{\beta}_{k1} \\ \underline{\beta}_{k2} \\ \vdots \\ \underline{\beta}_{kr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \int_{t_0}^{t_\alpha} \alpha_k(\tau)u_1(\tau)d\tau \\ - \int_{t_0}^{t_\alpha} \alpha_k(\tau)u_2(\tau)d\tau \\ \vdots \\ - \int_{t_0}^{t_\alpha} \alpha_k(\tau)u_r(\tau)d\tau \end{bmatrix}$$

$$\text{故 } \underline{x}(t_0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \cdot \begin{bmatrix} \beta_{k1} \\ \beta_{k2} \\ \vdots \\ \beta_{kr} \end{bmatrix} = -[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

其中:  $\underline{\beta}_i = [\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ir}]^T$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$

上式表明, 任意一个能控状态  $\underline{x}(t_0)$  都可以表示为向量  $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$  的线性组合。在  $n$  维空间中, 有且仅有  $n$  个向量是线性无关的, 所以  $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$  中最多只有  $n$  个向量是线性无关的。进一步可证明,  $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$  中必有  $n$  个向量是线性无关的。若不是这样, 设有  $p < n$  个向量是线性无关的, 那么任意的能控状态  $\underline{x}(t_0)$  必可唯一表示为这些线性无关的向量的线性组合, 而他们的集合为  $p < n$  维能控空间。但这和已设  $\sum_{(A, B)}$  状态完全能控的条件相矛盾。因此  $p < n$  的假设不成立。从而证明  $\sum_{(A, B)}$  状态完全能控的充要条件是  $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$  中有且仅有  $n$  个向量是线性无关的, 而  $Q_K$  为  $n \times nr$  矩阵, 因此  $\text{Rank } Q_K = n$ 。

**例 3.6** 已知如下系统, 试判别该系统的能控性。

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

解:  $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A^2B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$Q_k = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

从  $Q_k$  的前三列可知,  $\text{Rank } Q_k = 3$ , 所以系统完全能控。

由于在多输入系统中,  $Q_k$  是  $n \times nr$  矩阵, 不象在单输入系统中是  $n \times n$  方阵, 其秩的确定一般地要复杂些。由于矩阵  $Q_k$  与  $Q_k^T$  的积  $Q_k Q_k^T$  是方阵, 而它的非奇异性等价于  $Q_k$  的非奇异性, 所以在计算行比列少的矩阵的秩时, 有时可利用  $\text{Rank } Q_k = \text{Rank } Q_k Q_k^T$  的关系, 通过计算

$\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k^T$  的秩来确定  $\mathbf{Q}_k$  的秩，如上题可以这样计算：

$$\mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{Q}_k^T = \begin{bmatrix} 26 & 6 & 17 \\ 6 & 3 & 2 \\ 17 & 2 & 21 \end{bmatrix}$$

易知  $\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k^T$  非奇异，故  $\mathbf{Q}_k$  满秩，系统是完全能控的。

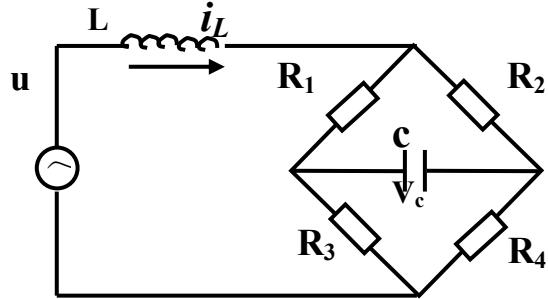


图 3.2 桥式电路

**例 3.7** 图 3.2 桥式电路中，若取电感  $L$  的电流  $i_L$  及电容  $C$  的电压  $v_c$  为状态变量，取  $i_L$  为输出变量，则系统方程为：

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right) & \frac{1}{L} \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) \\ \frac{1}{C} \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) & -\frac{1}{C} \left( \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

试判断其能控条件。

$$\text{解: } \mathbf{Q}_k = [\underline{b}, \underline{A}\underline{b}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L^2} \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right) \\ 0 & -\frac{1}{LC} \left( \frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \end{bmatrix}$$

当  $\frac{R_4}{R_3 + R_4} \neq \frac{R_2}{R_1 + R_2}$  即  $R_1 R_4 \neq R_2 R_3$  时  $\text{Rank } \mathbf{Q}_k = 2$  系统完全

能控，当  $R_1 R_4 = R_2 R_3$  时， $\text{Rank } \mathbf{Q}_k = 1$ ，系统为不完全能控。这是阻抗电桥的平衡条件，不论怎样加外部输入  $u$ ，使电容电压  $v_c$  变化都是不可能的。

LCD 2014年秋季

**例 3.8** 试判断如下系统的能控性:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{解: } Q_k = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 & * & * & * \\ 0 & 0 & 13 & * & * & * \\ 2 & 0 & 16 & * & * & * \end{bmatrix}$$

只要计算到第三列就足以判断到  $\text{Rank } Q_k = 3 = n$ , 故往下各列不必再计算了, 该系统是完全能控的。

(2) 系统  $\Sigma = (A, B)$  完全能控的充分必要条件是矩阵  $e^{At}B$  的行线性独立。

证明: 用反证法, 系统  $\Sigma = (A, B)$  能控, 但  $e^{At}B$  的行线性关联。

考察  $e^{At}B$  的行线性关联性, 既然关联, 则能找到非零  $\underline{\alpha}^T$  使得

$$\underline{\alpha}^T e^{At} B = 0$$

上式对  $t$  求导, 从一次导数一直到  $(n-1)$  次导数, 得

$$\underline{\alpha}^T e^{At} B = 0, \quad \underline{\alpha}^T e^{At} AB = 0, \dots, \quad \underline{\alpha}^T e^{At} A^{n-1} B = 0$$

也即  $\underline{\alpha}^T e^{At} [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = \underline{\alpha}^T e^{At} Q_k = 0$

设系统是状态完全能控的, 则  $Q_k$  满秩, 即导出

$$\underline{\alpha}^T e^{At} = 0$$

上式中  $t$  为任意值, 因此  $e^{At} \neq 0$ , 只有  $\underline{\alpha}^T = 0$ , 这表明  $e^{At}B$  行线性独立。

### 三、能控性 PBH 秩判据

能控性 PBH 判据由波波夫 (Popov) 和贝尔维奇 (Belevitch) 提出, 并由豪塔斯 (Hautus) 指出其广泛应用性。本判据用他们的姓氏首字母组成。该判据是根据  $A$  阵的每个特征值  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  判定能控性。

系统  $\Sigma(A, B)$  状态完全能控的充要条件是: 对于  $A$  阵的每个特征值  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  都有:

$$\text{rank } [\lambda_i I - A, B] = n$$

#### 四、输出能控判据

系统(3.7)式,使输出能控的充分必要条件是矩阵  
 $V_k = [CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B, D]$ 满秩,即

$$Rank V_k = Rank [CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B, D] = m \quad (3.15)$$

证明:因为 $\underline{y}_0 = C\underline{x} + D\underline{u}$ ,类似于(3.14)式可导出任意能控输出 $\underline{y}_0$ 的关系为:

$$\underline{y}_0 = [CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B, D] \begin{bmatrix} \underline{\beta}'_0 \\ \underline{\beta}'_1 \\ \vdots \\ \underline{\beta}'_{n-1} \\ \underline{u}_1 \\ \vdots \\ \underline{u}_r \end{bmatrix}$$

并可以类似能控判据二的证明,当且仅当

$$Rank [CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B, D] = m$$

时,系统是输出完全能控的。

**例3.9**已知系统

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} &= [1 \quad -1] \underline{x} + \underline{u} \end{aligned}$$

试判断其状态能控性和输出能控性。

$$Q_k = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad Rank Q_k = 1 < 2$$

说明此系统状态不完全能控。而

$$\begin{aligned} Rank V_k &= [CB, CAB, D] = [C[B \quad AB] \quad D] \\ &= \left[ [1 \quad -1] \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \quad 1 \right] = [-6 \quad 30 \quad 1] \\ Rank [-6 \quad 30 \quad 1] &= 1 \end{aligned}$$

表明系统是输出完全能控的。从本例可以说明输出能控和状态能控是不等价的。

LCD 2014年秋季

## 五、等价系统的能控性

前面已经讲到，用线性非奇异变换  $\underline{x}(t) = T \tilde{\underline{x}}(t)$  可以把系统 (3.7) 式变换成用下式表示的等价系统

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\underline{x}}} = \tilde{\underline{A}} \tilde{\underline{x}} + \tilde{\underline{B}} \underline{u} \\ \underline{y} = \tilde{\underline{C}} \tilde{\underline{x}} + \tilde{\underline{D}} \underline{u} \end{cases} \quad (3.16)$$

其中

$$\tilde{\underline{A}} = T^{-1} A T, \quad \tilde{\underline{B}} = T^{-1} B, \quad \tilde{\underline{C}} = C T, \quad \tilde{\underline{D}} = D$$

对此等价系统，可求出能控矩为：

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{Q}}_k &= [\tilde{\underline{B}}, \tilde{\underline{A}}\tilde{\underline{B}}, \dots, \tilde{\underline{A}}^{n-1}\tilde{\underline{B}}] \\ &= [T^{-1}B, T^{-1}AB, \dots, T^{-1}A^{n-1}B] = T^{-1}\underline{Q}_k \end{aligned} \quad (3.17)$$

由于  $T^{-1}$  是非奇异矩阵，所以  $\text{Rank } \tilde{\underline{Q}}_k = \text{Rank } \underline{Q}_k$ 。由此可得如下结论：

对于非奇异变换，系统的能控性保持不变。

### 3.1.3 线性连续时变系统的能控性判据

#### § 3.1.3 连续线性时变系统的能控判据

设连续线性时变系统为：

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A(t)\underline{x} + B(t)\underline{u} \\ \underline{y} = C(t)\underline{x} + D(t)\underline{u} \end{cases} \quad (3.18)$$

现讨论其能控性问题。

由于时变系统的系统矩阵  $A(t)$ ，控制矩阵  $B(t)$  和输出矩阵  $C(t)$  的元素是时间  $t$  的函数，所以不能象定常系统那样，由  $[A, B]$  对构成能控矩阵，然后检验其秩，而必须由有关的时变矩阵构成 **Gram** 矩阵，并由其非奇异性来作为判别的依据。

#### 一、能控性判据

(1) 系统  $\Sigma = (A(t), B(t))$  在  $[t_0, t_\alpha]$  上状态完全能控的充分必要条件是 **Gram** 矩阵。

$$W_k(t_0, t_\alpha) = \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_0, t) B(t) B^T(t) \Phi^T(t_0, t) dt \quad (3.19)$$

LCD 2014年秋季

为非奇异阵。

证明：先证充分性。 $(W_k(t_0, t_\alpha))$  非奇异，则系统一定完全能控

假定  $W_k(t_0, t_\alpha)$  是非奇异的，那么  $W_k^{-1}(t_0, t_\alpha)$  存在。这样，对任意  $\underline{x}(t_0)$  我们选择控制作用  $\underline{u}(t)$ ，如下式：

$$\underline{u}(t) = -B^T(t)\Phi^T(t_0, t)W_k^{-1}(t_0, t_\alpha)\underline{x}(t_0) \quad (3.20)$$

考察在它的作用下能否使  $\underline{x}(t_0)$  在  $[t_0, t_\alpha]$  内转移到原点。如果能，则说明存在 (3.20) 所给的  $\underline{u}(t)$ ，因而系统完全能控。

已知系统 (3.18) 式的解为

$$\underline{x}(t) = \Phi(t, t_0)\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)\underline{u}(\tau)d\tau$$

令  $t = t_\alpha$ ，并以 (3.20) 式代入上式，得

$$\begin{aligned} \underline{x}(t_\alpha) &= \Phi(t_\alpha, t_0)\underline{x}(t_0) - \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_\alpha, t)B(t)B^T(t)\cdot\Phi^T(t_0, t)W_k^{-1}(t_0, t_\alpha)\cdot\underline{x}(t_0)dt \\ &= \Phi(t_\alpha, t_0)\underline{x}(t_0) - \Phi(t_\alpha, t_0)\cdot\int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_0, t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t_0, t)dt W_k^{-1}(t_0, t_\alpha)\cdot\underline{x}(t_0) \\ &= \Phi(t_\alpha, t_0)\underline{x}(t_0) - \Phi(t_\alpha, t_0)W_k(t_0, t_\alpha)\cdot W_k^{-1}(t_0, t_\alpha)\underline{x}(t_0) \\ &= \Phi(t_\alpha, t_0)\underline{x}(t_0) - \Phi(t_\alpha, t_0)\underline{x}(t_0) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

可见，只要  $W_k(t_0, t_\alpha)$  非奇异，则系统完全能控，充分性得证。

再证必要性，即证系统若完全能控，则  $W_k(t_0, t_\alpha)$  必定是非奇异的。

用反证法证明，即假定系统完全能控而  $W_k(t_0, t_\alpha)$  却是奇异的。既然  $W_k(t_0, t_\alpha)$  奇异则必存在某非零向量  $\underline{x}(t_0)$ ，使得

$$\underline{x}^T(t_0)W_k(t_0, t_\alpha)\underline{x}(t_0) = 0$$

即有

$$\int_{t_0}^{t_\alpha} \underline{x}^T(t_0)\Phi(t_0, t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t_0, t)\underline{x}(t_0)dt = 0$$

亦即

$$\int_{t_0}^{t_\alpha} [B^T(t)\Phi^T(t_0, t)\underline{x}(t_0)]^T [B^T(t)\Phi^T(t_0, t)\underline{x}(t_0)]dt = 0$$

亦即

$$\int_{t_0}^{t_\alpha} \left\| \mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t) \underline{x}(t_0) \right\|^2 dt = 0$$

但  $\mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t)$  对  $t$  是连续的，故从上式，必有

$$\mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t) \underline{x}(t_0) = 0$$

又因系统已假定是能控的，因此上述  $\underline{x}(t_0)$  必为能控状态，即有

$$\underline{x}(t_0) = - \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_0, t) \mathbf{B}(\tau) \underline{u}(\tau) dt$$

那么

$$\begin{aligned} \|\underline{x}(t_0)\|^2 &= \underline{x}^T(t_0) \cdot \underline{x}(t_0) = \left[ - \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t) \underline{u}(t) dt \right]^T \underline{x}(t_0) \\ &= - \int_{t_0}^{t_\alpha} \underline{u}^T(t) \mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t) \underline{x}(t_0) dt = 0 \end{aligned}$$

说明  $\underline{x}(t_0)$  若为能控状态，那么它绝非任意的，而只能是  $\underline{x}(t_0) = 0$ 。这与假定是矛盾的，故  $W_k(t_0, t_\alpha)$  必定是非奇异的。必要性得证。

(2) 下面我们将进一步证明：*Gram* 矩阵  $W_k(t_0, t_\alpha)$  的非奇异等价于  $\Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t)$  行向量线性无关。即系统  $\Sigma = (A(t), B(t))$  状态完全能控的充分必要条件是矩阵  $\Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t)$  的行线性无关。

**证明：**由时变向量线性无关的判别定理可知，对矩阵

$$\mathbf{H}(t_0, t) = [\underline{h}_1(t_0, t), \underline{h}_2(t_0, t), \dots, \underline{h}_n(t_0, t)]$$

当且仅当由  $\mathbf{H}(t_0, t)$  构成的 *Gram* 矩阵

$$W(t_0, t_\alpha) = \int_{t_0}^{t_\alpha} \mathbf{H}^T(t_0, t) \mathbf{H}(t_0, t) dt$$

为非奇异时， $\underline{h}_i(t_0, t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 这些列向量是线性无关的。现在

$$\begin{aligned} W_k(t_0, t_\alpha) &= \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_\alpha} [\mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t)]^T [\mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t)] dt \end{aligned}$$

可知  $W_k(t_0, t_\alpha)$  的非奇等价于  $\mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t)$  这个矩阵的列向量线性无关，故  $\Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t)$  这个矩阵的行向量线性无关与  $W_k(t_0, t_\alpha)$  非奇等价。

在时不变系统中， $\Phi(t_0 - t) = e^{A(t_0 - t)}$ ，故  $W_k(t_0, t)$  的非奇异相当于  $e^{A(t_0 - t)} \mathbf{B}$  的行向量线性无关，根据式 (3.12)

$$e^{A(t_0-t)}B = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (t_0 - t) A^k B = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \alpha_0 I_r \\ \alpha_1 I_r \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} I_r \end{bmatrix}$$

故  $W_k(t_0, t)$  的非奇异等价于  $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$  行向量线性无关，即等价于  $\text{Rank } Q_k = n$ 。

综合以上分析，可知时变系统与时不变系统的能控判据实质是相同的，Gram 能控矩阵是  $[A, B]$  对能控矩阵的一般形式。

## 二、输出完全能控判据

系统  $\Sigma = (A(t), B(t), C(t))$  在  $[t_0, t_\alpha]$  上输出完全能控的充分必要条件是 Gram 矩阵。

$$V_k(t_0, t_\alpha) = \int_{t_0}^{t_\alpha} C(t_\alpha) \Phi(t_0, t) B(t) B^T(t) \Phi^T(t_0, t) C^T(t_\alpha) dt \quad (3.21)$$

非奇异。

这个判据的证明类似状态能控判据的证明。此处不再给出。

由 (3.21) 式可知， $V_k(t_0, t_\alpha)$  也可写成

$$V_k(t_0, t_\alpha) = C(t_\alpha) W_k(t_0, t_\alpha) C^T(t_\alpha)$$

若系统状态完全能控，则  $W_k(t_0, t_\alpha)$  为非奇异，这种情况下，当且仅当  $C(t_\alpha)$  为行线性无关时， $V_k(t_0, t_\alpha)$  为非奇异，因此可以说当且仅当  $C(t_\alpha)$  是行线性无关时，系统的状态完全能控等价于其在  $[t_0, t_\alpha]$  上的输出完全能控。

### § 3.1.4 线性离散系统的能控性

设线性离散系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = G(k) \underline{x}(k) + H(k) \underline{u}(k) \\ \underline{y}(k) = C(k) \underline{x}(k) + D(k) \underline{u}(k) \end{cases}$$

其中  $k = h, h+1, \dots$

## 一、离散系统能控性定义

离散时间系统的能控性概念和连续系统相类同。如果对任意初始

状态  $\underline{x}(h) = \underline{x}_0$ , 可找到一个无约束的控制  $\underline{u}(k)$ , 经过有限个采样周期  $L \geq k > h$ , 使得  $\underline{x}(L) = \underline{0}$ , 则称此状态是能控的, 如果状态空间  $X$  的每一个有限状态都是能控的, 则称系统是完全能控的, 当系统是完全能控时, 必然可以在有限时间  $(L-h)T$  内, 将状态空间  $X$  的任一状态引导到原点。

和能控性相对应的能达性指的是, 在有限时间  $(L-h)T$  内, 将  $\underline{x}(h) = \underline{0}$  引导到状态空间  $X$  中的任意状态  $\underline{x}(L) = \underline{x}_L$ , 如果系统是完全能达的, 则使  $\underline{x}(h)$  由零引向  $\underline{x}_L$  的  $\underline{u}(k)$  必是存在的, 而且这个过程可以在有限时间内完成。

对离散时间系统, 其能控性和能达性之间的等价是有条件的, 条件如下:

对离散时间系统  $\Sigma = (G(k), H(k))$ , 当且仅当  $\Phi(L, h)$  是非奇异时, 其能控和能达性是等价的。

证明: 由  $\Sigma = (G(k), H(k))$  的能控性, 得

$$\underline{0} = \Phi(L, h)\underline{x}_0 + \sum_{k=h}^{L-1} \Phi(L, k+1)H(k)\underline{u}(k)$$

即有  $\Phi(L, h)\underline{x}_0 = -\sum_{k=h}^{L-1} \Phi(L, k+1)H(k)\underline{u}(k)$  (3.22)

而对这同一  $\underline{u}(k)$ , 可导出能达性的关系式, 为

$$\underline{x}_L = \sum_{k=h}^{L-1} \Phi(L, k+1)H(k)\underline{u}(k) \quad (3.23)$$

比较 (3.22), (3.23) 两式, 可得到

$$-\Phi(L, h)\underline{x}_0 = \underline{x}_L \quad (3.24)$$

上式表明, 当且仅当  $\Phi(L, h)$  为非奇异时, 才有  $\underline{x}_0 \Leftrightarrow \underline{x}_L$  即能控性和能达性是等价的。

**推论 1** 如果  $\Sigma = (G(k), H(k))$  是连续系统  $\Sigma = (A(t), B(t))$  的离散化系统, 则其能控性和能达性必是等价的。这是因为, 在这种情况下, 有

$$\Phi(L, h) = \Phi(LT, hT) \quad (LT = t_\alpha, hT = t_0)$$

而  $\Phi(t_\alpha, t_0)$  必满秩，所以  $\Phi(L, h)$  满秩。从而由式 (3.24) 可知其能控性和能达性等价。

**推论 2** 对于线性离散定常系统  $\underline{x}(k+1) = G\underline{x}(k) + H\underline{u}(k)$  其能控性和能达性互为等价的充分必要条件是系统矩阵  $G$  为非奇异。

## 二、能控性判据

离散时间系统的能控性判据和连续时间系统能控性判据有很多类似的形式，可不加证明而容易理解。

对于时变系统有下列判据：

(1) 离散时间的线性时变系统  $\Sigma = (G(k), H(k))$  在区间  $[hT, LT]$  上状态完全能控的充分必要条件是 **Gram** 矩阵

$$W_k(h, L) = \sum_{k=h}^{L-1} \Phi(h, k+1) H(k) H^T(k) \Phi^T(h, k+1) \quad (3.25)$$

为非奇异。

(2)  $W_k(h, l)$  的非奇异等价于  $\Phi(h, k+1) H(k) \quad (k=h, h+1, \dots, L-1)$  的行线性独立。即  $\Sigma = (G(k), H(k))$  在区间  $[hT, LT]$  上状态完全能控的充分必要条件是矩阵  $\Phi(h, k+1) H(k) \quad (k=h, h+1, \dots, L-1)$ ，行线性无关。

(3) 离散时间线性时变系统， $\Sigma = (G(k), H(k), C(k))$ ，在区间  $[hT, LT]$  上输出完全能控的充分必要条件是 **Gram** 矩阵

$$V_k(h, L) = \sum_{k=h}^{L-1} C(k) \Phi(h, k+1) H(k) H^T(k) \Phi^T(h, k+1) C^T(k) \quad (3.26)$$

为非奇异。

对线性定常系统，可以看作时变系统的特例，得到下面相应的结果。

(1) 离散时间线性时不变系统  $\Sigma(G, H)$  状态完全能控的充分必要条件，是矩阵

$$Q_k = [H, GH, \dots, G^{n-1}H]$$

满秩，即

$$\text{Rank } Q_k = n \quad .$$

(2)  $\Sigma(G, H)$  状态完全能控的充分必要条件是  $G^k H$  ( $k=0,1,2,\dots,L-1$ ) 的行线性独立。

(3) 离散时间的线性时不变系统  $\Sigma(G, H, C, D)$  输出完全能控的充分必要条件是矩阵

$$V_k = [CH, CGH, \dots, CG^{n-1}H, D]$$

满秩，即

$$\text{Rank } V_k = m \quad .$$

**例 3.10** 已知离散系统

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \end{bmatrix}$$

试判断系统的能控性。

$$\text{因为 } H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, GH = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, G^2H = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

所以

$$Q_k = [H, CH, G^2H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 4 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

显然  $Q_k$  满秩，系统是完全能控的。

**例 3.11** 已知系统

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

此系统能控否？若能控则求阶梯控制  $u(0), u(1), u(2)$  在三个采样周期内使  $\underline{x}(3) = \underline{0}$ 。

解：

$$Q_k = [\underline{h}, G\underline{h}, G^2 \underline{h}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{Rank } Q_k = 3$$

所以此系统一定能控。

又因为系统状态方程的解为：

$$\underline{x}(k) = G^k \underline{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} \underline{h} u(j)$$

既然系统是能控的，则应在  $k=3$  时，从上式解得  $u(0), u(1), u(2)$  使  $\underline{x}(3) = \underline{0}$ ，从而有

$$G^2 \underline{h} u(0) + G^1 \underline{h} u(1) + \underline{h} u(2) = -G^3 \underline{x}(0)$$

即：

$$[G^2 \underline{h}, G \underline{h}, \underline{h}] \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} = -G^3 \underline{x}(0), \quad G^3 \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

代入数值可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ -8 \end{bmatrix}$$

这就找到了  $u(0), u(1), u(2)$ ，使  $\underline{x}(0)$  在第 3 步上转移到零。

## § 3.2 能观测性

### § 3.2.1 能观测性概念

能观测性涉及到线性系统的状态对输出的影响程度。它研究这样的可能性，即通过对输出量的有限时间的量测，能否把系统的状态识别出来。为了说明能观测性概念，本节也从具体例子入手说明系统的状态确实存在可观测性问题，从而引出能观测性定义。

#### 一、能观测性例子

LCD 2014年秋季

例 3.12 图 3.3a 电路的状态方程为:

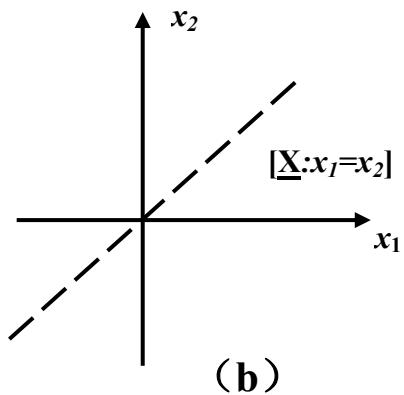
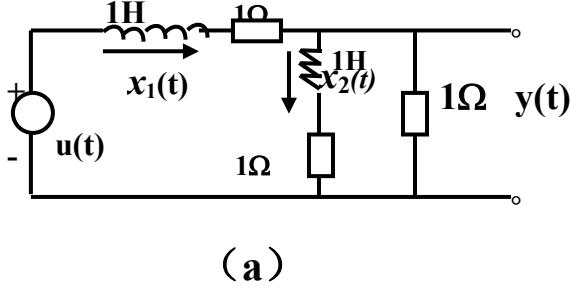


图 3.3

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad -1] \underline{x} \end{cases}$$

此系统的矩阵指数是

$$e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} + e^{-3t} \end{bmatrix}$$

设  $u(t) = 0$ ，那么输出电压仅取决于初始状态  $\underline{x}(0)$ ，且为

$$\begin{aligned} y(t) &= e^T e^{At} \underline{x}(0) = [1 \quad -1] \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} + e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\ &= [e^{-3t} \quad -e^{-3t}] \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = [x_1(0) \quad -x_2(0)] e^{-3t} \end{aligned}$$

从上式可以看出，不论初始状态  $\underline{x}(0)$  等于什么数值，输出  $y(t)$  仅仅取决于差值  $x_1(0) - x_2(0)$ 。如果  $x_1(0) = x_2(0)$ ，则  $\underline{x}(0)$  属于图 3.3 (b) 所示的子空间，输出恒等于零。因为  $x_1(0) = x_2(0)$  的初始状态在输出不产生任何响应，则称系统是（部分地）不能观的，而且称  $\{x : x_1 = x_2\}$  为不能观状态子空间。

从电路拓扑来看。这种情况是明显的，两个感性支路具有相同的时间常数，如果  $u(t) = 0, x_1(0) = x_2(0)$ ，那么对所有时间  $t$  都有  $x_1(t) = x_2(t)$ 。因为输出  $y(t)$  是这两个电感电流的差值，所以它恒等于零。

下面研究一般的系统:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A(t)\underline{x} + B(t)\underline{u} \\ \underline{y} = C(t)\underline{x} \end{cases} \quad (3.27)$$

式中  $\underline{x}$ 、 $\underline{u}$ 、 $\underline{y}$  分别为  $n \times 1$ 、 $r \times 1$ 、 $m \times 1$  维向量

## 二、能观性的定义

如果线性系统 (3.27) 式对  $t_0$  时刻存在时刻  $t_\alpha > t_0$ ，根据在有限时间区间  $[t_0, t_\alpha]$  量测到的输出  $\underline{y}(t)$ ，能够唯一确定系统在  $t_0$  时刻的初始状态  $\underline{x}_0$ ，则称该状态  $\underline{x}_0$  在  $[t_0, t_\alpha]$  上是能观的。若系统在  $t_0$  时刻的所有初始状态都是能观的，则称状态是完全能观的，简称系统是能观的。和能达性对应于能控性一样，这里也有对应于能观测性的能重构性(Reconstructability)概念。上述定义中，如果根据  $[t_0, t_\alpha]$  上的观测值  $\underline{y}(t)$ ，能够唯一地确定系统在  $t_\alpha$  时刻的任意末态  $\underline{x}_\alpha$ ，则称系统在  $[t_0, t_\alpha]$  上是状态完全能重构的。

对 (3.27) 式求状态方程的解，得

$$\underline{x}(t) = \Phi(t, t_0)\underline{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)\underline{u}(\tau)d\tau \quad (3.28)$$

令  $t = t_\alpha$ ，则得

$$\underline{x}(t_\alpha) = \Phi(t_\alpha, t_0)\underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_\alpha, \tau)B(\tau)\underline{u}(\tau)d\tau \quad (3.29)$$

其中， $\underline{u}(\tau)$  是已知的绝对可积函数，上式中  $\Phi(t_\alpha, t_0)$  为非奇异，所以若  $\underline{x}_0$  可由  $[t_0, t_\alpha]$  上  $\underline{y}(t)$  的量测唯一定出，则也必能唯一定出  $\underline{x}(t_\alpha)$ ，反之，若  $\underline{x}(t_\alpha)$  可由  $[t_0, t_\alpha]$  上  $\underline{y}(t)$  的量测唯一定出，则同样必能唯一定出  $\underline{x}_0$ ，这表明：连续时间线性系统，其能观性，和能重构性是完全等价的。

## 三、能检测性

系统的不能观模态都是稳定的，则称系统是能检测的(detectable)。

### § 3.2.2 连续线性系统的能观测性判据

能观测性判据与能控性判据的推导有类似之处，以后我们还将说明能控性与能观测性是互为对偶的。因此掌握了能控性判据，就有助于掌握能观测性判据。

由于能观测性所表示的是输出  $\underline{y}(t)$  反映向量  $\underline{x}(t)$  的能力，与控制作用无直接关系，所以在分析能观测性问题时，可以不考虑控制作用的存在，只需从齐次状态方程和输出方程出发，即

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A(t)\underline{x} \\ \underline{y} = C(t)\underline{x} \end{cases} \quad (3.30)$$

#### 一、线性时变系统的能观性判据

(1) 系统  $\Sigma = (A(t), C(t))$  在  $(t_0, t_\alpha)$  区间上状态完全能观的充分必要条件为 Gram 阵矩阵

$$W_g(t_0, t_\alpha) = \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt$$

为非奇异的。

证明：首先证明充分性 ( $W_g$  非奇异  $\Rightarrow$  系统一定能观)

对于任意给定的  $\underline{x}_0$ ，(3.30) 式的解为：

$$\underline{x}(t) = \Phi(t, t_0) \underline{x}_0$$

所以  $\underline{y}(t) = C(t)\underline{x}(t) = C(t)\Phi(t, t_0)\underline{x}_0$

将上式左乘  $\Phi^T(t, t_0)C^T(t)$ ，然后在  $[t_0, t_\alpha]$  上进行积分得：

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt \right] \underline{x}_0 \\ &= \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) \underline{y}(t) dt \end{aligned}$$

即为

$$W_g(t_0, t_\alpha) \underline{x}_0 = \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) \underline{y}(t) dt$$

上式表明，仅当  $W_g(t_0, t_\alpha)$  为非奇异时， $\underline{x}_0$  可以有唯一解，即可根据

$[t_0, t_\alpha]$  上的量测量  $\underline{y}(t)$ ，唯一地确定出  $\underline{x}_0$ 。也就是说系统在  $[t_0, t_\alpha]$

上状态完全能观的。于是充分性得证。

证必要性(若系统能观, 则  $W_g(t_0, t_\alpha)$  必非奇异) 若系统在  $[t_0, t_\alpha]$  上状态完全能观, 但反设  $W_g(t_0, t_\alpha)$  是奇异的, 那么必存在非零  $\underline{x}_0$ , 使得下式成立, 即

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_\alpha} \underline{y}^T(t) \underline{y}(t) dt &= \int_{t_0}^{t_\alpha} \underline{x}_0^T \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) \underline{x}_0 dt \\ &= \underline{x}_0^T \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt \underline{x}_0 \\ &= \underline{x}_0^T W_g(t_0, t_\alpha) \underline{x}_0 \equiv 0 \end{aligned}$$

上式中  $\underline{y}(t)$  是  $t$  的连续函数, 所以有

$$\underline{y}^T(t) \underline{y}(t) = \|\underline{y}(t)\|^2 \equiv 0$$

也即  $\underline{y}(t) = C(t) \Phi(t, t_0) \underline{x}_0 \equiv 0$

它表明  $\underline{x}_0$  为不能观测的状态, 而这和系统完全能观的假定相矛盾。故  $W_g(t_0, t_\alpha)$  是非奇异的, 必要性得证。

(2) Gram 矩阵  $W_g(t_0, t_\alpha)$  的非奇异等价于  $C(t) \Phi(t, t_0)$  的列线性独立, 即  $\Sigma = (A(t), C(t))$  状态完全能观的充分必要条件是矩阵

$$C(t) \Phi(t, t_0)$$

的列线性无关。

证明: 因为

$$\begin{aligned} W_g(t_0, t_\alpha) &= \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_\alpha} [C(t) \Phi(t, t_0)]^T [C(t) \Phi(t, t_0)] dt \end{aligned}$$

这样根据时变向量线性无关性判别定理, 即知  $W_g(t_0, t_\alpha)$  的非奇异等价于  $C(t) \Phi(t, t_0)$  的列线性独立。

## 二、定常系统的能观性判据

### (1) 状态能观性判据形式之一(模态判据)

1) 设系统  $\Sigma = (A, C)$  具有两两相异的特征值, 则其状态完全能观

的充分必要条件是系统的对角标准形式

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tilde{\underline{x}} \\ \underline{y} &= \tilde{\underline{C}} \cdot \tilde{\underline{x}}\end{aligned}\quad (3.31)$$

中， $\tilde{\underline{C}}$  不包含元素全为零的列。

证明：将 (3.31) 式展开。有

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \lambda_1 \tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \lambda_2 \tilde{x}_2, \\ \dots \\ \dot{\tilde{x}}_n = \lambda_n \tilde{x}_n \end{cases}, \quad \tilde{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_{10} \\ e^{\lambda_2 t} \tilde{x}_{20} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \tilde{x}_{n0} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\begin{cases} y_1 = \tilde{c}_{11} \tilde{x}_1 + \tilde{c}_{12} \tilde{x}_2 + \dots + \tilde{c}_{1n} \tilde{x}_n \\ y_2 = \tilde{c}_{21} \tilde{x}_1 + \tilde{c}_{22} \tilde{x}_2 + \dots + \tilde{c}_{2n} \tilde{x}_n \\ \dots \\ y_m = \tilde{c}_{m1} \tilde{x}_1 + \tilde{c}_{m2} \tilde{x}_2 + \dots + \tilde{c}_{mn} \tilde{x}_n \end{cases} \quad (3.33)$$

将 (3.32) 式代入 (3.33) 并写成矩阵向量形式

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \dots & \tilde{c}_{1n} \\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} & \dots & \tilde{c}_{2n} \\ \vdots & & & \\ \tilde{c}_{m1} & \tilde{c}_{m2} & \dots & \tilde{c}_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_{10} \\ e^{\lambda_2 t} \tilde{x}_{20} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \tilde{x}_{n0} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

上述方程中，由于没有状态变量之间的耦合，因此， $\tilde{x}_i (i = 1, 2, \dots, n)$  能观的充要条件是不同时有  $\tilde{c}_{1i} = 0, \tilde{c}_{2i} = 0, \dots, \tilde{c}_{mi} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n)$

例 3.13 给定系统

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} \\ y = [0 \quad 4 \quad 5] \underline{x} \end{array} \right.$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} \\ y = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \end{array} \right.$$

显然，a) 是状态不完全能观的。b) 是状态完全能观的。

### 例 3.14 已知系统

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}, \quad y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}$$

试判断其能观性。

解：首先将其化为对角规范型。

由例 3.3 可知  $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 1$ ，变换矩阵为：

$$T = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{所以} \quad CT = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故原系统的对角标准型为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{\underline{x}}} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\underline{x}} \\ y = [3 \quad 0] \tilde{\underline{x}} \end{array} \right.$$

可见，此系统不能完全能观。

2) 设系统  $\Sigma = (A, C)$  具有重特征值  $\lambda_1(m_1 \text{ 重}), \lambda_2(m_2 \text{ 重}), \dots, \lambda_k(m_k \text{ 重})$ ，

$$\sum_{i=1}^k m_i = n, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j)$$

则系统状态完全能观的充分必要条件，是其经非奇异变换后的约当标

## 准型

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \mathbf{0} \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & J_K \end{bmatrix} \tilde{x} \\ y = \tilde{C} \tilde{x} \end{array} \right. \quad (3.35)$$

中  $\tilde{C}$  的和每个约当块  $J_i, (i = 1, 2, \dots, k)$  首行相对应的所有那些列, 其元不全为零。

证明方法和能控性判据形式之一中的(2)判据证明方法相类同, 这里不再重复, 仅以三阶系统为例说明。设某三阶系统经非奇异变换后的 **Jordan** 标准型如下:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \tilde{x}, \quad y = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{13} \\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} & \tilde{c}_{23} \\ \tilde{c}_{31} & \tilde{c}_{32} & \tilde{c}_{33} \end{bmatrix} \tilde{x}$$

此时状态方程的解为:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_{10} + te^{\lambda_1 t} \tilde{x}_{20} + \frac{1}{2!} t^2 e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_{30} \\ e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_{20} + te^{\lambda_1 t} \tilde{x}_{30} \\ e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_{30} \end{bmatrix}$$

从而

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{13} \\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} & \tilde{c}_{23} \\ \tilde{c}_{31} & \tilde{c}_{32} & \tilde{c}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_{10} + te^{\lambda_1 t} \tilde{x}_{20} + \frac{1}{2!} t^2 e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_{30} \\ e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_{20} + te^{\lambda_1 t} \tilde{x}_{30} \\ e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_{30} \end{bmatrix}$$

由上式可知，当且仅当输出矩阵  $\tilde{C}$  中第一列元素不全为零时， $\underline{y}(t)$  中总包含着系统的全部自由分量而为完全能观。

**例 3.15** 已知系统如下：

$$a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} \\ \quad \quad \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$$

$$b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} \\ \quad \quad \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

显然，a) 是状态完全能观的。

b) 是状态不完全能观的。

3) 当等特征值有多个约当块时，系统状态完全能观的充分必要条件是与系数矩阵 A 中所有相等特征值的约当块首行相对应的 C 中那些列彼此线性无关。

### (2) 状态能观性判据形式之二（代数判据）

1) 系统  $\Sigma(A, C)$  状态完全能观测的充分必要条件是其能观性矩阵

$$Q_g = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

满秩，即

$$\text{Rank } Q_g = n \quad (3.37)$$

证明：从式 (3.30) 解得：

$$\underline{x}(t) = \Phi(t - t_0) \underline{x}_0$$

从式 (3.12) 有

$$\begin{aligned} \Phi(t - t_0) &= e^{A(t-t_0)} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \cdots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)A^k \end{aligned}$$

故

$$\underline{y}(t) = C \underline{x}(t) = C \Phi(t - t_0) \underline{x}_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) CA^k \underline{x}_0$$

或

$$\underline{y}(t) = [\alpha_0(t)I, \alpha_1(t)I, \cdots, \alpha_{n-1}(t)I] \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \underline{x}_0 \quad (3.38)$$

因此，根据在时间区  $[t_0, t_\alpha]$  上量测到的  $\underline{y}(t)$ ，要能从式 (3.38) 唯一地确定  $\underline{x}_0$ ，即完全能观的充分必要条件是  $nm \times n$  矩阵。

$$Q_g = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

的秩为  $n$ 。

**例 3.16** 在例 3.7 电桥电路中，若求出能观测矩阵为：

LCD 2014年秋季

$$Q_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right) & \frac{1}{L} \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) \end{bmatrix}$$

当  $R_1 R_4 \neq R_2 R_3$  时，系统是完全能观的。在电桥平衡条件下  $R_1 R_4 = R_2 R_3$  成立的情况下，则  $\text{Rank } Q_g = 1$ ，系统不完全能观。

### 例 3.17 已知系统

a)  $\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} = [1 \quad -1] \underline{x} \end{cases}$

b)  $\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \end{cases}$

试判断上述两个系统的能观性。

解：对上述两个系统分别计算如下：

a)  $\underline{C}^T A = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [-5 \quad 5]$

$$Q_g = \begin{bmatrix} \underline{C}^T \\ \underline{C}^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{Rank } Q_g = 1 < n = 2$$

所以此系统不完全能观。

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

b)  $Q_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{Rank } Q_g = 2 = n$

所以此系统完全能观。

2) 系统  $\Sigma = (A, C)$  完全能观的充分必要条件是矩阵  $Ce^{At}$  的列线性独立。

证明：本判据可以从相应的时变系统的能观判据直接推出，也可以用下面方法来证明。

考察  $Ce^{At}$  的列线性关联性。设能找到非零  $\underline{\gamma}$ , 使得

$$C \cdot e^{At} \cdot \underline{\gamma} = \mathbf{0}$$

将上式对  $t$  求导, 直到  $(n - 1)$  次, 可得

$$\begin{cases} Ce^{At} \underline{\gamma} = \mathbf{0} \\ CAe^{At} \underline{\gamma} = \mathbf{0} \\ \vdots \\ CA^{n-1}e^{At} \underline{\gamma} = \mathbf{0} \end{cases}$$

即  $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} e^{At} \underline{\gamma} = Q_g e^{At} \underline{\gamma} = \mathbf{0}$

现设系统是完全能观的, 所以  $Q_g$  满秩, 故上式相应于

$$e^{At} \underline{\gamma} = \mathbf{0}$$

上式中,  $t$  为任意的, 因此  $e^{At} \neq \mathbf{0}$ 。所以要使上式成立就只有  $\underline{\gamma} = \mathbf{0}$ ,

这表明  $Ce^{At}$  是列线性独立的, 定理得证。

### 三、能观测性 PBH 秩判据

系统  $\Sigma(A, C)$  完全能观测的充分必要条件为

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ \lambda_i I - A \end{bmatrix} = n, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

### 四、等价系统的能观性

前面我们已经讲到等价系统的能控性, 这里进一步讨论等价系统的能观性。

设系统为:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A \underline{x} \\ \underline{y} = C \underline{x} \end{cases}$$

对上式  $\underline{x}$  作线性非奇异变换, 令  $\underline{x}(t) = T \tilde{\underline{x}}(t)$

则有

$$\begin{cases} \tilde{\underline{x}} = \tilde{\underline{A}} \tilde{\underline{x}} \\ \underline{y} = \tilde{\underline{C}} \tilde{\underline{x}} \end{cases}$$

其中  $\tilde{\underline{A}} = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T}$ ,  $\tilde{\underline{C}} = \underline{C} \underline{T}$ 。

对此等价系统, 可求出其能观性矩阵为

$$\tilde{\underline{Q}}_g = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{C}} \\ \tilde{\underline{C}} \tilde{\underline{A}} \\ \vdots \\ \tilde{\underline{C}} \tilde{\underline{A}}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C} \underline{T} \\ \underline{C} \underline{A} \underline{T} \\ \vdots \\ \underline{C} \underline{A}^{n-1} \underline{T} \end{bmatrix} = \underline{Q}_g \underline{T}$$

由于  $\underline{T}$  为非奇异矩阵, 所以  $\text{Rank } \tilde{\underline{Q}}_g = \text{Rank } \underline{Q}_g$ , 由此可得如下结论:

对于非奇异变换, 系统的能观性保持不变。

### § 3.2.3 线性离散系统的能观性

设线性离散系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \underline{G}(k) \underline{x}(k) \\ \underline{y}(k) = \underline{C}(k) \underline{x}(k) \end{cases} \quad (3.39)$$

其中,  $k = h, h+1, \dots$

#### 一、离散系统能观性定义

离散时间系统的能观性概念是连续时间系统中相应概念的推广。

如果根据有限个采样周期内的量测值  $\underline{y}(k), (k = h, h+1, \dots, L)$ , 可以唯一地确定出系统的任意初始状态  $\underline{x}_0$ , 则称  $\underline{x}_0$  为能观测状态, 而系统在  $[t_0, t_\alpha]$  上叫做完全能观的。能重构性是和能观性对应的另一概念, 它指的是, 根据有限个采样周期内的量测值  $\underline{y}(k)$ , 来确定  $t = LT$  时刻的状态  $\underline{x}_L$ 。如果系统是完全能重构的, 则根据  $\underline{y}(k), (k = h, h+1, \dots, L)$  可以唯一地确定出  $\underline{x}_L$ , 而且  $\underline{x}_L$  可以是属于

状态空间中的任意的有限点。

对离散时间系统，其能观性和能重构性之间的等价性，也是有条件的，条件如下：

对离散时间系统  $\Sigma = (\mathbf{G}(k), \mathbf{C}(k))$ ，当且仅当  $\Phi(L, h)$  是非奇异时，其能观性和能重构性是等价的。这里不作证明。仅介绍下面两个推论。

**推论 1：**如果  $\Sigma = (\mathbf{G}(k), \mathbf{C}(k))$  是连续时间系统  $\Sigma = (\mathbf{A}(t), \mathbf{C}(t))$  的离散化系统，其能观性和能重构性必是等价的。

**推论 2：**对一般离散时间系统  $\Sigma = (\mathbf{G}(k), \mathbf{C}(k))$ ，如果  $\Phi(L, h)$  是降秩的，则当系统在  $[hT, LT]$  上完全能观时，必在同一区间上完全能重构；而当系统在  $[hT, LT]$  上完全能重构时，将不能保证在同一区间上完全能观。

## 二、能观性判据

离散时间系统的能观性判据和连续系统的能观性判据也有很类似的形式，下面不加证明而列出其判据。

对于时变系统有下列判据

(1) 离散时间线性时变系统  $\Sigma = (\mathbf{G}(k), \mathbf{C}(k))$  在区间  $[hT, LT]$  上状态完全能观的充分必要条件是 **Gram** 矩阵。

$$W_g(h, l) = \sum_{k=h}^L \Phi^T(k, h) \mathbf{C}^T(k) \cdot \mathbf{C}(k) \Phi(k, h) \quad (3.40)$$

为非奇异的。

(2)  $W_g(h, l)$  的非奇异等价于  $\mathbf{C}(k)\Phi(k, h)$ , ( $k = h, h+1, \dots, L$ ) 的列线性独立，即  $\Sigma = (\mathbf{G}(k), \mathbf{C}(k))$  在区间  $[hT, LT]$  上状态完全能观的充分必要条件是矩阵  $\mathbf{C}(k)\Phi(k, h)$ , ( $k = h, h+1, \dots, L$ ) 列线性无关。

对于定常系统有下列判据。

(1) 离散时间的线性时不变系统  $\Sigma = (\mathbf{G}, \mathbf{C})$  状态完全能观的充分必要条件，是其能观性矩阵

$$Q_g = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

满秩，即  $\text{Rank } Q_g = n$

(2)  $\Sigma = (G, C)$  状态完全能观的充分必要条件，是  
 $CG^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, L)$  的列线性独立。

### § 3.3 对偶性原理

从前面各节的讨论中可以看到，能控性和能观性无论是在概念上还是在判据的形式上都是很相似的。这种内在的联系，即对偶性原理，是由 **Kalman** 提出的。对偶性原理不但揭示了控制系统的这两个基本特性即能控制和能观性之间的对偶关系，而且指明了控制理论的两大基本问题——控制问题和估计问题之间的内在联系。

#### 一、能控制和能观性间的对偶现象

比较能控性和能观性判据条件，容易发现一个有趣的现象，就是它们在数学形式上的对偶性。以连续时间系统为例，列表如下：

表 3.1

完全能控条件	完全能观条件
$W_k(t_0, t_\alpha) =$ $\int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(\tau, t_0) d\tau$ 满秩	$W_g(t_0, t_\alpha) =$ $\int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau$ 满秩
$\Phi(t_0, t) B(t)$ 行线性独立	$C(t) \Phi(t, t_0)$ 列线性独立
$Q_k = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ 满秩	$Q_g = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ 满秩

$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ 时 B 无全零的行	$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ 时 C 无全零的列
$A = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & J_k \end{bmatrix}$ 时 ( $J_i$ 均为 <b>Jordan</b> 块 ) B 和每个 <b>Jordan</b> 块 $J_j$ 的最后一行相应的所有那些行的元素不全为零。	$A = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & J_k \end{bmatrix}$ 时 ( $J_i$ 均为 <b>Jordan</b> 块 ) C 和每个 <b>Jordan</b> 块 $J_i$ 首行相对应的所有那些列，其元素不全为零。

## 二、对偶性原理

对偶性原理是这样的，有两个系统，一个系统  $\Sigma_1$  为

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_1 = A_1 \underline{x}_1 + B_1 \underline{u}_1 \\ \underline{y}_1 = C_1 \underline{x}_1 \end{cases} \quad (3.42)$$

