Problem Daily

Zeroideal (zeroideal@xjtu.edu.cn)

2025/8/12

目录

1 2025

1.1 2025-8

0811. $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. 证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{2}{n} (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i)$$

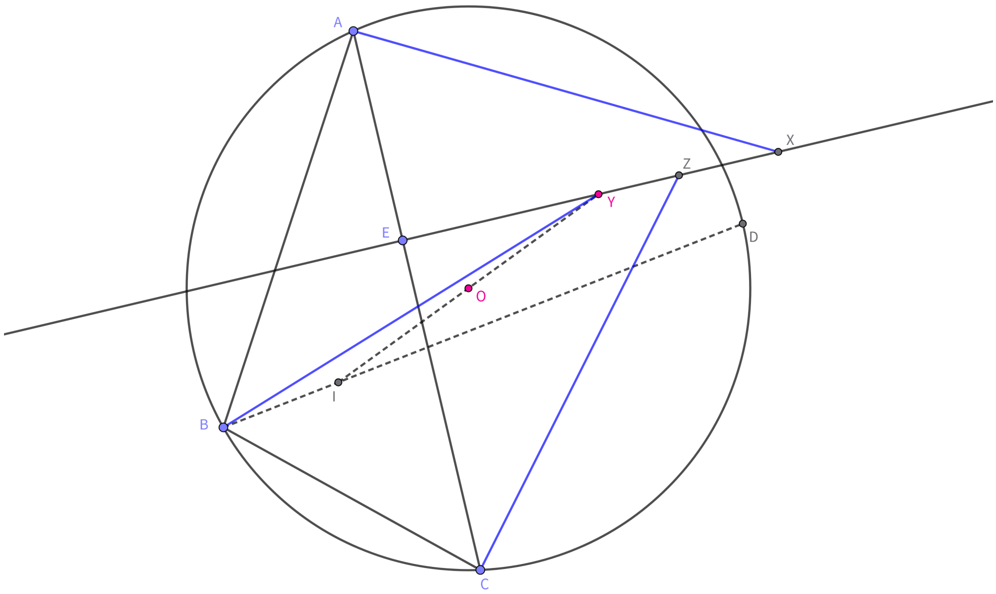
0812. $n \geqslant 2$，记 $M_n = (m_{ij})$ 为一个 n 阶方阵，满足

$$m_{ij} = \begin{cases} -1, & j \mid i+1 \\ 0, & j \nmid i+1 \end{cases}$$

记 $D_n = \det M_n$，求 D_n.

0813. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，$AB > BC$，E 是 AC 上一点使得 $AE < EC$，过 E 作 AC 的垂线 l，分别交 $\triangle AED, \triangle BED, \triangle CED$ 的外接圆于另一点 X, Y, Z，且 E, Y, Z, X 依次排列. 若 $AX = BY = CZ$，求证：BD 与 OY 的交点是 $\triangle ABC$ 的内心.

（CGMO 2025-D1P2）



0814. 对任意正整数 N，设 $\sigma(N)$ 表示 N 的所有正因数之和. 求所有正整数 $m \geqslant n \geqslant 2$，使得

$$\frac{\sigma(m) - 1}{m - 1} = \frac{\sigma(n) - 1}{n - 1} = \frac{\sigma(mn) - 1}{mn - 1}$$

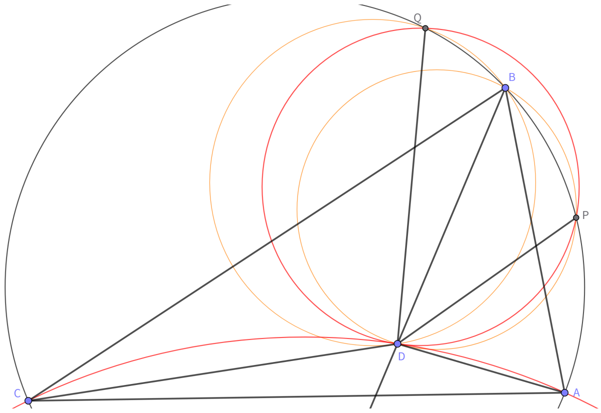
0815. 求所有非常数复系数多项式 $P(z)$，使得 $P(z)$ 与 $P(z) - 1$ 的所有复根的模均为 1.

