大作业1：图像扭曲变形

- **目标：**编写图像扭曲变形程序，可以对图像进行扭曲变形。

扭曲变形方式

必做：

1. 旋转扭曲
2. 水波纹扭曲

选做：

1. B样条变形

旋转扭曲

旋转扭曲主要是利用距离中心点距离不同，旋转角度不同来扭曲图像。具体变换公式为：

α, r为原始坐标(x^*, y^*)的极坐标表示，

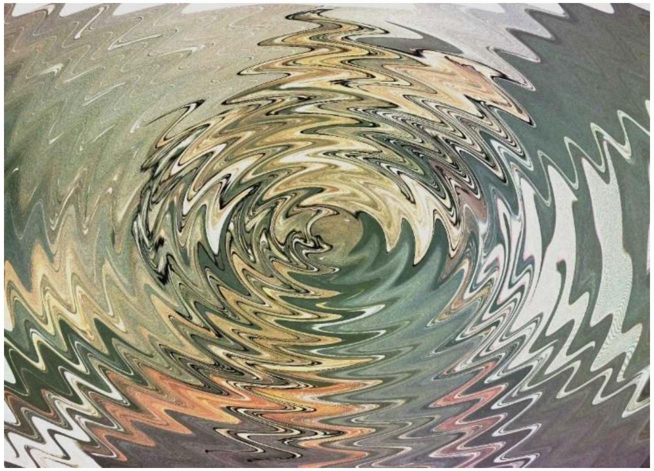
row为最大旋转半径，

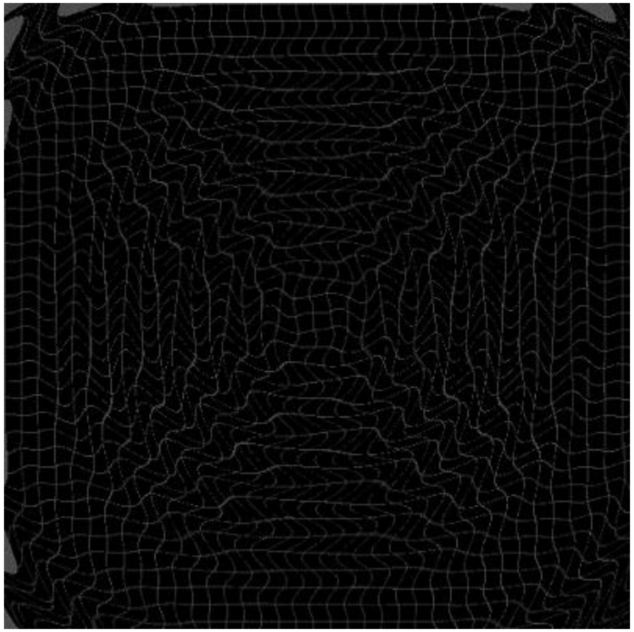
θ为旋转角度：

$$x = r * \frac{\cos\left(\alpha + \theta * \frac{(\mathrm{row} - r)}{row}\right)}{2}$$

$$y = r * \frac{\sin\left(\alpha + \theta * \frac{(\mathrm{row} - r)}{row}\right)}{2}$$