另一个系统  $\Sigma_2$  为

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_2 = A_2 \underline{x}_2 + B_2 \underline{u}_2 \\ \underline{y}_2 = C_2 \underline{x}_2 \end{cases} \quad (3.43)$$

若满足条件，

$$A_2 = A_1^T, B_2 = C_1^T, C_2 = B_1^T \quad (3.44)$$

就称  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  是互为对偶的，式中

$\underline{x}_1, \underline{x}_2$  —— n 维状态量，

$\underline{u}_1, \underline{u}_2$  —— 各为  $r \times 1$  和  $m \times 1$  控制向量。

$\underline{y}_1, \underline{y}_2$  —— 各为  $m \times 1$  和  $r \times 1$  输出向量

$A_1, A_2$  ——  $n \times n$  系统矩阵

$B_1, B_2$  —— 各为  $n \times r$  与  $n \times m$  控制矩阵

$C_1, C_2$  —— 各为  $m \times n$  与  $r \times n$  输出矩阵

如此，则  $\Sigma_1$  的能控性等价于  $\Sigma_2$  的能观性，而  $\Sigma_1$  的能观性等价于  $\Sigma_2$  的能控性，换言之，若  $\Sigma_1$  是状态完能控的（完全能观的）则  $\Sigma_2$  就是状态

完全能观的（状态完全能控）。

证明：对  $\Sigma_2$  而言，若  $n \times m$   $n$  能控性矩阵

$$\mathcal{Q}_{k_2} = [\mathbf{B}_2, \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{A}_2^{n-1} \mathbf{B}_2]$$

的秩为  $n$ ，而为状态完全能控的，将 (3.44) 式代入上式，有

$$\mathcal{Q}_{k_2} = [\mathbf{C}_1^T, \mathbf{A}_1^T \mathbf{C}_1^T, \dots, (\mathbf{A}_1^T)^{n-1} \mathbf{C}_1^T] = \mathcal{Q}_{g_1}^T$$

这说明  $\Sigma_1$  的能观性矩阵  $\mathcal{Q}_{g_1}$  的秩也为  $n$ ，所以  $\Sigma_1$  为完全能观的。

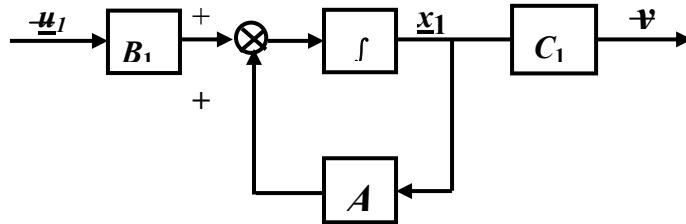
同理有

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^T_{g_2} &= [\mathbf{C}_2^T, \mathbf{A}_2^T \mathbf{C}_2^T, \dots, (\mathbf{A}_2^T)^{n-1} \mathbf{C}_2^T] \\ &= [\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}_1^{n-1} \mathbf{B}_1] = \mathcal{Q}_{k_1}\end{aligned}$$

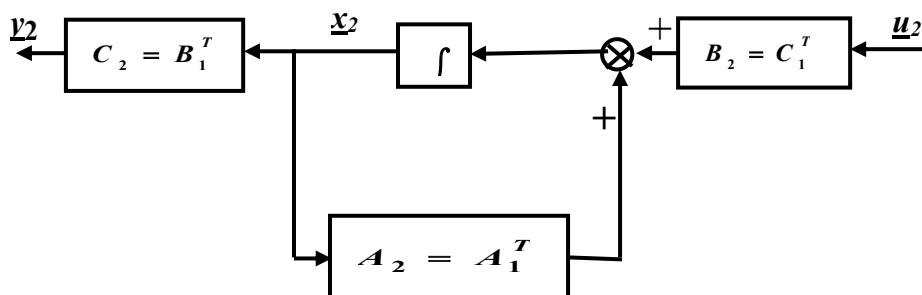
即若  $\Sigma_2$  的  $\mathcal{Q}_{g_2}$  满秩而为完全能观时， $\Sigma_1$  的  $\mathcal{Q}_{k_1}$  亦满秩而状态完全能控的。

### 三、对偶系统的方块图

$\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  的方块图如下



$\Sigma_1$  方块图



$\Sigma_2$  方块图

图 3.4

比较两图可知：某系统的对偶系统，意味着输入端与输出端的互换，信号传递的反向，信号的引出点和信号的综合点的互换以及对应矩阵（系数阵，控制阵，输出阵）的互为转置，

#### 四、对偶系统的传递函数阵

下面再从传递函数矩阵来看对偶系统的关系。

$$\begin{aligned}W_1(s) &= C_1(SI - A_1)^{-1} B_1 \\W_2(s) &= C_2(SI - A_2)^{-1} B_2 = B_1^T (SI - A_1^T)^{-1} C_1^T \\&= [C_1(SI - A_1)^{-1} B_1]^T = W_1^T(s)\end{aligned}$$

可见对偶系统的传递函数矩阵是互为转置。

#### 五、对偶系统的特征方程及特征值

很容易推出，互为对偶的系统具有相同的特征方程和相同的特征值，即

$$|SI - A_1| = |SI - A_2|$$

因为  $|SI - A_2| = |SI - A_1^T| = |SI - A_1|$

从以上分析可以清楚地看到，一个系统的能观性问题和其对偶系统的能控性问题等价；系统的能控性问题和对偶系统的能观性问题等价。所以系统的能观性问题可以通过能控性问题的解决而解决，系统的能控性问题，因能观性问题的解决而解决。这在控制理论的研究上具有重要意义。它找到了控制问题和观测问题间的内在联系。这使得系统状态的观测、估计等问题和系统的控制问题可以相互转化，例如，最优控制问题和最优估计问题就有内在的联系，它们可以相互借鉴。

### § 3.4 常系数系统的状态空间结构

#### 一、能控和能观子空间

为了说明这一概念，先看一个例子。

**例 3.18** 已知系统

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix} \\ y = [0 \ 1 \ 1] \underline{x} \end{array} \right.$$

列出方程并解出：

$$\begin{cases} x_1 = x_{10} e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(\tau) d\tau \\ x_2 = x_{20} e^{-2t} \\ x_3 = x_{30} e^{-3t} + \int_0^t e^{-3(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

而  $y = x_{20} e^{-2t} + x_{30} e^{-3t} + \int_0^t e^{-3(t-\tau)} u(\tau) \cdot d\tau$

很容易发现,  $x_2$  不受  $u(t)$  的影响,  $y$  不受  $x_{10}$  的影响, 也就是说任选  $u(t)$  不能使  $x_1$  达到要求的状态, 而无论测得多少个  $y$  值也不能定出  $x_{10}$  来。所以在这一系统中的状态有些是能控的, 有些是不能控的; 有些是能观的, 有些是不能观的。它们的传递函数是:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s+3}$$

可见, 原状态方程为三阶, 写成传递函数变成一阶, 中间出现了零极点对消。下面我们将进一步讨论, 在单输入单输出系统中, 若传递函数有零极点相消, 则原系统一定不完全能观, 能控。

很明显, 本例中, 由  $x_1, x_3$  构成的空间是能控子空间, 由  $x_2$  构成的空间是不能控子空间; 由  $x_2, x_3$  构成的空间是能观子空间, 由  $x_1$  构成的空间是不能观子空间。下面分析一般的系统。

设定常系数的状态空间表达式如下

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} \\ \underline{y} = C \underline{x} \end{cases} \quad (3.45)$$

根据能控性和能观性能够导出某个标准的结构形式。

## 二、能控状态的分解

系统 (3.45) 式不完全能控时, 即

$$\text{Rank } Q_K = \text{Rank } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = r < n$$

总可以找到一个适当的变换阵  $T$ , 使得

$$\tilde{\underline{x}} = T^{-1} \underline{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_r \\ \hline \tilde{x}_{r+1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}, \quad \underline{u} \text{ 和 } \underline{y} \text{ 满足的状态方程和输出 } \quad \text{方程 } \text{ 的 } \text{ 系}$$

数矩阵为:

LCD 2014年秋季

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix}$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix}$$

$$\tilde{C} = C T = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2]$$

任何具有上述形式的实现都有下述两条重要性质：

- 1)  $r \times r$  子系统  $\Sigma(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$  是能控的；
- 2)  $\tilde{C}(SI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = \tilde{C}_1(SI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1$ ，即子系统的传递函数阵与原系统的传递函数阵相等。

状态变量  $\underline{\tilde{x}}_1$  代表的空间称为能控子空间，状态变量  $\underline{\tilde{x}}_2$  构成的空间称为不能控子空间。系统的能控状态分解可用图 3.5 来表示。

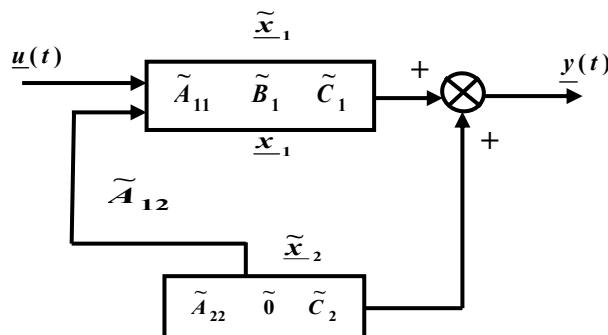


图 3.5 能控状态分解

首先证明第二条性质。

$$\begin{aligned} \tilde{C}(SI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} &= [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2] \begin{bmatrix} SI - \tilde{A}_{11} & -\tilde{A}_{12} \\ \mathbf{0} & SI - \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2] \begin{bmatrix} (SI - \tilde{A}_{11})^{-1} & * & * \\ \mathbf{0} & (SI - \tilde{A}_{22})^{-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \tilde{C}_1(SI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1 \end{aligned}$$

于是性质二得证。注意上式中符号 “\* \*” 表示矩阵元素，这里 “\* \*” 的精确值并不重要，易于证明， $* * = -(SI - \tilde{A}_{11})^{-1}A_{12}(SI - \tilde{A}_{22})^{-1}$ 。

其次证明第一条性质，应注意

$$\tilde{\mathbf{Q}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_{11}\tilde{\mathbf{B}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_{11}^{n-1}\tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0} \end{bmatrix}_{n-r}^r \quad (3.46)$$

因为  $\tilde{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}_k$ , 所以  $\tilde{\mathbf{Q}}_k$  的秩等于  $r$ , 那么  $\tilde{\mathbf{Q}}_k$  只可能有  $r$  个线性无关的行和  $r$  个无关的列。将证明，如果从左到右检验列，则前  $r$  个列必然是线性无关的。为此假定， $\tilde{\mathbf{A}}_{11}^k\tilde{\mathbf{B}}_1$  线性地依赖于  $\{\tilde{\mathbf{A}}_{11}^i\tilde{\mathbf{B}}_1, i < k\}$ , 于是  $\tilde{\mathbf{A}}_{11}^{k+1}\tilde{\mathbf{B}}_1 = \tilde{\mathbf{A}}_{11}\tilde{\mathbf{A}}_{11}^k\tilde{\mathbf{B}}_1$  显然也依赖于集合  $\{\tilde{\mathbf{A}}_{11}^i\tilde{\mathbf{B}}_1, i < k\}$ , 换句话说, 从左到右对 (3.46) 式进行搜索时, 一旦发现相关向量, 则所有后续向量也必定是相关向量。既然 (3.46) 式的秩为  $r$ , 所以前  $r$  个列且仅仅是这  $r$  个列必定是线性无关的。这就证明了性质之一。

### 三、变换矩阵 $\mathbf{T}$ 的构造方法

上述性质的证明过程中实际上提出了求取符合要求的变换矩阵  $\mathbf{T}$  的一种方法。详细情况不推导, 这里仅介绍  $\mathbf{T}$  的构成方法如下:

- 1) 选择  $\mathbf{Q}_k$  (能控性矩阵) 的  $r$  个线性无关的列构成  $\mathbf{T}$  的前  $r$  列;
- 2) 任选  $\mathbf{T}$  的其它  $n - r$  列, 使得  $\text{Rank } \mathbf{T} = n$ 。

**例 3.19** 试求下面状态方程式所描述的系统的能控子系统。

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad -1 \quad 1] \underline{x} \end{array} \right.$$

解: 求出此系统的能控矩阵  $\mathbf{Q}_k$

$$\mathbf{Q}_k = [\underline{b} \quad A\underline{b} \quad A^2\underline{b}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

显然  $\text{Rank } \mathbf{Q}_k = 2$ , 此系统不完全能控, 能控部分的状态变量数为 2。

下面求变换矩阵  $\mathbf{T}$ 。首先, 从矩阵  $\mathbf{Q}_k$  的列向量中选择两个线性独立的列向量为:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ 再任选一向量 } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 使得 } T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{为非奇异矩阵, 则: } : T^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

计算

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[ \begin{array}{ccc|cc|c} 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 3 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\tilde{b} = T^{-1}b = \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

$$\tilde{C}^T = CT = [1 \ -1 \ 1] \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right] = [1 \ 2 \ -1]$$

因此原系统的能控子系统为  $\Sigma(\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [1 \ 2])$

#### 四、能观状态的分解

系统 (3.45) 式不完全能观, 即

$$\text{Rank } Q_g^T = \text{Rank } [C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T] = r < n$$

时, 总可以找到一个变换阵  $T$ , 使

$$\tilde{x} = T^{-1}x = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} \quad \underline{u}, \quad \underline{y} \quad \text{满足的状态方程的系数} \quad \text{矩阵为}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[ \begin{array}{cc|cc} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \\ \hline r & n-r \end{array} \right] \quad \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \left[ \begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{array} \right] \quad \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix}$$

$$\tilde{C} = [\tilde{C}_1 \quad 0] \quad \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix}$$

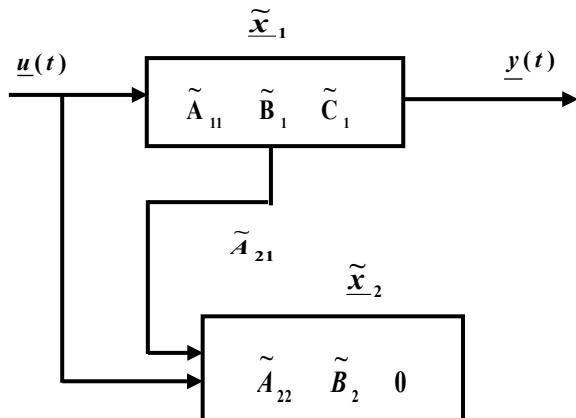


图 3.6 能观状态分解

同样具有上述形式的实现具有下述两条性质：

- 1)  $r \times r$  子系统  $\Sigma(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$  是能观的；
- 2)  $\tilde{C}(SI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = \tilde{C}_1(SI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1$ ，即能观子系统的传递函数阵与原系统的传递函数阵相等。

状态变量  $\tilde{x}_1$  构成的空间为能观子空间，状态变量  $\tilde{x}_2$  构成的空间为不能观子空间，系统的能观状态分解可用图 3.6 表示。

下面直接给出构造变换矩阵  $T$  的方法而不作证明。

- a) 选  $Q_g$ （能观性矩阵）中  $r$  个线性无关的行作为  $T^{-1}$  的前  $r$  行。
- b) 任选  $T^{-1}$  的其它  $n - r$  行，使得  $\text{Rank } T^{-1} = n$

**例 3.20** 已知例 3.19 所给出的系统，求出此系统的能观子系统。

**解：**这个系统的能可观测矩阵为：

$$Q_g = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

显然， $\text{Rank } Q_g = 2$ ，此系统不完全能观，能观状态变量数为 2，所以可取非奇异阵，

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b} = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT = [1 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

因此，此系统的能观子系统为  $\Sigma(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, [1 \quad 0])$ 。

### 五、系统的典型构造定理（Kalman 分解）

综合上述两种分解方法，可以导出下面的系统典型构造定理。对系统 (3.45) 总可以找到某个相似变换  $\underline{x} = T \tilde{\underline{x}}$ ，使它变换为具有如下标准结构的系统。

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \mathbf{0} & \tilde{A}_{13} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{A}_{33} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix} \tilde{\underline{x}} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u, \quad \text{其中 } \tilde{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} \\ \underline{y} = [\tilde{C}_1 \quad \mathbf{0} \quad \tilde{C}_3 \quad \mathbf{0}] \tilde{\underline{x}} \end{array} \right.$$

对应的状态变量  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4$  中

$\tilde{x}_1$ : 能控且能观状态

$\tilde{x}_2$ : 能控但不能观状态

$\tilde{x}_3$ : 不能控但能观状态

$\tilde{x}_4$ : 不能控且不能观状态

该系统的标准结构可用图 3.7 表示

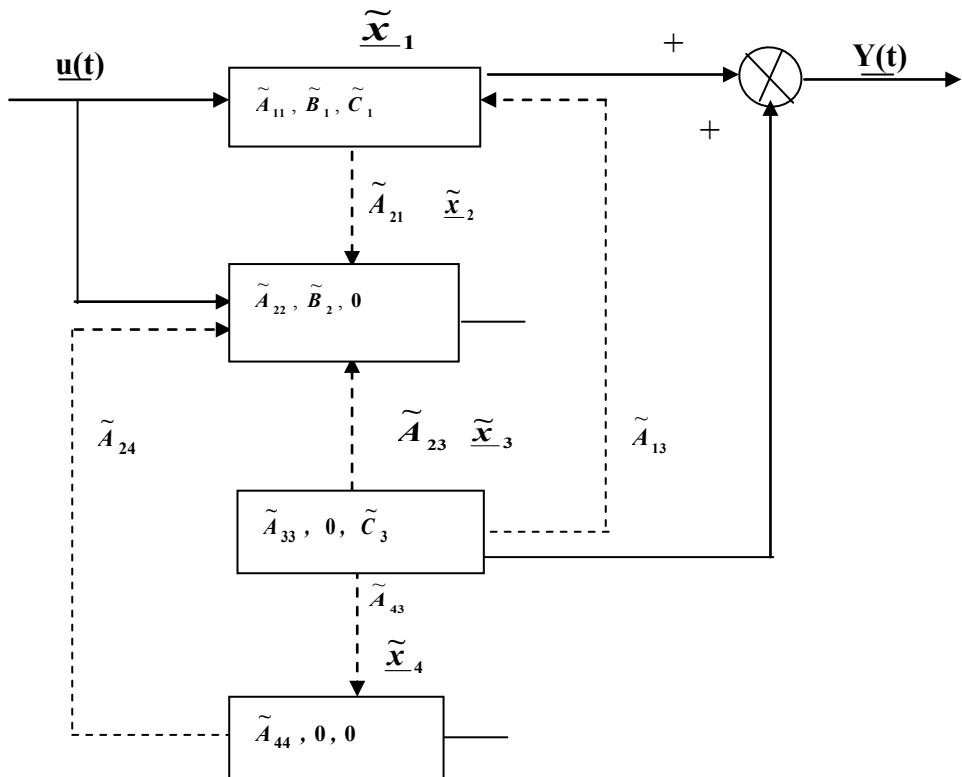


图 3.7 线性系统的典型分解

且

$$\tilde{C}(SI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = \tilde{C}_1(SI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1 \quad (3.47)$$

即系统的传递函数阵由能控且能观的部分来确定。以上称系统的典型构造定理，也称 **Kalman** 分解。

### § 3.5 传递函数阵和能控性，能观性间的关系

从上节可知若系统(3.45)不完全能控，不完全能观，那么系统的传递函数矩阵

$$W(S) = C(SI - A)^{-1}B = \tilde{C}(SI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = \tilde{C}_1(SI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1$$

即有

$$W(S) = C \frac{\text{adj}(SI - A)}{\det(SI - A)} B = \tilde{C}_1 \frac{\text{adj}(SI - \tilde{A}_{11})}{\det(SI - \tilde{A}_{11})} \tilde{B}_1 \quad (3.48)$$

(3.48) 式的中间式分母有  $n$  个特征值，而右边式只有  $r$  个特征值，( $r < n$ )，这说明传递函数阵一定有零极相消，这是传递函数阵的一个重要特性。如果传递函数阵经过零极消后，成为式(3.48)右边的表达式，那么这时的传递函数阵只能反映系统能控且能观的那一部分，而与其它

不能控或不能观的部分无关。

从这里可以看出：由传递函数阵来描述系统的运动，没有用状态空间表达式来描述系统的运动表达得全面，因为系统的不能控部分或不能观部分的运动不能在传递函数阵中反映出来，这是用传递函数描述系统运动的不足之处。

那么，如果系统的传递函数阵有零极相消，系统是否一定不完全能控或不完全能观呢？结论是否定的，只要举一个例子就足以说明。

### 例 3.21 已知系统

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & \times & \times \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \times & \times \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \quad \text{可见 } \text{Rank } Q_k = 3 = n$$

系统完全能控。

$$Q_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} \quad \text{可见 } \text{Rank } Q_g = 3 = n$$

系统完全能观。

而系统的特征多项式

$$f(s) = |SI - A| = (s - 1)^2(s - 4) \quad \text{而}$$

$$\text{adj}(SI - A) = \begin{bmatrix} (s - 1)(s - 4) & 3(s - 1) & 2(s - 1) \\ 0 & (s - 1)^2 & 2(s - 1) \\ 0 & 0 & (s - 1)(s - 4) \end{bmatrix}$$

$$W(s) = C \frac{\text{adj}(SI - A)}{|SI - A|} B = \frac{1}{(s - 1)(s - 4)} \begin{bmatrix} 2 & s - 4 \\ s - 4 & 0 \end{bmatrix}$$

这时系统传递函数阵  $W(s)$  有一个零点和极点消掉了，相消部分为

(S-1)。可见，系统虽然有零极相消，但是 $\Sigma = (A, B, C)$ 是完全能控的、完全能观的。不过应该注意，相消部分是系统的重极点，而且经相消后，传递函数阶次降低了，但是并没有把某个极点完全消掉，只是降低了这一极点的幂次。

这是一个普遍现象，即如果系统 $\Sigma = (A, B, C)$ 是完全能控、完全能观的，则传递函数阵 $W(S) = C(SI - A)^{-1}B$ ，经零极相消后，必然仍旧保留  $\det(SI - A)$  的全部零点作为自己的极点。

证明：设  $d(S)$  为  $\text{adj}(SI - A)$  范元的最大公因子，则  $\text{adj}(SI - A) = d(S)P(S)$ 。 $P(S)$  为一多项式矩阵。

由于

$$(SI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(SI - A)}{|SI - A|} \quad (3.49)$$

上式两边右乘  $(SI - A)$ ，则得

$$|SI - A|I = \text{adj}(SI - A)(SI - A) = d(S)p(S)(SI - A) \quad (3.50)$$

其中  $P(S)$   $n \times n$  矩阵， $n \times n$  个元素的最大公因子为 1。从上式可以看出， $|SI - A|$  能被  $d(S)$  整除，那么记

$$\Phi(S) = \frac{|SI - A|}{d(S)} \quad (3.51)$$

将 (3.51) 代入 (3.50) 得

$$\Phi(S)I = P(S)(SI - A) \quad (3.52)$$

即得

$$(SI - A)^{-1} = \frac{P(S)}{\Phi(S)} \quad (3.53)$$

其中  $\Phi(S)$  称为  $A$  的最小多项式，且从 (3.52) 式不难看出有  $\Phi(A) = 0$ 。从 (3.53) 式可以得出结论，最小多项式  $\Phi(S)$  的零点与  $|SI - A|$  的零点是相重合的，所不同的只是零点的重数。

因此

$$W(S) = C(SI - A)^{-1}B = C \frac{P(S)}{\Phi(S)} B \quad (3.54)$$

如果证明  $W(S)$  的 (3.54) 式不再有零极相消，那么就证明该定理。

为了证明这一点，只要证明所有  $\Phi(S) = 0$  的零点  $\lambda_i$  都满足

$$CP(\lambda_i)B \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_1, \quad (3.55)$$

$n_1$  为  $\Phi(S)$  的阶次

为了证明 (3.55) 式成立，采用反证法。

1) 假设  $\lambda_i \neq 0$  (非零根情况) 而使得  $CP(\lambda_i)B = 0$ 。由 (3.52) 式得  $\Phi(S)I = P(S)(SI - A)$ 。可以证明  $P(S)$  有下面关系。

$$P(S)A = A \cdot P(S)$$

$$\text{那么 } P(S)SI - P(S)A = \Phi(S)I$$

$$P(S)SI - AP(S) = \Phi(S)I$$

$$\text{即 } (SI - A)P(S) = \Phi(S)I$$

$$\text{那么 } (\lambda_i I - A)P(\lambda_i) = \Phi(\lambda_i)I = 0$$

$$\text{即 } \lambda_i P(\lambda_i) = AP(\lambda_i) = P(\lambda_i)A$$

$$\text{因此 } CAP(\lambda_i)B = C\lambda_i P(\lambda_i)B = \lambda_i CP(\lambda_i)B = 0$$

$$\text{进而 } CA^2 P(\lambda_i)B = CA\lambda_i P(\lambda_i)B = \lambda_i CAP(\lambda_i)B = 0$$

余类推可得

$$CA^k P(\lambda_i)B = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

即

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} P(\lambda_i)B = 0$$

因为系统完全能观，则

$$Q_g = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA_{n-1} \end{bmatrix}$$

满秩，故得，  $P(\lambda_i)B = 0$

从而得，  $P(\lambda_i)AB = AP(\lambda_i)B = 0$

余类推，得  $P(\lambda_i)A^k B = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$

即  $P(\lambda_i)[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = 0$

由于系统完全能控，所以

$\mathcal{Q}_k = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$  满秩，故有

$$P(\lambda_i) = 0$$

而由 (2.37) 式可知

$$P(\lambda_i) = P_0(\lambda_i)I + P_1(\lambda_i)A + \dots + P_{n_1-1}(\lambda_i)A^{n_1-1} = 0$$

可见  $P(\lambda_i)$  为零化多项式，且次数小于  $n_1$ ，与  $\Phi(S)$  是最小多项式矛盾，故  $C\mathcal{P}(\lambda_i)B \neq 0$

2) 考察  $\lambda_i = 0$  的情况。假设  $C\mathcal{P}(0)B = 0$ ，由于  $\lambda_i = 0$ ，则  $\Phi(S)$  有零根，所以常数项  $\alpha_0 = 0$ 。

$$\Phi(S) = S^{n_1} + \alpha_{n_1-1}S^{n_1-1} + \dots + \alpha_1S$$

进而得

$$\Phi(A) = A^{n_1} + \alpha_{n_1-1}A^{n_1-1} + \dots + \alpha_1A = AP(0) = 0$$

这样， $CAP(0)B = C\Phi(A)B = 0$

同理可得

$$CA^k P(0)B = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

即

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} P(0)B = Q_g P(0)B$$

由于系统完全能观， $Q_g$  满秩，所以

$$P(0)B = 0$$

进而得  $P(0)A^k B = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$

即  $P(0)[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = P(0)\mathcal{Q}_k = 0$

因系统完全能控，所以  $\mathcal{Q}_k$  满秩，故得

$$P(0) = 0$$

LCD 2014年秋季

这说明  $P(0) = 0$  为 A 的零化多项式, 且次数小于  $n_1$  与  $\Phi(s)$  为最小多项式矛盾, 故  $P(0) \neq 0$ , 即  $CP(0)B \neq 0$ , 因此证明了传递函数阵

$$W(s) = C \frac{P(s)}{\Phi(s)} B \quad (3.56)$$

不再有零极相消了, 而且  $\Phi(s)$  中包含有全部系统的极点, 但 (3.56) 式无零极相消仅仅是判别多变量系统能控且能观的必要条件, 而不是充分条件, 即不能说 (3.56) 式无零极相消, 则多变量系统一定能控且能观, 只要列举一个反例即可说明。

**例 3.22** 如下系统

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{则其 } Q_k = [B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rank } Q_k = 2, \text{ 故此系统不完全能控}.$$

而由 (3.56) 式

$$W(s) = C \frac{P(s)}{\Phi(s)} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-1)(s-4)} \cdot \begin{bmatrix} s-4 & 3 & 2 \\ 0 & s-1 & 2 \\ 0 & 0 & s-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s-4)} \begin{bmatrix} s-4 & 3 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

中, 无零极相消, 说明, 不能由式 (3.56) 式无零极相消来判定系统的可控性或可观性。

由前面的分析讨论可知, 对于多变量系统来说, 仅仅根据系统的传递函数阵

$$W(s) = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|} B$$

是否有零极点相消, 并不能完全确定系统是否完全能控和完全能观, 只

有当系统的某一极点完全消去时，才能肯定系统是不完全能控，或不完全能观的。

但是在单变量系统中，情况就完全不同了，在单变量系统中，有如下结论：

系统  $\Sigma = (A, b, C^T)$  完全能控，完全能观的充分必要条件是：

$$w(S) = \underline{C}^T (\underline{S}\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{b}^T = \underline{C}^T \frac{\text{adj}(\underline{S}\underline{I} - \underline{A})}{|\underline{S}\underline{I} - \underline{A}|} \underline{b}$$

不能有零极点相消。

证明：为此，只要证明  $f(S) = |\underline{S}\underline{I} - \underline{A}|$  就是最小多项式就可以了。因为，假设系统完全能控，则

$$[\underline{b}, A\underline{b}, \dots, A^{n-1}\underline{b}] = Q_k$$

线性独立。所以对于任意的  $a_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ ，都有

$$A^{n-1}\underline{b} + a_1 A^{n-2}\underline{b} + \dots + a_{n-1} I \underline{b} \neq 0$$

即

$$(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} I)\underline{b} \neq 0$$

由于  $\underline{b} \neq 0$ ，那么，

$$A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} I \neq 0$$

所以  $A$  的最小多项式的次数大于  $n-1$ 。而  $f(S) = |\underline{S}\underline{I} - \underline{A}|$  为零化多项式，次数为  $n$ ，因此， $f(S) = |\underline{S}\underline{I} - \underline{A}|$  是最小多项式。

### § 3.6 能控标准型和能观标准型

在第一章里，我们已经提到单输入单输出系统的能控标准型和能观标准型，它们分别都有两种形式。研究能控标准型和能观标准型对系统的分析和综合有十分重要的意义。

下面我们将进一步研究如何从系统的一般状态空间表达式求出 标准型。

#### 一、单输入单输出系统的标准型

##### (1) 化状态方程为能控标准

设有单输入单输出系统

LCD 2014年秋季

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{b} u \\ y = \tilde{C}^T \tilde{x} \end{cases} \quad (3.57)$$

为能控标准型（指能控标准 I 型，以后不加指明）则

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & \mathbf{0} & & & & \\ - & & & & & \\ & & & I_{n-1} & & \\ & & & & & \\ & -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = [\alpha_n, \alpha_{n-1} \cdots \cdots \alpha_1] \quad (3.58)$$

其中  $a_i, \alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$  可为任意实数。

显然具有 (3.58) 式所示形式的系统其能控矩阵为：

$$\tilde{Q}_k = [\tilde{b}, \tilde{A}\tilde{b}, \dots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{b}] = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & \mathbf{0} & \ddots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & -a_1 & & X \end{bmatrix}$$

(x: 代表其中元素可为任意实数而不必计算出) 满秩, 即  $\text{Rank } Q_k = n$ , 所以能控标准型一定完全能控, 下面我们要给出这样的命题, 即若系统是能控的, 那么一定能经过线性变换, 将原系统变成能控标准型。

证明: 对于单输入单输出的能控系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = c^T x \end{cases} \quad (3.59)$$

令  $x = T \tilde{x}$  代入上式, 得

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = T^{-1}AT\tilde{x} + T^{-1}bu \\ y = c^T T \tilde{x} \end{cases} \quad (3.60)$$

令

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_{n-1} & \\ & -a_n & -a_{n-1} & \cdots \cdots a_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = T^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

若  $T$  存在，就表示能控系统一定能写成能控标准型，设

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1^T \\ \underline{P}_2^T \\ \vdots \\ \underline{P}_n^T \end{bmatrix} \quad \underline{P}_i^T \text{ 为 } 1 \times n \text{ 的行向量} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.62)$$

用  $T^{-1}$  右乘 (3.61) 式中的第一式，则

$$T^{-1}ATT^{-1} = T^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_{n-1} & \\ & -a_n & -a_{n-1} & \cdots \cdots a_1 \end{bmatrix} T^{-1}$$

将 (3.62) 式代入上式，则得：

$$\begin{bmatrix} \underline{P}_1^T \\ \underline{P}_2^T \\ \vdots \\ \underline{P}_n^T \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \underline{P}_1^T A \\ \underline{P}_2^T A \\ \vdots \\ \underline{P}_n^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_{n-1} & \\ & -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_1^T \\ \underline{P}_2^T \\ \vdots \\ \underline{P}_n^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{P}_2^T \\ \underline{P}_3^T \\ \vdots \\ \underline{P}_n^T \\ -a_n \underline{P}_1^T - a_{n-1} \underline{P}_2^T - \cdots - a_1 \underline{P}_n^T \end{bmatrix}$$

由上式得：

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{P}}_2^T = \underline{\mathbf{P}}_1^T A \\ \underline{\mathbf{P}}_3^T = \underline{\mathbf{P}}_2^T A = \underline{\mathbf{P}}_1^T A^2 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{P}}_n^T = \underline{\mathbf{P}}_{n-1}^T A = \underline{\mathbf{P}}_1^T A^{n-1} \end{array} \right.$$

将上式代入 (3.62) 式, 得

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}}_1^T \\ \underline{\mathbf{P}}_2^T \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{P}}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}}_1^T \\ \underline{\mathbf{P}}_1^T A \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{P}}_1^T A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

(3.63)式中  $\underline{\mathbf{P}}_1$  是未知的, 再由下面关系求出  $\underline{\mathbf{P}}_1$ 。

$$\tilde{\underline{\mathbf{b}}} = \mathbf{T}^{-1} \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}}_1^T \\ \underline{\mathbf{P}}_1^T A \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{P}}_1^T A^{n-1} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{P}}_1^T \underline{\mathbf{b}} \\ \underline{\mathbf{P}}_1^T A \underline{\mathbf{b}} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{P}}_1^T A^{n-1} \underline{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

将上式改写成:

$$\begin{aligned} [\underline{\mathbf{P}}_1^T \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{P}}_1^T A \underline{\mathbf{b}}, \dots, \underline{\mathbf{P}}_1^T A^{n-1} \underline{\mathbf{b}}] &= \underline{\mathbf{P}}_1^T [\underline{\mathbf{b}}, A \underline{\mathbf{b}}, \dots, A^{n-1} \underline{\mathbf{b}}] \\ &= [\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, 1] \end{aligned}$$

因为原系统能控, 所以  $[\underline{\mathbf{b}}, A \underline{\mathbf{b}}, \dots, A^{n-1} \underline{\mathbf{b}}]$  满秩, 可见

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}}_1^T &= [\mathbf{0} \cdots \mathbf{0} \mathbf{1}] [\underline{\mathbf{b}}, A \underline{\mathbf{b}}, \dots, A^{n-1} \underline{\mathbf{b}}]^{-1}, \text{ 即} \\ \underline{\mathbf{P}}_1^T &= [\mathbf{0} \cdots \mathbf{0} \mathbf{1}] \mathbf{Q}_k^{-1} \quad (3.64) \end{aligned}$$

这样  $\underline{\mathbf{P}}_1^T$  可求出, 所以  $\mathbf{T}^{-1}$  一定存在, 由此可见, 只要原系统能控, 则一定能将原系统化为能控标准型。这里也揭示了构成  $\mathbf{T}^{-1}$  的方法, 关键在于求出  $\underline{\mathbf{P}}_1^T$ 。 $\underline{\mathbf{P}}_1^T$  即为能控矩阵  $\mathbf{Q}_k^{-1}$  的最后一行, 求出  $\underline{\mathbf{P}}_1^T$  后代入 (3.63) 式即可求出  $\mathbf{T}^{-1}$ 。

**例 3.23** 已知系统

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

试将系统化为能控标准型。

解：

$$\mathcal{Q}_k = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}_k^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{P}_1^T = [0 \quad 1] \mathcal{Q}_k^{-1} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } T^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1^T \\ \underline{P}_1^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b} = T^{-1} b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即原系统的能控标准型为：

$$\tilde{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

## (2) 化状态方程为能观标准形式

设有单输入单输出系统

$$\begin{cases} \tilde{\dot{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{b} u \\ y = \tilde{c}^T \tilde{x} \end{cases}$$

为能观标准型（指观标准 II 型，以后不加指明）则

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -a_n \\ I_{n-1} & \begin{array}{c} -a_{n-1} \\ \vdots \\ -a_1 \end{array} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{b}} = \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{c}}^T = [0 \cdots 0 \ 1]$$

其中  $a_i, \alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$  可为任意实数。可以看出上式为 (3.58) 式的对偶形式。

显然具有上述形式的系统其能观性矩阵为：

$$\tilde{\underline{Q}}_g = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{c}} \\ \tilde{\underline{c}} \tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{\underline{c}} \tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & -a_1 \\ 1 & -a_1 & X \end{bmatrix} \quad (X : \text{意义同前})$$

满秩，即  $\text{Rank } \tilde{\underline{Q}}_g = n$ ，所以能观标准型一定是完全能观。

同样，我们给出这样的命题，即若系统是能观的，那么一定能经过线性变换，将原系统变成能观标准型。这是可以证明的。现用对偶性原理加以解释。

设原系统  $\Sigma(A, \underline{b}, \underline{c})$  是能观的，那么它的对偶系统  $\Sigma'(A^T, \underline{c}^T, \underline{b}^T)$  一定能控，既然  $\Sigma'(A^T, \underline{c}^T, \underline{b}^T)$  能控，则一定能通过线性非奇异变换变换成能控标准型  $\Sigma''(T^{-1}A^TT, T^{-1}\underline{c}^T, \underline{b}^TT)$  然后，将此能控标准型再用对偶性原理写出它的对偶系统  $\Sigma'''(T^TA(T^T)^{-1}, T^T\underline{b}, \underline{c}(T^T)^{-1})$ ，显然此时系统即为能观标准型。

怎样将一般形式的能观系统变成能观标准型呢？下面给出构造  $T$  的一般方法。

a) 求出原系统能观性矩阵  $\underline{Q}_g$

b) 取出  $\underline{Q}_g^{-1}$  的最后一列，即  $\underline{P}_1 = \underline{Q}_g^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$

c)  $T = [\underline{P}_1, A\underline{P}_1, \dots, A^{n-1}\underline{P}_1]$

例 3.24 已知系统

LCD 2014年秋季

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} u \\ Y = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \underline{x} \end{cases}$$

试写出此系统的能观标准型

解：

$$Q_g = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Rank } Q_g = 2 = n, \quad Q_g^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{P}_1 = Q_g^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } T = [\underline{P}_1 \ A \ \underline{P}_1] = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{C}}^T = \underline{C}T = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = [0 \ 1]$$

$$\underline{\tilde{b}} = T^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

即原系统的能观标准型为：

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} u \\ Y = [0 \ 1] \tilde{x} \end{cases}$$

## 二\*多输入多输出系统的标准型

多变量系统比较复杂，设有系统

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} \\ \underline{y} = C \underline{x} \end{cases} \quad (3.65)$$

有  $r$  个输入,  $m$  个输出。

### (1) 能控标准型

只要 (3.65) 式系统完全能控, 那么一定可以找到一个非奇异矩阵  $T$ , 使之变换成能控标准型

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \cdots & \tilde{A}_{1r} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \cdots & \tilde{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{A}_{r1} & \tilde{A}_{r2} & \cdots & \tilde{A}_{rr} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \vdots \\ \tilde{B}_r \end{bmatrix}$$

其中:

$$\tilde{A}_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & & \\ & I & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ X & X & \cdots & X & & \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline X & \cdots & X \end{bmatrix} \quad (i \neq j),$$

$X$  -- 表示适当的实数

$$\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \cdots & 1 & X & \cdots & \cdots & X \end{bmatrix}_i$$

上述定理我们不加证明, 只是直接给出  $T^{-1}$  的构造方法。

因为原系统  $\Sigma(A, B)$  完全能控, 所以其能控矩阵  $Q_k$  中有并且只有  $n$  个线性无关的列。当  $B = [\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_r]$  时, 从左到右找出这  $n$  个线性无关的列, 并按如下顺序重新排列。

$$S = [\underline{b}_1, A\underline{b}_1, \dots, A^{\mu_1-1}\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, A^{\mu_2-1}\underline{b}_2, \dots, \underline{b}_r, \dots, A^{\mu_r-1}\underline{b}_r] \quad (3.66)$$

其中  $\mu_i$  叫做能控性指数, 显然,

$$\sum_{i=1}^r \mu_i = n$$

特别是把  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$  中最大的一个称为最大能控指数

$$\mu_c = \max \mu_i$$

因为  $S$  是非奇异的，计算其逆矩阵

$$L = S^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{L}_1^T \\ \underline{L}_2^T \\ \vdots \\ \underline{L}_n^T \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

其中  $\underline{L}_i^T$  为行向量，从中取出第  $\mu_1$  行、 $\mu_1 + \mu_2$  行， $\dots$ ，及最后一行（第  $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r$  行）并用它们构成变换矩阵

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{L}_{\mu_1}^T \\ \underline{L}_{\mu_1}^T A \\ \vdots \\ \underline{L}_{\mu_1}^T A^{\mu_1-1} \\ \vdots \\ \underline{L}_{\mu_1+\mu_2}^T \\ \vdots \\ \underline{L}_{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_r}^T A^{\mu_r-1} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

**例 3.25** 试求下面线性系统的能控标准型

$$\Sigma(A, B, C) = \Sigma \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ -22 & -11 & -4 & 0 \\ -23 & -6 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

解：此系统的能控性矩阵  $Q_k = [B, AB, A^2B, A^3B]$

$$Q_k = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & Ab_1 & Ab_2 & A^2b_1 & A^2b_2 & A^3b_1 & A^3b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -6 & -18 & 25 & 75 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 13 & 39 & -56 & -168 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 16 & -11 & -97 \\ 1 & 3 & -6 & -18 & 25 & 75 & -90 & -270 \end{bmatrix}$$

如果从左边依次把线性无关的列向量 1, 2, 3, 5 列取出，则  $\mu_1 = 3, \mu_2 = 1$

把它们重新排列为  $\underline{b}_1, A\underline{b}_1, A^2\underline{b}_1, \underline{b}_2$  得

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 25 & 3 \end{bmatrix}$$

求 S 的逆矩阵 L

$$L = \begin{bmatrix} 28 & 11 & -3 & 1 \\ 13 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \mu_1 \text{ 行} \\ \mu_1 + \mu_2 \text{ 行} \end{array}$$

因为  $\mu_1 = 3, \mu_2 = 1$ , 所以用 L 的第 3 行, 第 4 行按 (3.68) 式组成的 T 矩阵为

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} L_{\mu_1}^T \\ L_{\mu_1}^T A \\ L_{\mu_1}^T A^2 \\ L_{\mu_1 + \mu_2}^T \end{array}$$

由此

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

所以, 能控标准型  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  由下式求出。

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -11 & -6 & 0 \\ -11 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

上述形式也称龙伯格第二可控规范型。

LCD 2014年秋季

## (2)能观标准型

只要 (3.65) 式系统完全能观，那么一定可以找到一个非奇异矩阵  $T$ ，使之转换成能观标准型。

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \cdots & \tilde{A}_{1m} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \cdots & \tilde{A}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{A}_{m1} & \tilde{A}_{m2} & \cdots & \tilde{A}_{mm} \end{bmatrix}$$

其中

$$\tilde{A}_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & X \\ & X \\ & \vdots \\ I & X \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} & X \\ & X \\ & \vdots \\ & X \end{bmatrix} \quad (i \neq j)$$

$$\bar{C} = [\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_m]$$

其中

$$\tilde{C}_i = \begin{bmatrix} & \mathbf{0} \\ & \vdots \\ \mathbf{0} & 1 \\ & X \\ & \vdots \\ & X \end{bmatrix} \leftarrow i\text{行} \quad (3.69)$$

上述定理我们也不加证明，直接给出  $T$  的构造方法。

因为原系统能观，所以能观性矩阵

$$Q_g = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{满秩，即 } \text{Rank } Q_g = n$$

即  $Q_g$  中只有  $n$  行是线性独立的，从上向下找出  $n$  个线性无关的行，并按下面方式重新排列

$$S_0 = \begin{bmatrix} \underline{C}_1^T \\ \underline{C}_1^T A \\ \vdots \\ \underline{C}_1^T A^{\gamma_1 - 1} \\ \underline{C}_2^T \\ \vdots \\ \underline{C}_2^T A^{\gamma_2 - 1} \\ \vdots \\ \underline{C}_m^T A^{\gamma_m - 1} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

其中  $\gamma_i$  叫做能观性指数，显然

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i = n$$

择其最大者  $\gamma_0 = \max_i \{\gamma_i\}$  叫最大能观性指数。因为  $S_0$  为非奇异矩阵，求其逆矩阵。

$$L_0 = S_0^{-1} = [ L_{01} \ L_{02} \ \cdots, L_{0n} ]$$

其中  $L_{0i}$  为列向量，从中取出第  $\gamma_1$  列，第  $\gamma_1 + \gamma_2$  列， $\cdots$ ，第  $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_m = n$  列构成变换矩阵

$$T = [L_{0\gamma_1}, A L_{0\gamma_1}, \cdots, A^{\gamma_1-1} L_{0\gamma_1}, L_{0(\gamma_1+\gamma_2)}, \cdots, A^{\gamma_m-1} L_{0(\gamma_1+\cdots+\gamma_m)}] \quad (3.71)$$

**例 3.26** 试求下面线性系统的能观测标准型。

$$\Sigma(A, B, C)$$

$$= \Sigma \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

解

$$Q_g = \left[ \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \leftarrow \begin{array}{l} \underline{C}_1^T \\ \underline{C}_2^T \\ \underline{C}_1^T A \\ \underline{C}_2^T A \\ \underline{C}_1^T A^2 \\ \underline{C}_2^T A^2 \\ \underline{C}_1^T A^3 \\ \underline{C}_2^T A^3 \\ \underline{C}_1^T A^4 \\ \underline{C}_2^T A^4 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

从上到下依次把线性无关的行向量 1, 2, 3, 4, 5 行取出, 设  $C = \begin{bmatrix} \underline{C}_1^T \\ \underline{C}_2^T \end{bmatrix}$

将  $\underline{C}_1^T, \underline{C}_1^T A, \underline{C}_1^T A^2, \underline{C}_2^T, \underline{C}_2^T A$  从上至下排列, 作  $S_0$  矩阵。

$$S_0 = \left[ \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right] \leftarrow \begin{array}{l} \underline{C}_1^T \\ \underline{C}_1^T A \\ \underline{C}_1^T A^2 \\ \underline{C}_2^T \\ \underline{C}_2^T A \end{array}$$

$\gamma_1 = 3, \gamma_2 = 2$ 。求  $S_0$  的逆矩阵。

$$L_0 = S_0^{-1} = \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

↑              ↑

$\gamma_1$  列       $(\gamma_1 + \gamma_2)$  列

用  $\gamma_1$  列,  $(\gamma_1 + \gamma_2)$  列向量, 按 (3.71) 式构成 T 矩阵。

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{L}_{0\gamma_1} \quad A \underline{L}_{0\gamma_1} \quad A^2 \underline{L}_{0\gamma_1} \quad \underline{L}_{0(\gamma_1+\gamma_2)} \quad A \underline{L}_{0(\gamma_1+\gamma_2)}$$

因此

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

所以，给出能观测标准型为

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right], \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \left[ \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\tilde{C} = CT = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

显然，这和能控标准型的作法是对偶的。

必须指出，线性系统的标准型有各种型式，这里仅介绍一种，也称 **Luenberger 第二标准型**。

### § 3.7 传递函数阵的实现问题

现代控制理论是建立在状态空间分析方法的基础上。因此，如何获得状态方程和输出方程是研究实际系统时首先要解决的问题。在第一章我们已经了解到，通常可以对系统的物理过程进行深入研究，从而

直接建立系统的状态空间表达式，但是，在很多实际问题中，系统的物理过程比较复杂，暂时还很不清楚它的数量关系。也就是系统的结构参数基本上是未知的，这时要想通过分析的方法建立它们的运动方程是困难的，甚至是不可能的。通常对这类系统首先用实验的方法确定其输入输出间的传递函数阵，然后根据传递函数阵来确定系统的状态空间描述，这就是实现问题，所找到的与传递函数相对应的状态空间描述，称为传递函数阵的一个实现，关于实现问题，在第一章中我们已经作了初步的介绍。下面为了引出最小实现的概念，我们对单变量和多变量系统的实现再分别作如下阐述。

### 一、单变量系统的能控实现、能观实现

正如第一章中已经指出的，假设对象的传递函数为  $w(s)$

$$w(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (3.72)$$

现在要求根据  $w(s)$  找到一个相应的方程

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A \underline{x} + \underline{b} u \\ \underline{y} = \underline{C}^T \underline{x} \end{cases} \quad (3.73)$$

根据第一章可知，它的能控标准实现为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & I_{n-1} & & \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 & \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}^T = [b_n \quad b_{n-1} \cdots b_1] \quad (3.74)$$

相应的能观标准实现为：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_n \\ -a_{n-1} & \vdots \\ I_{n-1} & -a_1 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}^T = [0 \cdots 0 \quad 1] \quad (3.75)$$