0816. 给定正整数 k, m, n，满足 $mn = k^2 + k + 3$. 证明：$4m = x^2 + 11y^2$ 和 $4n = x^2 + 11y^2$ 中至少一个方程有奇数解.

（CMO 2006-P6）

0817. 点 D 在 $\triangle ABC$ 内，且在 $\angle ABC$ 的角平分线上. 设 $\odot BDP$ 和 $\odot BDQ$ 是与 AD 和 CD 相切的圆，且 $P, Q \in \odot ABC$. 证明: $\odot PQD$ 和 $\odot ACD$ 相切.

（Sharygin 2025 I-P14）



0818. 设 $\mathbb{N}^2$ 表示二元有序正整数对. 若 $\mathbb{N}^2$ 的子集 S 满足：对任意 $(x,y) \in S$，有 $\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \colon a \leqslant x, b \leqslant y\} \subseteq S$. 则称 S 是稳定的.

求证：对任意稳定的集合 S，其所有稳定的子集[i)]中，元素个数为偶数的集合至少占一半.

0819. 设 $n \geqslant 3$ 是正整数，$\alpha_i \in \left[0, \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$，$\sum\limits_{i=1}^{n} \cos 2\alpha_i = n-2$. 求证：

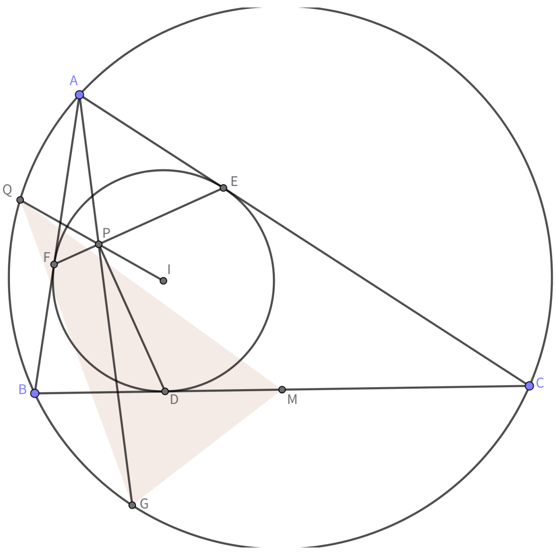
$$\sum_{i=1}^{n} \cot \alpha_i \geqslant (n-1) \sum_{i=1}^{n} \tan \alpha_i$$

0820.

$$S = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_{100}=2025} \frac{1}{2^{k_1}(2^{k_1}+2^{k_2})\cdots(2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_{100}})}.$$

试求 $|\upsilon_2(S)|$.

0821. 如图，$\triangle ABC$ 的内心为 I. 内切圆与三边分别切于点 D, E, F. 过点 D 作 $DP \perp EF$ 于 P. 射线 AP, IP 分别与 $\triangle ABC$ 外接圆交于 G, Q. 点 M 为线段 BC 中点. 证明：D 为 $\triangle GQM$ 内心.



i) 包括空集和它自己.

0822. $a, b, c \in \mathbb{R}$，且 $a^2+b^2+c^2=9$. 试求 $2(a+b+c)-abc$ 的最大值和最小值.

0823. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为平面向量，满足 $|\alpha_i|=1$ $(i=1,\cdots,n)$. 证明：

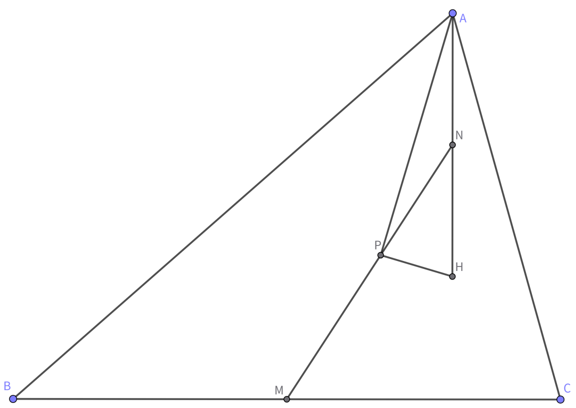
$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ \langle\alpha_i,\alpha_j\rangle<\frac{\pi}{2}}}^{n} \alpha_i \cdot \alpha_j \geqslant \frac{n^2}{4}.$$

（Xuda Ye）

0824. 求所有的正整数对 (a, b)，使得 a 整除 b^4+1，b 整除 a^4+1，且 $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor$.