水波纹扭曲





水波纹主要是利用正弦变换近似实现，具体的变换公示为：

α, r为原始坐标(x^*, y^*)的极坐标表示

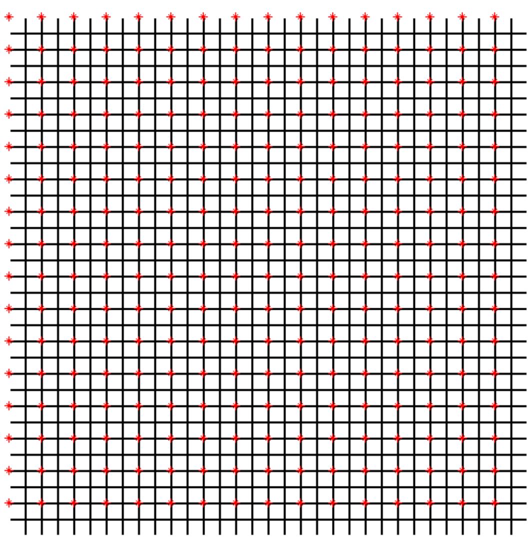
ρ, ϕ为水波纹参数

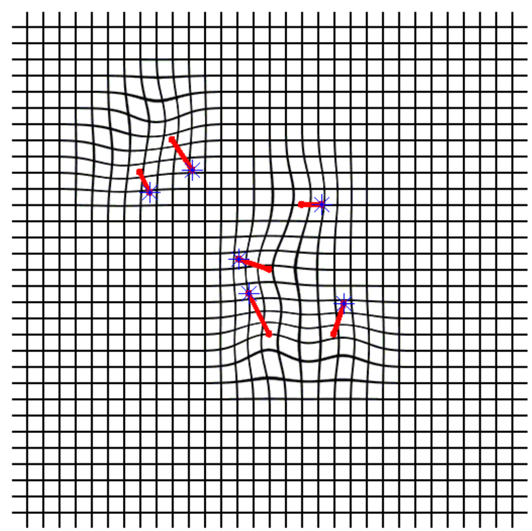
R是最大变换范围

$$\mathrm{x} = \mathrm{r} * \sin\left(\alpha + \sin\left(\frac{r}{R} * \rho + \phi\right)\right) + R$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{r} * cos\left(\alpha + \sin\left(\frac{r}{R} * \rho + \phi\right)\right) + R$$

B样条变形





B样条变形及插值

- 详见后面

作业要求

- 提交程序源代码、执行码以及实验报告（包括：变形函数的选取与设计，使用插值方法的介绍与分析，程序框图，实验结果及分析等）。

注意：

1。建议程序用VC编写，详见大作业要求；

2。可参考本书讲授方法，也可采用其它方法；

3。自行编写全部算法，图像读写函数可使用现成的；

4。鼓励创新，严禁抄袭。

截止时间：2017-11-15

插值方法

- 最近邻插值
- 双线性插值（bilinear）

$$f(i+u, j+v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(i,j) & f(i,j+1) \\ f(i+1,j) & f(i+1,j+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

- 双三次插值（bicubic）

$$f(i+u, j+v) = ABC^T$$

$$A = \begin{bmatrix} S(u+1) & S(u) & S(u-1) & S(u-2) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} S(v+1) & S(v) & S(v-1) & S(v-2) \end{bmatrix}$$

$$B = f(i-1:i+2, j-1:j+2)$$

其中$S(x)$为三次插值核函数，可由如下式子近似：

$$S(x) = \begin{cases} 1-2|x|^2+|x|^3 & |x| \le 1 \\ 4-8|x|+5|x|^2-|x|^3 & 1<|x|<2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

B样条曲线

给定$m+n+1$个平面或空间顶点 P_i (i=0，1，…，$m+n$)，称n次参数曲线段：

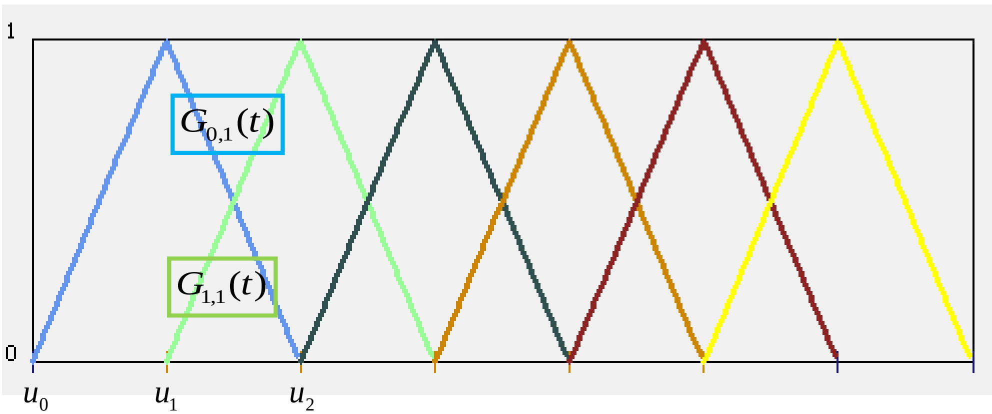
$$P_{k,n}(t)=\sum_{i=0}^{n}P_{i+k}G_{i,n}(t),\qquad t\in[0,1]$$

为第k段n次B样条曲线段 (k=0，1，…，m)，这些曲线段的全体称为n次B样条曲线，其顶点P_i(i=0，1，…，$n+m$)所组成的多边形称为B样条曲线的特征多边形。