### 二、多变量系统的能控实现、能观实现

对于多变量系统  $W(s)$  为一个传递函数矩阵，设  $m \times r$  传递函数阵  $W(s)$  给定为

$$W(s)_{mxr} = \frac{R(s)}{\phi(s)} = \frac{R_1 s^{\ell-1} + R_2 s^{\ell-2} + \cdots + R_\ell}{s^\ell + \alpha_1 s^{\ell-1} + \cdots + \alpha_{\ell-1} s + \alpha_\ell} \quad (3.76)$$

其中  $\phi(s)$  是  $W(s)$  诸元分母多项式的最小公分母,  $R_i (i = 1, 2, 3, \dots, \ell)$  为  $m \times r$  的常阵。则其能控性实现  $(A, B, C)$  为

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} & I_r & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & I_r \\ & 0 & & \\ -\alpha_\ell I_r & -\alpha_{\ell-1} I_r & \cdots & -\alpha_1 I_r \end{bmatrix}}_{\ell \cdot r}, \quad B = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_r \end{bmatrix}}_{r \cdot r}, \quad (3.77)$$

$$C = \underbrace{\begin{bmatrix} R_\ell & R_{\ell-1} & \cdots & R_1 \end{bmatrix}}_{\ell \cdot r} \} m$$

证明: 首先证明 (3.77) 式是 (3.76) 式的实现。设系统 (3.77) 的输入  $\underline{u}$  到状态  $\underline{x}$  的传递关系是:

$$V(s) = (sI_{\ell r} - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} V_1(s) \\ \vdots \\ V_\ell(s) \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

其中  $V_i(s)$  是  $r \times r$  矩阵。(3.78) 式两边左边乘  $(sI_{\ell r} - A)$ , 则得:

$$(sI_{\ell r} - A)V(s) = B \quad \text{或} \quad SV(s) = AV(s) + B$$

将 (3.77) 式和 (3.78) 式代入上式, 可以导出:

$$S \begin{bmatrix} V_1(s) \\ \vdots \\ V_\ell(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & I_r & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ -\alpha_\ell I_r & -\alpha_{\ell-1} I_r & \cdots & -\alpha_1 I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ \vdots \\ V_\ell(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} V_2(s) = SV_1(s) \\ V_3(s) = SV_2(s) = S^2V_1(s) \\ \dots \\ V_\ell(s) = SV_{\ell-1}(s) = S^{\ell-1}V_1(s) \end{cases} \quad (3.79)$$

$$SV_\ell(s) = -\alpha_\ell V_1(s) - \alpha_{\ell-1} V_2(s) - \dots - \alpha_1 V_\ell(s) + I_r \quad (3.80)$$

将 (3.79) 代入 (3.80) 并移项有

$$(S^\ell + \alpha_1 S^{\ell-1} + \dots + \alpha_\ell) V_1(s) = \phi(s) V_1(s) = I_r \quad (3.81)$$

也就是  $V_1(s) = \frac{1}{\phi(s)} I_r$  代入 (3.79) 式

$$\text{有 } V_i(s) = \frac{S^{i-1}}{\phi(s)} I_r \quad (i = 1, 2, \dots, \ell)$$

于是就可以得到系统(3.77)的传递函数矩阵。

$$\begin{aligned} C(SI - A)^{-1}B &= CV(S) = [R_\ell \dots R_1] \begin{bmatrix} V_1(s) \\ \vdots \\ V_\ell(s) \end{bmatrix}_{r \times \ell} \\ &= [R_\ell V_1(s) + \dots + R_2 V_{\ell-1}(s) + R_1 V_\ell(s)] \\ &= \frac{1}{\phi(s)} [R_\ell + \dots + R_2 S^{\ell-2} + R_1 S^{\ell-1}] = W(s) \end{aligned}$$

上述说明 (3.77) 式的  $(A, B, C)$  是 (3.76) 式  $W(s)$  的一个实现, 不难看出当  $r = 1$ ,  $m = 1$  时, 它就是单输入量系统的能控标准型。

其次证明 (3.77) 式是完全能控的。因为

$$Q_k = [B, AB, \dots, A^{l-1}B] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & I_r \\ & \ddots & & \\ & & I_r & \\ I_r & & & X \end{bmatrix}_{r \times l}$$

上式中  $X$  表示其中元素可为任意实数而不必算出。

$$\text{Rank } Q_k = r \cdot l$$

所以  $(A, B, C)$  为完全能控的, 从而 (3.77) 式是 (3.76) 式的能控实现。

相应于 (3.76) 式所给的传递函数阵  $W(s)$ ，其能观测性实现  $(A, B, C)$  为：

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\alpha_l I_m \\ I_m & \mathbf{0} \\ \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & I_m \end{bmatrix}}_{l \cdot m} \quad l \cdot m, \quad B = \underbrace{\begin{bmatrix} R_l \\ R_{l-1} \\ \vdots \\ R_1 \end{bmatrix}}_r \quad l \cdot m$$

$$C = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & I_m \end{bmatrix}}_{l \cdot m} \quad \{m \quad (3.82)$$

能观测性实现 (3.82) 式的证明和能控性实现 (3.77) 式的证明方法类同，故从略。

**例 3.27** 已知如下传递函数阵，求  $W(s)$  的能控实现和能观实现。

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{s^2 - s} & \frac{1}{1-s} \end{bmatrix}$$

$$\text{解: } W(s) = \frac{R(s)}{\Phi(s)} = \frac{1}{s^2(s-1)} \begin{bmatrix} s-1 & \mathbf{0} \\ s & -s^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^3 - s^2} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right)$$

所以

$$R_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad R_3 = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = s^3 - s^2$$

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = \mathbf{0}, \quad \alpha_3 = \mathbf{0}$$

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\alpha_1 I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$C = [R_3 \ R_2 \ R_1] = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

能观性实现按 (3.82) 式, 得

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 三、最小实现问题

从前面的分析可以看到, 当一个传递函数阵给定以后, 可以构造其实现  $\Sigma = (A, B, C)$  使得

$$C(SI - A)^{-1}B = W(S)$$

这样的实现不是唯一的。有完全能控实现, 但它不一定完全能观; 有完全能观实现, 但不一定完全能控。而且在实现的阶数上有很大差别。例如在多变量的实现中, 当  $m$  与  $r$  不相同时, 则能控实现为  $r \times r$  阶, 而能观实现为  $m \times m$  阶, 它们的阶数是不同的, 但它们的传递函数阵是相同的。

一般总希望实现的阶数越小越好, 其中阶数最小的实现称最小实现。那么最小实现阶数是多少呢? 如何寻找这个最小实现? 这是下面要解决的问题。

(1) 首先我们给出这样的命题, 系统  $\Sigma(A, B, C)$  为  $W(S)$  的最小实现充分必要条件是系统  $\Sigma(A, B, C)$  完全能控、完全能观。

**证明：**首先证明必要性：采用反证法。设系统  $W(S)$  的一个最小实现为  $\Sigma(A, B, C)$ ，其阶数为  $n$ ，但是不完全能控或不完全能观。再设其完全能控完全能观部分的阶数为  $n'$ ， $n' < n$ 。根据前面的分解定理已经证明，其完全能控能观的  $n'$  阶子系统，其传递函数阵亦是  $W(S)$ ，但  $n' < n$ 。所以  $\Sigma(A, B, C)$  就不是最小实现，与条件矛盾。故系统  $\Sigma(A, B, C)$  必定是完全能控且完全能观的。

其次证明充分性：同样也采用反证法，设系统  $\Sigma(A, B, C)$  是  $W(S)$  的一个实现，完全能控且完全能观，但它不是最小实现。又设系统  $\Sigma' = (A', B', C')$  也是  $W(S)$  的一个实现，它的阶次为  $n'$ ，且  $n' < n$ 。

由于  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  都是  $W(S)$  的一个实现，则

$$\underline{y}(t) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B \underline{u}(\tau) d\tau = \int_0^t C' e^{A'(t-\tau)} B' \underline{u}(\tau) d\tau$$

对任意的  $\underline{u}(t)$  都成立。由此可得

$$C e^{A(t-\tau)} B = C' e^{A'(t-\tau)} B'$$

对上式两边微分得：

$$C A e^{A(t-\tau)} B = C' A' e^{A'(t-\tau)} B'$$

余类推，得

$$C A^2 e^{A(t-\tau)} B = C (A')^2 e^{A'(t-\tau)} B'$$

...

...

$$C A^{n-1} e^{A(t-\tau)} B = C' (A')^{n-1} e^{A'(t-\tau)} B'$$

令  $t - \tau = 0$ ，则得

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} C' \\ C' A' \\ \vdots \\ C' (A')^{n-1} \end{bmatrix} B'$$

亦可写成

LCD 2014年秋季

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B, AB, \dots, A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C' \\ C'A' \\ \vdots \\ C'A'^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B', A'B', \dots, (A')^{n-1}B' \end{bmatrix}$$

因系统  $\Sigma$  完全能控能观，左边的矩阵秩为  $n$ ，右边因矩阵  $A'$  为  $n' \times n'$  阶，所以它的秩为  $n'$ ， $n' < n$ 。一个矩阵不能有两个秩，所以系统  $\Sigma' = (A', B', C')$  为  $W(s)$  的实现，且  $n' < n$  这一假设不成立。系统  $\Sigma = (A, B, C)$  就为最小实现。这也说明最小实现的维数是唯一的。

(2) 其次，我们给出这样的结论，对所给定的传递函数阵，其两个最小实现之间必是代数等价的。就是说系统的最小实现不是唯一的，但它们之间是代数等价的。上述结论这里不作证明。

(3)  $W(s)$  实现的非唯一性说明，仅从未知结构的输入与输出之间的特性，如  $W(s)$  出发，可以构造出无穷多个在外特性上与  $W(s)$  一致的假象结构，通常它们之间不存在代数等价关系。从而不能确定地描述出未知的结构，这就是所谓的结构不确定原理。这个原理突出地说明了用外特性描述系统结构的局限性，表明了状态空间描述的优越性。

#### 四、最小实现的构造方法

由传递函数阵求最小实现的方法通常有两种：一是直接求其最小实现。如 **Ho - Kalman** 方法；二是先求出满足给定的传递函数阵的实现，然后从它的完全能控或完全能观的系统出发，求其最小实现，例如 **Mayne** 的方法。本节仅就第二种方法加以叙述。

**Mayne** 方法分两步：第一步，求出所给定传递函数阵的完全能控（完全能观）的实现，第二步是从这个实现取出完全能观（完全能控）的子系统，即求得最小实现。

##### (1) 先求完全能控实现，然后取出能观部分的方法

设传递函数阵以下述形式给出

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{P_{11}(s)}{\phi_{11}(s)}, & \frac{P_{12}(s)}{\phi_{12}(s)}, & \cdots, & \frac{P_{1r}(s)}{\phi_{1r}(s)}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{P_{m1}(s)}{\phi_{m1}(s)}, & \frac{P_{m2}(s)}{\phi_{m2}(s)}, & \cdots, & \frac{P_{mr}(s)}{\phi_{mr}(s)} \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

对实际所使用的系统要求  $\lim_{s \rightarrow \infty} W(s) = \mathbf{0}$ , 即  $W(s)$  应是严格真分式的。

先考虑  $W(s)$  的第  $i$  列

$$\underline{w}_i(s) = \begin{bmatrix} \frac{P_{1i}(s)}{\phi_{1i}(s)} \\ \frac{P_{2i}(s)}{\phi_{2i}(s)} \\ \vdots \\ \frac{P_{mi}(s)}{\phi_{mi}(s)} \end{bmatrix} \quad (i=1,2,\dots,r)$$

设  $\phi_{1i}(s), \phi_{2i}(s), \dots, \phi_{mi}(s)$  的最小公倍函数  $\phi_i(s)$ , 则有

$$\underline{w}_i(s) = \frac{1}{\phi_i(s)} \begin{bmatrix} P'_{1i}(s) \\ P'_{2i}(s) \\ \vdots \\ P'_{mi}(s) \end{bmatrix}$$

这里, 如设第  $j$  行为:

$$P'_{ji}(s) = \beta_{ji1}s^{n_i-1} + \beta_{ji2}s^{n_i-2} + \cdots + \beta_{jin_i} \quad (j=1,2,\dots,m)$$

$$\phi_i(s) = s^{n_i} + \alpha_{i1}s^{n_i-1} + \cdots + \alpha_{in_i}$$

那么,  $\underline{w}_i(s)$  的实现可以用下式给出:

$$A_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & I_{n_i-1} \\ \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{in_i} & -\alpha_{in_i-1} & \cdots & -\alpha_{i1} \end{bmatrix} \quad \underline{b}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_i = \begin{bmatrix} \beta_{1in_i} & \beta_{1in_i-1} & \cdots & \beta_{1i1} \\ \beta_{2in_i} & \beta_{2in_i-1} & \cdots & \beta_{2i1} \\ \vdots \\ \beta_{min_i} & \beta_{min_i-1} & \cdots & \beta_{mi1} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

因此  $\mathbf{W}(s)$  的实现由下式给出:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & A_2 & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}}_1 & & \mathbf{0} \\ & \underline{\mathbf{b}}_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{\mathbf{b}}_r \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [C_1, C_2, \dots, C_r] \quad (3.85)$$

这里所给出的 (3.85) 式显然是完全能控的形式，但不一定完全能观。这个系统的能观矩阵为:

$$\mathbf{Q}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

当  $\text{Rank } \mathbf{Q}_g = n_0 < n$  时，从  $\mathbf{C}, \mathbf{CA}, \dots$ ，依次取出线性无关的行向量，记为

$\underline{\mathbf{w}}_1^T, \underline{\mathbf{w}}_2^T, \dots, \underline{\mathbf{w}}_{n_0}^T$ 。令

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{w}}_1^T \\ \underline{\mathbf{w}}_2^T \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{w}}_{n_0}^T \end{bmatrix}$$

$\mathbf{S}$  为  $n_0 \times n$  矩阵。求满足关系式

$$\mathbf{SU} = \mathbf{I}_{n_0 \times n_0} \quad (3.86)$$

的  $n \times n_0$  矩阵  $\mathbf{U}^{(1)}$ ，然后从

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{SAU}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{SB}, \quad \mathbf{C}_0 = \mathbf{CU} \quad (3.87)$$

求出完全能控且完全能观系统  $(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0)$ 。这就是 § 3.4 中介绍的能

观子空间的分解运算。

**例 3.28** 试求下面传递函数的最小实现

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{4s+6}{(s+1)(s+2)} & \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{-1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

解：首先从 (3.84) 式得  $\underline{w}_1(s)$  的实现为：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

同样  $\underline{w}_2(s)$  的实现为：

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

所以  $W(s)$  的完全能控实现为：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

这个实现的能观性矩阵为

$$Q_g = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & -6 & -4 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

从上式可知  $RanRQ_g = 2$ ，以  $\underline{w}_1^T = [6 \ 4 \ 3 \ 2]$ ,  $\underline{w}_2^T = [-2 \ 0 \ -1 \ 0]$  作

$$S = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$SU = I_2$$

(1) 选择  $S'$  使  $\begin{bmatrix} S \\ S' \end{bmatrix}$  非奇异，再由其逆距阵  $\begin{bmatrix} S \\ S' \end{bmatrix}^{-1} = [U \ U']$  即可容易地求出  $U$ 。

$$\text{可得 } U = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以，求出最小实现为

$$A_0 = SAU = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = SB = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_0 = CU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

下面研究和上述方法相对偶的方法。

(2) 先求出完全能观测系统，然后取出能控部分的方法

设  $W(s)$  的第  $i$  行

$$\underline{w}_i^T(s) = \left[ \frac{P_{i1}(s)}{\phi_{i1}(s)}, \frac{P_{i2}(s)}{\phi_{i2}(s)}, \dots, \frac{P_{ir}(s)}{\phi_{ir}(s)} \right]$$

设其分母的最小公倍因子为  $\phi_i(s)$ ，则上式可表示为

$$\underline{w}_i^T(s) = \frac{1}{\phi_i(s)} [P'_{i1}(s), P'_{i2}(s), \dots, P'_{ir}(s)]$$

其中第  $j$  列为：

$$\begin{aligned} P'_{ij} &= \beta_{ij1} s^{n_i-1} + \beta_{ij2} s^{n_i-2} + \dots + \beta_{ijn_i-1} s + \beta_{ijn_i} \quad (j=1,2,\dots,r) \\ \phi_i(s) &= s^{n_i} + \alpha_{i1} s^{n_i-1} + \dots + \alpha_{in_i-1} s + \alpha_{in_i} \end{aligned}$$

求此  $\underline{w}_i^T(s)$  的完全能观测的实现。从式 (3.84) 的对偶关系给出这个实现为

$$A_i = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{0} & -\alpha_{in_i} \\ \hline I_{n_i-1} & -\alpha_{in_i-1} \\ \vdots & \vdots \\ -\alpha_{i1} & -\alpha_{i1} \end{array} \right] \quad B_i = \left[ \begin{array}{cccc} \beta_{i1n_i} & \beta_{i2n_i} & \cdots & \beta_{in_i} \\ \beta_{i1n_i-1} & \beta_{i2n_i-1} & \cdots & \beta_{in_i-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{i11} & \beta_{i21} & \cdots & \beta_{ir1} \end{array} \right] \quad (3.86')$$

$$\underline{C}_i^T = [0 \ 0 \ \cdots \ 1]$$

由此，给出  $W(s)$  的实现为：

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & A_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \underline{C}_1^T & & \mathbf{0} \\ & \underline{C}_2^T & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & \underline{C}_m^T \end{bmatrix} \quad (3.86'')$$

下面进行第二步,由于最小实现是从所给能观实现 $(A, B, C)$ 的能控子系统求出来的,所以,设其能控矩阵

$$\mathcal{Q}_k = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$$

的秩为 $n_0$ ,从 $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ 依次取出线性无关的列向量,记作 $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{n_0}$ ,此时

$$U = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{n_0}]$$

对于 $U$ ,求满足下式

$$SU = I_{n_0} \quad (3.88)$$

的 $S$ ,则有

$$A_C = SAU, \quad B_C = SB, \quad C_C = CU \quad (3.89)$$

于是,就可求出最小实现 $(A_C, B_C, C_C)$ 。

**例 3.29**用例 3.28 中的传递函数阵,用第二种方法求其最小实现。

解:首先从(3.86)式得 $w_1^T(s)$ 实现为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \underline{C}_1^T = [0 \quad 1]$$

$w_2^T(s)$ 的实现为

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{C}_2^T = [0 \quad 1]$$

所以, $w(s)$ 的完全能观实现为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这个实现的能控矩阵

$$\begin{aligned} Q_C &= [B, AB, A^2B, A^3B] \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 3 & -8 & -4 & \dots \\ 4 & 2 & -6 & -3 & \dots \\ -2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -2 & -1 & \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

显然  $\text{Rank } Q_k = 2$ , 作

$$U = [\underline{v}_1, \underline{v}_2] = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$SU = I_2$$

可得

$$S = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以, 求得最小实现为

$$\begin{aligned} A_C &= SAU = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} & B_c &= SB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ C_c &= CU = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

当然也可以将传递函数阵先化为 (3.77) 式或 (3.82) 式所示的形式, 然后将它们进行相应的结构分解, 同样可得到最小实现。

### § 3.8 连续系统离散化对能控性能观性的影响

在结束本章之前, 我们简单地讨论一下连续线性定常系统离散化后能控性和能观性问题。

设系统为

LCD 2014年秋季

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} \\ \underline{y} = C \underline{x} \end{cases} \quad (3.90)$$

现将其时间离散化，当采样方式为通常的等周期采样，采样间隔内具有零阶保持性时，其离散化系统  $\Sigma_T = (G, H, C)$  为

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = G \underline{x}_k + H \underline{u}_k \\ \underline{y}_k = C \underline{x}_k \end{cases} \quad (3.91)$$

其中

$$\begin{cases} G = e^{AT} \\ H = \left[ \int_0^T e^{AT} dt \right] B \end{cases} \quad T - \text{采样周期}$$

下面我们所讨论的问题是当  $\Sigma = (A, B, C)$  完全能控且完全能观时，离散化系统  $\Sigma_T = (G, H, C)$  仍能保持完全能控和完全能观所应满足的条件。显然，这在计算机控制系统中是一个十分重要的问题。

**一、 $\Sigma = (A, B, C)$  和  $\Sigma_T = (G, H, C)$  在能控性能观性上的一些对应关系**

(1) 如果连续时间系统  $\Sigma = (A, B, C)$  是不完全能控（不完全能观）的，则其离散系统  $\Sigma_T = (G, H, C)$  必是不完全能控（不完全能观）的。

(2) 如果连续时间系统  $\Sigma = (A, B, C)$  是完全能控（完全能观）的，则其离散系统  $\Sigma_T = (G, H, C)$  不能保证一定是完全能控（完全能观）的。

(3) 离散化系统  $\Sigma_T = (G, H, C)$  能否保持系连续系统  $\Sigma = (A, B, C)$  的完全能控性（完全能观性）将唯一地取决于采样周期  $T$  的数值选择。

对上述(1)可以证明如下：

**证明：**用反证法。若对于采样周期  $T$ ，其离散化系统是完全能控的。即

$$\text{Rank } [H, GH, \dots, G^{n-1}H] = n$$

于是

LCD 2014年秋季

$$\begin{aligned} n &= \text{Rank} \left[ \int_0^T e^{At} dt B, e^{AT} \int_0^T e^{At} dt B, \dots, e^{AT(n-1)} \int_0^T e^{At} dt B \right] \\ &= \text{Rank} \left[ \int_0^T e^{At} dt [B, e^{AT} B, \dots, e^{AT(n-1)} B] \right] \end{aligned}$$

所以  $\int_0^T e^{At} dt$  可逆，并且

$$\text{Rank} [B, e^{AT} B, \dots, e^{AT(n-1)} B] = n$$

由矩阵函数的性质， $e^{At}$  都可用  $I, A, \dots, A^{n-1}$  的线性组合表示，从而

$$\text{Rank} [B, e^{AT} B, \dots, e^{AT(n-1)} B] \leq \text{Rank} [B, AB, \dots, A^{n-1} B]$$

显然这和  $\Sigma = (A, B, C)$  不可控的题设矛盾，从而其离散系统  $\Sigma_T = (G, H, C)$  必定不可控。

同理可以证明能观性的结论。

对于(2)、(3)的关系，为了有一个感性认识，这里先来讨论一个例子。

**例 3.30** 设连续系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \\ y = [0 \quad 1]x \end{cases}$$

考察其离散化系统的能控性能观测性。

**解：1)**  $\Sigma$  的能控性能观性：

$$Q_k = [b \quad A b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{Rank} Q_k = 2 = n \quad \text{完全能控,}$$

$$Q_g = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{Rank} Q_g = 2 = n \quad \text{完全能观。}$$

所以，原连续系统是全能控完全能观的。

**2)** 求离散化系统  $\Sigma_T$

$$|SI - A| = \begin{vmatrix} S & -1 \\ 1 & S \end{vmatrix} = S^2 + 1 = (S - j)(S + j), \lambda_1 = j, \lambda_2 = -j$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{jt} \\ e^{-jt} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2j} \begin{bmatrix} -j & -j \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cost + j \sin t \\ Cost - j \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cost \\ \sin t \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} G &= e^{AT} = \alpha_0(T)I + \alpha_1(T)A \\ &= \cos T \cdot I + \sin T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} \\ \underline{h} &= \int_0^T e^{At} \underline{b} dt = \int_0^T \begin{bmatrix} Cost & S \sin t \\ -S \cos t & Cost \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^T \begin{bmatrix} Cost \\ -S \cos t \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \sin T \\ \cos T - 1 \end{bmatrix} \\ \underline{C}^T &= [0 \quad 1] \end{aligned}$$

(3) 判断  $\Sigma_T$  的能控性、能观性

$$\begin{aligned} [\underline{h}; G \underline{h}] &= \begin{bmatrix} \sin T & -\sin T + 2 \cos T \sin T \\ \cos T - 1 & \cos^2 T - \sin^2 T - \cos T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{C}^T \\ \underline{C}^T G \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

显然，上述矩阵的是否满秩，唯一取决于  $T$  的数值，可分两种情况：

第一种情况，取  $T = k\pi$  ( $k = 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} Q_k &= [\underline{h}, G \underline{h}] = \begin{bmatrix} \sin k\pi & -\sin k\pi + 2 \cos k\pi \sin k\pi \\ \cos k\pi - 1 & \cos^2 k\pi - \sin^2 k\pi - \cos k\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{bmatrix} \\ Q_g &= \begin{bmatrix} \underline{C}^T \\ \underline{C}^T G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sin k\pi & \cos k\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & * \end{bmatrix} \end{aligned}$$

表明

$$\text{Rank } [\underline{h} \quad G \underline{h}] < n$$

$$\text{Rank } \begin{bmatrix} \underline{C}^T \\ \underline{C}^T G \end{bmatrix} < n$$

所以， $\Sigma_T$  不完全能控，不完全能观。

LCD 2014年秋季

第二种情况，取  $T \neq k\pi$  ( $k = 1, 2, \dots$ )

则  $\cos T \neq \pm 1, \sin T \neq 0$

$$\begin{aligned} |\underline{Q}_k| &= |\underline{h} + \underline{G}\underline{h}| = \begin{vmatrix} \sin T & -\sin T + 2\cos T \sin T \\ \cos T - 1 & \cos^2 T - \sin^2 T - \cos T \end{vmatrix} \\ &= \sin T \cos^2 T - \sin^3 T - \sin T \cos T + \sin T \cos T \\ &\quad - 2\cos^2 T \sin T - \sin T + 2\cos T \sin T \\ &= \sin T (-\sin^2 T - \cos^2 T - 1 - 2\cos T) \\ &= 2\sin T (\cos T - 1) \neq 0 \\ |\underline{Q}_g| &= \begin{vmatrix} \underline{C}^T \\ \underline{C}^T \underline{G} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin T & \cos T \end{vmatrix} = \sin T \neq 0 \end{aligned}$$

所以  $\Sigma_T$  完全能控，完全能观。

上述例子具体地说明了上述对应关系。即  $\Sigma$  能控能观，不能保证  $\Sigma_T$  是完全能控能观。这里唯一的因素是取决于采样周期  $T$  的选择。本例中， $\Sigma_T$  保持完全能控完全能观的条件是：

$$T \neq k\pi \quad (k = 1, 2, \dots)$$

## 二、普遍性的结论：

连续系统  $\Sigma = (A, B, C)$  离散化后  $\Sigma_T (G, H, C)$  保持可控可观性的充分条件是：对  $A$  特征值中有实部相等  $Re(\lambda_i - \lambda_j) = 0$  的根

$$\lambda_i, \lambda_j \quad (i \neq j) \text{ 满足 } T \neq \frac{2k\pi}{Im(\lambda_i - \lambda_j)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

上例中  $A$  特征值为  $\lambda_1 = j, \lambda_2 = -j, Re(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$ ，所以当

$$T \neq \frac{2k\pi}{Im(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad \text{即 } T \neq k\pi \text{ 时能使 } \Sigma_T \text{ 保持其能控性和能观测性。}$$

这与上面得出的结论是一致的。

这里需要说明的是，当  $\lambda_i, \lambda_j$  是实根时，则不论它们相等与否， $T$  的选择不受限制（当然要满足香农定理），只有当特征值中有共轭复根时， $T$  的选择才受到  $T \neq \frac{2k\pi}{Im(\lambda_i - \lambda_j)}$ ， $k = 0, 1, 2, \dots$  的限制。

上述结论这里不作进一步的证明。

## 第四章 线性定常系统的综合

前三章我们着重讨论了状态空间的分析方法。利用这些方法可以分析系统的结构、性能。而综合是分析相反的一个命题。对于给定的一个受控系统  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ ，确定其控制规律，即设计控制器的结构参数，使其控制性能满足事先给定的性能指标，这样一类问题称为系统的综合问题。本章中只限于讨论线性定常系统在常规性能指标下的综合问题，并且只涉及极点配置问题及镇定问题。关于解耦问题，将在单独一章中讨论。

### § 4.1 状态变量反馈和输出反馈

无论在经典控制理论还是在现代控制理论中，反馈都是系统设计的重要方式。但是，由于经典控制理论是用传递函数来描述系统的，因此它只能对输出量进行一定改造后用来作为反馈量。这种方式称为输出反馈，即量测输出量，再由输出的测量值与给定的输入量进行比较后确定闭环系统的控制规律。而在现代控制理论中是用系统的内部状态变量来描述系统特性的，所以除了上述的反馈外，通常采用状态反馈，即利用系统的全部状态变量作为反馈量。

#### 一、输出反馈和状态反馈的基本形式

设线性定常系统为

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \mathbf{A} \underline{x} + \mathbf{B} \underline{u} \\ \underline{y} = \mathbf{C} \underline{x} + \mathbf{D} \underline{u} \end{cases} \quad (4.1)$$

其输入  $\underline{u}$ ，状态变量  $\underline{x}$ ，输出量  $\underline{y}$  的维数分别是  $r, n, m$ ，输出反馈的基本形式如图 4.1 所示。

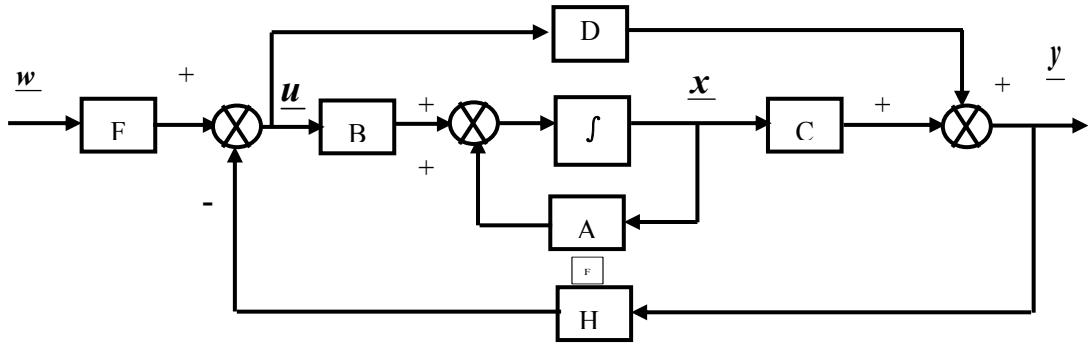


图 4.1

设  $H$  是  $r \times m$  阶矩阵，用  $H \underline{y}$  作为反馈量构成闭环，并对输入量  $\underline{w}$  作变换，变换矩阵为  $F$ ，控制  $\underline{u}$  便成为：

$$\begin{aligned}\underline{u} &= F \underline{w} - H \underline{y} \\ &= F \underline{w} - H(C \underline{x} + D \underline{u}) \\ \underline{u} &= (I + HD)^{-1}(F \underline{w} - HC \underline{x})\end{aligned}\quad (4.2)$$

即可导出闭环系统的方程

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= A \underline{x} + B(I + HD)^{-1}(F \underline{w} - HC \underline{x}) \\ &= [A - B(I + HD)^{-1}HC] \underline{x} + B(I + HD)^{-1}F \underline{w} \\ \underline{y} &= C \underline{x} + D(I + HD)^{-1}(F \underline{w} - HC \underline{x}) \\ &= [C - D(I + HD)^{-1}HC] \underline{x} + D(I + HD)^{-1}F \underline{w}\end{aligned}$$

以下我们假定  $D = 0$ ，这样闭环系统就成为

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = (A - BHC) \underline{x} + BF \underline{w} \\ \underline{y} = C \underline{x} \end{cases}\quad (4.3)$$

显然其传递函数阵为

$$W_{H,F}(s) = C(SI - A + BHC)^{-1}BF \quad (4.4)$$

如果  $F = I$ ，即对输入不作变换，就成为单纯的输出反馈，这时 (4.3) 式，(4.4) 式分别为如下形式：

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = (A - BHC) \underline{x} + B \underline{w} \\ \underline{y} = C \underline{x} \end{cases}\quad (4.5)$$

$$W_H(s) = C(SI - A + BHC)^{-1}B \quad (4.6)$$

状态反馈的基本形式如图 4.2 所示

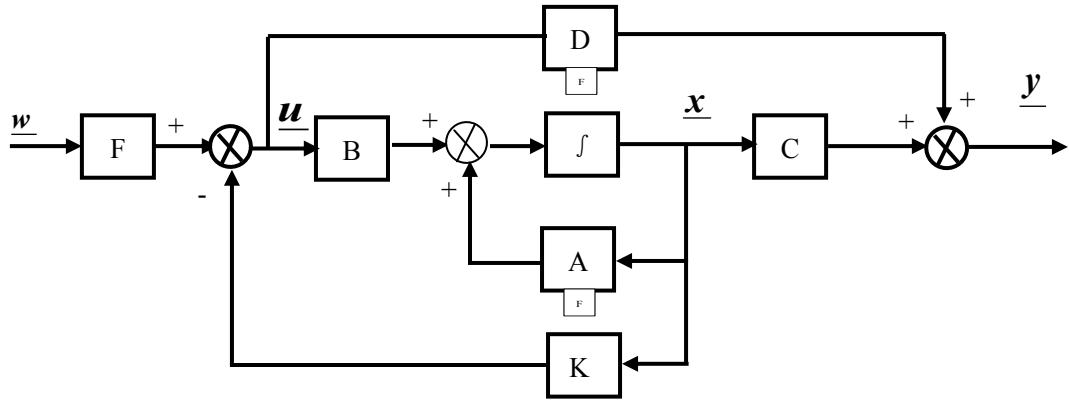


图 4.2

设  $K$  是  $r \times n$  阶矩阵, 用  $K \underline{x}$  作为反馈量构成闭环, 对输入量  $w$  也作  $F$  变换, 则得控制

$$\underline{u} = F \underline{w} - K \underline{x} \quad (4.7)$$

这种反馈方式称状态反馈, 闭环状态方程为:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = (A - BK) \underline{x} + BF \underline{w} \\ \underline{y} = (C - DK) \underline{x} + DF \underline{w} \end{cases} \quad (4.8)$$

当  $D = 0$  时, 闭环方程为

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = (A - BK) \underline{x} + BF \underline{w} \\ \underline{y} = C \underline{x} \end{cases} \quad (4.9)$$

其传递函数为:

$$W_{K,F}(s) = C(SI - A + BK)^{-1} BF \quad (4.10)$$

若  $F = I$ , 则 (4.9), (4.10) 两式分别为:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = (A - BK) \underline{x} + B \underline{w} \\ \underline{y} = C \underline{x} \end{cases} \quad (4.11)$$

$$W_K(s) = C(SI - A + BK)^{-1} B \quad (4.12)$$

从 (4.6) 式和 (4.12) 式可以看出, 输出反馈和状态反馈均可改变系统的极点。但是反馈的引入并不增加新的状态变量, 即闭环系统和开环系统具有相同的阶数。

比较 (4.5) 式和 (4.11) 式可以看出, 当  $K = HC$  时, 状态反馈和输出反馈的控制效果是一样的, 凡是输出反馈阵  $H$  所能达到的效果, 通过状态反馈阵  $K = HC$  来代替, 可达到同样的控制效果。但是反过来, 由于已知  $K$ 、 $C$  时  $H$  阵不一定有解, 这说明状态反馈有可能

获得比输出反馈更好的效果，输出反馈仅仅是状态反馈的特殊情况。由（4.11）式可知，适当地选择反馈阵  $\mathbf{K}$ ，可以改善系统的性能或者满足一定的设计指标。

### 例 4.1 设有二阶系统

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c^T = [\beta_1, \quad \beta_2]$$

分析状态反馈对系统性能的影响。

解： $\Sigma(A, b, c^T)$  的传递函数为：

$$w(s) = \frac{\beta_2 s + \beta_1}{s^2 + a_2 s + a_1}$$

取状态反馈  $\underline{k}^T = [k_1, k_2]^T$ ,  $F = I$

$$\text{则 } A - \underline{b}\underline{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(a_1 + k_1) & -(a_2 + k_2) \end{bmatrix}$$

闭环传递函数为：

$$w_K(s) = \frac{\beta_2 s + \beta_1}{s^2 + (a_2 + k_2)s + (a_1 + k_1)}$$

$$\text{则: } \lambda_{1,2} = \frac{-(a_2 + k_2) \pm \sqrt{(a_2 + k_2)^2 - 4(a_1 + k_1)}}{2}$$

显然可见，只要适当地选择  $k_1, k_2$ ，闭环的极点可以任意配置，如果

$$k_1 = \frac{(a_2 + k_2)^2}{4} - a_1$$

闭环就有两个相同的极点，并且在  $k_2 > -a_2$  时是稳定的；如果

$$k_1 < \frac{(a_2 + k_2)^2}{4} - a_1$$

闭环就有两个相异的实极点；如果

$$k_1 > \frac{(a_2 + k_2)^2}{4} - a_1$$

闭环成为振荡系统，在  $k_2 > -a_2$  时系统稳定，系统的稳态偏差为

$$e_p = 1 - \frac{\beta_1}{a_1 + k_1}, \quad e_v = t(1 - \frac{\beta_1}{(a_1 + k_1)}) + \frac{\beta_1(a_2 + k_2) - \beta_2(a_1 + k_1)}{(a_1 + k_1)^2}$$

若要求  $e_p = 0$ , 就需  $k_1 = -a_1 + \beta_1$ , 这时

$$e_v = \frac{a_2 + k_2 - \beta_2}{\beta_1}$$

若还要求  $e_v = 0$ , 就需  $k_2 = -a_2 + \beta_2$ , 那么自然要求  $\beta_2 > 0$ , 否则系统就不稳定了。

## 二、状态反馈、输出反馈对系统能控性和能观性的影响

为了简单起见, 我们讨论在  $D = 0$ , 及  $F = I$  的条件下反馈对能控、能观性的影响, 这并不失去一般性。此时原系统表示为

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} \\ \underline{y} = C \underline{x} \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\text{令 } \underline{u} = \underline{w} - K \underline{x} \quad (4.14)$$

闭环系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = (A - BK) \underline{x} + B \underline{w} \\ \underline{y} = C \underline{x} \end{cases} \quad (4.15)$$

### 1. 状态反馈不影响系统的能控性

计算式 (4.15) 的能控性矩阵, 因为

$$(A - BK)B = AB - BKB = AB - BD \quad (\text{这里 : } D = KB)$$

$$(A - BK)^2 B = (A - BK)(AB - BD) = A^2 B + (B, AB \text{ 的线性组合})$$

$$(A - BK)^3 B = (A - BK)(A^2 B + (B, AB \text{ 的线性组合}))$$

$$= A^3 B + (B, AB, A^2 B \text{ 的线性组合})$$

⋮

$$(A - BK)^{n-1} B = A^{n-1} B + (B, AB, A^2 B, \dots, A^{n-2} B \text{ 的线性组合})$$

$$\text{故有 } [B \quad (A - BK)B \quad \cdots \quad (A - BK)^{n-1} B]$$

$$= [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1} B] \begin{bmatrix} I & * & \cdots & * \\ 0 & I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & I \end{bmatrix}$$

上式中最后一个矩阵为非奇异矩阵, 因此有

$$\text{rank } [B \quad (A - BK)B \cdots (A - BK)^{n-1} B] = \text{rank } [B \quad AB \cdots A^{n-1} B] \quad (4.16)$$

式(4.16)表明状态反馈不影响系统能控性,即若原系统是完全能控的,加上任意状态反馈后,所得到的闭环系统也完全能控。若原系统是不完全能控的,不论加上什么样的状态反馈,所得到的闭环系统仍然不完全能控。

## 2. 状态反馈不一定保持系统的能观性

状态反馈有可能改变系统的能观性,即若原系统完全能观,在某些状态反馈作用下,所得的闭环系统可能是不完全能观的。若原系统不完全能观,在某些状态反馈作用下,所得的闭环系统可能成为完全能观。对此,举例可以说明。

**例 4.2** 系统运动方程为

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad 1] \underline{x}$$

显然该系统不完全能观,若取状态反馈  $\underline{k}_1 = [1 \quad 1]$  时,闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = (A - \underline{b}\underline{k})\underline{x} + \underline{b}w = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ y = [0 \quad 1] \underline{x} \end{cases}$$

显然该系统完全能观。若取状态反馈  $\underline{k}_2 = [0 \quad 1]$  时,闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = (A - \underline{b}\underline{k})\underline{x} + \underline{b}w = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ y = [0 \quad 1] \underline{x} \end{cases}$$

此时该系统仍然不完全能观。

当  $y = [1 \quad 1] \underline{x}$  时,系统是完全能观的,若取  $\underline{k}_3 = [1 \quad 2]$  时,闭环系统不完全能观,若取  $\underline{k}_4 = [1 \quad 1]$  时,闭环系统仍是完全能观的。

当  $y = [1 \quad 0] \underline{x}$  时,系统完全能观,加任意的状态反馈后所得的闭环系统仍是完全能观的。

## 3. 输出反馈可保持系统的能控性和能观性

因为对任一输出反馈系统都可以对应地构成等价的一个状态反馈系统,而状态反馈保持能控性,从而证明了输出反馈可保持能控性。再证明输出反馈可保持能观性。带有输出反馈的状态空间表达式为

LCD 2014年秋季

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = (A - BHC) \underline{x} + B \underline{w} \\ \underline{y} = C \underline{x} \end{cases} \quad (4.17)$$

显然只要证明下式成立即可。

$$rank \begin{bmatrix} C \\ C(A - BHC) \\ \vdots \\ C(A - BHC)^{n-1} \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

证明方法与上面证明状态反馈能保持能控性的方法类似，读者可自行证明。

可见我们可以给出这样的结论：状态反馈不影响系统的能控性但不一定保持系统的能观性，输出反馈不影响系统的能控性和能观性。

## § 4.2 单变量系统的极点配置

控制系统的各种特性或各种品质指标，在很大程度上是由系统的极点决定的。因此，系统的综合形式之一，可以在  $S$  平面上给定一组所希望的极点，通过状态反馈阵  $k$  的选择，使闭环系统  $\Sigma_k(A - \underline{b}\underline{k}^T, \underline{b}, \underline{c}^T)$  的极点恰好处于希望的一组极点的位置上。由于希望极点位置有任意性，因此极点的配置应当做到具有任意性。这就是所谓极点配置问题。

### 一、希望极点的选取

对于希望的极点选取，实际上是确定综合目标的问题。这里仅提出一般应了解的方面。

- (1) 对于  $n$  维受控系统，应当且只应当指定  $n$  个希望的极点。
- (2) 对希望极点位置的选取，需要研究它们对系统品质的影响，以及它们与零极点分布状况的关系，从工程实际需要出发加以解决。

(3) 希望极点可以是实数或共轭复数对。

工程实际的需要要包括抗干扰能力，灵敏度等，所以极点位置的选取实际上是个复杂的工作。

### 二、极点配置定理

对单输入单输出系统  $\Sigma(A, \underline{b}, \underline{c}^T)$  在  $S$  平面上预先任意指定  $n$  个

极点，则存在着状态反馈律：

$$\underline{u}(t) = -\underline{k}^T \underline{x}(t) + \underline{w}(t) \quad (4.19)$$

使闭环系统  $\Sigma_k(A - \underline{b}\underline{k}^T, \underline{b}, \underline{c}^T)$  极点位于预先指定的位置上的充分必要条件是原系统  $\Sigma(A, \underline{b}, \underline{c}^T)$  完全能控。

**证明：**上面我们已经证明了状态反馈不影响系统的能控性，因此可以说若一个系统不完全能控，那么状态反馈不能改变系统的不能控模态。这就证明了系统可以任意配置极点的必要条件是受控系统  $\Sigma(A, \underline{b}, \underline{c}^T)$  是完全能控的。

下面证明充分性。

由于  $\Sigma(A, \underline{b}, \underline{c}^T)$  为能控的，那么一定可以通过非奇异变换，化成能控规范型  $\Sigma = (\tilde{A}, \tilde{\underline{b}}, \tilde{\underline{c}}^T)$ ，其中

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & \mathbf{0} \\ -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_n & \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{b}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \tilde{\underline{c}}^T &= [\beta_1, \dots, \beta_n] \end{aligned} \quad (4.20)$$

对于状态反馈阵  $\tilde{\underline{k}}^T = [\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_n]$ ，有

$$\tilde{A} - \tilde{\underline{b}}\tilde{\underline{k}}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & \mathbf{I}_{n-1} \\ -(p_1 + \tilde{k}_1) & -(p_2 + \tilde{k}_2) & \cdots & -(p_n + \tilde{k}_n) & \end{bmatrix}$$

可见状态反馈系统  $\Sigma_k = (\tilde{A} - \tilde{\underline{b}}\tilde{\underline{k}}^T, \tilde{\underline{b}}, \tilde{\underline{c}}^T)$  仍为能控标准型。这样状态反馈系统的特征多项式为：

$$f(s) = \left| sI - (\tilde{A} - \tilde{\underline{b}}\cdot\tilde{\underline{k}}^T) \right| = s^n + (p_n + \tilde{k}_n)s^{n-1} + \cdots + (p_1 + \tilde{k}_1) \quad (4.21)$$

假定任意给定的极点分布为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，则希望的特征多项式为

$$f^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + \alpha_n^* s^{n-1} + \alpha_{n-1}^* s^{n-2} + \cdots + \alpha_1^* \quad (4.22)$$

比较 (4.21) 式，(4.22) 式，可知

$$p_i + \tilde{k}_i = \alpha_i^* \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

则  $\tilde{k}_i = \alpha_i^* - p_i$

所以  $\tilde{\underline{k}}^T = [\alpha_1^* - P_1, \alpha_2^* - P_2, \dots, \alpha_n^* - P_n]$  (4.23)

而原系统  $\Sigma = (A, b, c^T)$  的线性反馈律应为:

$$u = w - \underline{k}^T \underline{x}$$

由  $\tilde{\underline{x}} = T^{-1} \underline{x}$ , 即  $\underline{x} = T \tilde{\underline{x}}$  代入上式

$$u = w - \underline{k}^T T \tilde{\underline{x}}$$

所以  $\tilde{\underline{k}}^T = \underline{k}^T T$  即  $\underline{k}^T = \tilde{\underline{k}}^T T^{-1}$

由于线性非奇异变换不改变系统的特征多项式(4.21), 所以  $\underline{k}$  正是所要求的反馈增益向量。上面只是对单输入系统作了证明, 不难看到, 定理对多输入系统也是成立的。

上述证明过程也给出了单变量系统极点配置的方法, 现归纳如下:

- (1) 对于给定的系统  $\Sigma = (A, b)$  化为能控标准型  $\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}, \tilde{b})$ ;
- (2) 导出系统  $\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}, \tilde{b})$  的特征多项式, 它也是原系统的特征多项式:

$$f(s) = s^n + P_n s^{n-1} + \dots + P_1$$

- (3) 根据给定的极点分布  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  导出希望的闭环特征多项式:  $f^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + \alpha_n^* s^{n-1} + \dots + \alpha_1^*$

- (4) 确定能控标准型  $\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}, \tilde{b})$  的状态  $\tilde{\underline{x}}$  的反馈向量:

$$\tilde{\underline{k}}^T = [\alpha_1^* - P_1, \alpha_2^* - P_2, \dots, \alpha_n^* - P_n]$$

- (5) 原系统  $\Sigma = (A, b)$  的状态  $\underline{x}$  的反馈阵

$$\underline{k}^T = \tilde{\underline{k}}^T T^{-1}$$

- (6) 输入变换阵  $F$  对单变量系统是标量, 可由综合指标中对系统静态误差要求来确定。

当然, 具体综合某个特定系统的状态反馈不一定完全遵照上述步骤, 可根据具体问题有所改变。

**例 4.3** 已知图 4.3(a) 所示的受控系统，其传递函数为

$$w(S) = \frac{0.0139}{S(0.167S + 1)(0.083S + 1)} = \frac{1}{S(S + 6)(S + 12)}$$

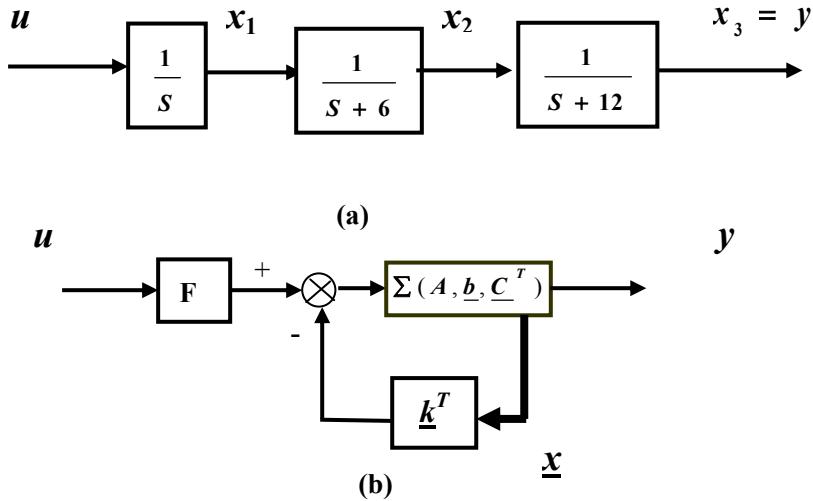


图 4.3

综合指标为：

$$\text{输出超调量 } M_p \leq 5\%$$

$$\text{峰值时间 } t_p \leq 0.5 \text{ 秒}$$

$$\text{静态误差 } e_p = 0, e_v = 0.2$$

**解：**考虑到综合指标既有动态要求，又有静态要求，所以采用状态反馈和输入变换相结合的形式，即如图 4.3 (b) 所示。

(1) 将给定指标化为希望极点，确定希望模型。显然希望极点数  $n = 3$ 。现在这样选取：一对为主导极点对  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ ，另一个为远方极点  $\lambda_3$ ，如图 4.4 所示。

