线控作业1

张蔚桐 2015011493 自55

2017 年 3 月 13 日

1

根据能控性代数判据可以得到

$$[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A^2B}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{pmatrix}$$

$rank([\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A^2B}]) = 3$，行满秩可得系统能控

2

2.1

显然系统在A为Jordan标准型基础上B矩阵在第二行出现全零行不可控。

2.2

$$[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A^2B}] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$rank([\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A^2B}]) = 2$，行不满秩可得系统不可控

3

$$[\mathbf{B\ AB\ A^2B\ A^3B}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -11 \\ -1 & 0 & -11 & 0 \end{pmatrix}$$

$rank([\mathbf{B\ AB\ A^2B\ A^3B}]) = 4$，行满秩可得系统能控

$$[\mathbf{C\ CA\ CA^2\ CA^3}]^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$rank([\mathbf{C\ CA\ CA^2\ CA^3}]^{\mathbf{T}}) = 4$，列满秩系统可观

4

4.1 可控条件

$$[\mathbf{B\ AB}] = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 1 & c+d \end{pmatrix}$$

可控条件显然为$a + b \neq c + d$

4.2 可观条件

$$[\mathbf{C\ CA}]^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

系统永不可观

5

$$[\mathbf{B\ AB\ A^2B}] = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 4 & -4 & 4 \\ 3 & -6 & 12 \end{pmatrix}$$

于是$P_1 = [0\ 0\ 1][\mathbf{B\ AB\ A^2B}]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ 并进一步得到

$$\mathbf{T^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P_1} \\ \mathbf{P_1A} \\ \mathbf{P_1A^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

于是有

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T^{-1}AT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{T^{-1}B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将系统化为能控标准型

6

系统状态方程可以表示为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\ ,\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{B\ AB\ A^2B}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 13 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$rank([\mathbf{B\ AB\ A^2B}]) = 2$故系统不可控

$$[\mathbf{C\ CA\ CA^2}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$rank([\mathbf{C\ CA\ CA^2}]) = 3$故系统可观

可以得到系统的传递函数为

$$\mathbf{G} = \mathbf{C(sI - A)^{-1}B} = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}$$

7

7.1

$$\mathbf{G} = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-\mathbf{1}}\mathbf{B} = \frac{s+3}{s^2+2s-1}$$

7.2

$$[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A^2B}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$rank([\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A^2B}]) = 2$，行不满秩可得系统不可控，于是构造其能控子系统取$[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A^2B}]$的前两列作为列向量，构造

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-\mathbf{1}}\mathbf{AT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}' = \mathbf{T}^{-\mathbf{1}}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}' = \mathbf{CT} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

得到系统的能控子系统为

$$\Sigma(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix})$$

7.3

$$[\mathbf{C}\ \mathbf{CA}\ \mathbf{CA^2}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

$rank([\mathbf{C}\ \mathbf{CA}\ \mathbf{CA^2}]) = 3$,系统可观

8

$$\mathbf{G} = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{pmatrix} 2s+3 & 1 \\ 3s+6 & 3s+6 \end{pmatrix}$$

于是可以顺利得到

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

下面考虑将这个系统抽出能观部分，考察

$$[\mathbf{C}\ \mathbf{CA}\ \mathbf{CA^2}\ \mathbf{CA^3}] = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 6 & 3 \\ -4 & -3 & 0 & 1 \\ -6 & -3 & -6 & -3 \\ 6 & 5 & -2 & -3 \\ 6 & 3 & 6 & 3 \\ -10 & -9 & 6 & 7 \\ -6 & -3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

抽出线性无关列构成

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到新的能观表述：

$$\mathbf{A} = \mathbf{TAT^{-1}} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \mathbf{Tb} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{C} = \mathbf{CT^{-1}} == \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是最小实现为

$$\Sigma(\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

9

相关处理后有

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix},\ \mathbf{d}=1$$

$$[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}]=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

$rank([\mathbf{B}\ \mathbf{AB}])=1$，行不满秩可得系统不可控

$$\mathbf{C}\ \mathbf{CA}]=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

$rank([\mathbf{C}\ \mathbf{CA}])=1$，列不满秩可得系统不可观综上，系统不可观不可控