其中，$G_{i,n}(t)$ 称为基函数。

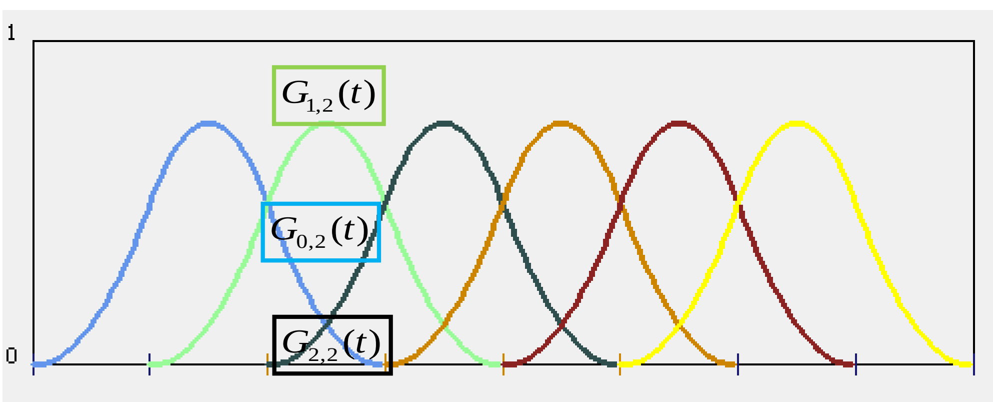
B样条基函数

$G_{i,p}(t)$仅在区间 $[u_i,u_{i+p+1})$上非零。



一次B 样条曲线的基函数

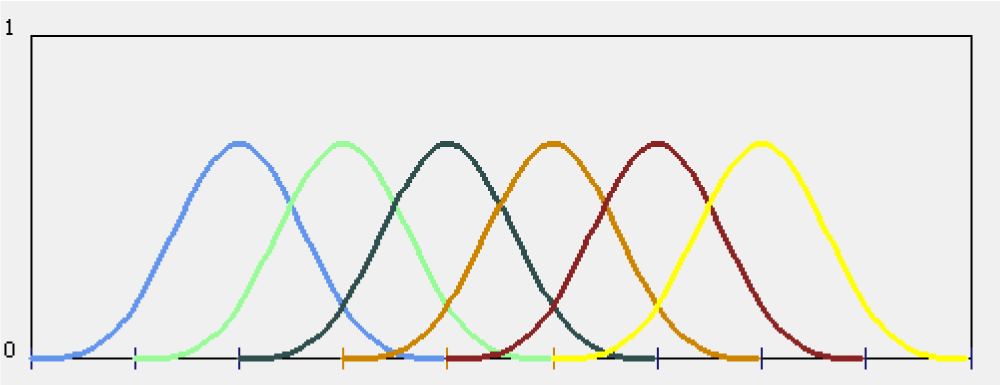
$$\begin{cases} G_{0,1}(t)=1-t \\ G_{1,1}(t)=t \end{cases}, t\in[0,1]$$



二次B 样条曲线的基函数

$$\begin{cases} G_{0,2}(t)=\frac{1}{2}(t-1)^2 \\ G_{1,2}(t)=\frac{1}{2}(-2t^2+2t+1) \quad ,t\in[0,1] \\ G_{2,2}(t)=\frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

B样条基函数



三次**B** 样条曲线的基函数

$$\begin{cases} G_{0,3}(t) = \frac{1}{6}(-t^3+3t^2-3t+1), \\ G_{1,3}(t) = \frac{1}{6}(3t^3-6t^2+4), \\ G_{2,3}(t) = \frac{1}{6}(-3t^3+3t^2+3t+1), \\ G_{3,3}(t) = \frac{1}{6}t^3, \end{cases} \quad t \in [0,\ 1]$$