可以认为动态特性主要由主导极点决定，而远方极点只有微小的影响，主导极点对构

成二阶系统模型，有关系式：  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \omega_n, \theta = \cos^{-1} \zeta$

其中  $\zeta$ ：阻尼系数，

$\omega_n$ ：自然振动频率

由于系统性能主要由主导极点对决定，所以按综合指标先行决定主导极点对  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ 。为此，利用二阶模型关系式：

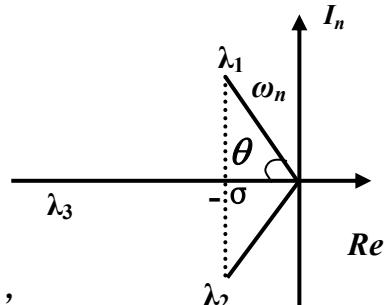


图 4.4

$$\begin{cases} M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 5\% \\ t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \leq 0.5 \text{秒} \end{cases}$$

来求  $\zeta$  和  $\omega_n$

利用  $M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 5\%$  求  $\zeta$

则  $\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2} \geq 3.14$  从而有

$$\zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 , \quad \text{于是选取 } \zeta = 0.707$$

由  $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \leq 0.5$  秒求  $\omega_n$

$$\text{则 } t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_n \frac{1}{\sqrt{2}}} \leq 0.5$$

$$\text{从而有 } \omega_n \geq \frac{\pi}{0.5 \times 0.707} \doteq 9 , \quad \text{选 } \omega_n = 10$$

这样可定出主导极点对：

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\omega_n \cos \theta \pm j\omega_n \sin \theta \\ &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = -7.07 \pm j7.07 \end{aligned}$$

而远方极点  $\lambda_3$  应该选择得使其和原点距离远大于  $|\lambda_1|$ ，现取  $\lambda_3 = -10 |\lambda_1| = -100$ 。

于是希望的闭环系统特征多项式为

$$\begin{aligned} f^*(s) &= (s + 100)(s + 7.07 - j7.07)(s + 7.07 + j7.07) \\ &= (s + 100)(s^2 + 14.1s + 100) \\ &= s^3 + 114.1s^2 + 1510s + 10000 \end{aligned}$$

(2) 校核模型的静态指标，确定变换放大器系数  $F$ ；因为原系统无零点，所以闭环系统的传递函数为

$$w_k(s) = \frac{F}{f^*(s)}$$

由位置误差定义

LCD 2014年秋季

$$e_p = \lim_{t \rightarrow \infty} |1 - y_p(t)| = \lim_{s \rightarrow 0} \left| S \left( \frac{1}{S} - \frac{w_k(s)}{S} \right) \right|$$

$$= \left| 1 - \frac{F}{\alpha_1^*} \right| = 0 \quad (\text{因为 } e_p = 0)$$

所以， $F = \alpha_1^* = 10000$

再校核速度误差  $e_v$  是否满足要求

$$e_v = \lim_{t \rightarrow \infty} |t - y_t(t)| = \lim_{s \rightarrow 0} \left| S \left( \frac{1}{S^2} - \frac{w_k(s)}{S^2} \right) \right|$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{1 - w_k(s)}{S} \right|$$

因为

$$1 - w_k(s) = 1 - \frac{F}{f^*(s)}$$

$$= 1 - \frac{10000}{S^3 + 114.1S^2 + 1510S + 10000}$$

$$= \frac{S^3 + 114.1S^2 + 1510S}{S^3 + 114.1S^2 + 1510S + 10000}$$

所以

$$e_v = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{S^2 + 114.1S + 1510}{S^3 + 114.1S^2 + 1510S + 10000} \right) = 0.1510 < 0.2$$

满足要求。

(3) 确定系统的状态空间表达式并化为能控标准型。原系统的一个实现为  $\Sigma(A, \underline{b}, \underline{c}^T)$ , 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{c}^T = [0, 0, 1]$$

可求得变换阵 T

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -12 \\ 1 & -18 & 144 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 72 & 18 & 1 \\ 12 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

LCD 2014年秋季

得能控标准型  $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{b}, \underline{c}^T)$

$$\text{其中 } \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -72 & -18 \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{c}^T = [1 \ 0 \ 0]$$

(4) 确定能控标准型  $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{b}, \underline{c}^T)$  的状态反馈阵  $\tilde{k}^T$ 。

$$\text{令 } \tilde{k}^T = [\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3]$$

$$\text{则 } \tilde{k}_1 = \alpha_1^* - p_1 = 10000 - 0 = 10000$$

$$\tilde{k}_2 = \alpha_2^* - p_2 = 1510 - 72 = 1438$$

$$\tilde{k}_3 = \alpha_3^* - p_3 = 114.1 - 18 = 96.1$$

(5) 确定对  $\Sigma(A, b, \underline{c}^T)$  的状态反馈  $\underline{k}^T$

$$\underline{k} = \tilde{k} T^{-1}$$

$$= [10000, 1438, 96.1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -12 \\ 1 & -18 & 144 \end{bmatrix} \\ = [96.1, -291.8, 6582.4]$$

(6) 画出方块图如下:

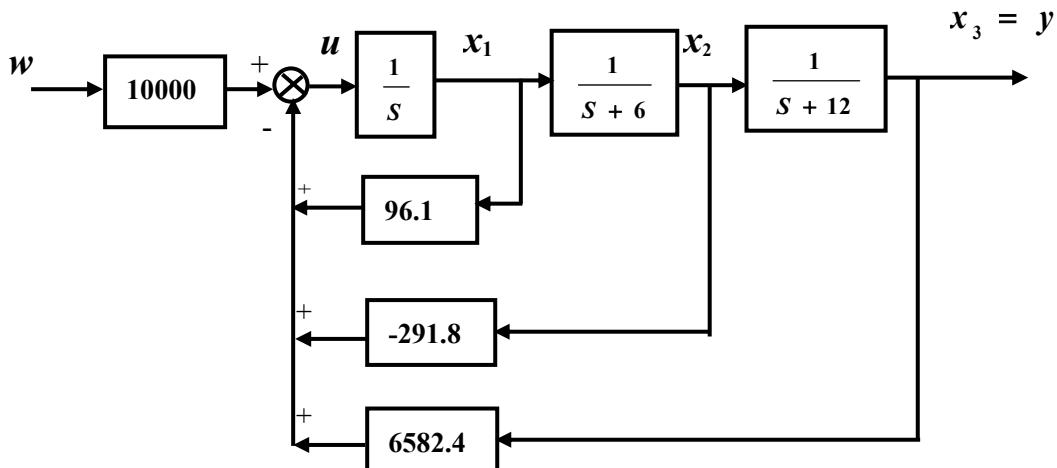


图 4.5

**例 4.4** 在第一章中，我们已经得到了倒置摆的状态方程为：

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

其特征多项式是

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^4 - 11\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 11)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \sqrt{11}, \quad \lambda_4 = -\sqrt{11}$$

系统很不稳定，这和人们从物理意义上预料的一样，现在要设计状态反馈，使系统稳定，并且使  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_{3,4} = -1 \pm j$ 。

解：

(1) 检查能控性

$$Q_k = [\underline{b}, A\underline{b}, A^2\underline{b}, A^3\underline{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -11 \\ -1 & 0 & -11 & 0 \end{bmatrix}$$

因为  $|Q_k| = 100$ ,  $\text{Rank } Q_k = 4$ , 系统完全能控。

(2)化为能控标准型或直接计算，本题采用后者，所以本步骤省略。

(3)求闭环系统的特征多项式

$$\text{令 } \underline{k}^T = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$$

$$f_k(S) = |S\underline{I} - (A - \underline{b}\underline{k}^T)|$$

$$= \left| S\underline{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [k_1, k_2, k_3, k_4] \right|$$

$$= \begin{vmatrix} S & -1 & 0 & 0 \\ k_1 & S + k_2 & 1 + k_3 & k_4 \\ 0 & 0 & S & -1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 - 11 & S - k_4 \end{vmatrix}$$

$$= S^4 + (k_2 - k_4)S^3 + (k_1 - k_3 - 11)S^2 - 10k_2S - 10k_1$$

(4)期望的特征多项式为

$$\begin{aligned}f^*(S) &= (S+1)(S+2)(S+1+j)(S+1-j) \\&= S^4 + 5S^3 + 10S^2 + 10S + 4\end{aligned}$$

上述两式对应项系数应相等。

即  $k_1 = -0.4, k_2 = -1, k_3 = -21.4, k_4 = -6$

所以  $\underline{k}^T = [-0.4, -1, -21.4, -6]$

(5)画出反馈系统模拟结构图

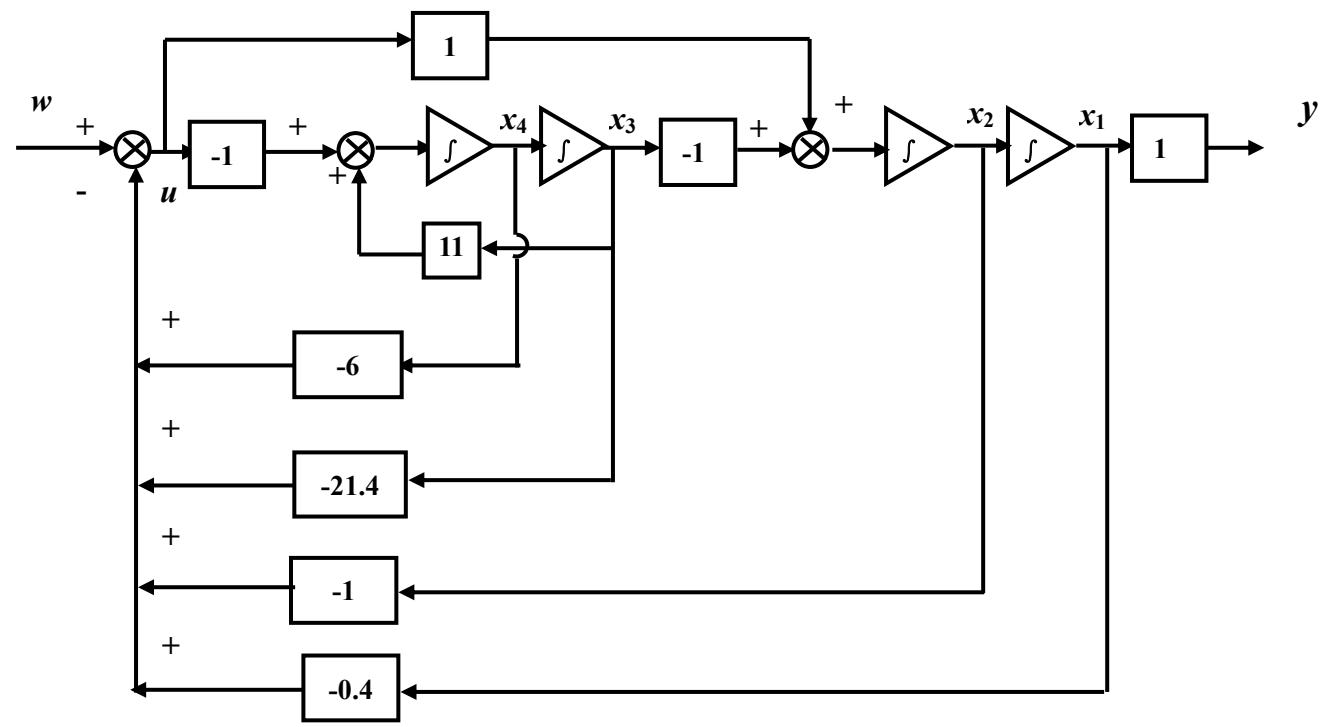


图 4.6

LCD 2014年秋季

### § 4.3 多变量系统的极点配置

#### 一、多变量系统状态反馈出现的新问题

设多变量系统

$$\dot{\underline{z}} = \Lambda \underline{z} + \mathbf{B}_1 \underline{u} \quad (4.24)$$

其中  $\Lambda$  为对角线矩阵 (原方程假定已对角化)

$$\Lambda = \text{diag} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

则  $|S\mathbf{I} - \Lambda| = (S - \lambda_1)(S - \lambda_2) \cdots (S - \lambda_n)$  即为该系统的特征多项式。

设

$$\underline{u} = \underline{w} - \mathbf{K}_1 \underline{z} \quad (4.25)$$

其中  $\mathbf{K}_1$  为  $r \times n$  阵, 代入 (4.24) 式, 则得:

$$\dot{\underline{z}} = (\Lambda - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1) \underline{z} + \mathbf{B}_1 \underline{w}$$

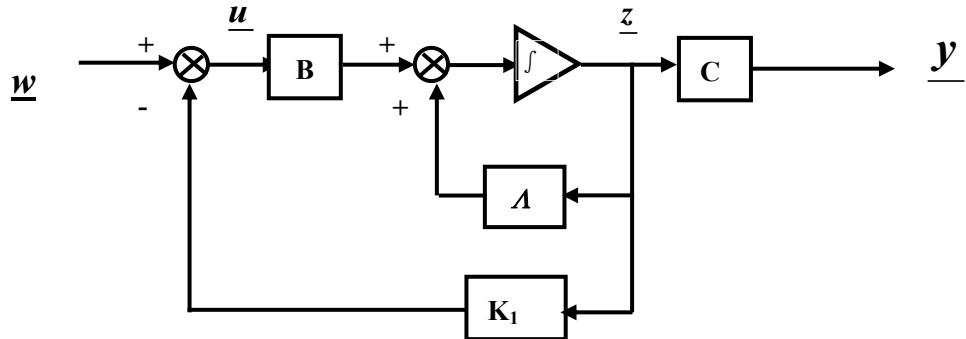


图 4.7

闭环系统的特征多项式为

$$f_K(s) = |S\mathbf{I} - (\Lambda - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1)|$$

希望的极点分布为  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ , 则其特征多项式为

$$f^*(s) = (S - \rho_1)(S - \rho_2) \cdots (S - \rho_n) \quad (4.26)$$

因为  $\mathbf{K}_1$  是  $r \times n$  矩阵, 若采用单变量系统的设计  $\mathbf{K}_1$  的老办法, 就只能有  $n$  个方程, 因此确定不了  $\mathbf{K}_1$ , 所以对多变量系统, 选择  $\mathbf{K}_1$  的自由度大了, 必须采用新的办法。

多变量系统的极点配置方法很多, 这里仅介绍其中的一种, 即

所谓双向量法。

## 二、双向量法

设原系统为

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} \\ \underline{y} = C \underline{x} \end{cases} \quad (4.27)$$

将 (4.27) 化为对角标准型

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}} = \Lambda \underline{z} + B_1 \underline{u} \\ \underline{y} = C_1 \underline{z} \end{cases} \quad (4.28)$$

令  $\underline{u} = \underline{w} - K_1 \underline{z}$

则  $\dot{\underline{z}} = (\Lambda - B_1 K_1) \underline{z} + B_1 \underline{w}$

上式中  $K_1$  为  $r \times n$  阵，设

$$K_1 = \underline{f} \underline{d}^T \quad (4.29)$$

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_2 \\ \vdots \\ \underline{f}_r \end{bmatrix}, \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \\ \vdots \\ \underline{d}_n \end{bmatrix}$$

则闭环系统的特征多项式为：

$$\begin{aligned} f_K(S) &= |S\mathbf{I} - \Lambda + B_1 K_1| = |S\mathbf{I} - \Lambda + B_1 \underline{f} \underline{d}^T| = |(S\mathbf{I} - \Lambda)I + (S\mathbf{I} - \Lambda)(S\mathbf{I} - \Lambda)^{-1} B_1 \underline{f} \underline{d}^T| \\ &= |S\mathbf{I} - \Lambda| |I + (S\mathbf{I} - \Lambda)^{-1} B_1 \underline{f} \underline{d}^T| \end{aligned}$$

设希望极点为  $\rho_i, i = 1, 2, \dots, n$ ，则希望的特征多项式为：

$$f^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \rho_i)$$

令  $f_K(s) = f^*(s)$  即

$$\prod_{i=1}^n (s - \rho_i) = |S\mathbf{I} - \Lambda| |I + (S\mathbf{I} - \Lambda)^{-1} B_1 \underline{f} \underline{d}^T|$$

又令  $\prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = |S\mathbf{I} - \Lambda| \quad (\lambda_i \text{ 为原系统的极点}, i = 1, 2, \dots, n)$

则  $\prod_{i=1}^n (s - \rho_i) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) |I + (S\mathbf{I} - \Lambda)^{-1} B_1 \underline{f} \underline{d}^T| \quad (4.30)$

设  $P$  为  $n \times m$  矩阵,  $Q$  为  $m \times n$  矩阵, 可以证明恒等式:

$$|I_n - PQ| = |I_m - QP|$$

利用该恒等式, 可得

$$\left| I + \underbrace{(SI - \Lambda)^{-1}}_{n \times 1} \underbrace{B_1 f}_{1 \times n} \underline{d}^T \right| = \left| I + \underbrace{\underline{d}^T}_{1 \times n} \underbrace{(SI - \Lambda)^{-1} B_1 f}_{n \times 1} \right| \quad (4.31)$$

$$\text{因为 } (SI - \Lambda)^{-1} = \text{diag} \left( \frac{1}{S - \lambda_1}, \frac{1}{S - \lambda_2}, \dots, \frac{1}{S - \lambda_n} \right) \quad (4.32)$$

设定  $f$ , 即得

$$\underbrace{B_1 f}_{n \times r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

将 (4.32) 式, (4.33) 式代入 (4.31) 式, 得

$$\begin{aligned} & \left| I + (SI - \Lambda)^{-1} B_1 f \underline{d}^T \right| = \left| I + \underline{d}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{S - \lambda_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{S - \lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \right| \\ &= 1 + \left( \frac{d_1 r_1}{S - \lambda_1} + \frac{d_2 r_2}{S - \lambda_2} + \dots + \frac{d_n r_n}{S - \lambda_n} \right) = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{d_i r_i}{S - \lambda_i} \end{aligned} \quad (4.34)$$

将 (4.34) 式代入 (4.30) 式

$$\prod_{i=1}^n (S - \rho_i) = \prod_{i=1}^n (S - \lambda_i) \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{d_i r_i}{S - \lambda_i} \right)$$

所以

$$\sum_{i=1}^n \frac{d_i r_i}{S - \lambda_i} = \frac{\prod_{i=1}^n (S - \rho_i)}{\prod_{i=1}^n (S - \lambda_i)} - 1 \quad (4.35)$$

上式中  $r_i$  在设定  $f$  后由式 (4.33) 求得。 $\rho_i$  为设计要求, 已经给定,  $\lambda_i$  是已知的, 所以  $d_i$  可以求出, 进一步由 (4.29) 式求得  $K_1$ 。

$$\text{例 4.4} \text{ 已知 } \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \underline{u}$$

要求:  $\rho_1 = -3, \rho_2 = -3$ , 求反馈阵  $K$ 。

解 (1) 化原系统为对角标准型, 计算开环极点

$$|\lambda I - A| = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

并求得变换矩阵

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

令  $\underline{x} = T \underline{z}$ , 得

$$\dot{\underline{z}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{z} + \begin{bmatrix} 13 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \underline{u}$$

$$(2) \text{ 计算 } \sum_{i=1}^n \frac{d_i r_i}{s - \lambda_i}$$

$$\prod_{i=1}^2 (s - \lambda_i) = (s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2$$

$$\prod_{i=1}^2 (s - \rho_i) = (s + 3)^2 = s^2 + 6s + 9$$

$$\sum_{i=1}^2 \frac{d_i r_i}{s - \lambda_i} = \frac{\prod_{i=1}^2 (s - \rho_i)}{\prod_{i=1}^2 (s - \lambda_i)} - 1 = \frac{s^2 + 6s + 9}{s^2 + 3s + 2} - 1 = \frac{3s + 7}{s^2 + 3s + 2} = \frac{4}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

所以  $d_1 r_1 = 4, d_2 r_2 = -1$

$$(3) \text{ 求 } K, \text{ 假设 } \underline{f} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 \underline{f} = \underline{r} = \begin{bmatrix} 13 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = \frac{d_1 r_1}{r_1} = \frac{4}{-10} = -\frac{2}{5}$$

$$d_2 = \frac{d_2 r_2}{r_2} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

所以  $K_1 = \underline{f} \underline{d}^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{4} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

而  $K = K_1 \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{19}{20} & \frac{3}{2} \\ -\frac{19}{20} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

(4) 验证

$$\begin{aligned} |SI - (A - BK)| &= \left| SI - \left[ \begin{array}{cc} 4 & 10 \\ -3 & -7 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{c} \frac{19}{20} \\ -\frac{19}{20} \end{array} \right| = \left[ \begin{array}{cc} \frac{19}{20} & \frac{3}{2} \\ -\frac{19}{20} & -\frac{3}{2} \end{array} \right] \\ &= \left| SI - \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -4.9 & -10 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} S - 4 & -10 \\ 4.9 & S + 10 \end{vmatrix} = (S + 3)^2 \end{aligned}$$

所以  $\rho_1 = \rho_2 = -3$ ，满足要求。

上例也可以看出，选择  $\underline{f}$  不能使  $B_1 \underline{f}$  出现零元素，否则  $r_i$  为零， $d_i$  就得不到。

从上面可以知道，对单变量系统，完成希望极点配置任务的状态反馈阵  $\underline{k}^T$  是唯一的，而对多变量系统其  $K$  阵不是唯一的。对单变量系统，引入状态反馈任意配置极点的同时，并不改变系统的零点，除非故意制造零极相消，而对多变量系统引入状态反馈后其零点可能会改变，故在实际应用中必须注意。

由极点配置定理可知：系统完全能控是闭环极点任意配制的条件，当不满足条件时，显然不能任意配置闭环极点，但有可能配置一些特定的极点组。由于状态反馈不能改变系统的不能控模态，当系统不完全能控时，若希望的极点组中包含了系统所有的不能控模态时，这组希望极点也是可以配置的。

## § 4.4 带输出误差积分的状态反馈（稳态特性）

### 一、问题的提出

上面我们看到，采用状态反馈，可以使系统的极点处于指定的位置上，因而也就决定了系统的瞬态特性。现在，来分析另一方面的问题，即稳态特性。

设如下系统

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + B \underline{u}(t) + \underline{d}(t) \\ \underline{y}(t) = C \underline{x}(t) \end{cases} \quad (4.36)$$

这里  $\underline{u}(t)$  为控制向量， $\underline{d}(t)$  是未知的  $n$  维扰动输入向量，我们希望输出  $\underline{y}(t)$  尽可能地接近于一个参考输入（或期望输入）  $\underline{y}_r(t)$ ，假定 (4.36) 式对输入  $\underline{u}$  是完全能控的。

对于一个具有恒定参考输入和恒定扰动输入的系统，如果保证控制输入中包含有正比于误差的积分项，就可获得理想的稳定精度。如图 4.8 所示。

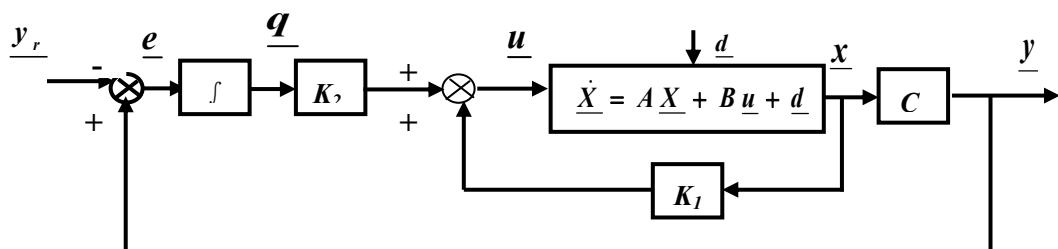


图 4.8 所示。

设  $\underline{y}_r, \underline{d}$  均为阶跃函数的情况下，在这种情况下，控制作用应包含这样一项，它正比于

$$\begin{aligned}\underline{q}(t) &= \int_0^t \underline{e}(t) dt = \int_0^t [\underline{y}(t) - \underline{y}_r(t)] dt \\ \dot{\underline{q}}(t) &= \underline{e}(t) = C \underline{x}(t) - \underline{y}_r(t) \quad (\underline{q}(0) = \mathbf{0})\end{aligned}$$

这里  $\underline{e}(t)$  为误差向量。

## 二、复合系统

$$\text{令 } \underline{u} = K_1 \underline{x} + K_2 \underline{q}$$

我们把  $\underline{q}$  也当作为一个状态向量，这样可以把原系统 (4.36) 式增广如下：

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{q}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \underline{u} + \begin{bmatrix} d \\ -y_r \end{bmatrix} \\ \underline{y} &= [C \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{q} \end{bmatrix} \quad (4.37)\end{aligned}$$

## 三、复合系统的能控性

首先提出的问题是：新系统对输入  $\underline{u}$  是否能控？对此回答如下：

要使式 (4.37) 系统能控，其充分必要条件是：

1) 原系统 (4.36) 式能控

2) 且  $\text{Rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} = n + m$

注意上式成立的必要条件是： $r \geq m$ ，（即有多少个输出，至少有多少个输入）及  $\text{Rank} (C) = m$ ，（即输出相互独立的）。

上面的结论是可以严格证明的，读者不妨试证一下。当然直接判别复合系统的能控性也是可以的。但阶数高时，计算量较大。

## 四、复合系统的设计

$$\text{设 } \underline{u}(t) = [K_1, K_2] \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{q}(t) \end{bmatrix} = K_1 \underline{x} + K_2 \underline{q} \quad (4.38)$$

代入 (4.37) 式得闭环系统：

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{q}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{d} \\ -\underline{y}_r \end{bmatrix} \\ \underline{y} &= [C \quad 0] \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{q} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.39}$$

注意：这里  $K_1$  取正号，目的是为了和  $K_2$  符号一致， $K_1$  也可取负号。

**例4.5** 已知如图 4.9 所示，自动搜索平衡系统，采用状态反馈控制，状态向量  $\underline{x}$  为  $[z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta}]^T$ ，现假定小车受到风力  $4w$ ，小球受风力为  $w$ ，为了便于立方程，设阻力方向如图所示。根据力学原理，得系统方程：

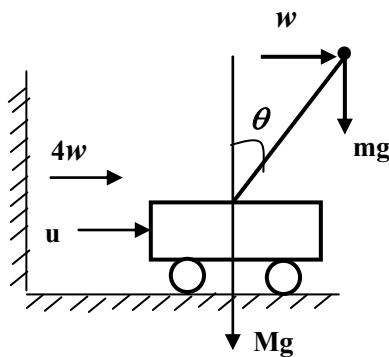


图 4.9

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + bu + \underline{d} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 4w \\ 0 \\ 6w \end{bmatrix} \\ y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \underline{x} \end{array} \right.$$

(1) 建立组合系统

采用积分

$$\underline{q}(\tau) = \int_0^\tau [y(\tau) - y_r(\tau)] d\tau$$

可消除 Z 的稳态误差。系统增广如下：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 4w \\ 0 \\ 6w \\ -y_r \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

(2) 判别组合系统的能控性

a) 原系统能控

b) 因为  $\begin{vmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{vmatrix} = -10$ , 即  $\text{Rank} \begin{bmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{bmatrix} = 5$

所以复合系统能控。

(3) 复合系统的设计

令  $\underline{K}_1^T = [k_1, k_2, k_3, k_4]$ ,  $K_2 = k_5$

$$u = \underline{K}_1 \underline{x} + K_2 q = [k_1, k_2, k_3, k_4, k_5] \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ q \end{bmatrix}$$

将上式代入 (4.40) 式, 得

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 - 1 & k_4 & k_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & 11 - k_3 & -k_4 & -k_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4w \\ 0 \\ 6w \\ -y_r \end{bmatrix}$$

则  $f_K(S) = |SI - (A + b\underline{K}^T)| = S^5 + (k_4 - k_2)S^4 + (k_3 - k_1 - 11)S^3 + (10k_2 - k_5)S^2 + 10k_1S + 10k_5$

设希望的极点为  $-1, -2, -2, -1+j, -1-j$  则

$$f^*(S) = (S+1)(S+2)^2(S+1+j)(S+1-j)$$

$$= S^5 + 7S^4 + 20S^3 + 30S^2 + 24S + 8$$

解得  $k_5 = 0.8$ ,  $k_1 = 2.4$ ,  $k_2 = 3.08$ ,  $k_3 = 33.4$ ,  $k_4 = 10.08$

即  $\underline{K}_1^T = [2.4, 3.08, 33.4, 10.08]$ ,  $K_2 = 0.8$

最后, 可以验证闭环系统的稳态特性是令人满意的。(略)

## § 4.5 状态空间中系统的镇定问题

假定线性系统  $\Sigma = (A, B, C)$  完全能控, 则一定存在线性状态反馈  $K$ , 使闭环系统  $\Sigma_K (A - BK, B, C)$  极点可以任意配置。这也可以说, 对完全能控的不稳定系统, 总可以求得线性状态反馈阵  $K$ , 使系统变为渐近稳定, 即  $A - BK$  的特征值均在  $S$  平面的左边。这就是镇定问题。可见镇定问题是极点配置问题的一个特殊情况。在镇定问题中, 只要求极点配置在  $S$  平面的左边, 不必要在指定的位置上, 所以对系统  $\Sigma = (A, B, C)$ , 若存在状态反馈阵  $K$ , 使闭环系统  $\Sigma_K (A - BK, B, C)$  的极点具有负实部, 则称原系统是状态反馈能镇定的。同理, 若存在输出反馈阵  $H$ , 使闭环系统  $\Sigma_H (A - BHC, B, C)$  的极点具有负实部, 则称系统是输出反馈能镇定的。

### 一、状态反馈能镇定的条件

线性系统  $\Sigma = (A, B, C)$  的状态反馈能镇定的充分必要条件为: 系统的不能控部分是渐近稳定的。对此说明如下: 假定系统已经按能控性进行分解成如下形式:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

设状态反馈阵为  $K = [K_1, K_2]$ , 则闭环系统的状态矩阵为:

$$A - BK = \begin{bmatrix} A_{11} - B_1 K_1 & A_{12} - B_1 K_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

其特征多项式为:

$$f_K(S) = |SI - (A - BK)| = |SI_1 - A_{11} + B_1 K_1| \cdot |SI_2 - A_{22}|$$

显然  $\Sigma_1 (A_{11}, B_1)$  是能控部分, 所以上式中的  $|SI_1 - A_{11} + B_1 K_1|$  部分可以通过极点配置的方法使  $(A_{11} - B_1 K_1)$  的极点具有负实部, 而  $\Sigma_2 (A_{22}, 0)$

是不能控部分, 上式中的  $|SI_2 - A_{22}|$  部分说明无法通过极点配置方法使  $A_{22}$  的极点改变, 而必须先行要求  $A_{22}$  的极点具有负实部。结论得证。

## 二、输出反馈能镇定的条件

对于输出反馈, 我们在 § 4.1 中已经指出它保持了系统的能控性和能观性, 即输出反馈不能改变系统的不能控模态和不能观测模态。

假定我们已经将系统  $\Sigma(A, B, C)$  进行 **Kalman** 结构分解,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} & A_{12} & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{33} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$C = [C_1, \mathbf{0}, C_3, \mathbf{0}]$$

其中  $A_{11}, B_1, C_1$  是能控且能观的;  $(A_{22}, B_2, \mathbf{0})$  是能控不能观的;  $(A_{33}, \mathbf{0}, C_3)$  是不能控而能观的;  $(A_{44}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$  是不能控又不能观的, 则对于这样的系统输出反馈镇定的条件 (充分必要) 为:

- 1) 能控又能观测部分是能镇定的;
- 2) 其余三部分均是渐近稳定的。

对此说明如下: 设输出反馈阵为  $H$ , 则闭环系统矩阵为:

$$A - BHC = \begin{bmatrix} A_{11} - B_1 HC_1 & \mathbf{0} & A_{13} - B_1 HC_3 & \mathbf{0} \\ A_{21} - B_2 HC_1 & A_{22} & A_{23} - B_2 HC_3 & A_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{33} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

其特征多项式为

$$\begin{aligned} f_H(S) &= |SI - (A - BHC)| = |SI_1 - (A_{11} - B_1 HC_1)| \cdot \\ &\quad |SI_2 - A_{22}| \cdot |SI_3 - A_{33}| \cdot |SI_4 - A_{44}| \end{aligned}$$

可以看出: 当且仅当  $A_{11} - B_1 HC_1$  具有负实部的极点, 即能控又能观部分为输出反馈能镇定,  $A_{22}, A_{33}, A_{44}$  均具有负实部的极点, 即其余三部分为渐近稳定的时候, 闭环系统才是渐近稳定的。从而说明了结论的正确性。

**例 4.6** 分析如下不稳定系统的能否成为稳定系统。

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解：

$$Q_k = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{Rank } Q_k = 2 \quad \text{所以原系统不完全能控, 取}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad T^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可见其不能控部分的极点为-2, 是渐近稳定的, 因此原系统是能稳定的。

## 第五章 状态观测器

第四章中介绍了状态反馈，它是现代控制理论中分析设计线性系统的一个重要方法。但是，用这个方法时要求系统的状态变量可以直接测量得到。而在许多情况下一个系统内部的状态变量并不能被直接测量，状态反馈就有困难。经典控制理论中并不存在这个问题，因为它用可以测量到的输出来进行反馈。因此可以想到，能否利用系统可测的量来构造状态变量？本章就讨论这个问题，原系统的输入输出是直接可以量测到的，于是可以另外再构造一个系统，这个系统以原系统的输入输出作为输入，将状态重新构造出来，这样构造的系统就称为状态观测器。

状态观测器是确定性系统的状态估计器。关于随机系统的状态估计问题，如 Kalman 滤波器，由于时间限制本章就不介绍了，感兴趣的同学可参考有关材料。

### § 5.1 状态观测器的基本概念

给定系统的状态空间表达式如下：

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} \\ \underline{y} = C \underline{x} \end{cases} \quad (5.1a)$$

$$(5.1b)$$

设此系统是完全能观的，输入  $\underline{u}$  和输出  $\underline{y}$  是可以直接量测的。

将 (5.1b) 式两边对时间  $t$  求导数，得

$$\dot{\underline{y}} = C \dot{\underline{x}} = CA \underline{x} + CB \underline{u}$$

$$\dot{\underline{y}} - CB \underline{u} = CA \underline{x}$$

对上式再求导，并将 (5.1a) 式代入后得

$$\ddot{\underline{y}} - CB \dot{\underline{u}} - CAB \underline{u} = CA^2 \underline{x}$$

重复上述过程一直到  $n - 1$  次求导，最后得

$$\underline{y}^{(n-1)} - CB \underline{u}^{(n-2)} - CAB \underline{u}^{(n-3)} - \dots - CA^{n-2} B \underline{u} = CA^{n-1} \underline{x}$$

将以上各式写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \underline{y} \\ \dot{\underline{y}} - CBu \\ \ddot{\underline{y}} - CB\dot{\underline{u}} - CABu \\ \vdots \\ \underline{y}^{(n-1)} - CB\underline{u}^{(n-2)} - CAB\underline{u}^{(n-3)} - \cdots CA^{(n-2)}Bu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix} \underline{x} = Q_g \underline{x}$$

由于系统完全能观，所以  $Q_g$  的秩为  $n$ ，因而上述方程中  $\underline{x}$  有解，这说明状态向量可用输入  $\underline{u}$  和输出  $\underline{y}$  以及它们的导数估计出来。

以上只说明在系统完全能观的条件下，可以利用输入和输出来估计状态。但是，这种方案仅仅是一种可能性。在工程实际中，由于引入大量高阶微分器，会给系统带来一系列高频干扰，从而大大影响输出  $\underline{x}$ ，所以这种方案没有实际价值，但它清楚地表明，只要系统是完全能观的，那么状态就可以用它的输入输出估计出来。

由上分析可知，我们希望的观测器中，不要含有微分器，而应采用积分器。因此可按照 (5.1) 式的结构，设计出一个相同的结构模型。

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = A\hat{\underline{x}} + Bu \quad (5.2)$$

其中  $\hat{\underline{x}}$  为状态的估计值，这样可以构成如图 5.1 所示的开环状态估计器。

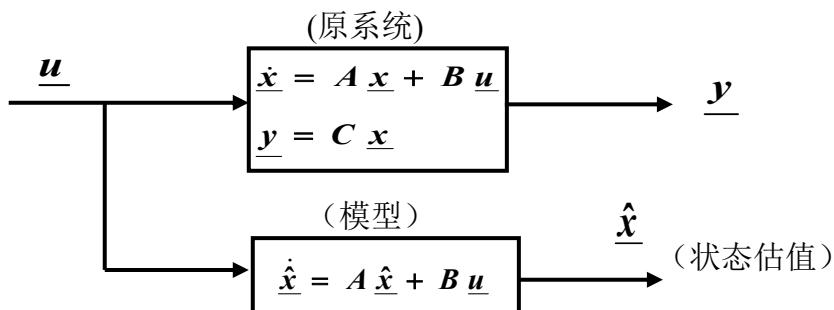


图 5.1

将 (5.1a) 式和 (5.2) 式相减，得

$$\frac{d}{dt}(\underline{x} - \hat{\underline{x}}) = A(\underline{x} - \hat{\underline{x}})$$

设两个系统的初始状态分别为  $\underline{x}_0, \hat{\underline{x}}_0$ ，则

$$\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t) = e^{At} (\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_0)$$

所以只要  $\underline{x}_0 = \hat{\underline{x}}_0$ ，就有  $\underline{x}(t) = \hat{\underline{x}}(t)$ ，即  $\hat{\underline{x}}$  完全复现  $\underline{x}$ 。当  $\underline{x}_0 \neq \hat{\underline{x}}_0$  时，如果  $\Sigma(A, B, C)$  是稳定的，即  $A$  的特征值都具有负实部，则有  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)) = 0$

该式说明  $\hat{\underline{x}}$  不断地逼近  $\underline{x}$ ；当  $\Sigma(A, B, C)$  不是稳定系统时，上述方案不能实现。实际上由于模型参数不准确，噪声和干扰也难以一致，上述开环观测器存在严重问题，解决的办法是采用如图 5.2 所示的方案。我们把可量测的  $\underline{y}$  及  $\hat{\underline{y}}$  的差值乘以适当的加权矩阵  $M$  进行反馈，这时观测器方程为：

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = A \hat{\underline{x}} + B \underline{u} - M \underline{\tilde{y}} \quad (5.3)$$

从 (5.3) 式可知，对原模型 (5.2) 式增加了一项取决于输出误差量的校正项。由于

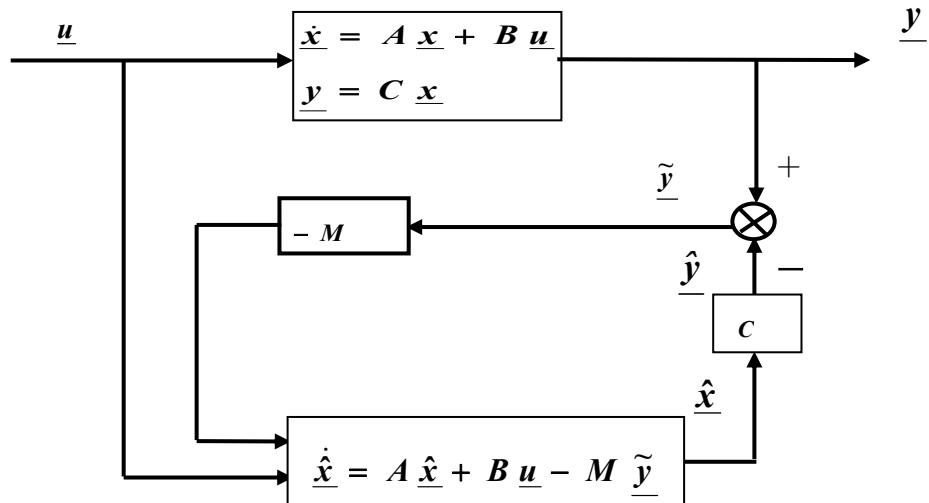


图 5.2

$$\underline{\tilde{y}} = \underline{y} - \hat{\underline{y}} = \underline{y} - C \hat{\underline{x}}$$

(5.3) 式可写成

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = A \hat{\underline{x}} + B \underline{u} - M (\underline{y} - C \hat{\underline{x}}) \quad (5.4)$$

进一步写成

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = (A + MC) \hat{\underline{x}} + B \underline{u} - M \underline{y} \quad (5.5)$$

为了表示状态误差量，将 (5.1a) 式减去 (5.3) 式，则得

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = A\underline{x} - A\hat{x} + M\underline{y} = A(\underline{x} - \hat{x}) + MC(\underline{x} - \hat{x}) \\ &= (A + MC)(\underline{x} - \hat{x}) = (A + MC)\tilde{x}\end{aligned}\quad (5.6)$$

只要适当地选择  $M$ ，使  $A + MC$  的特征值具有负实部，则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\underline{x}(t) - \hat{x}(t)] = 0$$

这说明只要原系统完全能观，总可以按要求配置观测器的极点，使状态观测误差  $\tilde{x}$  按要求的速度衰减到零。图 5.2 所示的观测器称为全维观测器。其结构特点是，仿原系统再加上反馈阵  $M$ 。

从第三章中已知，若  $\Sigma(A, B, C)$  不完全能观，那么，总可以按能观性分解，得

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ C &= [C_1 \quad \mathbf{0}], & \underline{x} &= \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.7)$$

其中：  $\underline{x}_1$  为能观测状态部分，其维数为  $n_1$ ；

$\underline{x}_2$  为不能观测状态部分，其维数为  $n - n_1$ ，

$\Sigma(A_{11}, B_1, C_1)$  为能观子系统， $\Sigma(A_{22}, B_2, \mathbf{0})$  为不能观子系统，此时按 (5.5) 式，构造状态观测器

$$\dot{\hat{x}} = (A + MC)\hat{x} + Bu - My$$

其中  $M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$ ， $M$  为  $n \times m$  维， $M_1$  为  $n_1 \times m$  维， $M_2$  为  $(n - n_1) \times m$  维，

由 (5.6) 式可知

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_1 - \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\underline{x}}_2 - \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + M_1 C_1 & \mathbf{0} \\ A_{21} + M_2 C_1 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 - \hat{x}_1 \\ \underline{x}_2 - \hat{x}_2 \end{bmatrix}\quad (5.8)$$

显然，只要适当选择  $M_1$ ，总可以使  $A_{11} + M_1 C_1$  的特征值具有负实部，从而使  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\underline{x}_1(t) - \hat{x}_1(t)) = 0$

但是无论  $M$  怎么选择也改变不了  $A_{22}$  的极点。若  $A_{22}$  的特征值也具有负实部，那么

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\underline{x}_2(t) - \hat{x}_2(t)) = 0$$

于是我们得到如下结论：

线性定常系统  $\Sigma$  的观测器  $\Sigma_g$  可以任意配置极点，即状态误差向量按任意希望的速度衰减到零的充分必要条件是原系统  $\Sigma(A, B, C)$  完全能观；对不完全能观的系统  $\Sigma(A, B, C)$ ，其观测器存在的充分必要条件是  $\Sigma$  的不能观测部分是渐近稳定的，这时观测器的极点不能任意配置。

## § 5.2 全维观测器的设计

从(5.6)式可知，全维观测器的设计，实际上在于合理选择  $M$  阵，使  $(A + MC)$  的特征值具有负实部，而且负实部的绝对值足够大，使  $\hat{x}(t)$  逼近  $\underline{x}(t)$  的速度足够快。同时应当考虑到观测器的通频带，使它具有一定的抗高频干扰的能力。因此在设计时应兼顾这两个方面。在选择合理的观测器极点后，就可以用前述方法计算  $M$ 。以单变量系统为例设计步骤如下：

- (1) 判别系统的能观性；
- (2) 若系统能观，化为能观标准型；

现假定其能观标准型为  $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{c}^T)$ ，其中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -P_0 \\ & -P_1 \\ I_{n-1} & \vdots \\ & -P_{n-1} \end{bmatrix} \quad \tilde{c}^T = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

- (3) 计算能观标准型  $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{c}^T)$  的观测阵  $\tilde{M}$ ；

$$\text{设 } \tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{m}_0 \\ \tilde{m}_1 \\ \vdots \\ \tilde{m}_{n-1} \end{bmatrix}$$

观测器系数矩阵为

LCD 2014年秋季

$$\begin{aligned}\tilde{A} + \tilde{\underline{M}} \tilde{\underline{c}}^T &= \left[ \begin{array}{c|ccc} \mathbf{0} & -P_0 & 0 & \tilde{m}_0 \\ \hline I_{n-1} & -P_1 & 0 & \tilde{m}_1 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & -P_{n-1} & 0 & \tilde{m}_{n-1} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & \tilde{m}_0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{m}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{m}_{n-1} \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|ccc} \mathbf{0} & -(P_0 - \tilde{m}_0) & - & \\ \hline I_{n-1} & -(P_1 - \tilde{m}_1) & & \\ & \vdots & & \\ & -(P_{n-1} - \tilde{m}_{n-1}) & & \end{array} \right]\end{aligned}$$

于是特征方程为:

$$f(S) = S^n + (P_{n-1} - \tilde{m}_{n-1})S^{n-1} + \cdots + (P_1 - \tilde{m}_1)S + P_0 - \tilde{m}_0 \quad (5.9)$$

根据希望的观测器极点, 得到希望的特征多项式

$$f^*(S) = S^n + \alpha_{n-1}^* S^{n-1} + \cdots + \alpha_1^* S + \alpha_0^* \quad (5.10)$$

比较 (5.9), (5.10) 两式得

$$\tilde{m}_i = P_i - \alpha_i^* \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

(4)求原系统  $\Sigma(A, \underline{b}, \underline{c}^T)$  的观测阵  $\underline{M}$ :

由  $\underline{M} = T \tilde{\underline{M}}$  计算  $\underline{M}$

(5)画出观测器的结构图。

**例 5.1** 设有系统

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{c}^T = [1 \quad 1 \quad 0]$$

求它的状态观测器, 并使观测器的极点为-3、-4、-5。

**解 1)** 判此系统的能观性

$$Q_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{Rank } Q_g = 3, \quad \text{所以系统能观。}$$

**2)** 化原系统为能观标准型

LCD 2014年秋季

$$Q_g^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{r} = Q_g^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = [\underline{r}, A\underline{r}, A^2\underline{r}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

所以  $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$        $\tilde{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$        $\tilde{c}^T = [0 \ 0 \ 1]$

3) 求观测阵  $\underline{M}$  , 由观测器的希望极点, 得特征方程:

$$f^*(S) = (S + 3)(S + 4)(S + 5) = S^3 + 12S^2 + 47S + 60$$

于是可算出观测阵  $\tilde{\underline{M}} = [\tilde{m}_0, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2]^T$ , 其中

$$\begin{cases} \tilde{m}_0 = P_0 - \alpha_0^* = -4 - 60 = -64 \\ \tilde{m}_1 = P_1 - \alpha_1^* = 8 - 47 = -39 \\ \tilde{m}_2 = P_2 - \alpha_2^* = -5 - 12 = -17 \end{cases}$$

因而,  $\underline{M} = T \tilde{\underline{M}} = [-120, 103, -210]^T$ , 由式 (5.5) 得观测器方程为:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -119 & -120 & 0 \\ 103 & 105 & 1 \\ -210 & -210 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 120 \\ -103 \\ 210 \end{bmatrix} y$$

由式 (5.3) 画出观测器结构如图 5.3 所示:

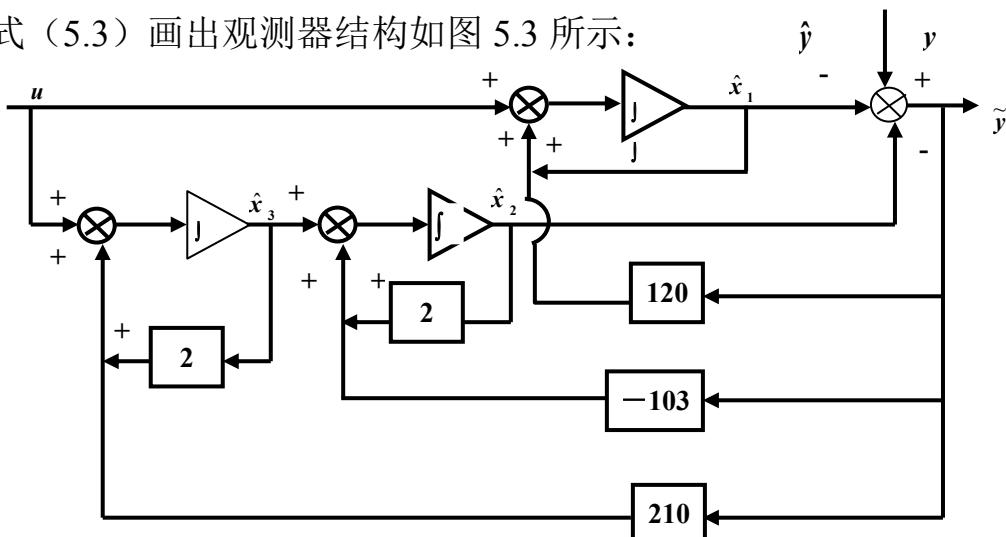


图 5.3

LCD 2014年秋季

**例 5.2** 再次研究倒置摆系统，其状态向量为

$$\underline{x} = [z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta}]^T$$

系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{c}^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

并假定唯一可测得的输出量为  $z(t)$ ，即小车的位置，试设计全维观测器，使观测器极点为  $-2, -3, -2 \pm j$ 。

**解：**(1) 判别系统的能观性

$$Q_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Rank } Q_g = 4, \quad \text{此系统能观。}$$

(2) 本题系数矩阵较简单，可直接计算  $\underline{M}$ ，不必先化为能观标准型。

$$\text{设 } \underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{m}_1 \\ \underline{m}_2 \\ \underline{m}_3 \\ \underline{m}_4 \end{bmatrix}, \quad \text{则}$$

$$A + \underline{M} \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{m}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{m}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{m}_3 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{m}_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{m}_1 & 1 & 0 & 0 \\ \underline{m}_2 & 0 & -1 & 0 \\ \underline{m}_3 & 0 & 0 & 1 \\ \underline{m}_4 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

则其特征多项式为：

$$\begin{aligned} f(s) &= \left| SI - (A + \underline{M} \underline{c}^T) \right| \\ &= s^4 - \underline{m}_1 s^3 - (11 + \underline{m}_2) s^2 + (11 \underline{m}_1 + \underline{m}_3) s + (11 \underline{m}_2 + \underline{m}_4) \end{aligned}$$

观测器希望的特征多项式为：

$$f^*(s) = (s+2)(s+3)(s+2+j)(s+2-j)$$

$$= s^4 + 9s^3 + 31s^2 + 49s + 30$$

LCD 2014年秋季

由上两式得

$$\underline{M} = [-9, -42, 148, 492]^T$$

(3) 画出观测器结构图

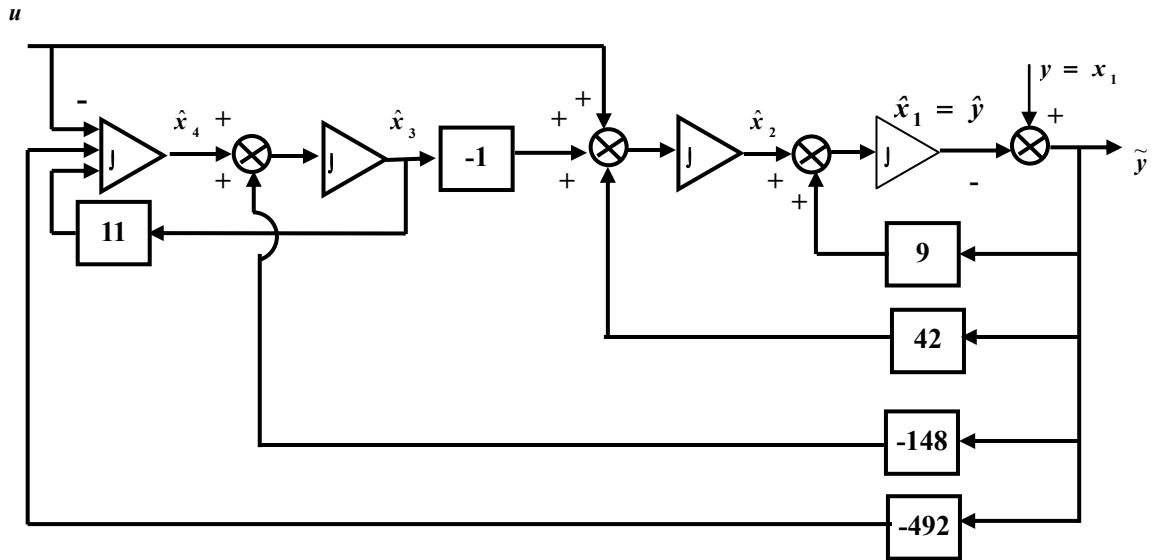


图 5.4

全维观测器方程为：

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{\hat{x}} + \underline{B}u - \underline{M}\tilde{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\hat{x}} \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} -9 \\ -42 \\ 148 \\ 492 \end{bmatrix} \tilde{y}$$

也可以写成如下形式：

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} + \underline{MC})\underline{\hat{x}} + \underline{B}u - \underline{M}y = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 0 & 0 \\ -42 & 0 & -1 & 0 \\ 148 & 0 & 0 & 1 \\ 492 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\hat{x}} \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} -9 \\ -42 \\ 148 \\ 492 \end{bmatrix} y$$

### § 5.3 降维观测器

#### 一、问题的提出

上节中讨论的观测器是对全部几个状态进行观测。实际上这种观测器含有多余的东西，因为状态的某种线性组合（由  $C$  阵决定）可以直接作为输出而测出，并不需要进行估计。如例 5.2 中，小车的位置

$z$  可以直接量测 ( $y = z$ )，所以只需要观测  $\dot{z}$ ,  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  三个状态变量即可，由此说明状态观测器的维数可以降低，对于一般情况：

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} \\ \underline{y} = C \underline{x} \end{cases} \quad (5.11)$$

总可以作一个线性变换

$$\tilde{\underline{x}} = Q \underline{x} \quad \text{或} \quad \underline{x} = Q^{-1} \tilde{\underline{x}} \quad (5.12)$$

其中

$$Q = \begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix}_{m \times n} \quad (5.13)$$

(5.13)式中  $C$  为  $m \times n$  阵，秩为  $m$ ， $D$  为使  $Q^{-1}$  存在的任意  $(n - m) \times n$  矩阵，通过此线性变换将 (5.11) 式变换为：

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\underline{x}}} = QAQ^{-1}\tilde{\underline{x}} + QB\underline{u} \\ \underline{y} = CQ^{-1}\tilde{\underline{x}} = [0 \mid I] \begin{bmatrix} \tilde{\underline{x}}_1 \\ \tilde{\underline{x}}_2 \end{bmatrix} = \tilde{\underline{x}}_2 \end{cases} \quad (5.14)$$

其中  $\tilde{\underline{x}}_2$  为  $m$  维，是直接可以量测的，现在只要观测  $(n - m)$  维状态向量  $\tilde{\underline{x}}_1$  即可。

## 二、降维观测器的设计

现在来考虑如下形式的能观系统，它的输出量由后面的  $m$  个状态组成

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_1 \\ \dot{\underline{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} &= [0 \quad I_m] \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} = \underline{x}_2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

上面已经讨论过，这种形式是通过线性变换得来的，所以并不失去它的一般性。整理 (5.15) 式得：

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_1 = A_{11} \underline{x}_1 + A_{12} \underline{x}_2 + B_1 \underline{u} \\ \dot{\underline{x}}_2 = A_{21} \underline{x}_1 + A_{22} \underline{x}_2 + B_2 \underline{u} \end{cases} \quad (5.16a)$$

$$(5.16b)$$

令

$$\begin{cases} \underline{v} = A_{12} \underline{x}_2 + B_1 \underline{u} \\ \underline{z} = A_{21} \underline{x}_1 \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\begin{cases} \underline{v} = A_{12} \underline{x}_2 + B_1 \underline{u} \\ \underline{z} = A_{21} \underline{x}_1 \end{cases} \quad (5.18)$$

将 (5.17) 代入 (5.16a), 并和 (5.18) 联立得系统

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_1 = A_{11} \underline{x}_1 + \underline{v} \\ \underline{z} = A_{21} \underline{x}_1 \end{cases} \quad (5.19)$$

因为  $\underline{u}$  已知,  $\underline{y} = \underline{x}_2$  可以直接量测, 所以把  $\underline{v} = A_{12} \underline{x}_2 + B_1 \underline{u} = A_{12} \underline{y} + B_1 \underline{u}$  当作已知输入量并不困难。同理

$$\underline{z} = A_{21} \underline{x}_1 = \dot{\underline{x}}_2 - A_{22} \underline{x}_2 - B_2 \underline{u} = \dot{\underline{y}} - A_{22} \underline{y} - B_2 \underline{u}$$

也可直接算出。

这样 (5.19) 式可以看作为 (5.15) 式的一个子系统。可以证明若原系统 (5.15) 是能观的, 则子系统 (5.19) 式也是能观的 (证明略)。

一旦证实了式 (5.19) 是能观的, 就可以用全维观测器的设计方法来设计子系统 (5.19) 式的观测器。即

$$\dot{\hat{\underline{x}}}_1 = (A_{11} + M_1 A_{21}) \hat{\underline{x}}_1 + \underline{v} - M_1 \underline{z} \quad (5.20)$$

其中  $(n - m) \times m$  维矩阵  $M_1$  可以选得使式 (5.20) 的极点置于期望的任意位置, 将  $\underline{v}, \underline{z}$  代入得:

$$\dot{\hat{\underline{x}}}_1 = (A_{11} + M_1 A_{21}) \hat{\underline{x}}_1 + A_{12} \underline{y} + B_1 \underline{u} - M_1 \dot{\underline{y}} + M_1 A_{22} \underline{y} + M_1 B_2 \underline{u} \quad (5.21)$$

此系统即为系统 (5.15) 式的一个  $n - m$  维观测器

实现 (5.21) 式的一个明显的困难是需要输出量  $\underline{y}$  的微分, 可以重新定义观测器的状态避开这个困难。

令  $\underline{\hat{w}} = \underline{\hat{x}}_1 + M_1 \underline{y}$  并代入 (5.21) 式得

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\hat{w}}} &= \dot{\underline{\hat{x}}}_1 + M_1 \dot{\underline{y}} = (A_{11} + M_1 A_{21}) \underline{\hat{w}} + (B_1 + M_1 B_2) \underline{u} \\ &\quad + [A_{12} + M_1 A_{22} - (A_{11} + M_1 A_{21}) M_1] \underline{y} \end{aligned} \quad (5.22)$$

令

$$B_0 = B_1 + M_1 B_2$$

$$E = A_{12} + M_1 A_{22} - (A_{11} + M_1 A_{21}) M_1$$

即得

$$\dot{\underline{\hat{w}}} = (A_{11} + M_1 A_{21}) \underline{\hat{w}} + B_0 \underline{u} + E \underline{y}$$

上述观测器也称为 **Luenberger** 观测器，用图 5.5 所示：

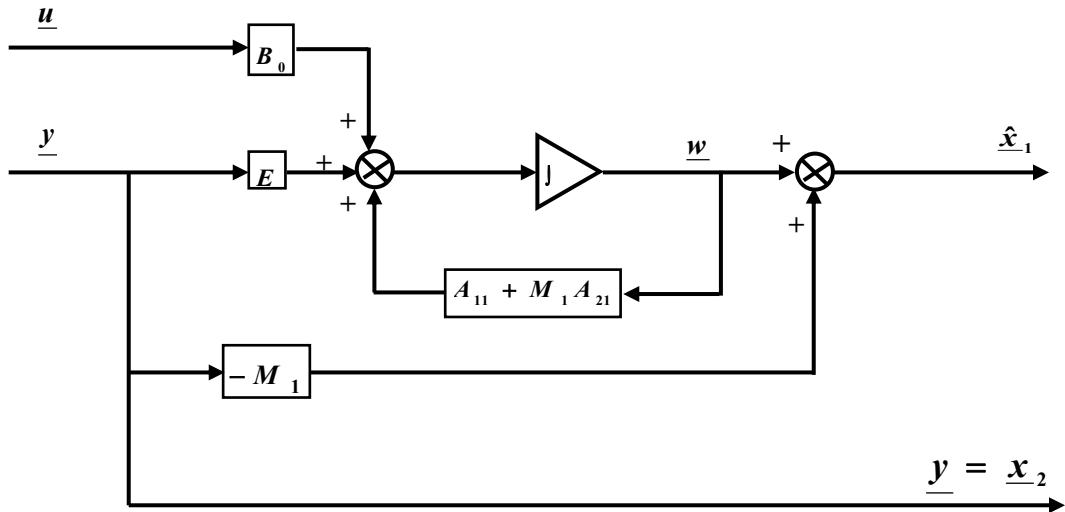


图 5.5

整个状态向量可表示为：

$$\hat{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w - M_1 y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} -M_1 \\ I \end{bmatrix} y$$

由 (5.19) 式减去 (5.20) 式得

$$\tilde{\underline{x}}_1 = (A_{11} + M_1 A_{21}) \tilde{x}_1$$

显然这种观测器的误差为：

$$\tilde{\underline{x}} = \underline{x}_1 - \hat{\underline{x}}_1 = e^{(A_{11} + M_1 A_{21})t} \tilde{x}_1(0)$$

设计者根据需要总可以选择适当的  $M_1$ ，使其误差按规定的速度衰减到零。

这种观测器的一个明显缺点是，量测通过  $M_1$  直接反映到状态  $\hat{x}_1$  上来，（见图 5.5）这样就必然将量测噪声带入。另外， $M_1$  的误差直接影响到  $\hat{x}_1$  的稳态值，而在全维观测器中不存在这种误差。

**例 5.3** 上例中设计了倒置摆的全维观测器，由于小车位移直接可以量测，所以可设计降维观测器，并使降维观测器极点为  $-3, -2 \pm j$ 。

解：倒置摆状态空间表达式为

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

### (1) 判能观性

已经证明此系统完全能观。

### (2) 将此系统进行线性变换，得到(5.15)式形式。

本系统输出矩阵很简单，只要重新安排状态变量次序即得(5.15)式形式。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \ 0 \ 0 \ \vdots \ 1] \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ z \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

式中虚线将  $A_{11}, A_{12}$  等分开，因为  $A_{12}, A_{22}$  和  $B_2$  均为零，由(5.22)式得

$$\underline{\dot{w}} = (A_{11} + \underline{M}_1 A_{21}) \underline{w} + B_1 \underline{u} - (A_{11} + \underline{M}_1 A_{21}) \underline{M}_1 \underline{y}$$

### (3) 求 $\underline{M}_1$

$$\text{设 } \underline{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \\ \mathbf{m}_3 \end{bmatrix}, \text{ 则}$$

$$A_{11} + \underline{M}_1 A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & 0 & 0 \\ \mathbf{m}_2 & 0 & 0 \\ \mathbf{m}_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & -1 & 0 \\ \mathbf{m}_2 & 0 & 1 \\ \mathbf{m}_3 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

此矩阵的特征多项式为：

$$f_1(S) = |SI - (A_{11} + \underline{M}_1 A_{21})| = \begin{vmatrix} S - m_1 & 1 & 0 \\ -m_2 & S & -1 \\ -m_3 & -11 & S \end{vmatrix}$$

$$= S^3 - m_1 S^2 + (m_2 - 11)S + (11m_1 + m_3)$$

由希望的极点分布:  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_{2,3} = -2 \pm j$  得特征多项式

$$f_1^*(S) = (S + 3)(S + 2 - j)(S + 2 + j) = S^3 + 7S^2 + 17S + 15$$

所以

$$\underline{M}_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 28 \\ 92 \end{bmatrix}$$

(4) 写出观测器方程

$$\underline{E} = -(A_{11} + \underline{M}_1 A_{21}) \underline{M}_1 = \begin{bmatrix} -21 \\ 104 \\ 336 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_0 = \underline{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_{11} + \underline{M}_1 A_{21} = \begin{bmatrix} -7 & -1 & 0 \\ 28 & 0 & 1 \\ 92 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

得观测器方程为

$$\dot{\underline{w}} = (A_{11} + M_1 A_{21}) \underline{w} + B_1 u + E y = \begin{bmatrix} -7 & -1 & 0 \\ 28 & 0 & 1 \\ 92 & 11 & 0 \end{bmatrix} \underline{w} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -21 \\ 104 \\ 336 \end{bmatrix} y$$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \underline{w} + \begin{bmatrix} -M_1 \\ 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{w} + \begin{bmatrix} 7 \\ -28 \\ -92 \\ 1 \end{bmatrix} y$$

(5) 进一步可画出降维观测器的框图 (略)

## § 5.4 重构状态反馈控制系统

上两节，我们介绍了全维观测器及降维观测器，在第四章中了解到一个完全能控的系统可以用状态反馈控制规律将闭环极点配置在期望的任何位置上。如果反馈时得不到全部状态，可用观测器对它进行估值并将观测到的估值用到控制规律中去。这就是所谓重构状态反馈控制系统。本节将讨论带有重构状态的反馈控制系统的设计问题以及它的一些特征。图 5.6 表示这种重构状态反馈控制系统。

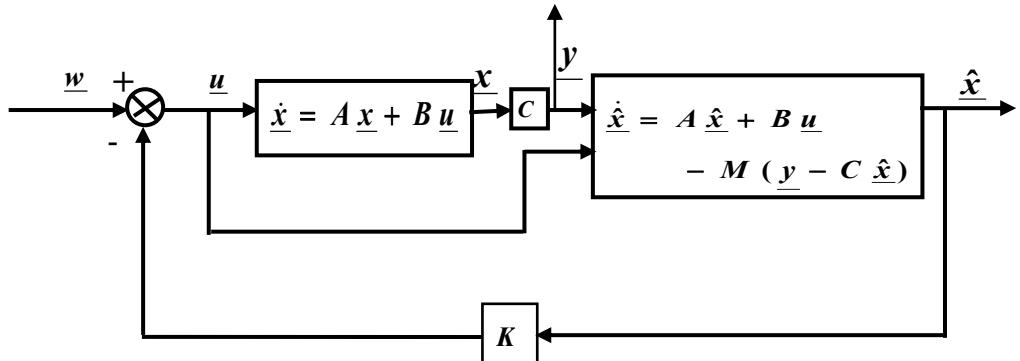


图 5.6

设能控又能观的系统为

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x} \end{cases} \quad (5.23)$$

当状态不能直接测量时，可以用状态观测器将状态  $\underline{x}$  观测出来，即

$$\dot{\hat{x}} = (A + MC)\hat{x} + B\underline{u} - MC\underline{x} \quad (5.24)$$

为了便于分析，可将对象 (5.23) 式和观测器 (5.24) 式看成是一个  $2n$  维的合成系统：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -MC & A + MC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} = [C \quad 0] \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \hat{x} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.25)$$

此时，反馈控制律为

$$\underline{u} = \underline{w} - \mathbf{K} \hat{\underline{x}} \quad (5.26)$$

代入 (5.25) 式，得

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\hat{\underline{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ -MC & A + MC - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \hat{\underline{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \underline{w} \\ \underline{y} = [C \quad 0] \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \hat{\underline{x}} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (5.27)$$

但是，一般用误差  $\tilde{\underline{x}} = \underline{x} - \hat{\underline{x}}$  来表示这个系统的状态更为方便。通过下述状态变换容易做到这一点。

$$\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \tilde{\underline{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x} - \hat{\underline{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \hat{\underline{x}} \end{bmatrix}, \quad \text{又 } \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

它可以将 (5.27) 式变成

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\tilde{\underline{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A + MC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \tilde{\underline{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \underline{w} \\ \underline{y} = [C \quad 0] \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \tilde{\underline{x}} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (5.28)$$

上式的特征多项式为

$$\begin{aligned} f(s) &= \left| SI_{2n} - \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A + MC \end{bmatrix} \right| = \\ &= \left| \begin{array}{cc} SI_n - (A - BK) & -BK \\ 0_n & SI_n - (A + MC) \end{array} \right| \end{aligned}$$

由分块矩阵行列式公式可写成

$$f(s) = |SI_n - (A - BK)| |SI_n - (A + MC)| \quad (5.29)$$

可见，重构状态反馈系统的特征值由两个不同的部份组成，一部分是由反馈矩阵  $\mathbf{K}$  决定的  $(A - BK)$  的极点；另一部分是由状态观测器参数  $\mathbf{M}$  决定的  $(A + MC)$  的极点。这两部分的极点是可分离的，这一性质称具有可分离性。很明显，状态向量  $\underline{x}$  的性能由  $(A - BK)$  的极点所决定，而误差向量  $\tilde{\underline{x}}$  的性能则由  $(A + MC)$  的极点所支配。所以反

馈控制规律的确定和观测器的结构实现可以当作单独问题来考虑。现概括成如下定理。

**可分离性定理：**如果系统  $\Sigma(A, B, C)$  (5.23) 式的反馈控制规律可以用观测器来实现，则最后合成系统的极点由下列两部分组成：

- a)  $A - BK$  的极点——完全由反馈矩阵  $K$  所决定；
- b)  $A + MC$  的极点——完全由观测器参数  $M$  所决定。

状态向量的性能由 a) 中极点所支配，误差向量的性能由 b) 中极点所决定。

## § 5.5 扰动量的观测

如果系统  $\Sigma(A, B, C)$  受到一个不可量测的常值扰动，即

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} + E \underline{w} \quad (5.30)$$

其中  $E$  为  $n \times l$  阵， $\underline{w}$  为  $l$  维的常值扰动。那么，可以将  $\underline{w}$  当作状态，用观测器将它估计出来。于是系统可写成

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} = [C \quad 0] \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{w} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.31)$$

其中新状态向量  $\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{w} \end{bmatrix}$  为  $n + l$  维。

这个方法的实现依赖于式 (5.31) 是否能观，可以证明合成系统 (5.31) 式能观测的充分必要条件为

1) 原系统  $\Sigma(A, B, C)$  能观测；

2)  $\text{Rank} \begin{bmatrix} A & E \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + l$

注意这个条件仅当  $m \geq l$  时（即至少输出量的个数和干扰量的个数相等），及  $\text{Rank} E = l$ （即干扰量为独立的）才能成立。

只要检验 (5.31) 式完全能观，就可以设计全维观测器或降维观

测器。令  $M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$

则 (5.31) 式的全维观测器为:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + M_1 C & E \\ M_2 C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} y \quad (5.32)$$

对观测器来说，我们感兴趣的总是状态量的误差量，为此令

$$\tilde{x} = \underline{x} - \hat{x}, \quad \tilde{w} = \underline{w} - \hat{w}$$

将 (5.31) 式减去 (5.32) 式，即得

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + M_1 C & E \\ M_2 C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

由 (5.33) 式可知，适当地选择  $M_1, M_2$  可以使观测误差按希望的速度衰减到零。

## § 5.6 Kalman 滤波器的基本概念

### 一、问题的提出

以往我们所讨论的仅是确定性系统，即系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (5.34)$$

其中  $A, B, C$  是已知常阵，系统内并不存在随机干扰， $u$  是确定性输入，其值精确给定； $y$  是可精确量测的输出；状态  $x$  也是确定量。

$x$  虽然不能从  $y$  简单地确定出来，但是只要系统能观，就可以通过输入  $u$  和输出  $y$  把状态  $x$  观测出来，得到了状态的观测量  $\hat{x}$  就能实现状态反馈控制，观测器示意见图 5.7。



图 5.7

但是很多情况下， $x$  本身可能受到“系统干扰”的影响，在量测过程中也会有“量测噪声”的出现。如果这些随机干扰比较严重不容忽视，那么状态观测器就不能满足要求了。观测器只能用在随机干扰可以忽略的情况下。

## 二、线性随机系统

和确定性系统相对的系统是随机系统。在讨论随机系统之前，首先对分析随机系统用到的概率统计的一些基本概念作一简单回顾。

### 1. 随机变量 $x$ 的数字特征

表示随机试验的结果即为随机变量的取值。所谓随机变量的均值指的是随机变量  $x$  的平均值，用下式表示。

$$\bar{x} = E\{x\} \quad (5.35)$$

随机变量的方差指的是随机变量  $x$  与平均值之差的平方的平均值。它表示随机变量围绕着平均值变化的分散程度，写成

$$Var(x) = E\{(x - \bar{x})^2\} \quad (5.36)$$

显然非随机变量的方差为零。

两个随机变量  $x$  和  $y$  之间的依赖程度，主要用它们的协方差来度量，表示为：

$$Cov(x, y) = E\{(x - Ex)(y - Ey)\} \quad (5.37)$$

如果  $Cov(x, y) = 0$ ，则称  $x$ ， $y$  是两个不相关的随机变量，完全独立的随机变量永远是不相关的。

### 2. 随机过程及其数字特征

随机过程是一组定义在时间  $(t_0, T)$  中的诸随机变量  $\{x(t) : t_0 \leq t \leq T\}$  的集合，例如 5 秒周期的每个时间点上电压表的读数就是一个随机过程。

一个随机过程  $x(t)$  的平均值和方差定义为：

$$\bar{x}(t) = E\{x(t)\} \quad (t_0 \leq t \leq T) \quad (5.38)$$

$$Var\{x(t)\} = E\{[x(t) - \bar{x}(t)]^2\} \quad (t_0 \leq t \leq T) \quad (5.39)$$

对随机过程还有一个感兴趣的数字特征是自协方差函数。

$$\begin{aligned} r(t, \tau) & \stackrel{\Delta}{=} \text{Cov} \{x(t), x(\tau)\} \\ & = E \{[x(t) - Ex(t)][x(\tau) - Ex(\tau)]\} \end{aligned} \quad (5.40)$$

它度量过程同它本身在不同时刻的相互关系。若一个随机过程  $x(t)$  有  $r(t, \tau) = \text{Var} \{x(t)\} \delta(t - \tau)$

其中  $\delta(t - \tau) = \begin{cases} 1 & t = \tau \\ 0 & t \neq \tau \end{cases}$

则称此过程为广义的白噪声过程。意思是随机过程  $x(t)$ ，从一个时刻  $t$  到下一时刻  $\tau$  完全不相关。白噪声过程在物理上不可实现，但是它是一个极其有用的数学手段。

### 3. 随机向量及其数字特征

如果  $x_1, x_2, \dots, x_n$  都是随机变量（或随机过程），它们的集合称随机向量，随机向量用下式表达：

$$\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad (5.41)$$

其平均值为：

$$\bar{\underline{x}} = E \{\underline{x}\} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T \quad (5.42)$$

协方差矩阵可定义为：

$$\begin{aligned} P & \stackrel{\Delta}{=} E \{(\underline{x} - \bar{\underline{x}})(\underline{x} - \bar{\underline{x}})^T\} \\ & = E \left[ \begin{array}{cccc} (x_1 - \bar{x}_1)^2 & (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) & \cdots \cdots & (x_1 - \bar{x}_1)(x_n - \bar{x}_n) \\ (x_2 - \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) & (x_2 - \bar{x}_2)^2 & \cdots \cdots & (x_2 - \bar{x}_2)(x_n - \bar{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n - \bar{x}_n)(x_1 - \bar{x}_1) & (x_n - \bar{x}_n)(x_2 - \bar{x}_2) & \cdots \cdots & (x_n - \bar{x}_n)^2 \end{array} \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

可以证明：此矩阵是对称而且非负定的。

如果这些随机变量两两不相关，那么非对角元素为 0， $P$  阵就成为对角阵，即

$$P = E \begin{bmatrix} (x_1 - \bar{x}_1)^2 & & 0 \\ & (x_2 - \bar{x}_2)^2 & \\ 0 & & (x_n - \bar{x}_n)^2 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

现在讨论线性随机系统:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + B \underline{u}(t) + F \underline{w}(t) \\ \underline{y}(t) = C \underline{x}(t) + \underline{v}(t) \end{cases} \quad (5.45)$$

其中  $\underline{w}(t)$  是一个向量随机过程, 称为模型噪声, 输入噪声或过程噪声,  $\underline{w}(t)$  可以理解为外加控制信号  $\underline{u}(t)$  的波动或加到系统上的未知干扰等,  $\underline{v}(t)$  也是一个向量随机过程, 称为量测噪声或输出噪声, 它表示测量不确定性或偏移, 典型例子是量测放大器中的热噪声。

首先对 (5.45) 式所示的系统作如下假定:

- 1) 假定 (5.45) 式所示的系统是能控又能观的;
- 2) 假定过程  $\underline{w}(t)$  和  $\underline{v}(t)$  为零均值白噪声, 即

$$\begin{aligned} E\{\underline{w}(t)\} &= 0 \\ E\{\underline{v}(t)\} &= 0 \quad (\text{对全部时间 } t) \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} E\{\underline{w}(t)\underline{w}^T(\tau)\} &= Q \delta(t-\tau) \\ E\{\underline{v}(t)\underline{v}^T(\tau)\} &= R \delta(t-\tau) \quad (\text{对全部时间 } t, \tau) \end{aligned} \quad (5.47)$$

其中  $\delta(t-\tau)$  的定义和 (5.40) 式中定义的相同, 协方差阵  $Q$  表示  $\underline{w}(t)$  各分量之间的相关程度, 它是  $l \times l$  的对称方阵; 协方差阵  $R$  则表示  $\underline{v}(t)$  各分量之间的相关程度, 它是  $m \times m$  对称方阵。

- 3) 并且假定  $\underline{w}(t)$  和  $\underline{v}(t)$  是不相关的, 即

$$E\{\underline{w}(t)\underline{v}^T(\tau)\} = 0 \quad (\text{对全部时间 } t, \tau) \quad (5.48)$$

- 4) 同时假定状态变量的初态和噪声过程  $\underline{w}(t)$ ,  $\underline{v}(t)$  不相关, 即

$$\left. \begin{aligned} E\{\underline{x}(0)\underline{w}^T(t)\} &= 0 \\ E\{\underline{x}(0)\underline{v}^T(t)\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{对全部时间 } t) \quad (5.49)$$

- 5)  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$  为独立的随机变量。

以上假定可以保证状态  $\underline{x}(t)$  和输出  $\underline{y}(t)$ , ( $t_0 \leq t \leq \infty$ ) 本身是正规的向量随机过程。下面我们来研究在上述假定下的 (5.45) 式随机

过程的状态估计问题。

由于  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$  都是随机量, 因而必须用统计学的观点去估计  $\underline{x}$ 。现在比较成功的方法是 **Kalman** 滤波器

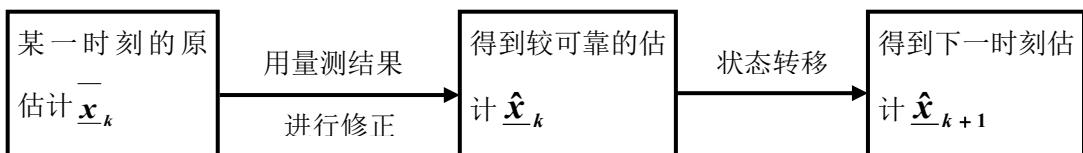
由于 **Kalman** 滤波器的基本原理较复杂, 这里只是比较通俗地介绍离散型 **Kalman** 滤波器的基本原理。

和观测器一样, **Kalman** 滤波器的输入量也是  $\underline{y}$  和  $\underline{u}$ , 输出是  $\underline{x}$  的估计值。不同的是, 它可以在随机干扰的情况下对  $\underline{x}$  作出最优估计, 这相当于把噪声从有用的信号中滤掉, 故称滤波器见图 5.8。



图 5.8

**Kalman** 滤波器是一种递推估计, 其过程为:



在以下的分析中也分两部进行, 即

1) 如何用量测结果  $\underline{y}_k$  来改善原估计  $\bar{\underline{x}}_k$ , 得到可靠的估计  $\hat{\underline{x}}_k$ ,

即由  $\bar{\underline{x}}_k \xrightarrow{\underline{y}_k} \hat{\underline{x}}_k$ 。

2) 状态转移后对下一时刻的估计, 即由  $\hat{\underline{x}}_k \rightarrow \bar{\underline{x}}_{k+1}$ 。

## § 5.7 **Kalman** 滤波器的递推算法

### 一、利用量测结果改善 $\underline{x}$ 的原估计

现在  $\underline{x}$ 、 $\underline{y}$  都是随机过程, 并假定已经根据系统的状态方程对  $\underline{x}$  作出了某种估计  $\bar{\underline{x}}$ , 而且已经知道了它的协方差阵。

$$COV(\underline{\bar{x}}, \underline{\bar{x}}) = E\{(\underline{\bar{x}} - E\underline{\bar{x}})(\underline{\bar{x}} - E\underline{\bar{x}})^T\} = M_{n \times n} \quad (5.50)$$

其中  $M$  是  $n \times n$  正定对称阵，我们称  $\underline{\bar{x}}$  为量测前的估计或原估计。然后根据量测结果  $\underline{y}$  对原估计进行修改，以便得到更好的估计  $\hat{\underline{x}}$ 。

必须指出，由  $\underline{\bar{x}_k} \xrightarrow{\underline{y}_k} \hat{\underline{x}_k}$  是在同一步中进行的，它们的下标量均为  $k$ ，为了简化而将下标省略。

用量测  $\underline{y}$  来修正原估计的公式为：

$$\hat{\underline{x}} = \underline{\bar{x}} + K(\underline{y} - C\underline{\bar{x}}) \quad (5.51)$$

其中  $K$  为 **Kalman** 滤波器的增益矩阵，上式可用图 5.9 来表示。

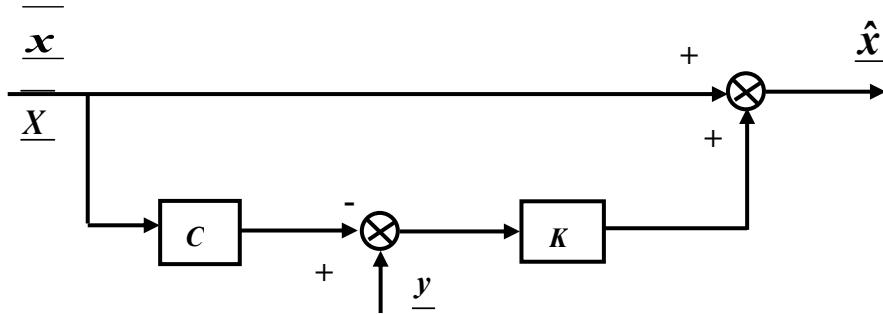


图 5.9

现在的问题是，原估计  $\underline{\bar{x}}$  并不十分可靠，量测结果  $\underline{y}$  也并不十分靠，我们怎样从中对  $\underline{x}$  做出更好的估计呢？

假定  $\underline{y}$  的协方差阵已知为

$$COV(\underline{y}, \underline{y}) \stackrel{\Delta}{=} E\{(\underline{y} - E\underline{y})(\underline{y} - E\underline{y})^T\} = R \quad (5.52)$$

$R$  为  $m \times m$  的正定对称阵，并假定  $\underline{y}$  与  $\underline{x}$  是互相独立的随机变量，现在需要在已知  $\underline{x}$  和  $\underline{y}$  的协方差阵  $M$ ， $R$  的情况下确定  $K$ ，使得  $\hat{\underline{x}}$  是对于  $\underline{x}$  的最优估计。

**Kalman** 滤波器是最小方差估计，它的最优化准则是：

$$E\{(\hat{x}_1 - E\hat{x}_1)^2 + (\hat{x}_2 - E\hat{x}_2)^2 + \dots + (\hat{x}_n - E\hat{x}_n)^2\} = \min \quad (5.53)$$

即  $\hat{\underline{x}}$  的各分量的方差之和最小。设  $P$  表示经量测  $\underline{y}$  修正后的估计值  $\hat{\underline{x}}$

的协方差阵，即

$$P = E \{(\hat{x} - E \hat{x})(\hat{x} - E \hat{x})^T\} \quad (5.54)$$

它为  $n \times n$  的正定对称阵。显然  $P$  阵的主对角元素之和正好是 (5.53) 式的左边。因此，现在问题可转化为在已知  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  的协方差阵  $M$ ,  $R$  的情况下确定  $K$  使得

$$t_r P = \min$$

## 二、增益阵 $K$ 的确定

现在要把  $P$  阵表达出来，以确定  $K$  阵。由上面已知

$$\hat{x} = \bar{x} + K(\bar{y} - C\bar{x})$$

对上式两边取均值

$$E \hat{x} = E \bar{x} + K(E \bar{y} - CE \bar{x})$$

将上两式相减得：

$$\begin{aligned} \hat{x} - E \hat{x} &= \bar{x} - E \bar{x} + K(\bar{y} - E \bar{y}) - KC(\bar{x} - E \bar{x}) \\ &= (I - KC)(\bar{x} - E \bar{x}) + K(\bar{y} - E \bar{y}) \end{aligned} \quad (5.55)$$

再将 (5.55) 式代入 (5.54) 式，得

$$\begin{aligned} P &= E \{(\hat{x} - E \hat{x})(\hat{x} - E \hat{x})^T\} \\ &= E \left\{ [(I - KC)(\bar{x} - E \bar{x}) + K(\bar{y} - E \bar{y})] [(I - KC)(\bar{x} - E \bar{x}) + K(\bar{y} - E \bar{y})]^T \right\} \\ &= E \left\{ [(I - KC)(\bar{x} - E \bar{x}) + K(\bar{y} - E \bar{y})] [(\bar{x} - E \bar{x})^T (I - KC)^T + (\bar{y} - E \bar{y})^T K^T] \right\} \end{aligned}$$

即

$$P = (I - KC)M(I - KC)^T + KRK^T \quad (5.56)$$

因为  $\bar{x}$  与  $y$  相互独立，所以其中两项为零。

下面求使估计误差的方差极小的  $K$ 。为了避免用微分法求极小值，可将式 (5.56) 进行变换。然后把与  $K$  有关的项集中到一起得：

$$\begin{aligned} P &= M - KCM - MC^T K^T + KCMC^T K^T + KPK^T \\ &= M + K(CMC^T + R)K^T - KCM - MC^T K^T \end{aligned} \quad (5.57)$$

因为  $M$ ,  $R$  均为对称方阵，故上式中  $CMC^T + R$  亦为对称阵。

令

$$SS^T = CMC^T + R \quad (5.58)$$

则 (5.57) 式为

$$P = M + KSS^T K^T - KCM - MC^T K^T$$

试凑

$$= M + (KS - L)(KS - L)^T + \dots \quad (5.59)$$

其中  $(KS - L)(KS - L)^T = (KS - L)(S^T K^T - L^T)$

$$= KSS^T K^T - KSL^T - LS^T K^T + LL^T$$

设  $SL^T = CM$  则  $LS^T = MC^T$  (5.60)

则 (5.59) 式变成

$$P = M + (KS - L)(KS - L)^T - LL^T \quad (5.61)$$

由 (5.58)、(5.60) 两式可求得  $LL^T$ 。即在 (5.60) 式两边左乘  $S^T$ ，则得

$$S^T SL^T = S^T CM \quad L^T = (S^T S)^{-1} S^T CM$$

又  $L = MC^T S (S^T S)^{-1}$

以上两式相乘，得

$$LL^T = MC^T S (S^T S)^{-1} (S^T S)^{-1} S^T CM \quad (5.62)$$

令

$$W' = S (S^T S)^{-1} (S^T S)^{-1} S^T$$

$$S^T W' S = S^T S (S^T S)^{-1} (S^T S)^{-1} S^T S = I$$

$$SS^T W' S S^T = SS^T$$

所以

$$W' = (SS^T)^{-1} = (CMC^T + R)^{-1}$$

即得  $LL^T = MC^T (CMC^T + R)^{-1} CM$

因而 (5.61) 式可以写成

$$P = M + (KS - L)(KS - L)^T - MC^T (CMC^T + R)^{-1} CM \quad (5.63)$$

从上式可以看出，只有第二项中有  $K$ ，且第二项也是对称方阵，其对角元素为非负数。可见若选  $KS - L = 0$ ，则有  $\text{tr}P = \min$ ，这样就可以确定  $K$ 。

$$KS = L$$

$$KSS^T = LS^T = MC^T$$

$$K = MC^T (SS^T)^{-1} = MC^T (CMC^T + R)^{-1} \quad (5.64)$$

由式 (5.63) 得出  $\hat{x}$  的估计误差最小方差表达式

$$P = M - MC^T (CMC^T + R)^{-1} CM \quad (5.65)$$

或

$$P = M - KCM \quad (5.66)$$

由矩阵反演公式

$$P = (M^{-1} + C^T R^{-1} C)^{-1} \quad (5.67)$$

$$K = (M^{-1} + C^T R^{-1} C)^{-1} C^T R^{-1} \quad (5.68)$$

于是，我们就得到了  $K$ ，并且知道了新估计  $\hat{x}$  的协方差阵。对上面表达式  $P$ ， $K$  加以分析，可以得到一些有趣的结论：

### (1) 对于 $P$ 阵的解释

$$\text{因为 } P = M - \underbrace{MC^T}_{LL^T} \underbrace{(CMC^T + R)^{-1}}_{\text{对称阵}} \underbrace{CM}_{\text{对称阵}}$$

后一项  $LL^T$  是对称阵，其主对角元素为非负值，所以  $P$  的主对角元素总是小于等于  $M$  之相应主对角元素。而  $P$  是  $\hat{x}$  的误差方差阵，其  $P$  主对角元素是  $\hat{x}$  的各分量的误差方差； $M$  是  $\bar{x}$  的误差方差阵，其主对角元素是  $\bar{x}$  各分量的误差方差。这就是说利用量测结果将  $\bar{x}$  修正后得到的估计  $\hat{x}$  比  $\bar{x}$  更可靠，这是合乎需要的。

### (2) 增益阵 $K$ 的直观解释

a) 当  $R$  一定时，若  $M$  很大（指主对角元素很大）由式 (5.68) 可以看出  $K$  也很大，意即，若量测前的估计很不可靠，则应根据量测结果多修改些。

b) 当  $M$  一定时， $R$  增大，则由式 (5.64) 式可以看出  $K$  减小（对于  $m = 1$ ， $R$  是标量的情况更明显）。意即：若量测结果本身并不可靠，则不宜多修改原来的估计。

可见增益阵  $K$  是权衡了  $\hat{x}$  的原估计  $\bar{x}$  与量测结果  $y$  两者可靠性，决定该作多大程度的修改。

### 三、状态转移后对下一时刻的估计

现在来分析怎样由  $\hat{\underline{x}}_k$  经状态转移得到下一时刻的估计  $\bar{\underline{x}}_{k+1}$ 。为此有必要将离散模型重申如下：

#### 1. 离散模型

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = A \underline{x}(k) + B \underline{u}(k) + F \underline{w}(k) \\ \underline{y}(k+1) = C \underline{x}(k+1) + v(k+1) \end{cases} \quad (5.69)$$

其中  $A, B, C, F$  均为已知。 $\underline{u}_k$  是确定性量，是可以量测出来的， $\underline{w}_k$ 、 $v_k$  是随机干扰，假定为零均值的白噪声。

$$E(\underline{w}_i \underline{w}_j^T) = \delta_{ij} Q, \quad E(\underline{w}_k) = 0$$

$$E(v_i v_j^T) = \delta_{ij} R \quad E(v_k) = 0$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

同时假定  $\underline{x}_k$ 、 $\underline{w}_k$ 、 $v_k$  也是两两不相关的。

#### 2. 状态转移后对下一时刻的估计

若在状态转移之前， $\underline{x}_k$  之估计为  $\hat{\underline{x}}_k$ ，协方差阵为  $P_k$ ，经状态转移得到状态预报值  $\bar{\underline{x}}_{k+1}$  应由下式决定

$$\bar{\underline{x}}_{k+1} = A \hat{\underline{x}}_k + B \underline{u}_k + F \underline{w}_k \quad (5.70)$$

对 (5.70) 式两边取均值，由于  $E \underline{w}_k = 0$ ，所以得

$$E \bar{\underline{x}}_{k+1} = A E \hat{\underline{x}}_k + B \underline{u}_k \quad (5.71)$$

现在来求  $\bar{\underline{x}}_{k+1}$  的误差方差阵。对 (5.70) 式减去 (5.71) 式，得

$$\begin{aligned} \bar{\underline{x}}_{k+1} - E \bar{\underline{x}}_{k+1} &= A(\hat{\underline{x}}_k - E \hat{\underline{x}}_k) + F \underline{w}_k \\ M_{k+1} &\stackrel{\Delta}{=} E \{ (\bar{\underline{x}}_{k+1} - E \bar{\underline{x}}_{k+1})(\bar{\underline{x}}_{k+1} - E \bar{\underline{x}}_{k+1})^T \} \\ &= E \{ [A(\hat{\underline{x}}_k - E \hat{\underline{x}}_k) + F \underline{w}_k][A(\hat{\underline{x}}_k - E \hat{\underline{x}}_k) + F \underline{w}_k]^T \} \\ &= E \{ [A(\hat{\underline{x}}_k - E \hat{\underline{x}}_k)(\hat{\underline{x}}_k - E \hat{\underline{x}}_k)^T A^T + F \underline{w}_k \underline{w}_k^T F^T] \} \\ &= AP_k A^T + F Q F^T \end{aligned} \quad (5.72)$$

上式，因为  $\hat{\underline{x}}_k$  与  $\underline{w}_k$  不相关，所以相应有两项为零。

## 四、*Kalman* 濾波器的递推算法

### 1. 递推算法

现将 *Kalman* 濾波器的各步算法，按其计算顺序再一次地总结如下：

(1) 预先必须确切已知，参数矩阵  $A, B, C$  和  $F$ ，输入、输出噪声的方差分别为  $Q, R$ 。

(2) 下列初始条件必须已知，或者必须适当地假设：

初始状态  $\hat{x}(0)$

协方差阵  $P(0)$

(3) 计算下一步的新估计预测（即状态转移）

$$\underline{\underline{x}}_{(k+1)} = A \underline{\underline{x}}(k) + B \underline{u}(k) + F \underline{\underline{w}}(k) \quad (5.73)$$

因为  $\underline{w}(k)$  是未知的，这里用  $\underline{w}(k)$  的均值  $\bar{w}(k)$  来代替。

(4) 计算  $\bar{X}(k+1)$  误差协方差阵

$$\underline{\underline{M}}_{k+1} = AP_k A^T + FQF^T \quad (5.74)$$

(5) 计算改进新估计值的修正矩阵（即增益阵）。

$$K_{k+1} = M_{k+1} C^T (CM_{k+1} C^T + R)^{-1} \quad (5.75)$$

(6) 计算  $k+1$  时刻的精确估计  $\hat{x}_{k+1}$

$$\hat{x}_{k+1} = \bar{x}_{k+1} + K_{k+1} (\underline{y}_{k+1} - C \bar{x}_{k+1}) \quad (5.76)$$

(7) 计算估计值， $\hat{x}_{k+1}$  的误差协方差阵

$$P_{k+1} = M_{k+1} - K_{k+1} CM_{k+1} \quad (5.77)$$

(8) 将  $k$  增 1，并重得按 (3) 往下进行

2. *Kalman* 濾波器框图(见图 5.10)

3. 几点说明

(1) *Kalman* 濾波方法的一个明显优点是，它是一种递推算法，当获得一次新的量测  $\underline{y}_{k+1}$  后，只需要利用上一次推算得到的前一状态的估计值  $\hat{x}_k$  和滤波误差方差阵  $P_k$ ，就可以算出新一步状态估计值

$\hat{x}_{k+1}$  和滤波误差阵  $P_{k+1}$ 。这样，不论量测次数如何增加，需要存贮的历史的量测数据和计算结果并不相应增加。

### (2) 初始值的确定

开始时需要假定初始状态。由于初始状态是未知的，所以一般设：

$$\hat{x}(0) = \bar{x}(0)$$

另外必须适当地假设

$$P(0) = E \{ (\hat{x}(0) - E \hat{x}(0)) (\hat{x}(0) - E \hat{x}(0))^T \}$$

若  $\hat{x}(0)$ ， $P(0)$  选择适当，用  $K$  可以消除影响，并不需要准确地知道  $\hat{x}(0)$  和  $P(0)$ 。

### (3) 增益阵 $K$ 的离线计算。

增益阵  $K$  与测量无关，因此，在测量开始之前就能对它进行计算，并加以存贮，增益阵  $K$  的离线计算通过下述三个公式交替进行。

$$M_{k+1} = AP_k A^T + FQF^T$$

$$K_{k+1} = M_{k+1} C^T (CM_{k+1}C^T + R)^{-1}$$

$$P_{k+1} = M_{k+1} - M_{k+1} C^T (CM_{k+1}C^T + R)^{-1} CM_{k+1}$$

当  $k \rightarrow \infty$  时， $M_{k+1}, K_{k+1}, P_{k+1}$  均趋于它们各自的常数。

### 例 5.4 已知随机系统

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.1766 & -0.9580 & 1.7063 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(k) \\ y(k) = [0 \ 0 \ 1] \underline{x}(k) + v(k) \end{cases}$$

$w(k), v(k)$  为零均值白噪声,  $w(k), v(k), \underline{x}(k)$  两两不相关。

$$\text{现假定 } P(0) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad Q = 1, \quad R = 4,$$

表 5.1 给出了  $k = 0, 1, \dots, 10$  时的协方差矩阵, 可以看出, 当  $k \geq 6$  后, 其元素变化很小。因此大约在  $k \geq 6$  时, **Kalman** 滤波器就处于稳定状态。