移动控制点

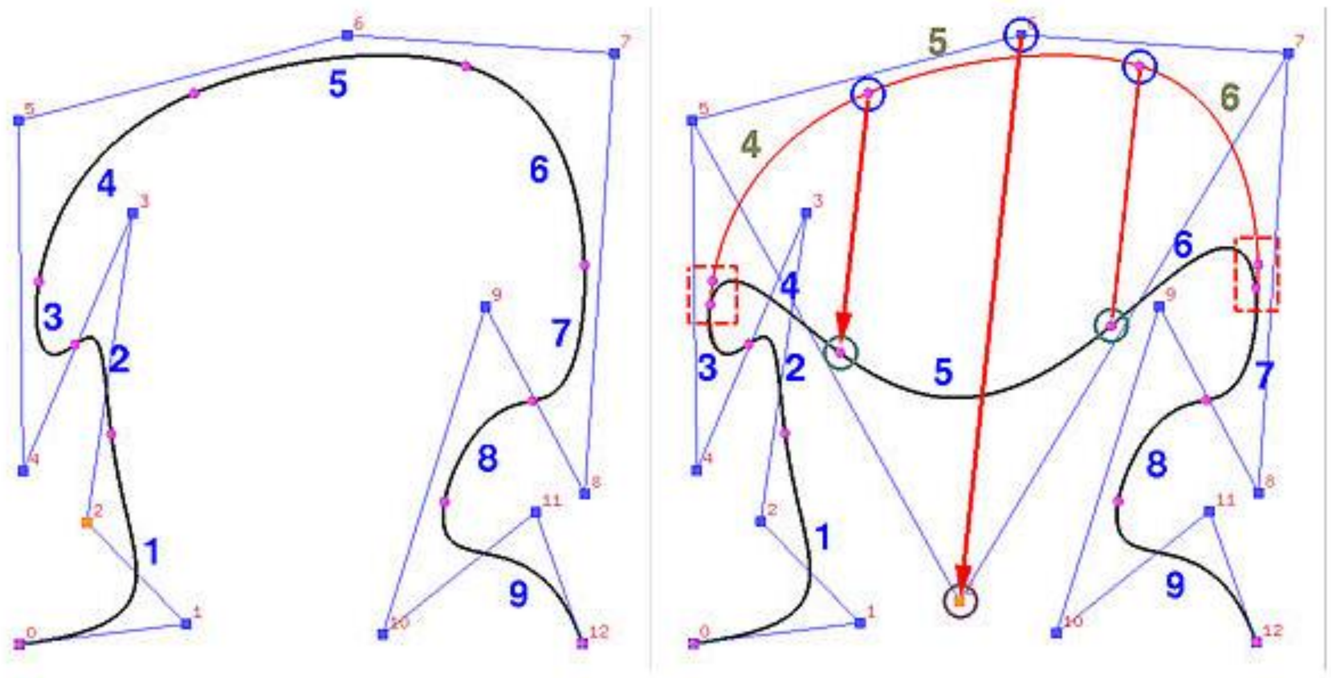
假设$C(t)$是一段n次B样条曲线 $C(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i G_{i,n}(t), \quad t\in[0,1]$

设控制点 $\boldsymbol{P}_i$ 被移动到新的位置$\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{v}$，则新曲线为

$$\begin{aligned}
D(t) &= \sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{P}_i G_{i,n}(t) + \left(\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{v}\right) G_{k,n}\left(t\right) + \sum_{i=k+1}^{n} \boldsymbol{P}_i G_{i,n}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{P}_i G_{i,n}(t) + \boldsymbol{v} G_{k,n}\left(t\right) \\
&= C\left(t\right) + \boldsymbol{v} G_{k,n}\left(t\right)
\end{aligned}$$

可见，只在$G_{k,n}(t)$不为零的区间内曲线改变了，其他部分曲线没有改变。

示意图



求解——以三次B样条为例

假设控制点 $\boldsymbol{P}_i$ 移动了$\Delta\boldsymbol{P}_i$ ，区间长度 $u_{j+1}-u_j=N_x$ ，则点x处的位移为

$$v(x)=\sum_{l=0}^{3}G_{l,3}(u)\Delta P_{i+l}$$

其中 $u=\frac{x}{N_x}-\left\lfloor\frac{x}{N_x}\right\rfloor$, $i=\left\lfloor\frac{x}{N_x}\right\rfloor-1$

类似的，对于二维图像可以得到每个位置处的位移（坐标映射）

$$v_x(x,y)=\sum_{l=0}^{3}\sum_{m=0}^{3}G_{l,3}(u)G_{m,3}(v)\Delta P_{y(i+l,j+m)}$$

$$v_y(x,y)=\sum_{l=0}^{3}\sum_{m=0}^{3}G_{l,3}(u)G_{m,3}(v)\Delta P_{x(i+l,j+m)}$$

Sharp, G. C., et al. "Evaluation of plastimatch B-Spline registration on the EMPIRE10 data set." *Medical Image Analysis for the Clinic: A Grand Challenge* (2010): 99-108.