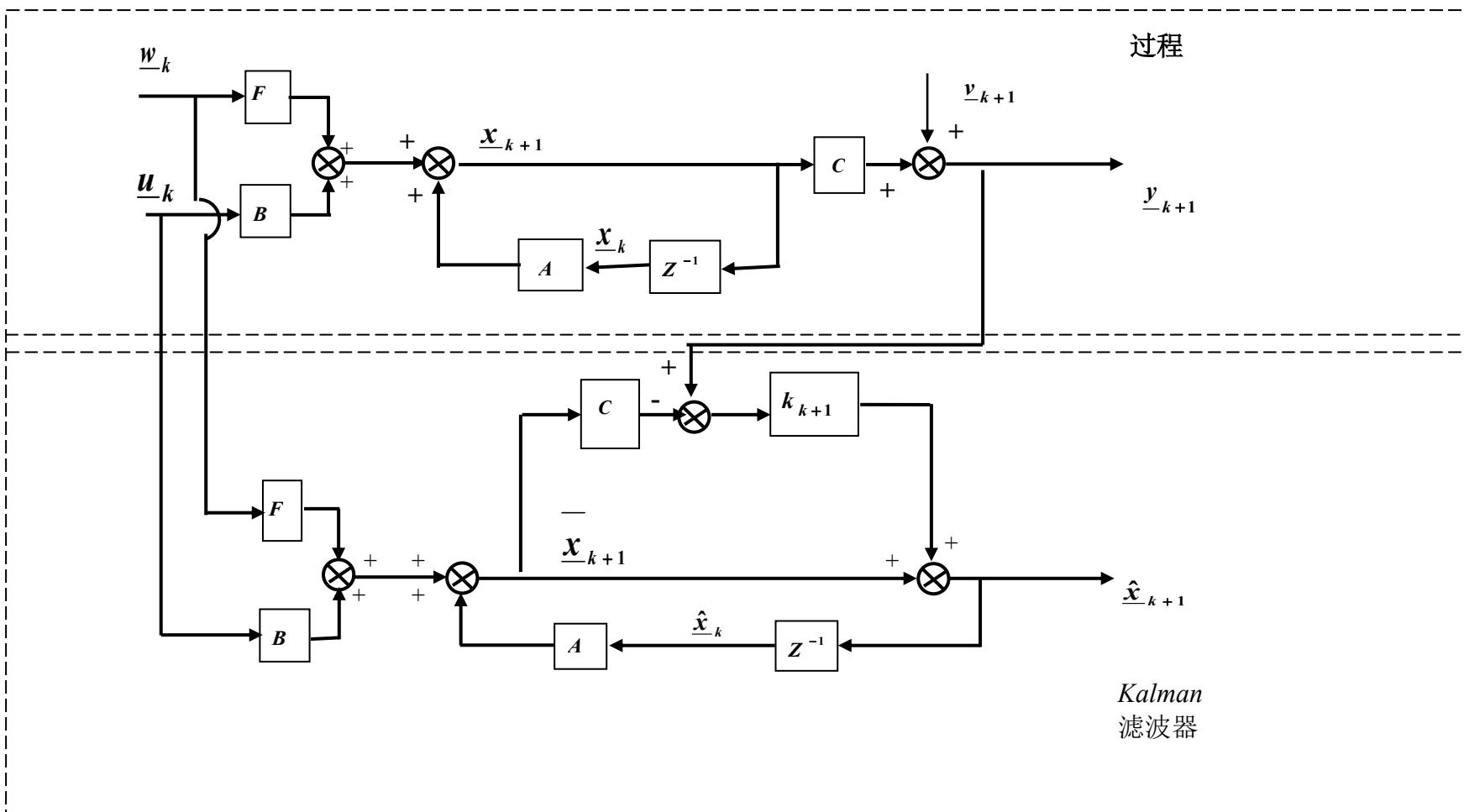
**Kalman** 滤波器内容很丰富, 这里只介绍了离散定常系统的 **Kalman** 滤波器。

表 5.1

---

$P(0) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$	$P(1) = \begin{bmatrix} 0.4669 & 0.059 & -0.2765 \\ 0.059 & 0.395 & 0.4924 \\ -0.2765 & 0.4924 & 1.6913 \end{bmatrix}$
$P(2) = \begin{bmatrix} 0.3688 & 0.3611 & 0.2221 \\ 0.3611 & 1.0335 & 1.1124 \\ 0.2221 & 1.1124 & 2.1187 \end{bmatrix}$	$P(3) = \begin{bmatrix} 0.9224 & 0.8166 & 0.4572 \\ 0.8166 & 1.3306 & 1.2177 \\ 0.4572 & 1.2177 & 2.1183 \end{bmatrix}$
$P(4) = \begin{bmatrix} 1.2243 & 0.9337 & 0.4492 \\ 0.9337 & 1.3603 & 1.1991 \\ 0.4492 & 1.1991 & 2.1033 \end{bmatrix}$	$P(6) = \begin{bmatrix} 1.2547 & 0.9229 & 0.4282 \\ 0.9229 & 1.3511 & 1.1949 \\ 0.4284 & 1.1949 & 2.1072 \end{bmatrix}$
$P(8) = \begin{bmatrix} 1.2546 & 0.9242 & 0.4292 \\ 0.9242 & 1.3523 & 1.1954 \\ 0.4292 & 1.1954 & 2.1075 \end{bmatrix}$	$P(10) = \begin{bmatrix} 1.2549 & 0.9242 & 0.4294 \\ 0.9242 & 1.3523 & 1.1954 \\ 0.4294 & 1.1954 & 2.1073 \end{bmatrix}$

LCD 2014年秋季



LCD 2014年秋季  
图 5.10

## 第六章 最优控制

最优控制是由于航空航天的制导、导航和控制技术的需要而发展起来的，是现代控制理论中最富有成果的部分。受控系统在最优控制下产生的运动能使得某个给定的性能指标达到最小（大）。

### §1 基本概念

如图 1-1 所示，宇宙飞船在月球表面实现软着陆，要求控制发动机的推力  $f$ ，使燃料消耗最少。

设飞船总质量为  $m$ ，自身质量及所带燃料分别为  $M$  和  $F$ ，它的高度和垂直速度分别为  $h$  和  $v$ ，月球的重力加速度为  $g$ ，自  $t = 0$  时刻进入着陆过程。其运动方程为：

$$\begin{cases} \dot{h} = v, & h(0) = h_0 \\ \dot{v} = \frac{f}{m} - g, & v(0) = v_0 \\ \dot{m} = -k f, & m(0) = M + F \end{cases}$$

其中  $k$  是一常数。要求控制飞船从初始状态出发，于某一时刻  $t_f$  实现软着陆，即

$$h(t_f) = 0, \quad v(t_f) = 0$$

推力  $f(t)$  受发动机最大推力的限制，即

$$0 \leq f(t) \leq f_{\max}$$

满足上述限制使飞船实现软着陆的推力程序  $f(t)$  不止一种，但对节省燃料而言，使性能指标  $J = m(t_f)$  为最大者才是最优的。

**[定义 1-1]** 最优控制是指：给定受控系统的状态方程，求一容许控制，使系统由给定的初态转移到希望的末态（目标集），并使给定的性能指标为最小。

最优控制的求解方法有：古典变分法、极大值原理和动态规划。

### §2 泛函与变分

#### 2.1 定义与公式

**[定义 2-1]** 如果对于函数集合  $\{y(x)\}$  中的每一个函数  $y(x)$ ，均有  $J$  的一个实数值与之对应，则称变量  $J$  是函数  $y(x)$  的泛函。通常记为：

$$J = J[y(x)]$$

如， $J = \int_0^1 y(x) dx$ ，则  $y(x) = x, J = 0.5$ ； $y(x) = \cos x, J = \sin 1$ 。

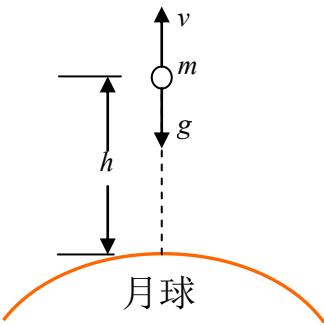


图 1-1

又如, 图 2-1 所示, 设  $y = y(x)$  是连接平面上  $A$ 、 $B$  两点的一条曲线。

则曲线的弧长  $S$  是函数  $y(x)$  的泛函。

若  $y(x)$  连续可微, 则  $S$  可表示为:

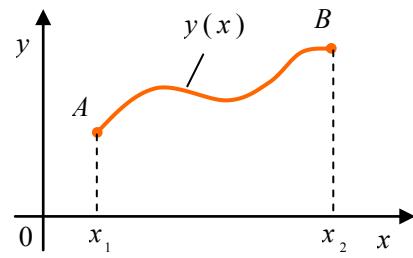


图 2-1

注意, 泛函的因变量是数, 而自变量是函数。通常把泛函的自变量称为“宗量”, 并通俗地将泛函比喻作“函数的函数”。

思考:  $J = y(x)|_{x=1}$ ,  $J = \int_0^1 \sin x dx$  是泛函吗?

思考: 试比较泛函  $J = J[y(x)]$  和复合函数  $f = f[y(x)]$  的异同。

[定义 2-2] 线性泛函是满足以下条件的泛函:

$$\begin{cases} J[y_1(x) + y_2(x)] = J[y_1(x)] + J[y_2(x)] \\ J[ay(x)] = aJ[y(x)] \quad a \text{ 为任意常数} \end{cases} \quad (2-1)$$

[定义 2-3] 函数(宗量)的变分  $\delta y(x)$  是  $y(x)$  与另一个函数之差:

$$\delta y(x) = y'(x) - y(x) \quad (2-2)$$

[定理 2-1] 函数  $y(x)$  的变分  $\delta y(x)$  仍然是  $x$  的函数。根据定义有:

$$\frac{d}{dx} \delta y(x) = \delta \left[ \frac{d}{dx} y(x) \right], \quad \int_0^x \delta y(x) dx = \delta \left[ \int_0^x y(x) dx \right] \quad (2-3)$$

[定义 2-4] 宗量的变分  $\delta y$  引起的泛函增量可以表示为:

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[y(x) + \delta y(x)] - J[y(x)] \\ &= L[y(x), \delta y(x)] + \beta[y(x), \delta y(x)] \end{aligned} \quad (2-4)$$

若  $L$  是关于  $\delta y$  的线性泛函, 而  $\beta$  是关于  $\delta y$  的高阶无穷小, 则把  $L$  称为泛函的变分, 记为:

$$\delta J = L[y(x), \delta y(x)] \quad (2-5)$$

表 2-1 泛函的变分与函数的微分概念对比

类型	增量 $\Delta$	微分 $d$ / 变分 $\delta$
自变量 $x$	$\Delta x = x' - x$	$dx \Leftrightarrow \Delta x$
函数 $y(x)$	$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$	$dy \Leftrightarrow \Delta y$ 的线性主部
宗量 $y(x)$	$\Delta y = y'(x) - y(x)$	$\delta y \Leftrightarrow \Delta y$
泛函 $J[y(x)]$	$\Delta J = J[y + \Delta y] - J[y]$	$\delta J \Leftrightarrow \Delta J$ 的线性主部

[定理 2-2] 泛函  $J = J[y(x)]$  的变分可如下计算：(其中  $a$  是实变量)

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial a} J[y(x) + a \delta y(x)] \Big|_{a=0} \quad (2-6)$$

证明：  
 $\frac{\partial}{\partial a} J[y(x) + a \delta y(x)] \Big|_{a=0} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \{J[y(x) + \Delta a \delta y(x)] - J[y(x)]\}$   
 $= \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{L[y(x), \Delta a \delta y(x)]}{\Delta a} + \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\beta[y(x), \Delta a \delta y(x)]}{\Delta a \delta y(x)} \delta y(x)$   
 $= L[y(x), \delta y(x)] = \delta J \quad \text{证毕。}$

[定理 2-3] 若  $J = \int_{x_1}^{x_2} F[y(x)] dx$ , 则：

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y(x) dx \quad (2-7)$$

证明：由公式 (2-6) 得：

$$\begin{aligned} \delta J &= \frac{\partial}{\partial a} \int_{x_1}^{x_2} F[y(x) + a \delta y(x)] dx \Big|_{a=0} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F(y + a \delta y)}{\partial(y + a \delta y)} \cdot \frac{\partial(y + a \delta y)}{\partial a} \right] \Big|_{a=0} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y(x) dx \quad \text{证毕。} \end{aligned}$$

[定理 2-4] 若  $J = \int_{x_1}^{x_2} F[y_1(x), \dots, y_n(x), x] dx$ , 则：

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y_1} \delta y_1(x) + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n} \delta y_n(x) \right] dx \quad (2-8)$$

■ 思考：公式 (2-8) 右端方括号中为什么没有  $\frac{\partial F}{\partial x} \delta x$  项？

[例 2-1] 求泛函  $J = \int_0^1 y^2(x) dx$  的变分

解：以下三种方法分别根据式 (2-5)、(2-6) 和 (2-7)

$$\begin{aligned} (1) \quad \Delta J &= \int_0^1 [y(x) + \delta y(x)]^2 dx - \int_0^1 [y(x)]^2 dx \\ &= 2 \int_0^1 y(x) \delta y(x) dx + \int_0^1 [\delta y(x)]^2 dx \end{aligned}$$

$$\delta J = 2 \int_0^1 y(x) \delta y(x) dx$$

$$(2) \quad \delta J = \frac{\partial}{\partial a} J[y(x) + a \delta y(x)] \Big|_{a=0} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} [y(x) + a \delta y(x)]^2 \Big|_{a=0} dx$$

$$= \int_0^1 2[y(x) + a\delta y(x)]\delta y(x) \Big|_{a=0} dx = 2 \int_0^1 y(x)\delta y(x) dx$$

$$(3) \quad \delta J = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial y} \delta y(x) dx = 2 \int_0^1 y(x)\delta y(x) dx$$

## 2.2 无条件泛函极值

[定义 2-5] 如果泛函  $J[y(x)]$  对于充分接近  $y^*(x)$  的任何曲线  $y(x)$ , 都有  $\Delta J = J[y(x)] - J[y^*(x)] \geq 0$  ( $\leq 0$ ), 则称泛函  $J[y(x)]$  在曲线  $y^*(x)$  上达到极小值 (极大值)。

[定理 2-5] 具有变分的泛函  $J[y(x)]$  在  $y^*(x)$  上取极值的必要条件是:

$$\delta J[y^*(x)] = 0 \quad (2-9)$$

证明: 泛函  $J[y(x)]$  在  $y^*(x)$  上取得极值, 即  $J[y^*(x) + a\delta y(x)]$  在  $a = 0$  时取得极值, 由函数在某点取极值的必要条件可得:

$$\left. \frac{\partial J[y^*(x) + a\delta y(x)]}{\partial a} \right|_{a=0} = \delta J[y^*(x)] = 0 \text{。 证毕。}$$

[例 2-2] 不动边界的泛函极值问题。设泛函为:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F[x(t), \dot{x}(t), t] dt \quad (2-10)$$

起始时刻  $t_0$  和终端时刻  $t_f$  是固定的, 初值  $x(t_0)$  和终值  $x(t_f)$  也都是固定的, 求  $x^*(t)$  使  $J$  为极小。

解:

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial F}{\partial x} \delta x dt + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \delta x \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) dt \\ &= \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt = 0 \end{aligned}$$

由于  $x(t_0)$  和  $x(t_f)$  是固定的,  $\delta x(t_f) = \delta x(t_0) = 0$ , 上式第一项为零, 因而第二项也必须为零。由于  $\delta x$  是任意的, 得到:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (2-11)$$

这就是著名的欧拉—拉格朗日方程, 简称欧拉方程。

[例 2-2] 设泛函为  $J = \int_1^2 (\dot{x} + \dot{x}^2 t^2) dt$ ,  $x(1) = 1$ ,  $x(2) = 2$ , 求  $x^*(t)$ 。

解：该题符合上面讨论的问题类型，可直接利用欧拉方程求解。

$$F = \dot{x} + \dot{x}^2 t^2 \text{ 的欧拉方程为: } \frac{d}{dt}(1 + 2\dot{x}t^2) = 0, \text{ 即: } t\ddot{x} + 2\dot{x} = 0,$$

$$\text{其解为: } x = \frac{c_1}{t} + c_2, \text{ 代入 } x(1) = 1, \quad x(2) = 2 \text{ 得: } c_1 = -2, \quad c_2 = 3,$$

$$\text{因此, 使性能指标 } J \text{ 取极值的最优函数为 } x^*(t) = -\frac{2}{t} + 3.$$

## § 变分法求解最优控制

### 3.1 末时刻固定末状态自由问题

(1) 原问题描述

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3-1a)$$

$$J[u(\cdot)] = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt \quad (3-1b)$$

$t_f$  固定,  $x(t_f)$  自由, 寻找  $u^*(t)$  使  $J[u^*(\cdot)]$  最小。

(2) 化为无条件极值问题

引入 Lagrange 待定乘子  $\lambda(t) = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)]^T$ , 设:

$$J_1[u(\cdot)] = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{L(x, u, t) + \lambda^T [f(x, u, t) - \dot{x}]\} dt$$

定义 Hamilton 函数  $H(x, u, \lambda, t) = \lambda^T f(x, u, t) + L(x, u, t)$ , 则

$$J_1[u(\cdot)] = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} [H(x, u, \lambda, t) - \lambda^T \dot{x}] dt$$

$$\because - \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T \dot{x} dt = - \lambda^T x \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T \dot{x} dt$$

$$\therefore J_1[u(\cdot)] = \varphi[x(t_f), t_f] + \lambda^T(t_0)x(t_0) - \lambda^T(t_f)x(t_f) \\ + \int_{t_0}^{t_f} [H(x, u, \lambda, t) + \lambda^T \dot{x}] dt$$

原问题转化为求  $J_1$  的无条件极小。

(3) 令  $J_1$  的变分为零

注意, 该问题中, 当  $u(t)$  有变分 (变化)  $\delta u(t)$  时, 将引起状态变分  $\delta x(t)$ , 从而有末态变分  $\delta x(t_f)$ ; 而  $t_f$ 、 $t_0$  和  $x(t_0)$  是固定的, 无变分, 待定乘子  $\lambda(t)$  也无变分。

$$\begin{aligned} \delta J_1 &= \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)} - \lambda(t_f) \right]^T \delta x(t_f) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[ \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}(t) \right]^T \delta x(t) + \left[ \frac{\partial H}{\partial u} \right]^T \delta u(t) \right\} dt = 0 \end{aligned}$$

$$\text{选择 } \lambda: \quad \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}$$

$$\text{控制方程: } \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0$$

[定理 3-1] 末时刻固定末状态自由的最优控制问题 (3-1), 其最优解应满足的必要条件如下:

$$H \text{ 函数: } H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$\text{控制方程: } \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0$$

$$\text{正则方程: } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) & \text{状态方程} \\ \boldsymbol{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} & \text{协态方程} \end{cases}$$

$$\text{边界条件: } \begin{cases} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 & \text{初始条件} \\ \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} & \text{末端条件} \end{cases}$$

### 3.2 各种末端情况下的最优控制问题

以上讨论了  $t_f$  固定  $\mathbf{x}(t_f)$  自由的最优控制问题。事实上, 根据末端情况的不同, 有 2 大类问题:  $t_f$  固定和  $t_f$  可变; 每一类中, 又可分为 3 种情形:  $\mathbf{x}(t_f)$  自由、 $\mathbf{x}(t_f)$  固定和  $\mathbf{x}(t_f)$  受约束。

[定理 3-2] 各种末端情况下的最优控制问题, 其最优解的必要条件具有相同的哈密顿函数、控制方程、正则方程和初始条件, 仅末端条件不同 (参见[定理 3-1])。

表 3-1 各种情形下应满足的末端条件

	$t_f$ 固定、可变	$t_f$ 可变
$\mathbf{x}(t_f)$ 自由	$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}(t_f)}$	$H(t_f) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_f}$
$\mathbf{x}(t_f)$ 固定	$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$	$H(t_f) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_f}$
$\mathbf{x}(t_f)$ 受约	$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \boldsymbol{\mu}$ $\mathbf{g}[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0$	$H(t_f) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_f} + \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial t_f} \boldsymbol{\mu}$

- ⊕  $t_f$  可变时的末端条件和  $t_f$  固定时是相同的 (见上表第 2 列), 但要增加一个条件 (见上表第 3 列), 以确定  $t_f$ 。
- ⊕  $\mathbf{x}(t_f)$  受约束时,  $\mathbf{g}$  为  $k$  维约束向量函数,  $\boldsymbol{\mu}$  为  $k$  维待定乘子向量。

■ 思考:  $\lambda(t)$  和  $\mu$  均是 Lagrange 待定乘子, 为什么前者是  $t$  的函数, 而后者不是? 它们对应的约束方程各是什么?

### 3.3 哈密顿函数的性质

■ 正则方程中, 状态方程和协态方程对偶

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (3-2)$$

■ 沿最优轨线  $H$  的全导数 = 偏导数

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x^T} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial u^T} \dot{u} + \frac{\partial H}{\partial \lambda^T} \dot{\lambda} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (3-3)$$

■ 对于定常系统,  $H$  不显含  $t$ , 则沿最优轨线  $H$  为常数; 进一步, 若  $t_f$  可变,  $\varphi$  和  $g$  中不显含  $t_f$ , 则沿最优轨线  $H$  为零。

### 3.4 变分法求解最优控制问题举例

[例 3-1] 已知受控系统  $\dot{x} = u$ ,  $x(t_0) = x_0$ , 求  $u(t)$ , 使下述性能指标最小: (其中,  $t_f$  是固定时刻)

$$J = \frac{1}{2}x^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} u^2 dt$$

解: 这是  $t_f$  固定,  $x(t_f)$  自由的最优控制问题。

$$H \text{ 函数: } H = L + \lambda f = (1/2)u^2 + \lambda u$$

$$\text{控制方程: } \partial H / \partial u = u + \lambda = 0, \text{ 即 } u = -\lambda$$

$$\text{正则方程: } \dot{x} = u = -\lambda, \quad \dot{\lambda} = -\partial H / \partial x = 0$$

$$\text{边界条件: } x(t_0) = x_0, \quad \lambda(t_f) = \partial \varphi / \partial x(t_f) = x(t_f)$$

$$\text{解方程得: } x(t) = -x(t_f)t + x(t_f)t_0 + x_0$$

$$u^*(t) = -\lambda(t) = -x(t_f) = -\frac{x_0}{1 + (t_f - t_0)}$$

■ 已知问题本身有解, 而根据必要条件求得的解又是唯一的, 所以该极值控制就是最优控制。

[例 3-2] 已知受控系统  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = u$ ,  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ , 求  $u(t)$ , 使得  $t_f = 1$  时满足  $x_1(1) + x_2(1) = 1$ , 并使下述性能指标最小:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 dt$$

解: 这是  $t_f$  固定,  $x(t_f)$  受约束的最优控制问题。

$H$  函数:  $H = L + \lambda^T f = (1/2)u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$

控制方程:  $\partial H / \partial u = u + \lambda_2 = 0$ , 即  $u = -\lambda_2$

正则方程:  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -\lambda_2$ ,  $\dot{\lambda}_1 = 0$ ,  $\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1$

边界条件:  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$

$$g(x(1)) = x_1(1) + x_2(1) - 1 = 0$$

$$\lambda(1) = \partial \varphi / \partial x(1) + [\partial g / \partial x(1)]\mu = [\mu \ \mu]^T$$

解方程得:  $u^*(t) = -\frac{3}{7}t + \frac{6}{7}$

$$x_1^*(t) = -\frac{1}{14}t^3 + \frac{3}{7}t^2, \quad x_2^*(t) = -\frac{3}{14}t^2 + \frac{6}{7}t$$

思考: 该例所得的正则方程中,  $\lambda$  仅和  $\lambda$  有关, 而和  $x$  无关, 因而可以方便地求出  $\lambda$ 。若  $\lambda$  和  $x$  有关, 如何求解?

[例 3-3] 已知受控系统  $\dot{x} = u$ ,  $x(0) = 1$ , 求  $u(t)$ , 使得  $x(t_f) = 0$  ( $t_f$  可变), 并使下述性能指标最小:

$$J = t_f + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2 dt$$

解: 这是一个  $t_f$  可变,  $x(t_f)$  固定的问题。

$H$  函数:  $H = L + \lambda f = (1/2)u^2 + \lambda u$

控制方程:  $\partial H / \partial u = u + \lambda = 0$ , 即  $u = -\lambda$

正则方程:  $\dot{x} = u = -\lambda$ ,  $\dot{\lambda} = -\partial H / \partial x = 0$

边界条件:  $x(0) = 1$ ,  $x(t_f) = 0$ ,  $H(t_f) = -\partial \varphi / \partial t_f = -1$

解方程得:  $\lambda(t) = \sqrt{2}$ ,  $u^*(t) = -\sqrt{2}$ ,  $x^*(t) = 1 - \sqrt{2}t$ ,  $t_f^* = 1/\sqrt{2}$

思考: 该例中, 将控制方程代入  $H$  函数得:  $H = -(1/2)\lambda^2$ , 再由  $H(t_f) = -1$  可得  $\lambda(t) = \pm\sqrt{2}$ , 这里舍去了负值, 为什么?

## §4 线性系统二次型指标的最优控制

对于线性系统, 若性能指标中的各项取二次型函数形式, 则称为线性系统二次型指标的最优控制, 简称线性二次型 (LQ) 问题。它的最优解可以用解析形式表达为简单的状态反馈控制律, 是最优控制中最有成效的一部分。

### 4.1 线性系统有限时间状态调节器

受控系统和最小化性能指标如下:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0 \quad (4-1a)$$

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{F} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}] dt \quad (4-1b)$$

$\mathbf{F}$  和  $\mathbf{Q}(t)$  非负定,  $\mathbf{R}(t)$  正定。

- $\mathbf{F}$  项反映了对末态趋于零的要求,  $\mathbf{Q}$  项反映了对过渡过程性能的要求,  $\mathbf{R}$  项则反映了对控制能量的限制。
- $\mathbf{F}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$  的选择决定了各项之间的权衡, 这是个困难的问题, 通常靠试探和经验, 这里假定它们已确定。

这里的有限时间状态调节器问题是  $t_f$  固定、 $\mathbf{x}(t_f)$  自由、 $\mathbf{u}$  不受限的最优控制问题, 可以直接利用前面的结果。

$$H \text{ 函数: } H = L + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B} \mathbf{u}$$

$$\text{控制方程: } \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} = 0, \text{ 即 } \mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}$$

$$\text{正则方程: } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}$$

$$\text{边界条件: } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} = \mathbf{F} \mathbf{x}(t_f)$$

正则方程是线性的, 且  $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{F} \mathbf{x}(t_f)$  也是线性的, 不妨设:

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{P}(t_f) = \mathbf{F}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x} + \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = (\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}) \mathbf{x}$$

由正则方程知  $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = (-\mathbf{Q} - \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{x}$ , 与上式比较得:

$$\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (4-2a)$$

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{F} \quad (4-2b)$$

[定理 4-1] 对线性系统有限时间状态调节器问题 (4-1), 最优反馈控制的充要条件是:

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \quad (4-3)$$

其中,  $\mathbf{P}(t)$  是 Riccati 矩阵微分方程 (4-2) 的解, 且

$$J^* = (1/2) \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P}(t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (4-4)$$

证明: (前面的推导过程已经证明了必要性, 以下证明充分性)

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) = (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T + \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T) \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \dot{\mathbf{P}}) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{u} \quad [\text{参见 (4-2a)}] \\ &= (\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x})^T \mathbf{R} (\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) - \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} \end{aligned}$$

(2) 对 (1) 两端积分得:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} [(\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x})^T \mathbf{R} (\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x})] dt - \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \\ &= \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{F} \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P}(t_0) \mathbf{x}(t_0) \end{aligned}$$

(3) 将 (2) 两端的第二项交换位置得:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{F} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P}(t_0) \mathbf{x}(t_0) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [(\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x})^T \mathbf{R} (\mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x})] dt \end{aligned}$$

上式第二项非负, 当且仅当  $\mathbf{u}^* = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$  时为零, 证毕。

**[例 4-1]** 已知受控系统  $\dot{x} = -x + u$ ,  $x(0) = x_0$ , 求最优反馈控制使下述性能指标最小:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^2 + u^2) dt$$

解: 由题意知:  $A = -1$ ,  $B = 1$ ,  $Q = 1$ ,  $R = 1$ ,  $F = 0$ , 根据[定理 4-1]得:

最优控制:  $u^*(t) = -p(t)x(t)$

Riccati 方程:  $\dot{p} - 2p - p^2 + 1 = 0$ ,  $p(t_f) = 0$

$$p(t) = \frac{1 - e^{2\sqrt{2}(t-t_f)}}{\sqrt{2} + 1 + (\sqrt{2} - 1)e^{2\sqrt{2}(t-t_f)}}$$

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} p(t) = \sqrt{2} - 1 = \text{const}$$

注意,  $p(t)$  依赖于  $t_f$ , 下图给出了不同  $t_f$  下的  $p(t)$  曲线:

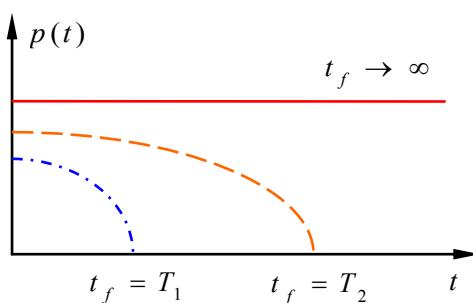


图 4-1

思考: 该例中,  $p(t_f) = 0$ , 但当  $t_f \rightarrow \infty$  时,  $p(t)$  趋于常数 ( $\sqrt{2} - 1$ ), 有矛盾吗?

### Riccati 矩阵微分方程解的性质

在  $[t_0, t_f]$  上, 若方程中所给矩阵的元均连续并有界, 则  $\mathbf{P}(t)$  存在唯一解 (通常无解析解), 且是对称的、非负定的。

即使方程中所给矩阵均是定常的， $\mathbf{P}(t)$  通常也是时变的，但如果  $t_f \rightarrow \infty$ ，则  $\mathbf{P}(t)$  趋于定常矩阵。

为强调  $\mathbf{P}(t)$  依赖于末时刻  $t_f$  和末值  $\mathbf{F}$ ，记为  $\mathbf{P}(t, \mathbf{F}, t_f)$ 。例如：  
 $\mathbf{P}(t, \mathbf{0}, t_f)$  所表示的  $\mathbf{P}(t)$  满足  $\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{0}$ 。

## 4.2 线性定常系统无限时间状态调节器

受控系统和最小化性能指标如下：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (4-5a)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (4-5b)$$

$\mathbf{Q}$  非负定， $\mathbf{R}$  正定。

- 和上节研究的问题相比主要有两点差别：首先是所有的系数矩阵和加权矩阵均改为常数矩阵，其次是末端时间由有限改为无限。  
由于  $t_f \rightarrow \infty$ ，不再有末时刻，因而没有末态指标项；对稳态（注意稳态和末态的区别）时状态趋于零的要求体现在  $\mathbf{Q}$  项中。

### 4.2.1 最优解的存在条件

对于有限时间调节器问题， $J$  总是有限值，必存在最优解。但在无限时间情况下，也许无论怎样选择  $\mathbf{u}$ ， $J$  总是无限大，因而不存在最优解。怎样才能保证有最优解呢？

[定理 4-2] 对线性定常系统无限时间状态调节器问题 (4-5)，若系统完全可控，则存在最优解。

证明：因系统完全可控，对任意非零初始状态  $\mathbf{x}(t_0)$ ，必存在有界控制  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ ，在有限时刻  $t_1 > t_0$  使系统回到状态空间原点（平衡点），在时刻  $t_1$  之后置  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$  为零。在此如此定义的  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ ， $t \in [t_0, \infty)$  作用下，性能指标  $J$  一定是有界的，因而最优解存在。证毕。

完全可控性只是问题有解的充分条件。事实上，只要不可控模态是渐稳的（可镇定性），或者既不可控又不渐稳的模态在性能指标中不可观（不反映在指标中），问题就有解。

### 4.2.2 最优解的表达形式

在问题有解的前提下，可以将前节讨论的有限时间调节器的结果推广到这里。因此，我们要考察  $t_f \rightarrow \infty$  时，Riccati 矩阵微分方程的解  $\mathbf{P}(t, \mathbf{0}, \infty)$  是否存在。（注： $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ）

[定理 4-3] 当问题 (4-5) 有解时, Riccati 矩阵微分方程 (4-2) 的解  $\mathbf{P}(t, \mathbf{0}, \infty)$  存在, 且为常数。

证明:

(1) 若问题 (4-5) 有解, 则  $J^*(t_f) = (1/2) \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P}(t_0, \mathbf{0}, t_f) \mathbf{x}(t_0)$  在  $t_f \rightarrow \infty$  时有界, 由于  $t_0$  和  $\mathbf{x}(t_0)$  的任意性,  $\mathbf{P}(t, \mathbf{0}, \infty)$  存在。

(2) 对问题 (4-5), 矩阵微分方程 (4-2) 是定常的, 具有性质:

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{0}, t_f) = \mathbf{P}(0, \mathbf{0}, t_f - t), \text{ 令 } t_f \rightarrow \infty, \text{ 则有:}$$

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{0}, \infty) = \mathbf{P}(0, \mathbf{0}, \infty), \text{ 即 } \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(0) \text{ 为定常矩阵。证毕。}$$

由于  $\mathbf{P}(t)$  定常, 导数为零, Riccati 矩阵微分方程 (4-4) 变为:

$$\mathbf{PA} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{PBR}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (4-6)$$

[定理 4-4] 对线性定常系统无限时间状态调节器问题 (4-5), 若问题有解, 则最优反馈控制的充要条件是:

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \quad (4-7)$$

其中,  $\mathbf{P}$  是 Riccati 矩阵代数方程 (4-6) 的非负定解, 且

$$J^* = (1/2) \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_0) \quad (4-8)$$

✚ Riccati 矩阵微分方程的解是唯一的,  $t_f \rightarrow \infty$  时, 解也是唯一的; 但其对应的矩阵代数方程的解却不一定唯一 (非负定解唯一)。

### 4.2.3 闭环系统的稳定性

按上述定理构成的闭环系统是否一定稳定呢? 先看一个例子:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{u}, \quad J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathbf{u}^T \mathbf{u} dt$$

由于  $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ , 根据 Riccati 代数方程得到  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ , 从而  $\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$  (也可由性能指标直接看出), 闭环系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$  显然是不稳定的, 这是由于开环系统的不稳定状态没有反映在性能指标中。

[定理 4-5] 设  $\mathbf{Q} = \mathbf{D}^T \mathbf{D}$ , 则  $(\mathbf{A}, \mathbf{D})$  完全能观测是 Riccati 矩阵代数方程 (4-6) 的非负定解为正定矩阵的充要条件。

证明: (充分性)  $(\mathbf{A}, \mathbf{D})$  完全能观测必导致非负定  $\mathbf{P}$  为正定矩阵。

反设  $\mathbf{P}$  不是正定的, 因而存在非零的  $\mathbf{x}(t_0)$ , 使得

$$J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_0) = 0$$

这就要求性能指标中的被积函数恒等于零,  $\because \mathbf{R} > 0$ ,  $\therefore \mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ , 此时,

系统的状态为:  $x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$ , 从而

$$J^* = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} x^T(t) Q x(t) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} x^T(t) D^T D x(t) dt = 0$$

这就意味着:  $D x(t) = D e^{A(t-t_0)} x(t_0) \equiv \mathbf{0}$ , 也就是说, 存在非零状态  $x(t_0)$  是  $(A, D)$  不可观测的, 这和  $(A, D)$  完全能观测是矛盾的。证毕。

命题的必要性可以用类似的方法得到证明 (略)。

**[定理 4-6]** 设  $Q = D^T D$ , 若  $(A, D)$  完全能观测, 则由最优控制律构成的闭环系统  $\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T P)x$  是渐近稳定的。

证明: 由给定条件和[定理 4-5]可以得到  $P > 0$

$$\text{选: } V(x) = x^T P x > 0$$

$$\begin{aligned} \text{则: } \dot{V}(x) &= x^T (A^T - PBR^{-1}B^T)Px + x^T P(A - BR^{-1}B^T P)x \\ &= x^T (A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P)x - x^T PBR^{-1}B^T Px \\ &= -x^T Qx - u^T Ru \leq 0 \end{aligned}$$

假设  $\dot{V}(x) \equiv 0$ ,  $\because R > 0$ ,  $\therefore u \equiv \mathbf{0}$ , 根据[定理 4-5]的证明过程可知, 这将导致  $(A, D)$  不完全能观, 这和给定条件相矛盾; 因此, 沿状态轨迹  $\dot{V}(x)$  不恒为零, 故闭环系统渐近稳定。证毕。

注意,  $Q = D^T D$  的分解并不是唯一的, 可以证明  $(A, D)$  的完全能观测性并不取决于某个特定的分解, 而是由  $A$  和  $Q$  本身决定的。

$(A, D)$  完全能观是保证闭环渐稳的充分条件。事实上, 只要不可观模态是渐稳的 (可检测性), 闭环系统就是渐近稳定的。

**[例 4-2]** 已知受控系统  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = u$ , 求最优反馈控制使下述性能指标最小:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T x + u^2) dt \quad (Q = I, R = 1)$$

$$\text{解: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (A, B) \text{ 完全可控};$$

$$Q = D^T D = I, \quad (A, D) \text{ 完全可观};$$

$$\text{Riccati 方程: } PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

$$\text{设 } P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}, \text{ 并代入 } A, B, R, Q, \text{ 得到:}$$

$$p_{12}^2 = 1, \quad p_{22}^2 = 2p_{12} + 1, \quad p_{11} = p_{12}p_{22}$$

$\because P$  非负定, 得到:  $p_{12} = 1, p_{11} = p_{22} = \sqrt{3}$

最优控制:  $u^*(t) = -R^{-1}B^T Px(t) = -[1 \ \sqrt{3}]x(t)$

闭环系统:  $A_L = A - B[1 \ \sqrt{3}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ , 漐近稳定。

思考: 若性能指标为:  $J = \int_0^\infty (y^T W y + u^T R u) dt$ , 其中  $y = Cx$  是系统的输出, 这类问题称为最优输出调节器问题, 请问它和最优状态调节器问题之间有什么关系?

## §5 极大(小)值原理简介

古典变分法求解最优控制问题存在局限性: 要求  $H$  对  $u$  可导, 不能处理控制受限的情形。庞特里亚金 (Pontryagin) 的极大(小)值原理成功地解决了这些问题。

[定理 5-1] (极小值原理) 如果  $u^*(t)$  是所给问题的最优控制,  $x^*(t)$  和  $\lambda^*(t)$  是对应于  $u^*(t)$  的最优轨线和最优协态变量, 则

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = \min_{u(t) \in U} H(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t) \quad (5-1)$$

- + 和古典变分法相比, 极小值原理在解决同类最优控制问题时, 只需将控制方程  $\partial H / \partial u = 0$  改用上式, 其余相同。
- + 极小值原理给出的仍然是最优控制所应满足的必要条件, 也不涉及最优解的存在问题。

[例 5-1] 已知受控系统  $\dot{x} = -x + u$ ,  $x(0) = 1$ ,  $t_f = 1$ ,  $x(t_f)$  自由,  $|u| \leq 1$ , 求使下述性能指标最小的最优控制及相应的最优状态轨线。

$$J = \int_0^1 (x - \frac{1}{2}u) dt$$

解: 这是一个  $t_f$  固定,  $x(t_f)$  自由, 控制受限的最优控制问题。

$H$  函数:  $H = L + \lambda f = x - \lambda x + u(\lambda - 1/2)$

控制方程:  $u = -\text{sign}(\lambda - 1/2)$

正则方程:  $\dot{x} = -x + u$ ,  $\dot{\lambda} = -\partial H / \partial x = -1 + \lambda$

边界条件:  $x(0) = 1$ ,  $\lambda(1) = \partial \varphi / \partial x(t_f) = 0$

解方程得:  $\lambda(t) = 1 - e^{t-1}$ ,  $u^*(t) = -\text{sign}(1/2 - e^{t-1})$ ,

即:  $u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq t_s \\ +1, & t_s \leq t \leq 1 \end{cases}$   $t_s = 1 - \ln 2 = \ln \frac{e}{2}$

最优控制分为两段，是 Bang-Bang 控制，见图 5-1。

当  $0 \leq t \leq t_s$  时有：  $\dot{x} = -x - 1$ ，  $x(0) = 1$ ，

$$\text{得: } x^*(t) = 2e^{-t} - 1, \quad x^*(t_s) = 4e^{-1} - 1$$

当  $t_s \leq t \leq 1$  时有：  $\dot{x} = -x + 1$ ，  $x(t_s) = 4e^{-1} - 1$

$$\text{得: } x^*(t) = 1 - (2 - 4e^{-1})e^{-(t-t_s)}$$

最优轨线分为两段，方程不同，首尾相接，见图 5-2。

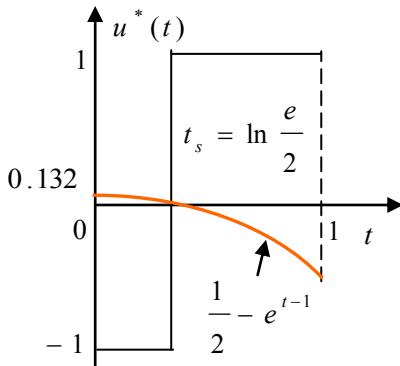


图 5-1

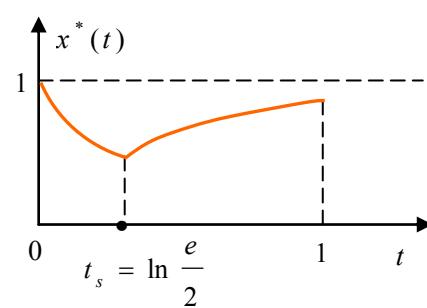


图 5-2

## §6 二阶积分系统的时间最优控制

使系统由初态转移到目标集的时间为最短的控制称为时间最优控制，或最速控制。这里，我们仅讨论一种简单而典型的情况。

已知控制受约束的二阶积分型受控系统及性能指标如下：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = x_{10}, & x_1(t_f) = 0 \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = x_{20}, & x_2(t_f) = 0 \end{cases} \quad (6-1a)$$

$$J = \int_0^{t_f} dt = t_f, \quad |u(t)| \leq 1 \quad (6-1b)$$

求最优控制  $u^*(t)$ ，使系统在最短的时间  $t_f$  内（即  $J$  最小），自任意初态  $(x_{10}, x_{20})$  转移到状态空间的原点。（时间最优调节器问题）

显然，这是  $t_f$  可变， $x(t_f)$  固定的最优控制问题。

$H$  函数：  $H(t) = L + \lambda^T f = 1 + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t)$

控制方程：  $u = -\text{sgn}(\lambda_2)$  （根据极小值原理）

正则方程：  $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad \dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1$

边界条件：  $x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_1(t_f) = 0, \quad x_2(t_f) = 0,$

$$H(t_f) = -\partial \varphi / \partial t_f = 0, \quad \text{即:}$$

$$1 + \lambda_1(t_f)x_2(t_f) + \lambda_2(t_f)u(t_f) = 0$$

由正则方程可得：  $\lambda_1(t) = c_1, \quad \lambda_2(t) = c_2 - c_1 t$ 。其中  $c_1$  和  $c_2$  为任意

常数，且不能同时为零，否则不满足上述边界条件中的最后一个方程，所以， $\lambda_2(t)$  是一条不恒为零的直线，在区间  $[0, t_f]$  上， $\lambda_2(t)$  至多变号一次。相应的最优控制  $u^*(t) = -\text{sgn}[\lambda_2^*(t)]$  是最多切换一次的 Bang-Bang 控制。

考虑到最优控制只可能取  $+1$  或  $-1$ ，现取  $u(t) = u = \text{常数}$ ，由状态方程和初始条件可以解得：

$$x_2(t) = x_{20} + ut, \quad x_1(t) = x_{10} + x_{20}t + \frac{1}{2}ut^2$$

消去  $t$  后，得到：

$$x_1 = (x_{10} - \frac{1}{2u}x_{20}^2) + \frac{1}{2u}x_2^2 \quad (6-2)$$

这就是在控制  $u = \text{常数}$  的作用下，始于  $(x_{10}, x_{20})$  的状态轨线（相轨线）方程，如图 6-2 所示，在相平面上，它是一族抛物线。图中向右开口的抛物线（蓝色）对应于  $u = +1$  的轨线，向左开口的抛物线（橙色）则对应于  $u = -1$  的轨线，箭头表示随时间增长状态演化的方向。

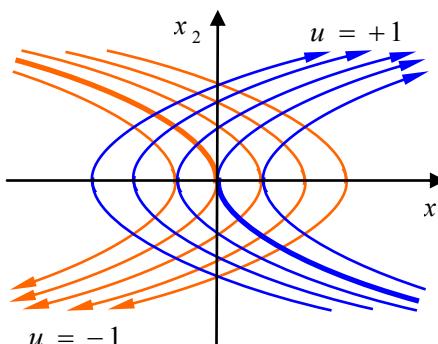


图 6-2

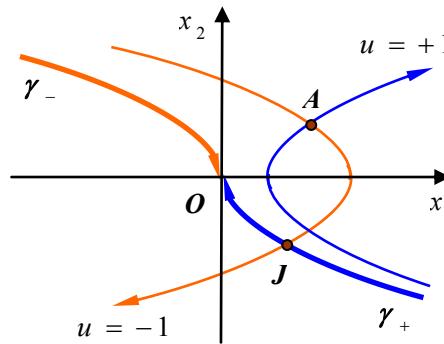


图 6-3

由图 6-3 可见，只有  $\gamma_+$  和  $\gamma_-$  两条轨线能到达原点，它们合成的曲线  $\gamma$  称为开关曲线：

$$\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2| \right\} \quad (6-3)$$

若初态位于  $\gamma$  的上方，如图 6-3 上的  $A$  点，只有采用控制序列  $\{-1, +1\}$  且当相点到达开关线  $\gamma$  ( $\gamma_+$ ) 时进行转换才能使状态最快地转移到原点，相应的最优轨线为  $AJO$ 。同理，若初态位于  $\gamma$  的下方，最优控制序列应是  $\{+1, -1\}$ ，转换同样应发生在开关线  $\gamma$  ( $\gamma_-$ ) 上。

**[定理 6-1]** 二阶积分型受控系统的时间最优控制  $u^*$  为：

$$u^* = \begin{cases} +1, & \gamma(x_1, x_2) < 0 \\ -1, & \gamma(x_1, x_2) > 0 \\ -\text{sgn}(x_2), & \gamma(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \quad (6-4)$$

其中,  $\gamma(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{2}x_2|x_2|$ , 称为开关函数。

可见, 二阶积分型受控系统的时间最优控制能以状态变量函数的形式表示出来, 因而可按状态反馈实现闭环控制。下图所示的是它的一种工程实现框图。

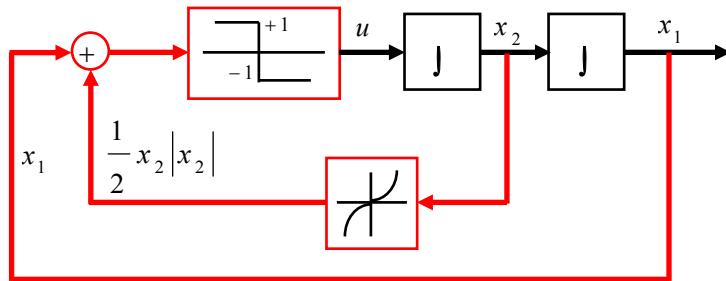


图 6-4

■ 思考: 二阶积分型受控系统, 自任意初态转移到状态空间原点所需的最长时间是多少?

## §7 离散系统的最优控制※

前面, 我们已经比较系统地学习了连续系统的最优控制问题, 其理论可以方便地推广到离散系统中来, 因而, 二者有很多相似性。

### 7.1 离散系统最优控制的一般问题

受控系统的运动方程和性能指标如下:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k], \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7-1a)$$

$$J = \varphi[\mathbf{x}(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} L[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \quad (7-1b)$$

这里, 初始状态  $\mathbf{x}(0)$  是给定的, 末端状态  $\mathbf{x}(N)$  是自由的。求解最优控制序列  $\mathbf{u}^*(k)$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ , 使得上述性能指标最小。

**[定理 7-1]** 末时刻固定末状态自由的离散系统最优控制问题 (7-1), 其最优解应满足的必要条件如下:

$$H \text{ 函数: } H(k) = L(k) + \boldsymbol{\lambda}^T(k+1) \mathbf{f}(k)$$

$$\text{控制方程: } \frac{\partial H(k)}{\partial \mathbf{u}(k)} = \mathbf{0}$$

古典变分法

$$H[\mathbf{u}^*(k)] = \min_{\mathbf{u}(k) \in U} H[\mathbf{u}(k)] \quad \text{极小值原理}$$

正则方程: 
$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \\ \lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial \mathbf{x}(k)} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{状态方程} \\ \text{协态方程} \end{array}$$

边界条件: 
$$\begin{cases} \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \lambda(N) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}(N)} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{初始条件} \\ \text{末端条件} \end{array}$$

[例 7-1] 对下述系统和给定的性能指标, 求最优控制序列。

$$x(k+1) = -x(k) + u(k), \quad x(0) = 3$$

$$J = \frac{1}{2} x^2(2) + \sum_{k=0}^1 \frac{1}{2} u^2(k)$$

解: 设最优控制序列为  $u^*(0), u^*(1)$ , 必要条件为:

$H$  函数:  $H(k) = \frac{1}{2} u^2(k) + \lambda(k+1)[u(k) - x(k)], \quad k = 0, 1$

控制方程:  $\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)} = u(k) + \lambda(k+1) = 0, \quad k = 0, 1$

正则方程:  $x(k+1) = -x(k) - \lambda(k+1), \quad \lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} = -\lambda(k+1)$

边界条件:  $x(0) = 3, \quad \lambda(2) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(2)} = x(2)$

由正则方程和边界条件解得:

$$\lambda^*(1) = -1, \quad \lambda^*(2) = 1; \quad x^*(1) = -2, \quad x^*(2) = 1$$

由  $u(k) = -\lambda(k+1)$  得到:  $u^*(0) = 1, \quad u^*(1) = -1$

## 7.2 线性离散系统有限拍状态调节器

受控系统和最小化性能指标如下:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7-2a)$$

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(N) \mathbf{F} \mathbf{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R}(k) \mathbf{u}(k)] \quad (7-2b)$$

$\mathbf{F}$  和  $\mathbf{Q}(k)$  非负定,  $\mathbf{R}(k)$  正定。

离散系统 Riccati 矩阵递推方程:

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}^T(k) \tilde{\mathbf{P}}(k) \quad (7-3a)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}(k) = [\mathbf{P}^{-1}(k+1) + \mathbf{B}(k) \mathbf{R}^{-1}(k) \mathbf{B}^T(k)]^{-1} \mathbf{A}(k) \quad (7-3b)$$

$$k = N-1, \dots, 1, 0, \quad \mathbf{P}(N) = \mathbf{F}$$

[定理 7-2] 对线性离散系统有限拍状态调节器问题 (7-2), 最优反馈控制的充要条件是:

$$\mathbf{u}^*(k) = -\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{B}^T(k)\tilde{\mathbf{P}}(k)\mathbf{x}(k) \quad (7-4)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{P}}(k)$  是 Riccati 矩阵递推方程 (7-3) 的解; 且

$$J^* = (1/2)\mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0) \quad (7-5)$$

[例 7-2] 对下述系统和给定的性能指标, 求最优控制序列。

$$\mathbf{x}(k+1) = -\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0) = 3$$

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^2(2) + \sum_{k=0}^1 \frac{1}{2}\mathbf{u}^2(k)$$

解: 该例同[例 7-1]。  $\mathbf{A} = -1$ ,  $\mathbf{B} = 1$ ,  $\mathbf{F} = 1$ ,  $\mathbf{Q} = 0$ ,  $\mathbf{R} = 1$

$$(1) \quad \tilde{\mathbf{P}}(k) = -[\mathbf{P}^{-1}(k+1) + 1]^{-1}, \quad \mathbf{P}(k) = -\tilde{\mathbf{P}}(k), \quad \mathbf{P}(2) = \mathbf{F} = 1,$$

$$\text{反向递推得: } \tilde{\mathbf{P}}(1) = -1/2, \quad \mathbf{P}(1) = 1/2; \quad \tilde{\mathbf{P}}(0) = -1/3, \quad \mathbf{P}(0) = 1/3$$

$$(2) \quad \mathbf{u}^*(k) = -\tilde{\mathbf{P}}(k)\mathbf{x}^*(k), \quad \mathbf{x}^*(k+1) = -\mathbf{x}^*(k) + \mathbf{u}^*(k), \quad \mathbf{x}^*(0) = 3$$

$$\text{正向递推得: } \mathbf{u}^*(0) = 1, \quad \mathbf{x}^*(1) = -2, \quad \mathbf{u}^*(1) = -1, \quad \mathbf{x}^*(2) = 1$$

$$(3) \quad J^* = (1/2)\mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}^*(0) = 3/2$$

$$\text{校核: } J = \frac{1}{2}[\mathbf{x}^*(2)]^2 + \sum_{k=0}^1 \frac{1}{2}[\mathbf{u}^*(k)]^2 = \frac{3}{2}$$

### 7.3 线性定常离散系统无限拍状态调节器

受控系统和最小化性能指标如下:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k) \quad (7-6a)$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{Ru}(k)] \quad (7-6b)$$

$\mathbf{Q}$  非负定,  $\mathbf{R}$  正定。

离散系统 Riccati 矩阵代数方程:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{P}} \quad (7-7a)$$

$$\tilde{\mathbf{P}} = [\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{BR}^{-1}\mathbf{B}^T]^{-1}\mathbf{A} \quad (7-7b)$$

[定理 7-3] 线性定常离散系统无限拍状态调节器问题 (7-6), 若系统完全可控, 最优反馈控制的充要条件是:

$$\mathbf{u}^*(k) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{x}(k) \quad (7-8)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{P}}$  是 Riccati 矩阵代数方程 (7-7) 的非负定解; 且

$$J^* = (1/2)\mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \quad (7-9)$$

### 7.4 动态规划

求解最优控制问题的另一种方法是动态规划，它的基础是下面的最优化原理，或称为最优法则。

**[定理 7-4]（最优法则）** 一个过程的最优策略具有以下性质，即无论其初始状态和初始决策如何，其后的各决策对以第一个决策所形成的状态作为初始状态的过程而言，必须构成最优策略。

最优法则的正确性是显见的，或者可用反证法非常容易地得到证明。下面通过例子说明动态规划在离散最优控制问题中的应用。

**[例 7-3]** 对下述系统和给定的性能指标，求最优控制序列。

$$x(k+1) = -x(k) + u(k), \quad x(0) = 3$$

$$J = \frac{1}{2}x^2(2) + \sum_{k=0}^1 \frac{1}{2}u^2(k)$$

解：该例同[例 7-1]和[例 7-2]，这里用动态规划求解。

不难看出，系统的运动过程如下：

$$x(0) \xrightarrow{u(0)} x(1) \xrightarrow{u(1)} x(2)$$

$$\text{定义: } J_2 = \frac{1}{2}x^2(2), \quad J_1 = \frac{1}{2}u^2(1) + J_2^*, \quad J_0 = \frac{1}{2}u^2(0) + J_1^*$$

(1) 由  $J_2$  开始，反向递推：

$$J_2^* = \min_{u(2)} J_2 = \frac{1}{2}x^2(2)$$

$$J_1 = \frac{1}{2}[u^2(1) + x^2(2)] = \frac{1}{2}\{u^2(1) + [u(1) - x(1)]^2\}$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial u(1)} = 2u(1) - x(1) = 0, \quad \text{得到: } u^*(1) = \frac{1}{2}x(1)$$

将  $u^*(1)$  代入  $J_1$  得：  $J_1^* = \frac{1}{4}x^2(1)$ ，从而有

$$J_0 = \frac{1}{2}u^2(0) + \frac{1}{4}x^2(1) = \frac{1}{2}u^2(0) + \frac{1}{4}[u(0) - x(0)]^2$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial u(0)} = \frac{3}{2}u(0) - \frac{1}{2}x(0) = 0, \quad \text{得到: } u^*(0) = \frac{1}{3}x(0)$$

(2) 由  $x(0)=3$  开始，正向递推：

$$u^*(0) = 1, \quad x^*(1) = -2, \quad u^*(1) = -1, \quad x^*(2) = 1$$

动态规划法把一个难于直接处理的多阶段决策过程，通过反向递推，化为一个多次一步决策的简单问题；但当系统的维数增加时，其计算量成指数增长，即存在所谓的“维数灾”问题。

## 参考书

- 《自动控制原理》(2 版), 吴麒主编, 清华大学出版社, 2006, (第 12 章)
- 《自动控制理论基础》, 戴忠达主编, 清华大学出版社, 1991, (第 8 章)
- 《线性系统理论》(第二版), 郑大钟, 清华大学出版社, 2002, (第 6 章)
- 《最优控制理论》, 王朝珠, 秦化淑, 科学出版社, 2003
- 《控制理论导论》, 郭雷主编, 科学出版社, 2005, (第 7 章)

LCD 2014年秋季

## 7.2 李雅普诺夫稳定性

在经典控制理论中，我们学习了系统稳定性的概念和几种判别方法：劳斯-胡尔维兹判据、奈魁斯特判据等，这些方法主要适用于线性定常系统。本章将介绍适用于一般非线性系统的李雅普诺夫稳定性概念和有关判据。

### §1 基本概念

#### 1.1 标量函数的定号性

[定义 1-1] 称标量函数  $V(x)$  正定（半正定）：若  $V(0) = 0$ ，且  $x \neq 0$  时，  
 $V(x) > 0$  ( $V(x) \geq 0$ )。

[定义 1-2] 称标量函数  $V(x)$  负定（半负定）：若  $-V(x)$  是正定（半正定）的。

[定义 1-3] 正定或半正定（负定或半负定）统称为非负定（非正定），无任何定号性称为不定。

- 注意， $V(0) = 0$  是定号性的必要条件。在不引起混淆时，可直接用  $V(x) > 0$  表示正定，其余类推。
- 定号性可以是原点邻域上的局部性质，如： $[(x_1^2 + x_2^2) - 1](x_1^2 + x_2^2)$  在域  $\{\Omega \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  上是负定的。

例如，在二维空间中：

$$\begin{array}{ll} x_1^2 + x_2^2 & \text{正定,} \\ -(x_1^4 + x_2^2) & \text{负定,} \end{array} \quad \begin{array}{ll} (x_1 + x_2)^2 & \text{半正定} \\ -x_1^2 & \text{半负定} \end{array}$$

■ 思考：判断  $x_1^2 - x_2^2$ ,  $(x_1^2 + x_2^2)^{-1}$ ,  $1 - \cos(x_1 + x_2)$  的定号性。

下面讨论一类常用的标量函数：二次型函数  $x^T A x$ 。它的定号性同矩阵  $A$ （实对称）的定号性，有如下定理：

[定理 1-1] 实对称矩阵  $A$  是正定（半正定）的，当且仅当所有特征值均大于（大于等于）零。

[定理 1-2] 实对称矩阵  $A$  是正定（半正定）的，当且仅当所有主子式均大于（大于等于）零。

- 上述定理中，在判断矩阵  $A$  的正定（半正定）性时，可以（不可以）将主子式简化为顺序主子式。

■ 思考：如何判断矩阵  $A$  的负定（半负定）性？

## 1.2 李雅普诺夫稳定性

[定义 1-4] 对于系统  $\dot{x} = f(x, t)$ , 满足  $\dot{x} = \mathbf{0}$  的状态  $x_e$  称作系统的平衡状态或平衡点。

[定义 1-5] 若某一平衡点附近足够小的邻域内没有别的平衡点，则称它为孤立平衡点。

[定义 1-6] 称平衡状态  $x_e$  稳定：若任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta(\varepsilon) > 0$ , 使得由  $\|x_0 - x_e\| \leq \delta(\varepsilon)$  内出发的运动，恒有  $\|x - x_e\| \leq \varepsilon$ 。

[定义 1-7] 称平衡状态  $x_e$  不稳定：若  $x_e$  不满足上述稳定的条件。

[定义 1-8] 称平衡状态  $x_e$  漐近稳定：若  $x_e$  稳定，且存在一个邻域（吸引域），其内出发的运动恒有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x - x_e\| = 0$ 。

[定义 1-9] 称平衡状态  $x_e$  全局漐近稳定：若  $x_e$  漐近稳定，且吸引域充满整个状态空间。

下图是二维相平面上李雅普诺夫稳定性的示意性说明：

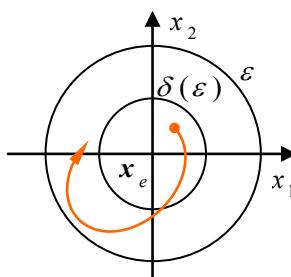


图 1-1 稳定

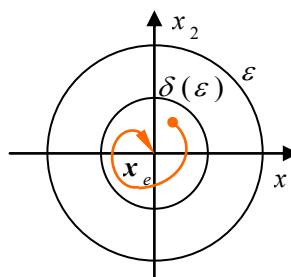


图 1-2 漐近稳定

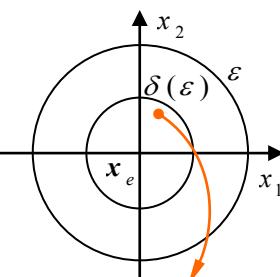


图 1-3 不稳定

■ 讨论的是平衡状态（而不是系统）的稳定性。

■ 平衡状态唯一是全局漐近稳定的必要条件。

## §2 李雅普诺夫方法

### 2.1 第一方法（间接法）

设  $x_e$  是定常系统

$$\dot{x} = f(x) \quad (2-1)$$

的平衡状态，在平衡点附近的线性化模型是：

$$\dot{y} = Ay, \text{ 其中, } y = x - x_e, \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x^T} \right|_{x=x_e} \quad (2-2)$$

根据  $A$  的特征值，有如下判别定理（第一方法）：

[定理 2-1] 若  $A$  的特征值均具有负实部， $x_e$  是渐近稳定的；若有特征值具有正实部， $x_e$  是不稳定的；其它情况，则不能判定。

[例 2-1] 判断下列系统在原点处的稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \cos x_1 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2 \end{cases}$$

解：原点是系统的平衡点，在原点处线性化可得：

$$A = \left[ \begin{array}{cc} -x_2 \sin x_1 & \cos x_1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{array} \right] \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

特征根均在左半开平面内，该系统在原点处是渐近稳定的。

⊕ 线性化方法不能给出全局稳定性的判断，但该例系统有多个平衡点，因而不可能在原点处全局渐近稳定。

[例 2-2] 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - 4x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_1 x_2 \end{cases}$$

解：原点是系统的平衡点，在原点处线性化可得：

$$A = \left[ \begin{array}{cc} -3x_1^2 & -4 \\ 3 - x_2 & -x_1 \end{array} \right] \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

特征根均在虚轴上，线性化方法失效。

⊕ 状态方程右端为多项式时，在原点处线性化只需简单地去除高次项即可。本例为： $\dot{x}_1 = -4x_2$ ， $\dot{x}_2 = 3x_1$ 。

## 2.2 第二方法（直接法）

不失一般性，设原点是定常系统

$$\dot{x} = f(x) \quad (2-3)$$

的平衡状态， $V(x)$  是正定的标量函数（能量函数），它沿系统解曲线（状态轨线）对时间  $t$  的导数为

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x^T} f(x) \quad (2-4)$$

根据  $V(x)$  和  $\dot{V}(x)$  的定号性，有如下判别定理（第二方法）：

[定理 2-1]  $V(x)$  正定， $\dot{V}(x)$  负定，则原点是渐近稳定的；此外，若  $\|x\| \rightarrow \infty$  时， $V(x) \rightarrow \infty$ ，则原点是全局渐近稳定的。

[定理 2-2]  $V(x)$  正定,  $\dot{V}(x)$  半负定, 则原点是稳定的; 此外, 若  $\dot{V}(x)$  除原点外沿状态轨线不恒为零, 则原点是渐近稳定的; 再进一步, 若  $\|x\| \rightarrow \infty$  时,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 则原点是全局渐近稳定的。

[定理 2-3]  $V(x)$  正定,  $\dot{V}(x)$  也正定, 则原点是不稳定的。

- 以上均为充分条件, 找不到满足定理条件的  $V(x)$ , 不能下结论。
- 若  $V(x)$  代表广义能量, 则  $\dot{V}(x)$  代表广义功率。 $\dot{V} < 0$ , 说明在解曲线上是消耗功率的过程。
- $V(x)$  和  $\dot{V}(x)$  同号 (异号) 说明什么? 取  $V(x)$  负定可以吗?

[例 2-3] 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - 4x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 7x_2 \end{cases}$$

解: (原点是唯一平衡点, 由第一方法可判定它是渐近稳定的)

取  $V(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 > 0$ , 得  $\dot{V}(x) = -6x_1^4 - 56x_2^2 < 0$

当  $\|x\| \rightarrow \infty$  时,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 所以原点全局渐近稳定。

- 下图是该例中  $V(x) = C$  ( $C_3 > C_2 > C_1 > 0$ ) 的图形, 它是一族包围原点的、闭的、随  $C \rightarrow 0$  向原点退缩的椭圆。

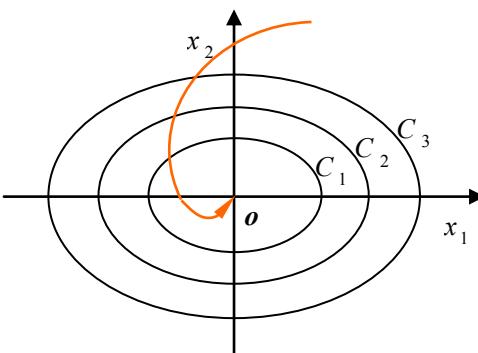


图 2-1

[例 2-4] 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{2x_1 + 2x_2}{(1+x_1^2)^2} \end{cases}$$

解: (原点是唯一平衡点, 由第一方法可判定它是渐近稳定的)

取  $V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 > 0$ , 得  $\dot{V}(x) = -\frac{4x_1^2}{(1+x_1^2)^4} - \frac{4x_2^2}{(1+x_1^2)^2} < 0$

所以原点是渐近稳定的。但当  $x_1 \rightarrow \infty$ ,  $x_2 \rightarrow 0$  时,  $V(\mathbf{x}) \rightarrow 1$ , 即  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  时,  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  不成立, 不能保证全局渐近稳定。

- 下图是该例中  $V(\mathbf{x}) = C$  的图形, 当  $C < 1$  时, 它是一族包围原点的、闭的、随  $C \rightarrow 0$  向原点退缩的曲线。但当  $C \geq 1$  时, 曲线不再是闭的。从  $A$  ( $C < 1$ ) 出发的轨线趋向原点; 而从  $B$  出发 ( $C > 1$ ) 的轨线沿着  $x_1$  轴趋向无穷远, 尽管  $V > 0$ ,  $\dot{V} < 0$  始终成立。

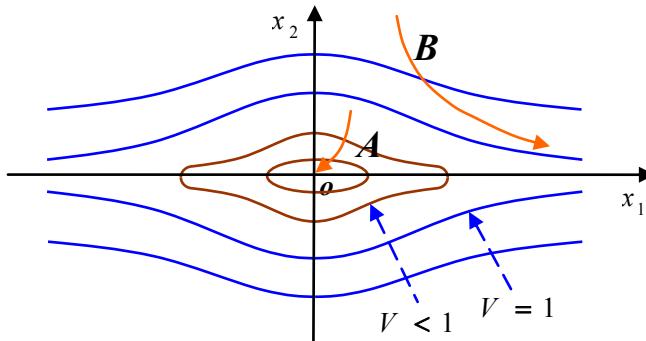


图 2-2

**[定理 2-4]** 对任意正定函数  $V(\mathbf{x})$ , 存在原点的一个邻域, 在此邻域中,  $V(\mathbf{x}) = C$  是一族包围原点的、闭的、随  $C \rightarrow 0$  向原点退缩的曲面族。若  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  时,  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ , 则此邻域为整个空间。

**[例 2-5]** 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

解: (原点是唯一平衡点, 由第一方法可判定它是渐近稳定的)

(1) 取  $V(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 > 0$ , 得  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 - 2x_2^2$ , 不定, 不能判。

(2) 取  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ , 得  $\dot{V}(\mathbf{x}) = -2x_2^2$ , 半负定, 故原点稳定。

若  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ , 则  $x_2 = \dot{x}_2 \equiv 0$ , 代入原方程得  $x_1 = \dot{x}_1 \equiv 0$ , 因而  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$  仅发生在原点处, 且当  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  时,  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ , 所以原点全局渐近稳定。

(3) 取  $V(\mathbf{x}) = 1.5x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 > 0$ , 得  $\dot{V}(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2 < 0$ , 且当  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  时,  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ , 所以原点全局渐近稳定。

- 此例说明了: 选择不同的  $V$  函数, 可能得到不同的结果, 但这些结果之间是不矛盾的。找到“好”的  $V$  函数, 需要经验和运气。

**[例 2-6]** 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^4 \\ \dot{x}_2 = -x_2^3 + x_1^4 \end{cases}$$

解：（原点是平衡点但不唯一），（线性化方法失效）

取  $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) > 0$ ，则  $\dot{V}(\mathbf{x}) = -x_1^4(1-x_2) - x_2^4(1-x_1)$

在  $x_2 < 1$  且  $x_1 < 1$  的区域内（原点是该区域的内点）， $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$

所以该系统在原点处是渐近稳定的。

- ⊕ 该例中，当  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  时， $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ ，但不能得出全局渐近稳定的结论，因为  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  仅在局部区域成立。

**[例 2-7]** 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = (x_1^2 + x_2^2)x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

解：（原点是平衡点但不唯一，由第一方法可判定它是渐近稳定的）

选  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2 > 0$ ，

则  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 2(x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 4x_2\dot{x}_2$

$$= (x_1^2 + x_2^2)[2x_1(x_1 + 3x_2) - 1]$$

显然， $\dot{V}(\mathbf{x})$  在  $2x_1(x_1 + 3x_2) < 1$  的区域内（原点为该区域的内点）负定，所以原点是渐近稳定的。

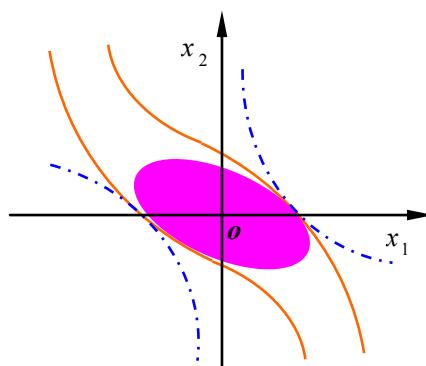


图 2-3

- ⊕ 该例中， $V(\mathbf{x})$  在全空间是正定的， $\dot{V}(\mathbf{x})$  在上图中蓝色点划线（双曲线）区域内是负定的，但该区域并不都是原点的吸引域。通常，确定吸引域是困难的。

我们可以在  $\dot{V} = 0$  的边界上求  $V$  的最小值  $V_{\min}$ ，则  $V(\mathbf{x}) < V_{\min}$  就是一个保守的吸引域（比实际的小）。

$$\text{由 } \dot{V} = 0, \text{ 即 } 2x_1(x_1 + 3x_2) = 1, \text{ 得 } x_2 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2x_1} - x_1 \right)$$

$$V(\mathbf{x})|_{\dot{V}(\mathbf{x})=0} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = \frac{2}{3}x_1^2 + \frac{1}{12x_1^2}$$

$$\frac{dV}{dx_1} = \frac{4}{3}x_1 - \frac{1}{6x_1^3} = 0 \Rightarrow x_1^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow V_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

得到一个保守的吸引域： $x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 < \frac{\sqrt{2}}{3}$ ，如图中粉色区域（椭圆）所示，橙色实线所示是仿真所得的实际（最大）吸引域。

■ 思考：根据图 2-3，说明为何  $V$  正定且  $\dot{V}$  负定的区域不一定都是吸引域。（提示：图中该区域为双曲线，而  $V(\mathbf{x}) = c$  是一族椭圆）

### §3 构造李雅普诺夫函数的方法

很遗憾，对于非线性系统，没有一种构造  $V$  函数的完全有效的通用方法。人们通常凭经验和技巧来选取  $V$  函数，最常见的是二次型函数。此外，也涌现出了许多适用于特定情形的辅助方法。这里介绍其中比较有影响的两种：克拉索夫斯基方法和变量梯度法。

#### 3.1 克拉索夫斯基方法 (Krasovskii Method)

思路：用  $\dot{\mathbf{x}}$  的二次型直接构造  $V(\mathbf{x})$ 。

非线性定常系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  的雅可比 (Jacobi) 矩阵定义为：

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \triangleq \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

[定理 3-1] 设  $f(0) = 0$ ，且在原点的一个域上， $\mathbf{F}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x})$  负定（正定），则在此域内除原点外， $f(\mathbf{x}) \neq 0$ 。

证明：反设  $\tilde{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$  是此域内的任意一点且  $f(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$ ，则有

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T \int_{\sigma=0}^{\sigma=1} \mathbf{F}(\sigma \tilde{\mathbf{x}}) d\sigma \tilde{\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T \int_{\sigma=0}^{\sigma=1} [\mathbf{F}^T(\sigma \tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{F}(\sigma \tilde{\mathbf{x}})] d\sigma \tilde{\mathbf{x}} \neq 0 \end{aligned}$$

矛盾，故反设不成立。证毕。

[定理 3-2] 设原点是  $\dot{x} = f(x)$  的平衡状态, 若  $F^T(x) + F(x)$  负定, 则原点是渐近稳定的。进一步, 当  $\|x\| \rightarrow \infty$  时, 有  $\|f(x)\| \rightarrow \infty$ , 则原点是全局渐近稳定的。

证明: 取  $V(x) = \|f(x)\|^2 = f^T(x)f(x)$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{f}^T(x)f(x) + f^T(x)\dot{f}(x) \\ &= f^T(x)[F^T(x) + F(x)]f(x)\end{aligned}$$

若  $F^T(x) + F(x)$  负定, 则由[定理 3-1]得

$$V(x) > 0, \quad \dot{V}(x) < 0。证毕。$$

■ Krasovskii 方法仍然是充分条件, 条件不满足不能下结论。

■ 也可取  $V(x) = f^T(x)Pf(x)$ ,  $P > 0$ ; 称为 Jacobi 方法。

■ 思考: 若  $F^T(x) + F(x)$  正定, 能下结论吗?

[例 3-1] 用 Krasovskii 方法判定下述系统原点的稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = 0.5x_1^2 - x_2 \end{cases}$$

解: (原点是平衡点但不唯一, 由第一方法可判定它是渐近稳定的)

$F(x) = \begin{bmatrix} x_2 - 1 & x_1 \\ x_1 & -1 \end{bmatrix}$  是对称矩阵, 其顺序主子式为:

$$\Delta_1 = x_2 - 1, \quad \Delta_2 = 1 - x_2 - x_1^2$$

在  $x_2 < 1 - x_1^2$  的域上 (原点是该域的内点),  $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$

故  $F^T(x) + F(x)$  在该域上负定,

所以原点是渐近稳定的。

[例 3-2] 用 Krasovskii 方法判定下述系统原点的稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

解: (原点是唯一平衡点, 由第一方法可判定它是渐近稳定的)

$$F(x) = \begin{bmatrix} -5 & 2x_2 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{bmatrix}, \quad F^T(x) + F(x) = \begin{bmatrix} -10 & 2x_2 + 1 \\ 2x_2 + 1 & -2 - 6x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = -10 < 0, \quad \Delta_2 = 20(1 + 3x_2^2) - (2x_2 + 1)^2 = 56x_2^2 - 4x_2 + 19 > 0$$

故  $F^T(x) + F(x)$  负定,

且当  $\|x\| \rightarrow \infty$  时,  $\|f\|^2 = (-5x_1 + x_2^2)^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 \rightarrow \infty$

所以原点是全局渐近稳定的。

### 3.2 变量梯度法 (Schultz, Gibson)

思路：先找 $\dot{V}(\mathbf{x})$ ，后求 $V(\mathbf{x})$ 。

(1) 设定 $V(\mathbf{x})$ 的梯度 $\text{grad } V$

$$[\text{grad } V]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} [\nabla_1 \quad \mathbf{K} \quad \nabla_n]$$

$\text{grad } V$  称为标量场  $V$  的梯度，它是一个向量函数。

(2) 由 $\text{grad } V$  确定 $\dot{V}(\mathbf{x})$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = [\text{grad } V]^T \dot{\mathbf{x}} = \nabla_1 f_1(\mathbf{x}) + \dots + \nabla_n f_n(\mathbf{x})$$

(3) 由 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 求 $V(\mathbf{x})$

$$V(\mathbf{x}) = \int_{V(0)}^{V(\mathbf{x})} dV(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} [\text{grad } V]^T d\mathbf{x} = \int_0^{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^n \nabla_i d x_i$$

这是一个沿解曲线的曲线积分，当被积函数确是某个标量场的梯度时，结果与积分路径无关。

(4) 构成梯度的条件

$$\frac{\partial \nabla_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j$$

(5) 选择一条简单的积分路径

上述条件满足时，选择按坐标的逐次积分是最方便的：

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} \nabla_1 d x_1 + \int_0^{x_2} \nabla_2 d x_2 + \dots + \int_0^{x_n} \nabla_n d x_n$$

注意， $\int_0^{x_1} \nabla_1 d x_1$  时， $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$

$\int_0^{x_2} \nabla_2 d x_2$  时， $x_1 = x_3 = \dots = x_n = 0$ ，余类推。

[例 3-3] 用变量梯度法判定下述系统平衡状态的稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

解：(原点是唯一平衡点，由第一方法可判定它是渐近稳定的)

(1) 设梯度向量： $\text{grad } V(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \nabla_1 \\ \nabla_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$

(2) 计算导函数： $\dot{V}(\mathbf{x}) = [\text{grad } V]^T \dot{\mathbf{x}}$

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(-x_1 + 2x_1^2 x_2) + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(-x_2) \\ &= -a_{11}x_1^2(1 - 2x_1x_2) - a_{22}x_2^2 - (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + 2a_{12}x_1^2x_2^2 \end{aligned}$$

(3) 由  $\frac{\partial \nabla_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla_2}{\partial x_1}$ , 并假定  $a_{ij}$  均为常数, 可得:  $a_{12} = a_{21}$

为使  $\dot{V}(x) < 0$ , 取  $a_{12} = a_{21} = 0$ ,  $a_{11} = a_{22} = 1$ , 得到:

$$\dot{V}(x) = -x_1^2(1 - 2x_1x_2) - x_2^2 < 0, \text{ 若 } 1 - 2x_1x_2 > 0$$

(注意, 原点是范围  $1 - 2x_1x_2 > 0$  的内点)。

(4) 按坐标积分求  $V(x)$

$$V(x) = \int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) > 0$$

(5) 综上,  $V(x) > 0$ , 且在原点的一个邻域内有  $\dot{V}(x) < 0$ ; 所以原点是渐近稳定的。

[例 3-4] 用变量梯度法判定下述系统平衡状态的稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1^3 \end{cases}$$

解: (原点是唯一平衡点, 但由第一方法不能判定它的稳定性)

(1) 设梯度向量:  $\text{grad } V = \begin{bmatrix} \nabla_1 \\ \nabla_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$

(2) 计算导函数:  $\dot{V}(x) = [\text{grad } V]^T \dot{x}$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(x_2 + x_1^3) \\ &= x_1x_2(a_{11} - a_{21} - a_{22}x_1^2) + x_2^2(a_{12} - a_{22}) - a_{21}x_1^4 \end{aligned}$$

(3) 由  $\frac{\partial \nabla_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla_2}{\partial x_1}$ , 并假定  $a_{ij}$  均为常数, 可得:  $a_{12} = a_{21}$

为使  $\dot{V}(x) \leq 0$ , 取  $a_{12} = a_{21} = 0$ ,  $a_{22} = 1$ ,  $a_{11} = x_1^2$ , 得到:

$$\dot{V}(x) = -x_2^2 \leq 0$$

(由于  $a_{11}$  不是常数, 违反了原假定, 必须进行下面的校验)

校验:  $\nabla_1 = x_1^3$ ,  $\nabla_2 = x_2$ ;  $\frac{\partial \nabla_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla_2}{\partial x_1}$  满足梯度条件

(4) 按坐标积分求  $V(x)$

$$V(x) = \int_0^{x_1} x_1^3 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2 > 0$$

(5) 综上,  $V(x) > 0$ ,  $\dot{V}(x) \leq 0$ ; 在解曲线上除原点外,  $\dot{V}(x)$  不恒为零; 且当  $\|x\| \rightarrow \infty$  时,  $V(x) \rightarrow \infty$ ; 所以原点全局渐近稳定。

■ 思考: 该例中, 如果经校验发现不满足梯度条件, 应如何处理?

## §4 线性定常系统的稳定性

### 4.1 线性定常系统的渐近稳定性

对线性定常系统

$$\dot{x} = Ax \quad (4-1)$$

而言，系统的稳定性和原点的稳定性是一致的，以下不再区分。

**[定理 4-1]** 系统 (4-1) 渐近稳定的充要条件是：对任意给定的某个正定矩阵  $Q$ ，存在正定矩阵  $P$  满足李雅普诺夫方程：

$$A^T P + PA = -Q \quad (4-2)$$

(1) 充分性证明 (有正定解  $P \rightarrow$  渐稳)

选  $V(x) = x^T P x$  ( $P > 0$ )，

$$\text{则 } \dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + PA)x = -x^T Q x$$

$Q > 0$ ，根据李雅普诺夫稳定性定理，系统渐稳。证毕。

(2) 必要性证明 (渐稳  $\rightarrow$  有正定解  $P$ )

考察矩阵微分方程： $\dot{E}(t) = A^T E(t) + E(t)A$

不难验证， $E(t) = e^{A^T t} Q e^{A t}$  是它的解矩阵，且有： $E(0) = Q$ ，

$E(\infty) = 0$  (由于  $A$  渐稳)。将方程两边对时间积分得到：

$$A^T \int_0^\infty E(t) dt + \int_0^\infty E(t) d t A = E(\infty) - E(0) = -Q \quad (4-3)$$

$$\text{令: } P = \int_0^\infty E(t) dt = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt \quad (4-4)$$

则 (4-3) 式就是李亚普诺夫方程 (4-2)。由于  $A$  渐稳，上式定义的  $P$  存在。显然， $P$  是对称的，考察下面的二次型：

$$x_0^T P x_0 = \int_0^\infty x_0^T e^{A^T t} Q e^{A t} x_0 dt = \int_0^\infty x^T(t) Q x(t) dt$$

若  $x_0 \neq 0$ ，则  $x \neq 0$ ，由于  $Q > 0$ ，因而上式中被积函数总是正的，所以  $P$  是正定的。证毕。

- ⊕ 先任取正定阵  $Q$ ，由式 (4-2) 求  $P$ ；若  $P$  正定 (负定)，系统渐稳 (不稳)，否则，不渐稳。
- ⊕ 先任取正定阵  $P$ ，由式 (4-2) 求  $Q$ ；若  $Q$  正定 (负定)，则系统渐稳 (不稳)，否则，不说明任何问题。
- 思考：在[定理 4-1]中，可以选  $Q$  为半正定矩阵吗？

**[定理 4-2]** 任给正定矩阵  $Q$ ，李雅普诺夫方程 (4-2) 有唯一解的充要条件是：矩阵  $A$  没有互为相反数的特征根。当条件满足时， $P$  唯一且

为对称阵。

证明：(1) 前面已学过：方程  $\mathbf{AP} - \mathbf{PM} = \mathbf{N}$  有唯一解矩阵  $\mathbf{P}$  的充要条件是：矩阵  $A$  和  $M$  彼此间没有相同特征值。

(2) 若  $\mathbf{P}$  是  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$  的解，则  $\mathbf{P}^T$  也是解。证毕。

[例 4-1] 判定下述线性定常系统的渐近稳定性。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

解：取  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ，令  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ ，代入李雅普诺夫方程得：

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

比较矩阵元素得：

$$\begin{cases} -2c = -1 \\ a - b - c = 0 \\ -2b + 2c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1.5 \\ b = 1 \\ c = 0.5 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} > 0$$

所以该系统是渐近稳定的。

[定理 4-3] 矩阵  $A$  所有特征值的实部均小于  $-\sigma$  ( $\sigma > 0$ ) 的充要条件是：对任意给定的某个正定矩阵  $\mathbf{Q}$ ，存在正定矩阵  $\mathbf{P}$  满足：

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + 2\sigma\mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (4-5)$$

[例 4-2] 设系统状态方程如下，求控制律  $\mathbf{u} = -\mathbf{Fx}$  使闭环系统极点的实部均小于  $-3$ 。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

解：设  $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，则  $\mathbf{A} - \mathbf{BF} = \begin{bmatrix} -a - c & 1 - b - d \\ 2 + 2a - c & 2 + 2b - d \end{bmatrix}$

代入方程  $(\mathbf{A} - \mathbf{BF})^T + (\mathbf{A} - \mathbf{BF}) + 2\sigma\mathbf{I} = -\mathbf{I}$ ，得：

$$\begin{bmatrix} -a - c & 2 + 2a - c \\ 1 - b - d & 2 + 2b - d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a - c & 1 - b - d \\ 2 + 2a - c & 2 + 2b - d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

取  $a = -1$ ，可解得  $b = -3$ ,  $c = 4.5$ ,  $d = -0.5$

则： $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4.5 & -0.5 \end{bmatrix}$ ，闭环系统： $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3.5 & 4.5 \\ -4.5 & -3.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

其特征值为共轭复数，实部为  $-3.5 < -3$ ，满足要求。

■ 思考：该题方法和极点配置方法有何异同？对可控性有何要求？

## 4.2 线性定常系统稳定性小结

[定义 4-1] 仅考虑系统的初态和状态之间关系的稳定性问题称为内部稳定性问题。

[定义 4-2] 仅考虑系统的输入和输出之间关系的稳定性问题称为外部稳定性问题。

[定义 4-3] 如果一个系统对于有界的输入必然产生有界的输出，则称该系统是有界输入有界输出稳定，简称 BIBO 稳定。

- + 对线性定常系统而言，系统的内部稳定性取决于系数矩阵  $A$  的特征值，而外部稳定性取决于输入输出既约传递函数的极点。
- + 若由于零极对消而消去的极点是不稳定的，尽管它没有体现在外部，但将造成内部状态的不断增长，最终引起系统的瘫痪。

下面给出线性定常系统稳定性的有关重要结论：

- (1) 系统渐近稳定的充要条件： $A$  的特征根全部在左半开平面内；或对某个正定阵  $Q$  存在正定阵  $P$  满足  $A^T P + PA = -Q$ ；
- (2) 系统稳定的充要条件： $A$  的特征根全部在左半闭平面内，且虚轴上特征根对应的约当块为 1 阶；
- (3) 系统 BIBO 稳定的充要条件：输入输出既约传递函数的极点全部在左半开平面内；
- (4) 系统渐近稳定则一定 BIBO 稳定，反之不然；对于最小实现的系统，BIBO 稳定和渐近稳定等价。

## §5 离散系统的稳定性※

李雅普诺夫第二方法可以很方便地推广到离散系统。

### 5.1 非线性定常离散系统

对于离散时间系统

$$x(k+1) = f[x(k)] \quad (5-1)$$

设  $V[x(k)]$  为标量函数，它沿系统状态轨迹的增量为

$$\Delta V[x(k)] = V[x(k+1)] - V[x(k)] \quad (5-2)$$

适用于连续时间系统的李雅普诺夫各种稳定性判据，只要相应地将  $V(x)$  修改为  $V[x(k)]$ ，将  $\dot{V}(x)$  修改为  $\Delta V[x(k)]$ ，即可适用于离散时间系统。例如，设原点是系统（5-1）的平衡点，有：

**[定理 5-1]**  $V[x(k)] > 0$ ， $\Delta V[x(k)] < 0$ ，则原点是渐近稳定的；此外，若  $\|x(k)\| \rightarrow \infty$  时， $V[x(k)] \rightarrow \infty$ ，则原点是全局渐近稳定的。

## 5.2 线性定常离散系统

对线性定常离散系统

$$x(k+1) = Gx(k) \quad (5-3)$$

有类似于连续情形的定理：

**[定理 5-2]** 系统（5-3）渐近稳定的充要条件是：对任意给定的正定矩阵  $Q$ ，存在正定矩阵  $P$  满足李雅普诺夫方程：

$$G^T P G - P = -Q \quad (5-4)$$

**[定理 5-3]** 任给正定矩阵  $Q$ ，李雅普诺夫方程（5-4）有唯一解的充要条件是：矩阵  $G$  没有互为倒数的特征根。当条件满足时， $P$  唯一且为对称阵。

**[定理 5-4]** 矩阵  $G$  所有特征值的模均小于  $\sigma (\sigma > 0)$  的充要条件是：对任意给定的某个正定矩阵  $Q$ ，存在正定矩阵  $P$  满足：

$$\sigma^2 G^T P G - P = -Q \quad (5-5)$$

## 参考书

- 《自动控制原理》(2 版)，吴麒主编，清华大学出版社，2006，(第 11 章)
- 《自动控制理论基础》，戴忠达主编，清华大学出版社，1991，(第 7 章)
- 《线性系统理论》(第二版)，郑大钟，清华大学出版社，2002，(第 5 章)
- 《线性系统控制理论》，陈树中等，华东师范大学出版社，2000，(第 3 章)
- 《非线性控制系统导论》，高为炳，科学出版社，1988，(第 3 章)
- 《控制理论导论》，郭雷主编，科学出版社，2005，(第 2 章)

## 4.6节PID控制器的设计

---

# Chapter Ten

## PID Control

*Based on a survey of over eleven thousand controllers in the refining, chemicals and pulp and paper industries, 97% of regulatory controllers utilize PID feedback.*

L. Desborough and R. Miller, 2002 [DM02].

This chapter treats the basic properties of proportional-integral-derivative (PID) control and the methods for choosing the parameters of the controllers. We also analyze the effects of actuator saturation and time delay, two important features of many feedback systems, and describe methods for compensating for these effects. Finally, we will discuss the implementation of PID controllers as an example of how to implement feedback control systems using analog or digital computation.

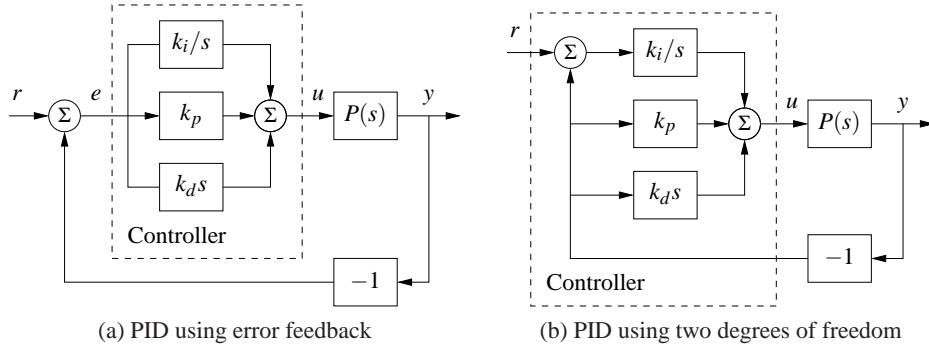
### 10.1 Basic Control Functions

PID control, which was introduced in Section 1.5 and has been used in several examples, is by far the most common way of using feedback in engineering systems. It appears in simple devices and in large factories with thousands of controllers. PID controllers appear in many different forms: as stand-alone controllers, as part of hierarchical, distributed control systems and built into embedded components. Most PID controllers do not use derivative action, so they should strictly speaking be called PI controllers; we will, however, use PID as a generic term for this class of controller. There is also growing evidence that PID control appears in biological systems [YHSD00].

Block diagrams of closed loop systems with PID controllers are shown in Figure 10.1. The control signal  $u$  for the system in Figure 10.1a is formed entirely from the error  $e$ ; there is no feedforward term (which would correspond to  $k_r r$  in the state feedback case). A common alternative in which proportional and derivative action do not act on the reference is shown in Figure 10.1b; combinations of the schemes will be discussed in Section 10.5. The command signal  $r$  is called the reference signal in regulation problems, or the *setpoint* in the literature of PID control. The input/output relation for an ideal PID controller with error feedback is

$$u = k_p e + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de}{dt} = k_p \left( e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de}{dt} \right). \quad (10.1)$$

The control action is thus the sum of three terms: proportional feedback, the integral term and derivative action. For this reason PID controllers were originally called *three-term controllers*. The controller parameters are the proportional gain



**Figure 10.1:** Block diagrams of closed loop systems with ideal PID controllers. Both controllers have one output, the control signal  $u$ . The controller in (a), which is based on error feedback, has one input, the control error  $e = r - y$ . For this controller proportional, integral and derivative action acts on the error  $e = r - y$ . The two degree-of-freedom controller in (b) has two inputs, the reference  $r$  and the process output  $y$ . Integral action acts on the error, but proportional and derivative action act on the process output  $y$ .

$k_p$ , the integral gain  $k_i$  and the derivative gain  $k_d$ . The time constants  $T_i$  and  $T_d$ , called integral time (constant) and derivative time (constant), are sometimes used instead of the integral and derivative gains.

The controller (10.1) represents an idealized controller. It is a useful abstraction for understanding the PID controller, but several modifications must be made to obtain a controller that is practically useful. Before discussing these practical issues we will develop some intuition about PID control.

We start by considering pure proportional feedback. Figure 10.2a shows the responses of the process output to a unit step in the reference value for a system with pure proportional control at different gain settings. In the absence of a feedforward term, the output never reaches the reference, and hence we are left with nonzero steady-state error. Letting the process and the controller have transfer functions  $P(s)$  and  $C(s)$ , the transfer function from reference to output is

$$G_{yr} = \frac{PC}{1 + PC}, \quad (10.2)$$

and thus the steady-state error for a unit step is

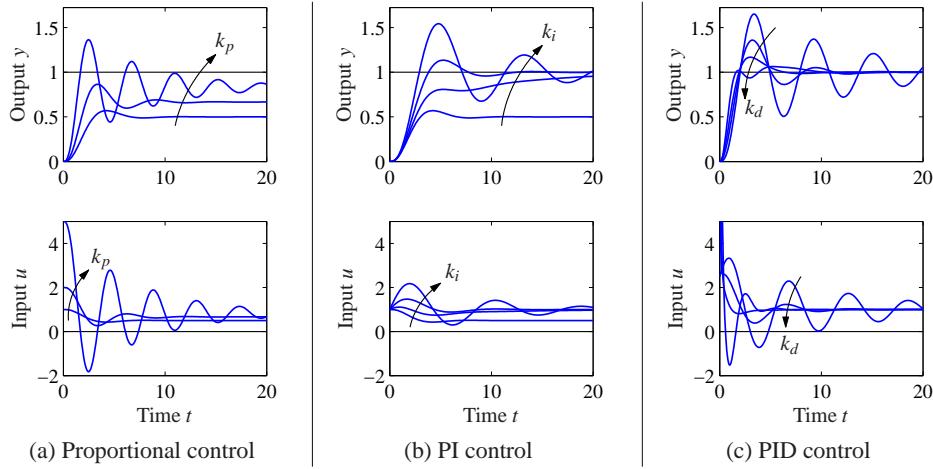
$$1 - G_{yr}(0) = \frac{1}{1 + k_p P(0)}.$$

For the system in Figure 10.2a with gains  $k_p = 1, 2$  and  $5$ , the steady-state error is  $0.5, 0.33$  and  $0.17$ . The error decreases with increasing gain, but the system also becomes more oscillatory. Notice in the figure that the initial value of the control signal equals the controller gain.

To avoid having a steady-state error, the proportional term can be changed to

$$u(t) = k_p e(t) + u_{ff}, \quad (10.3)$$

where  $u_{ff}$  is a feedforward term that is adjusted to give the desired steady-state



**Figure 10.2:** Responses to step changes in the reference value for a system with a proportional controller (a), PI controller (b) and PID controller (c). The process has the transfer function  $P(s) = 1/(s+1)^3$ , the proportional controller has parameters  $k_p = 1, 2$  and  $5$ , the PI controller has parameters  $k_p = 1, k_i = 0, 0.2, 0.5$  and  $1$ , and the PID controller has parameters  $k_p = 2.5, k_i = 1.5$  and  $k_d = 0, 1, 2$  and  $4$ .

value. If we choose  $u_{\text{ff}} = r/P(0) = k_r r$ , then the output will be exactly equal to the reference value, as it was in the state space case, provided that there are no disturbances. However, this requires exact knowledge of the process dynamics, which is usually not available. The parameter  $u_{\text{ff}}$ , called *reset* in the PID literature, must therefore be adjusted manually.

As we saw in Section 6.4, integral action guarantees that the process output agrees with the reference in steady state and provides an alternative to the feed-forward term. Since this result is so important, we will provide a general proof. Consider the controller given by equation (10.1). Assume that there exists a steady state with  $u = u_0$  and  $e = e_0$ . It then follows from equation (10.1) that

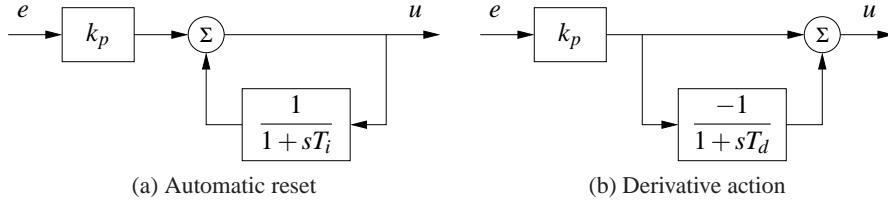
$$u_0 = k_p e_0 + k_i e_0 t,$$

which is a contradiction unless  $e_0$  or  $k_i$  is zero. We can thus conclude that with integral action the error will be zero if it reaches a steady state. Notice that we have not made any assumptions about the linearity of the process or the disturbances. We have, however assumed that an equilibrium exists. Using integral action to achieve zero steady-state error is much better than using feedforward, which requires a precise knowledge of process parameters.

The effect of integral action can also be understood from frequency domain analysis. The transfer function of the PID controller is

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s. \quad (10.4)$$

The controller has infinite gain at zero frequency ( $C(0) = \infty$ ), and it then follows from equation (10.2) that  $G_{yr}(0) = 1$ , which implies that there is no steady-state



**Figure 10.3:** Implementation of PI and PD controllers. The block diagram in (a) shows how integral action is implemented using *positive feedback* with a first-order system, sometimes called automatic reset. The block diagram in (b) shows how derivative action can be implemented by taking differences between a static system and a first-order system.

error for a step input.

Integral action can also be viewed as a method for generating the feedforward term  $u_{ff}$  in the proportional controller (10.3) automatically. One way to do this is shown in Figure 10.3a, where the controller output is low-pass-filtered and fed back with positive gain. This implementation, called *automatic reset*, was one of the early inventions of integral control. The transfer function of the system in Figure 10.3a is obtained by block diagram algebra; we have

$$G_{ue} = k_p \frac{1 + sT_i}{sT_i} = k_p + \frac{k_p}{sT_i},$$

which is the transfer function for a PI controller.

The properties of integral action are illustrated in Figure 10.2b for a step input. The proportional gain is constant,  $k_p = 1$ , and the integral gains are  $k_i = 0, 0.2, 0.5$  and  $1$ . The case  $k_i = 0$  corresponds to pure proportional control, with a steady-state error of 50%. The steady-state error is eliminated when integral gain action is used. The response creeps slowly toward the reference for small values of  $k_i$  and goes faster for larger integral gains, but the system also becomes more oscillatory.

The integral gain  $k_i$  is a useful measure for attenuation of load disturbances. Consider a closed loop system under PID control and assume that the system is stable and initially at rest with all signals being zero. Apply a unit step disturbance at the process input. After a transient the process output goes to zero and the controller output settles at a value that compensates for the disturbance. It follows from (10.1) that

$$u(\infty) = k_i \int_0^{\infty} e(t) dt.$$

The integrated error is thus inversely proportional to the integral gain  $k_i$ . The integral gain is thus a measure of the effectiveness of disturbance attenuation. A large gain  $k_i$  attenuates disturbances effectively, but too large a gain gives oscillatory behavior, poor robustness and possibly instability.

We now return to the general PID controller and consider the effect of the derivative term  $k_d$ . Recall that the original motivation for derivative feedback was to provide predictive or anticipatory action. Notice that the combination of the

proportional and the derivative terms can be written as

$$u = k_p e + k_d \frac{de}{dt} = k_p \left( e + T_d \frac{de}{dt} \right) = k_p e_p,$$

where  $e_p(t)$  can be interpreted as a prediction of the error at time  $t + T_d$  by linear extrapolation. The prediction time  $T_d = k_d/k_p$  is the derivative time constant of the controller.

Derivative action can be implemented by taking the difference between the signal and its low-pass filtered version as shown in Figure 10.3b. The transfer function for the system is

$$G_{ue}(s) = k_p \left( 1 - \frac{1}{1+sT_d} \right) = k_p \frac{sT_d}{1+sT_d}. \quad (10.5)$$

The system thus has the transfer function  $G(s) = sT_d/(1+sT_d)$ , which approximates a derivative for low frequencies ( $|s| < 1/T_d$ ).

Figure 10.2c illustrates the effect of derivative action: the system is oscillatory when no derivative action is used, and it becomes more damped as the derivative gain is increased. Performance deteriorates if the derivative gain is too high. When the input is a step, the controller output generated by the derivative term will be an impulse. This is clearly visible in Figure 10.2c. The impulse can be avoided by using the controller configuration shown in Figure 10.1b.

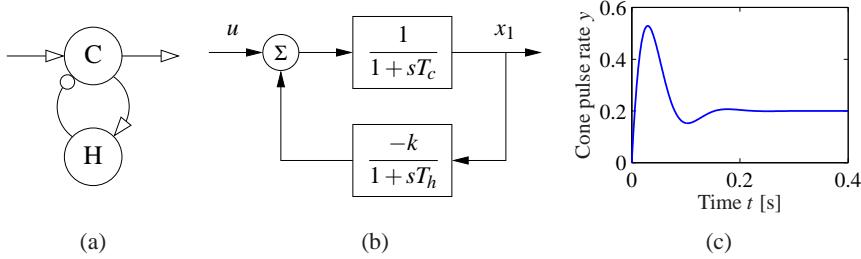
Although PID control was developed in the context of engineering applications, it also appears in nature. Disturbance attenuation by feedback in biological systems is often called *adaptation*. A typical example is the pupillary reflex discussed in Example 8.11, where it is said that the eye adapts to changing light intensity. Analogously, feedback with integral action is called perfect adaptation [YHSD00]. In biological systems proportional, integral and derivative action is generated by combining subsystems with dynamical behavior similarly to what is done in engineering systems. For example, PI action can be generated by the interaction of several hormones [ESGK02].

### Example 10.1 PD action in the retina

The response of cone photoreceptors in the retina is an example where proportional and derivative action is generated by a combination of cones and horizontal cells. The cones are the primary receptors stimulated by light, which in turn stimulate the horizontal cells, and the horizontal cells give inhibitory (negative) feedback to the cones. A schematic diagram of the system is shown in Figure 10.4a. The system can be modeled by ordinary differential equations by representing neuron signals as continuous variables representing the average pulse rate. In [Wil99] it is shown that the system can be represented by the differential equations

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{T_c}(-x_1 - kx_2 + u), \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{T_h}(x_1 - x_2),$$

where  $u$  is the light intensity and  $x_1$  and  $x_2$  are the average pulse rates from the cones and the horizontal cells. A block diagram of the system is shown in Figure 10.4b. The step response of the system shown in Figure 10.4c shows that the



**Figure 10.4:** Schematic diagram of cone photoreceptors (C) and horizontal cells (H) in the retina. In the schematic diagram in (a), excitatory feedback is indicated by arrows and inhibitory feedback by circles. A block diagram is shown in (b) and the step response in (c).

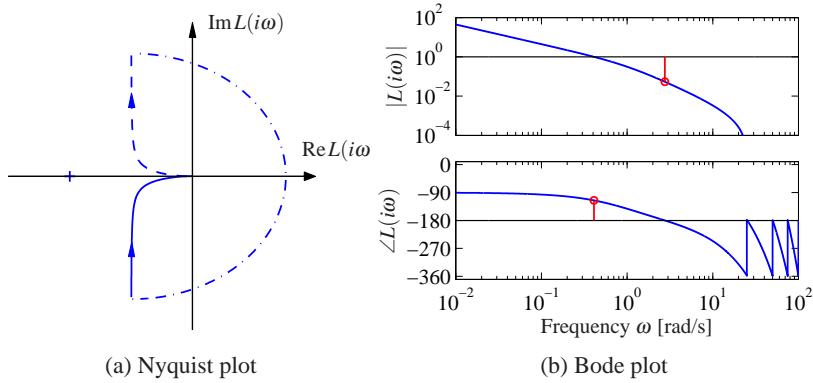
system has a large initial response followed by a lower, constant steady-state response typical of proportional and derivative action. The parameters used in the simulation are  $k = 4$ ,  $T_c = 0.025$  and  $T_h = 0.08$ .  $\nabla$

## 10.2 Simple Controllers for Complex Systems

Many of the design methods discussed in previous chapters have the property that the complexity of the controller is directly reflected by the complexity of the model. When designing controllers by output feedback in Chapter 7, we found for single-input, single-output systems that the order of the controller was the same as the order of the model, possibly one order higher if integral action was required. Applying similar design methods for PID control will require that we have low-order models of the processes to be able to easily analyze the results.

Low-order models can be obtained from first principles. Any stable system can be modeled by a static system if its inputs are sufficiently slow. Similarly a first-order model is sufficient if the storage of mass, momentum or energy can be captured by only one variable; typical examples are the velocity of a car on a road, angular velocity of a stiff rotational system, the level in a tank and the concentration in a volume with good mixing. System dynamics are of second order if the storage of mass, energy and momentum can be captured by two state variables; typical examples are the position of a car on the road, the stabilization of stiff satellites, the levels in two connected tanks and two-compartment models. A wide range of techniques for model reduction are also available. In this chapter we will focus on design techniques where we simplify the models to capture the essential properties that are needed for PID design.

We begin by analyzing the case of integral control. A stable system can be controlled by an integral controller provided that the requirements on the closed loop system are modest. To design the controller we assume that the transfer function of the process is a constant  $K = P(0)$ . The loop transfer function under integral control then becomes  $Kk_i/s$ , and the closed loop characteristic polynomial is simply  $s + Kk_i$ . Specifying performance by the desired time constant  $T_{cl}$  of the closed



**Figure 10.5:** Integral control for AFM in tapping mode. An integral controller is designed based on the slope of the process transfer function at 0. The controller gives good robustness properties based on a very simple analysis.

loop system, we find that the integral gain is given by

$$k_i = 1/(T_{cl}P(0)).$$

The analysis requires that  $T_{cl}$  be sufficiently large that the process transfer function can be approximated by a constant.

For systems that are not well represented by a constant gain, we can obtain a better approximation by using the Taylor series expansion of the loop transfer function:

$$L(s) = \frac{k_i P(s)}{s} \approx \frac{k_i(P(0) + sP'(0))}{s} = k_i P'(0) + \frac{k_i P(0)}{s}.$$

Choosing  $k_i P'(0) = -0.5$  gives a system with good robustness, as will be discussed in Section 12.5. The controller gain is then given by

$$k_i = -\frac{1}{2P'(0)}, \quad (10.6)$$

and the expected closed loop time constant is  $T_{cl} \approx -P'(0)/P(0)$ .

### Example 10.2 Integral control of AFM in tapping mode

A simplified model of the dynamics of the vertical motion of an atomic force microscope in tapping mode was discussed in Exercise 9.2. The transfer function for the system dynamics is

$$P(s) = \frac{a(1 - e^{-s\tau})}{s\tau(s + a)},$$

where  $a = \zeta\omega_0$ ,  $\tau = 2\pi n/\omega_0$  and the gain has been normalized to 1. We have  $P(0) = 1$  and  $P'(0) = -\tau/2 - 1/a$ , and it follows from (10.6) that the integral gain can be chosen as  $k_i = a/(2 + a\tau)$ . Nyquist and Bode plots for the resulting loop transfer function are shown in Figure 10.5.  $\nabla$

A first-order system has the transfer function

$$P(s) = \frac{b}{s+a}.$$

With a PI controller the closed loop system has the characteristic polynomial

$$s(s+a) + bk_ps + bk_i = s^2 + (a + bk_p)s + bk_i.$$

The closed loop poles can thus be assigned arbitrary values by proper choice of the controller gains. Requiring that the closed loop system have the characteristic polynomial

$$p(s) = s^2 + a_1s + a_2,$$

we find that the controller parameters are

$$k_p = \frac{a_1 - a}{b}, \quad k_i = \frac{a_2}{b}. \quad (10.7)$$

If we require a response of the closed loop system that is slower than that of the open loop system, a reasonable choice is  $a_1 = a + \alpha$  and  $a_2 = \alpha a$ . If a response faster than that of the open loop system is required, it is reasonable to choose  $a_1 = 2\zeta\omega_0$  and  $a_2 = \omega_0^2$ , where  $\omega_0$  and  $\zeta$  are undamped natural frequency and damping ratio of the dominant mode. These choices have significant impact on the robustness of the system and will be discussed in Section 12.4. An upper limit to  $\omega_0$  is given by the validity of the model. Large values of  $\omega_0$  will require fast control actions, and actuators may saturate if the value is too large. A first-order model is unlikely to represent the true dynamics for high frequencies. We illustrate the design by an example.

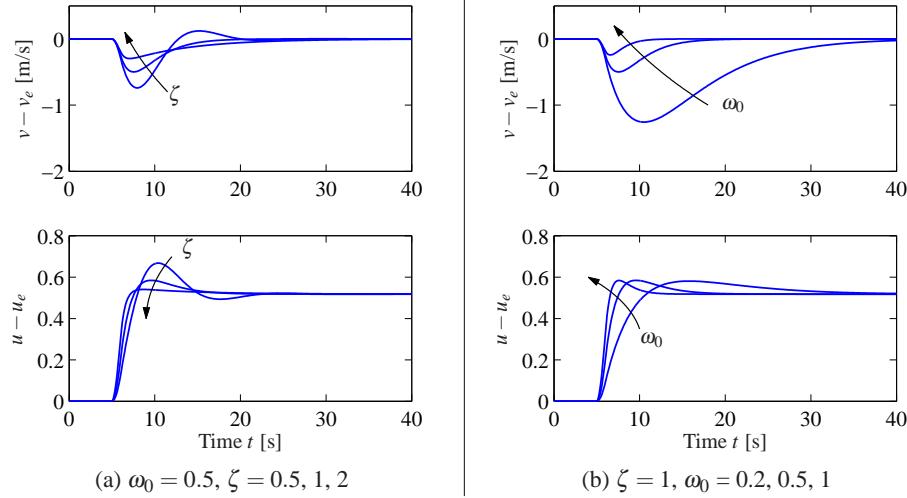
### Example 10.3 Cruise control using PI feedback

Consider the problem of maintaining the speed of a car as it goes up a hill. In Example 5.14 we found that there was little difference between the linear and non-linear models when investigating PI control, provided that the throttle did not reach the saturation limits. A simple linear model of a car was given in Example 5.11:

$$\frac{d(v - v_e)}{dt} = -a(v - v_e) + b(u - u_e) - g\theta, \quad (10.8)$$

where  $v$  is the velocity of the car,  $u$  is the input from the engine and  $\theta$  is the slope of the hill. The parameters were  $a = 0.0101$ ,  $b = 1.3203$ ,  $g = 9.8$ ,  $v_e = 20$  and  $u_e = 0.1616$ . This model will be used to find suitable parameters of a vehicle speed controller. The transfer function from throttle to velocity is a first-order system. Since the open loop dynamics is so slow, it is natural to specify a faster closed loop system by requiring that the closed loop system be of second-order with damping ratio  $\zeta$  and undamped natural frequency  $\omega_0$ . The controller gains are given by (10.7).

Figure 10.6 shows the velocity and the throttle for a car that initially moves on a horizontal road and encounters a hill with a slope of  $4^\circ$  at time  $t = 6$  s. To design a PI controller we choose  $\zeta = 1$  to obtain a response without overshoot, as



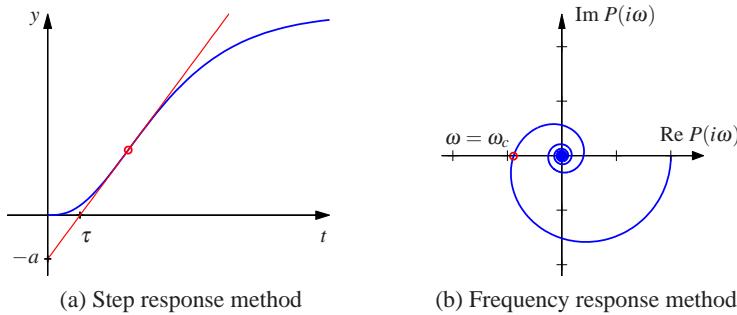
**Figure 10.6:** Cruise control using PI feedback. The step responses for the error and input illustrate the effect of parameters  $\zeta = 1$  and  $\omega_0$  on the response of a car with cruise control. A change in road slope from  $0^\circ$  to  $4^\circ$  is applied between  $t = 5$  and  $6$  s. (a) Responses for  $\omega_0 = 0.5$  and  $\zeta = 0.5, 1$  and  $2$ . Choosing  $\zeta = 1$  gives no overshoot. (b) Responses for  $\zeta = 1$  and  $\omega_0 = 0.2, 0.5$  and  $1.0$ .

shown in Figure 10.6a. The choice of  $\omega_0$  is a compromise between response speed and control actions: a large value gives a fast response, but it requires fast control action. The trade-off is illustrated in Figure 10.6b. The largest velocity error decreases with increasing  $\omega_0$ , but the control signal also changes more rapidly. In the simple model (10.8) it was assumed that the force responds instantaneously to throttle commands. For rapid changes there may be additional dynamics that have to be accounted for. There are also physical limitations to the rate of change of the force, which also restricts the admissible value of  $\omega_0$ . A reasonable choice of  $\omega_0$  is in the range  $0.5\text{--}1.0$ . Notice in Figure 10.6 that even with  $\omega_0 = 0.2$  the largest velocity error is only  $1$  m/s.  $\nabla$

A PI controller can also be used for a process with second-order dynamics, but there will be restrictions on the possible locations of the closed loop poles. Using a PID controller, it is possible to control a system of second order in such a way that the closed loop poles have arbitrary locations; see Exercise 10.2.

Instead of finding a low-order model and designing controllers for them, we can also use a high-order model and attempt to place only a few dominant poles. An integral controller has one parameter, and it is possible to position one pole. Consider a process with the transfer function  $P(s)$ . The loop transfer function with an integral controller is  $L(s) = k_i P(s)/s$ . The roots of the closed loop characteristic polynomial are the roots of  $s + k_i P(s) = 0$ . Requiring that  $s = -a$  be a root, we find that the controller gain should be chosen as

$$k_i = \frac{a}{P(-a)}. \quad (10.9)$$



**Figure 10.7:** Ziegler–Nichols step and frequency response experiments. The unit step response in (a) is characterized by the parameters  $a$  and  $\tau$ . The frequency response method (b) characterizes process dynamics by the point where the Nyquist curve of the process transfer function first intersects the negative real axis and the frequency  $\omega_c$  where this occurs.

The pole  $s = -a$  will be dominant if  $a$  is small. A similar approach can be applied to PI and PID controllers.

### 10.3 PID Tuning

Users of control systems are frequently faced with the task of adjusting the controller parameters to obtain a desired behavior. There are many different ways to do this. One approach is to go through the conventional steps of modeling and control design as described in the previous section. Since the PID controller has so few parameters, a number of special empirical methods have also been developed for direct adjustment of the controller parameters. The first tuning rules were developed by Ziegler and Nichols [ZN42]. Their idea was to perform a simple experiment, extract some features of process dynamics from the experiment and determine the controller parameters from the features.

#### Ziegler–Nichols’ Tuning

In the 1940s, Ziegler and Nichols developed two methods for controller tuning based on simple characterization of process dynamics in the time and frequency domains.

The time domain method is based on a measurement of part of the open loop unit step response of the process, as shown in Figure 10.7a. The step response is measured by applying a unit step input to the process and recording the response. The response is characterized by parameters  $a$  and  $\tau$ , which are the intercepts of the steepest tangent of the step response with the coordinate axes. The parameter  $\tau$  is an approximation of the time delay of the system and  $a/\tau$  is the steepest slope of the step response. Notice that it is not necessary to wait until steady state is reached to find the parameters, it suffices to wait until the response has had an inflection point. The controller parameters are given in Table 10.1. The parameters

**Table 10.1:** Ziegler–Nichols tuning rules. (a) The step response methods give the parameters in terms of the intercept  $a$  and the apparent time delay  $\tau$ . (b) The frequency response method gives controller parameters in terms of *critical gain*  $k_c$  and *critical period*  $T_c$ .

Type	$k_p$	$T_i$	$T_d$	Type	$k_p$	$T_i$	$T_d$
P	$1/a$			P	$0.5k_c$		
PI	$0.9/a$	$3\tau$		PI	$0.4k_c$	$0.8T_c$	
PID	$1.2/a$	$2\tau$	$0.5\tau$	PID	$0.6k_c$	$0.5T_c$	$0.125T_c$

(a) Step response method

(b) Frequency response method

were obtained by extensive simulation of a range of representative processes. A controller was tuned manually for each process, and an attempt was then made to correlate the controller parameters with  $a$  and  $\tau$ .

In the frequency domain method, a controller is connected to the process, the integral and derivative gains are set to zero and the proportional gain is increased until the system starts to oscillate. The critical value of the proportional gain  $k_c$  is observed together with the period of oscillation  $T_c$ . It follows from Nyquist's stability criterion that the loop transfer function  $L = k_c P(s)$  intersects the critical point at the frequency  $\omega_c = 2\pi/T_c$ . The experiment thus gives the point on the Nyquist curve of the process transfer function where the phase lag is  $180^\circ$ , as shown in Figure 10.7b.

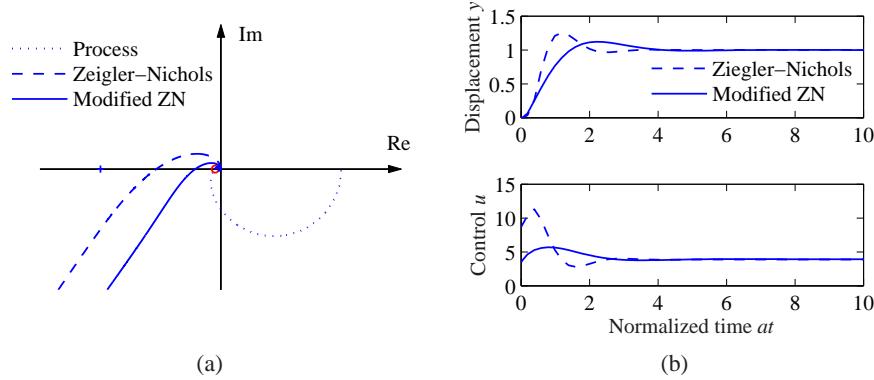
The Ziegler–Nichols methods had a huge impact when they were introduced in the 1940s. The rules were simple to use and gave initial conditions for manual tuning. The ideas were adopted by manufacturers of controllers for routine use. The Ziegler–Nichols tuning rules unfortunately have two severe drawbacks: too little process information is used, and the closed loop systems that are obtained lack robustness.

The step response method can be improved significantly by characterizing the unit step response by parameters  $K$ ,  $\tau$  and  $T$  in the model

$$P(s) = \frac{K}{1+sT} e^{-\tau s}. \quad (10.10)$$

The parameters can be obtained by fitting the model to a measured step response. Notice that the experiment takes a longer time than the experiment in Figure 10.7a because to determine  $K$  it is necessary to wait until the steady state has been reached. Also notice that the intercept  $a$  in the Ziegler–Nichols rule is given by  $a = K\tau/T$ .

The frequency response method can be improved by measuring more points on the Nyquist curve, e.g., the zero frequency gain  $K$  or the point where the process has a  $90^\circ$  phase lag. This latter point can be obtained by connecting an integral controller and increasing its gain until the system reaches the stability limit. The experiment can also be automated by using relay feedback, as will be discussed later in this section.



**Figure 10.8:** PI control of an AFM in tapping mode. Nyquist plots (a) and step responses (b) for PI control of the vertical motion of an atomic force microscope in tapping mode. The averaging parameter is  $n = 20$ . Results with Ziegler–Nichols tuning are shown by dashed lines, and modified Ziegler–Nichols tuning is shown by solid lines. The Nyquist plot of the process transfer function is shown by dotted lines.

There are many versions of improved tuning rules. As an illustration we give the following rules for PI control, based on [ÅH05]:

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{0.15\tau + 0.35T}{K\tau} \quad \left( \frac{0.9T}{K\tau} \right), \quad k_i = \frac{0.46\tau + 0.02T}{K\tau^2} \quad \left( \frac{0.3T}{K\tau^2} \right), \\ k_p &= 0.22k_c - \frac{0.07}{K} \quad \left( 0.4k_c \right), \quad k_i = \frac{0.16k_c}{T_c} + \frac{0.62}{KT_c} \quad \left( \frac{0.5k_c}{T_c} \right). \end{aligned} \quad (10.11)$$

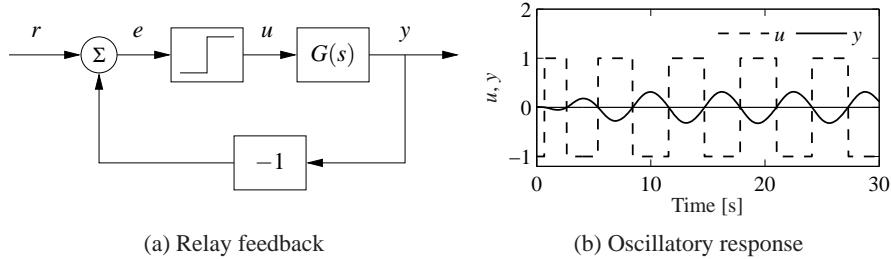
The values for the Ziegler–Nichols rule are given in parentheses. Notice that the improved formulas typically give lower controller gains than the Ziegler–Nichols method. The integral gain is higher for systems where the dynamics are delay-dominated,  $\tau \gg T$ .

#### Example 10.4 Atomic force microscope in tapping mode

A simplified model of the dynamics of the vertical motion of an atomic force microscope in tapping mode was discussed in Example 10.2. The transfer function is normalized by choosing  $1/a$  as the time unit. The normalized transfer function is

$$P(s) = \frac{1 - e^{-sT_n}}{sT_n(s+1)},$$

where  $T_n = 2n\pi a/\omega_0 = 2n\pi\zeta$ . The Nyquist plot of the transfer function is shown in Figure 10.8a for  $\zeta = 0.002$  and  $n = 20$ . The leftmost intersection of the Nyquist curve with the real axis occurs at  $\text{Re } s = -0.0461$  for  $\omega = 13.1$ . The critical gain is thus  $k_c = 21.7$  and the critical period is  $T_c = 0.48$ . Using the Ziegler–Nichols tuning rule, we find the parameters  $k_p = 8.87$  and  $k_i = 22.6$  ( $T_i = 0.384$ ) for a PI controller. With this controller the stability margin is  $s_m = 0.31$ , which is quite small. The step response of the controller is shown in Figure 10.8. Notice in particular that there is a large overshoot in the control signal.



**Figure 10.9:** Block diagram of a process with relay feedback (a) and typical signals (b). The process output  $y$  is a solid line, and the relay output  $u$  is a dashed line. Notice that the signals  $u$  and  $y$  have opposite phases.

The modified Ziegler–Nichols rule (10.11) gives the controller parameters  $k_p = 3.47$  and  $k_i = 8.73$  ( $T_i = 0.459$ ) and the stability margin becomes  $s_m = 0.61$ . The step response with this controller is shown in Figure 10.8. A comparison of the responses obtained with the original Ziegler–Nichols rule shows that the overshoot has been reduced. Notice that the control signal reaches its steady-state value almost instantaneously. It follows from Example 10.2 that a pure integral controller has the normalized gain  $k_i = 1/(2 + T_n) = 0.44$ . Comparing this with the gains of a PI controller, we can conclude that a PI controller gives much better performance than a pure integral controller.  $\nabla$

### Relay Feedback

The Ziegler–Nichols frequency response method increases the gain of a proportional controller until oscillation to determine the critical gain  $k_c$  and the corresponding critical period  $T_c$  or, equivalently, the point where the Nyquist curve intersects the negative real axis. One way to obtain this information automatically is to connect the process in a feedback loop with a nonlinear element having a relay function as shown in Figure 10.9a. For many systems there will then be an oscillation, as shown in Figure 10.9b, where the relay output  $u$  is a square wave and the process output  $y$  is close to a sinusoid. Moreover the input and the output are out of phase, which means that the system oscillates with the critical period  $T_c$ , where the process has a phase lag of  $180^\circ$ . Notice that an oscillation with constant period is established quickly.

The critical period is simply the period of the oscillation. To determine the critical gain we expand the square wave relay output in a Fourier series. Notice in the figure that the process output is practically sinusoidal because the process attenuates higher harmonics effectively. It is then sufficient to consider only the first harmonic component of the input. Letting  $d$  be the relay amplitude, the first harmonic of the square wave input has amplitude  $4d/\pi$ . If  $a$  is the amplitude of the process output, the process gain at the critical frequency  $\omega_c = 2\pi/T_c$  is  $|P(i\omega_c)| =$

$\pi a/(4d)$  and the critical gain is

$$K_c = \frac{4d}{a\pi}. \quad (10.12)$$

Having obtained the critical gain  $K_c$  and the critical period  $T_c$ , the controller parameters can then be determined using the Ziegler–Nichols rules. Improved tuning can be obtained by fitting a model to the data obtained from the relay experiment.

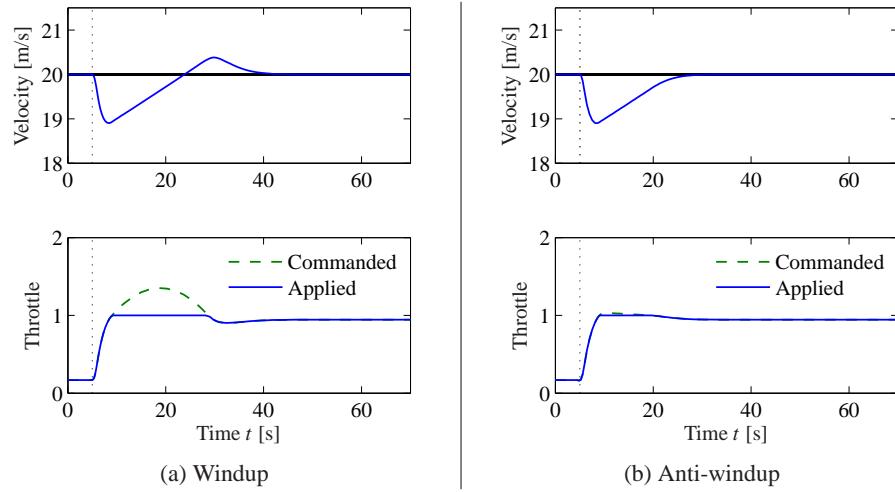
The relay experiment can be automated. Since the amplitude of the oscillation is proportional to the relay output, it is easy to control it by adjusting the relay output. *Automatic tuning* based on relay feedback is used in many commercial PID controllers. Tuning is accomplished simply by pushing a button that activates relay feedback. The relay amplitude is automatically adjusted to keep the oscillations sufficiently small, and the relay feedback is switched to a PID controller as soon as the tuning is finished.

## 10.4 Integrator Windup

Many aspects of a control system can be understood from linear models. There are, however, some nonlinear phenomena that must be taken into account. These are typically limitations in the actuators: a motor has limited speed, a valve cannot be more than fully opened or fully closed, etc. For a system that operates over a wide range of conditions, it may happen that the control variable reaches the actuator limits. When this happens, the feedback loop is broken and the system runs in open loop because the actuator remains at its limit independently of the process output as long as the actuator remains saturated. The integral term will also build up since the error is typically nonzero. The integral term and the controller output may then become very large. The control signal will then remain saturated even when the error changes, and it may take a long time before the integrator and the controller output come inside the saturation range. The consequence is that there are large transients. This situation is referred to as *integrator windup*, illustrated in the following example.

### Example 10.5 Cruise control

The windup effect is illustrated in Figure 10.10a, which shows what happens when a car encounters a hill that is so steep ( $6^\circ$ ) that the throttle saturates when the cruise controller attempts to maintain speed. When encountering the slope at time  $t = 5$ , the velocity decreases and the throttle increases to generate more torque. However, the torque required is so large that the throttle saturates. The error decreases slowly because the torque generated by the engine is just a little larger than the torque required to compensate for gravity. The error is large and the integral continues to build up until the error reaches zero at time 30, but the controller output is still larger than the saturation limit and the actuator remains saturated. The integral term starts to decrease, and at time 45 and the velocity settles quickly to the desired value. Notice that it takes considerable time before the controller output comes into the range where it does not saturate, resulting in a large overshoot.  $\nabla$



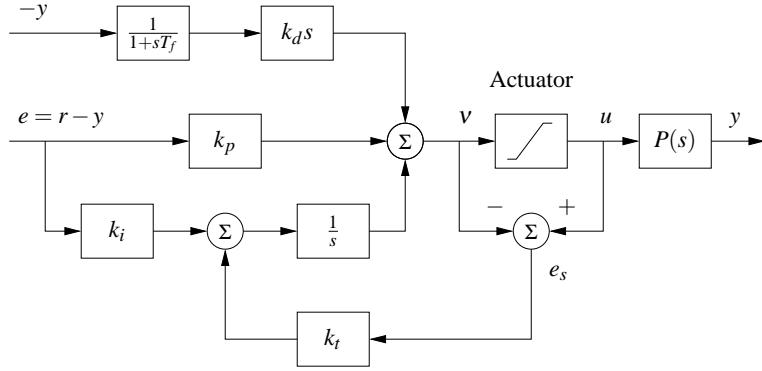
**Figure 10.10:** Simulation of PI cruise control with windup (a) and anti-windup (b). The figure shows the speed  $v$  and the throttle  $u$  for a car that encounters a slope that is so steep that the throttle saturates. The controller output is a dashed line. The controller parameters are  $k_p = 0.5$  and  $k_i = 0.1$ . The anti-windup compensator eliminates the overshoot by preventing the error for building up in the integral term of the controller.

There are many methods to avoid windup. One method is illustrated in Figure 10.11: the system has an extra feedback path that is generated by measuring the actual actuator output, or the output of a mathematical model of the saturating actuator, and forming an error signal  $e_s$  as the difference between the output of the controller  $v$  and the actuator output  $u$ . The signal  $e_s$  is fed to the input of the integrator through gain  $k_t$ . The signal  $e_s$  is zero when there is no saturation and the extra feedback loop has no effect on the system. When the actuator saturates, the signal  $e_s$  is fed back to the integrator in such a way that  $e_s$  goes toward zero. This implies that controller output is kept close to the saturation limit. The controller output will then change as soon as the error changes sign and integral windup is avoided.

The rate at which the controller output is reset is governed by the feedback gain  $k_t$ ; a large value of  $k_t$  gives a short reset time. The parameter  $k_t$  cannot be too large because measurement noise can then cause an undesirable reset. A reasonable choice is to choose  $k_t$  as a fraction of  $1/T_i$ . We illustrate how integral windup can be avoided by investigating the cruise control system.

#### Example 10.6 Cruise control with anti-windup

Figure 10.10b shows what happens when a controller with anti-windup is applied to the system simulated in Figure 10.10a. Because of the feedback from the actuator model, the output of the integrator is quickly reset to a value such that the controller output is at the saturation limit. The behavior is drastically different from that in Figure 10.10a and the large overshoot is avoided. The tracking gain is  $k_t = 2$  in the simulation.  $\nabla$



**Figure 10.11:** PID controller with a filtered derivative and anti-windup. The input to the integrator ( $1/s$ ) consists of the error term plus a “reset” based on input saturation. If the actuator is not saturated, then  $e_s = u - v$ , otherwise  $e_s$  will decrease the integrator input to prevent windup.

## 10.5 Implementation

There are many practical issues that have to be considered when implementing PID controllers. They have been developed over time based on practical experience. In this section we consider some of the most common. Similar considerations also apply to other types of controllers.

### Filtering the Derivative

A drawback with derivative action is that an ideal derivative has high gain for high-frequency signals. This means that high-frequency measurement noise will generate large variations in the control signal. The effect of measurement noise may be reduced by replacing the term  $k_d s$  by  $k_d s / (1 + sT_f)$ , which can be interpreted as an ideal derivative of a low-pass filtered signal. For small  $s$  the transfer function is approximately  $k_d s$  and for large  $s$  it is equal to  $k_d / T_f$ . The approximation acts as a derivative for low-frequency signals and as a constant gain for high-frequency signals. The filtering time is chosen as  $T_f = (k_d / k_p) / N$ , with  $N$  in the range 2–20. Filtering is obtained automatically if the derivative is implemented by taking the difference between the signal and its filtered version as shown in Figure 10.3b (see equation (10.5)).

Instead of filtering just the derivative, it is also possible to use an ideal controller and filter the measured signal. The transfer function of such a controller with a filter is then

$$C(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) \frac{1}{1 + sT_f + (sT_f)^2/2}, \quad (10.13)$$

where a second-order filter is used.

LCD 2014年秋季

### Setpoint Weighting

Figure 10.1 shows two configurations of a PID controller. The system in Figure 10.1a has a controller with *error feedback* where proportional, integral and derivative action acts on the error. In the simulation of PID controllers in Figure 10.2c there is a large initial peak in the control signal, which is caused by the derivative of the reference signal. The peak can be avoided by using the controller in Figure 10.1b, where proportional and derivative action acts only on the process output. An intermediate form is given by

$$u = k_p(\beta r - y) + k_i \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau + k_d \left( \gamma \frac{dr}{dt} - \frac{dy}{dt} \right), \quad (10.14)$$

where the proportional and derivative actions act on fractions  $\beta$  and  $\gamma$  of the reference. Integral action has to act on the error to make sure that the error goes to zero in steady state. The closed loop systems obtained for different values of  $\beta$  and  $\gamma$  respond to load disturbances and measurement noise in the same way. The response to reference signals is different because it depends on the values of  $\beta$  and  $\gamma$ , which are called *reference weights* or *setpoint weights*. We illustrate the effect of setpoint weighting by an example.

#### Example 10.7 Cruise control with setpoint weighting

Consider the PI controller for the cruise control system derived in Example 10.3. Figure 10.12 shows the effect of setpoint weighting on the response of the system to a reference signal. With  $\beta = 1$  (error feedback) there is an overshoot in velocity and the control signal (throttle) is initially close to the saturation limit. There is no overshoot with  $\beta = 0$  and the control signal is much smaller, clearly a much better drive comfort. The frequency responses gives another view of the same effect. The parameter  $\beta$  is typically in the range 0–1, and  $\gamma$  is normally zero to avoid large transients in the control signal when the reference is changed.  $\nabla$

The controller given by equation (10.14) is a special case of the general controller structure having two degrees of freedom, which was discussed in Section 7.5.

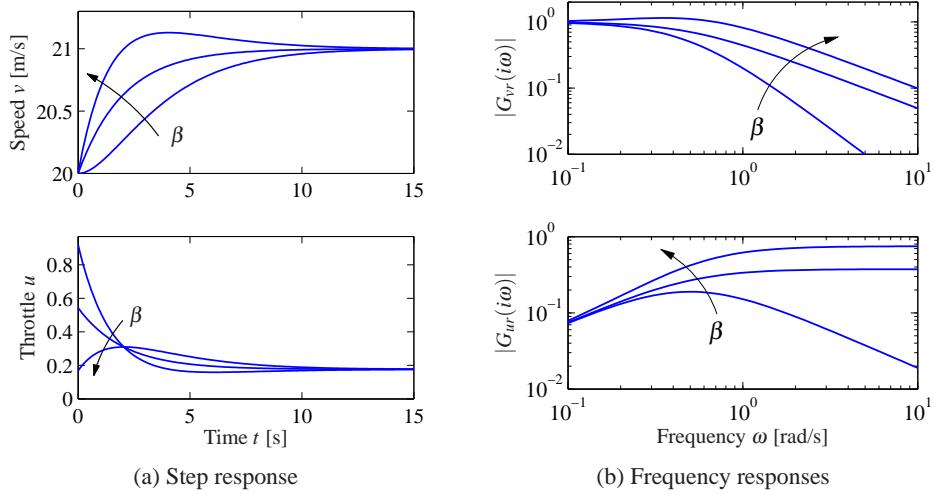
### Implementation Based on Operational Amplifiers

PID controllers have been implemented in different technologies. Figure 10.13 shows how PI and PID controllers can be implemented by feedback around operational amplifiers.

To show that the circuit in Figure 10.13b is a PID controller we will use the approximate relation between the input voltage  $e$  and the output voltage  $u$  of the operational amplifier derived in Example 8.3,

$$u = -\frac{Z_2}{Z_1}e.$$

In this equation  $Z_1$  is the impedance between the negative input of the amplifier and the input voltage  $e$ , and  $Z_2$  is the impedance between the zero input of the



**Figure 10.12:** Time and frequency responses for PI cruise control with setpoint weighting. Step responses are shown in (a), and the gain curves of the frequency responses in (b). The controller gains are  $k_p = 0.74$  and  $k_i = 0.19$ . The setpoint weights are  $\beta = 0, 0.5$  and  $1$ , and  $\gamma = 0$ .

amplifier and the output voltage  $u$ . The impedances are given by

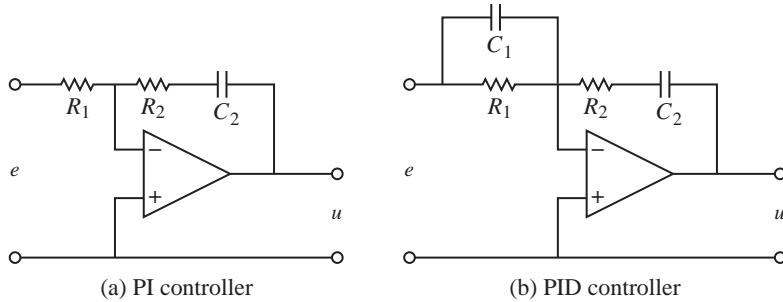
$$Z_1(s) = \frac{R_1}{1+R_1C_1s}, \quad Z_2(s) = R_2 + \frac{1}{C_2s},$$

and we find the following relation between the input voltage  $e$  and the output voltage  $u$ :

$$u = -\frac{Z_2}{Z_1}e = -\frac{R_2}{R_1} \frac{(1+R_1C_1s)(1+R_2C_2s)}{R_2C_2s} e.$$

This is the input/output relation for a PID controller of the form (10.1) with parameters

$$k_p = \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_1 C_2}, \quad T_i = R_1 C_1 + R_2 C_2, \quad T_d = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2}.$$



**Figure 10.13:** Schematic diagrams for PI and PID controllers using op amps. The circuit in (a) uses a capacitor in the feedback path to store the integral of the error. The circuit in (b) adds a filter on the input to provide derivative action.

The corresponding results for a PI controller are obtained by setting  $C_1 = 0$  (removing the capacitor).

### Computer Implementation

In this section we briefly describe how a PID controller may be implemented using a computer. The computer typically operates periodically, with signals from the sensors sampled and converted to digital form by the A/D converter, and the control signal computed and then converted to analog form for the actuators. The sequence of operation is as follows:

- |                             |                                |
|-----------------------------|--------------------------------|
| 1. Wait for clock interrupt | 4. Send output to the actuator |
| 2. Read input from sensor   | 5. Update controller variables |
| 3. Compute control signal   | 6. Repeat                      |

Notice that an output is sent to the actuators as soon as it is available. The time delay is minimized by making the calculations in step 3 as short as possible and performing all updates after the output is commanded. This simple way of reducing the latency is, unfortunately, seldom used in commercial systems.

As an illustration we consider the PID controller in Figure 10.11, which has a filtered derivative, setpoint weighting and protection against integral windup. The controller is a continuous-time dynamical system. To implement it using a computer, the continuous-time system has to be approximated by a discrete-time system.

A block diagram of a PID controller with anti-windup is shown in Figure 10.11. The signal  $v$  is the sum of the proportional, integral and derivative terms, and the controller output is  $u = \text{sat}(v)$ , where  $\text{sat}$  is the saturation function that models the actuator. The proportional term  $k_p(\beta r - y)$  is implemented simply by replacing the continuous variables with their sampled versions. Hence

$$P(t_k) = k_p (\beta r(t_k) - y(t_k)), \quad (10.15)$$

where  $\{t_k\}$  denotes the sampling instants, i.e., the times when the computer reads its input. We let  $h$  represent the sampling time, so that  $t_{k+1} = t_k + h$ . The integral term is obtained by approximating the integral with a sum,

$$I(t_{k+1}) = I(t_k) + k_i h e(t_k) + \frac{h}{T_t} (\text{sat}(v) - v), \quad (10.16)$$

where  $T_t = h/k_t$  represents the anti-windup term. The filtered derivative term  $D$  is given by the differential equation

$$T_f \frac{dD}{dt} + D = -k_d \dot{y}.$$

Approximating the derivative with a backward difference gives

$$T_f \frac{D(t_k) - D(t_{k-1})}{h} + D(t_k) = -k_d \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{h},$$

which can be rewritten as

$$D(t_k) = \frac{T_f}{T_f + h} D(t_{k-1}) - \frac{k_d}{T_f + h} (y(t_k) - y(t_{k-1})). \quad (10.17)$$

The advantage of using a backward difference is that the parameter  $T_f/(T_f + h)$  is nonnegative and less than 1 for all  $h > 0$ , which guarantees that the difference equation is stable. Reorganizing equations (10.15)–(10.17), the PID controller can be described by the following pseudocode:

```
% Precompute controller coefficients
bi=ki*h
ad=Tf/(Tf+h)
bd=kd/(Tf+h)
br=h/Tt

% Control algorithm - main loop
while (running) {
    r=adin(ch1)                      % read setpoint from ch1
    y=adin(ch2)                      % read process variable from ch2
    P=kp*(b*r-y)                    % compute proportional part
    D=ad*D-bd*(y-yold)              % update derivative part
    v=P+I+D                          % compute temporary output
    u=sat(v,ulow,uhigh)             % simulate actuator saturation
    daout(ch1)                       % set analog output ch1
    I=I+bi*(r-y)+br*(u-v)          % update integral
    yold=y                           % update old process output
    sleep(h)                         % wait until next update interval
}
```

Precomputation of the coefficients  $bi$ ,  $ad$ ,  $bd$  and  $br$  saves computer time in the main loop. These calculations have to be done only when controller parameters are changed. The main loop is executed once every sampling period. The program has three states:  $yold$ ,  $I$ , and  $D$ . One state variable can be eliminated at the cost of less readable code. The latency between reading the analog input and setting the analog output consists of four multiplications, four additions and evaluation of the `sat` function. All computations can be done using fixed-point calculations if necessary. Notice that the code computes the filtered derivative of the process output and that it has setpoint weighting and anti-windup protection.

## 10.6 Further Reading

The history of PID control is very rich and stretches back to the beginning of the foundation of control theory. Very readable treatments are given by Bennett [Ben79, Ben93] and Mindel [Min02]. The Ziegler–Nichols rules for tuning PID controllers, first presented in 1942 [ZN42], were developed based on extensive experiments with pneumatic simulators and Vannevar Bush’s differential analyzer at MIT. An interesting view of the development of the Ziegler–Nichols rules is given in an interview with Ziegler [Bli90]. An industrial perspective on PID control is given

in [Bia95], [Shi96] and [YH91] and in the paper [DM02] cited in the beginning of this chapter. A comprehensive presentation of PID control is given in [ÅH05]. Interactive learning tools for PID control can be downloaded from <http://www.calerga.com/contrib>.

## Exercises

**10.1** (Ideal PID controllers) Consider the systems represented by the block diagrams in Figure 10.1. Assume that the process has the transfer function  $P(s) = b/(s+a)$  and show that the transfer functions from  $r$  to  $y$  are

$$(a) \quad G_{yr}(s) = \frac{bk_d s^2 + bk_p s + bk_i}{(1 + bk_d)s^2 + (a + bk_p)s + bk_i},$$

$$(b) \quad G_{yr}(s) = \frac{bk_i}{(1 + bk_d)s^2 + (a + bk_p)s + bk_i}.$$

Pick some parameters and compare the step responses of the systems.

**10.2** Consider a second-order process with the transfer function

$$P(s) = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_2}.$$

The closed loop system with a PI controller is a third-order system. Show that it is possible to position the closed loop poles as long as the sum of the poles is  $-a_1$ . Give equations for the parameters that give the closed loop characteristic polynomial

$$(s + \alpha_0)(s^2 + 2\zeta_0\omega_0 s + \omega_0^2).$$

**10.3** Consider a system with the transfer function  $P(s) = (s+1)^{-2}$ . Find an integral controller that gives a closed loop pole at  $s = -a$  and determine the value of  $a$  that maximizes the integral gain. Determine the other poles of the system and judge if the pole can be considered dominant. Compare with the value of the integral gain given by equation (10.6).

**10.4** (Ziegler–Nichols tuning) Consider a system with transfer function  $P(s) = e^{-s}/s$ . Determine the parameters of P, PI and PID controllers using Ziegler–Nichols step and frequency response methods. Compare the parameter values obtained by the different rules and discuss the results.

**10.5** (Vehicle steering) Design a proportional-integral controller for the vehicle steering system that gives the closed loop characteristic polynomial

$$s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^3.$$

**10.6** (Congestion control) A simplified flow model for TCP transmission is derived in [HMTG00, LPD02]. The linearized dynamics are modeled by the transfer

function

$$G_{qp}(s) = \frac{b}{(s+a_1)(s+a_2)} e^{-s\tau_e},$$

which describes the dynamics relating the expected queue length  $q$  to the expected packet drop  $p$ . The parameters are given by  $a_1 = 2N^2/(c\tau_e^2)$ ,  $a_2 = 1/\tau_e$  and  $b = c^2/(2N)$ . The parameter  $c$  is the bottleneck capacity,  $N$  is the number of sources feeding the link and  $\tau_e$  is the round-trip delay time. Use the parameter values  $N = 75$  sources,  $C = 1250$  packets/s and  $\tau_e = 0.15$  and find the parameters of a PI controller using one of the Ziegler–Nichols rules and the corresponding improved rule. Simulate the responses of the closed loop systems obtained with the PI controllers.

**10.7** (Motor drive) Consider the model of the motor drive in Exercise 2.10. Develop an approximate second-order model of the system and use it to design an ideal PD controller that gives a closed loop system with eigenvalues in  $\zeta\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ . Add low-pass filtering as shown in equation (10.13) and explore how large  $\omega_0$  can be made while maintaining a good stability margin. Simulate the closed loop system with the chosen controller and compare the results with the controller based on state feedback in Exercise 6.11.

**10.8** Consider the system in Exercise 10.7 investigate what happens if the second-order filtering of the derivative is replace by a first-order filter.

**10.9** (Tuning rules) Apply the Ziegler–Nichols and the modified tuning rules to design PI controllers for systems with the transfer functions

$$P_1 = \frac{e^{-s}}{s}, \quad P_2 = \frac{e^{-s}}{s+1}, \quad P_3 = e^{-s}.$$

Compute the stability margins and explore any patterns.

**10.10** (Windup and anti-windup) Consider a PI controller of the form  $C(s) = 1 + 1/s$  for a process with input that saturates when  $|u| > 1$ , and whose linear dynamics are given by the transfer function  $P(s) = 1/s$ . Simulate the response of the system to step changes in the reference signal of magnitude 1, 2 and 3. Repeat the simulation when the windup protection scheme in Figure 10.11 is used.

**10.11** (Windup protection by conditional integration) Many methods have been proposed to avoid integrator windup. One method called *conditional integration* is to update the integral only when the error is sufficiently small. To illustrate this method we consider a system with PI control described by

$$\frac{dx_1}{dt} = u, \quad u = \text{sat}_{u_0}(k_p e + k_i x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = \begin{cases} e & \text{if } |e| < e_0 \\ 0 & \text{if } |e| \geq e_0, \end{cases}$$

where  $e = r - x$ . Plot the phase portrait of the system for the parameter values  $k_p = 1$ ,  $k_i = 1$ ,  $u_0 = 1$  and  $e_0 = 1$  and discuss the properties of the system. The example illustrates the difficulties of introducing ad hoc nonlinearities without careful analysis.