0825. 设 H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心，M、N 分别为 BC、AH 的中点，$\angle BAC$ 的平分线与 MN 交于点 P. 求证：$PH \perp PA$.

（Estonia TST-2015）



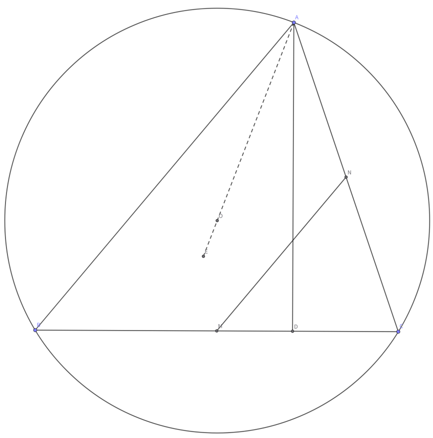
0826. 设整数 $n \geqslant 2$，$a_1, \cdots, a_n$ 为实数. 证明：可以选取 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$，使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i\right)^2 \leqslant (n+1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

0827. 设 $n \in \{-1, -2, -3\}$，$p>3$ 为素数. 若 n 为 p 的二次剩余，证明：存在 $a, b \in \mathbb{Z}$，使得 $a^2-nb^2=p$.

0828. 设 AD 是锐角 $\triangle ABC$ 的高，M、N 分别是边 BC、CA 的中点，E 是点 D 关于直线 MN 的对称点. 求证：$\triangle ABC$ 的外心在直线 AB 上.

（WenYuan 108）



0829. 设 n 为正整数，S 是 $\{-n,-n+1,\cdots,n-1,n\}$ 的一个子集，且 S 中不存在元素 a,b,c（不必不同）使得 $a+b+c=0$. 求 $|S|$ 的最大值.

0830. 求所有的正整数 n，使得对 n 的任意正因数 d，或者 $d+1 \mid n$，或者 $d+1$ 为质数.

（ISL 2024-N1）

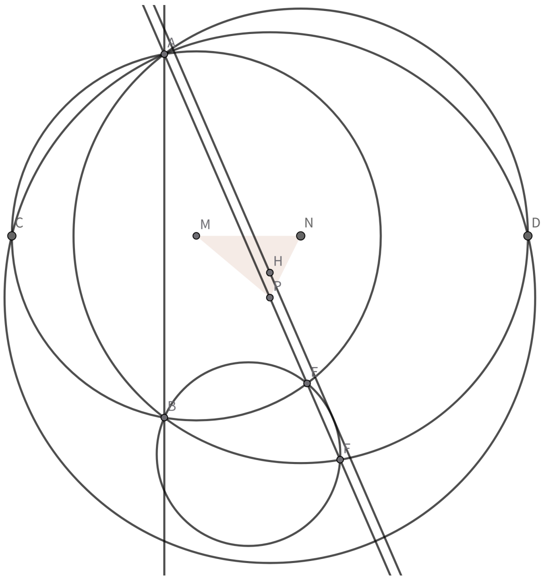
0831. 对所有有限数集 U，用 $|U|,\sigma(U),\pi(U)$ 分别表示 U 中元素个数、元素之和、元素之积. 约定 $\pi(\emptyset)=1,|\emptyset|=\sigma(\emptyset)=0$. 设 S 是由有限多个正整数构成的集合，证明：对任意整数 $m \geqslant \sigma(S)$，有

$$\sum_{U\subseteq S}(-1)^{|U|}\binom{|S|}{m-\sigma(U)}=\pi(S)$$

1.2 2025-9

0901. 设 $\odot M$ 与 $\odot N$ 交于两点 A, B，且 $\odot M$ 的半径更小. 设直线 MN 与 $\odot M, \odot N$ 分别交于点 C, D 且点 C, M, N, D 在直线上顺次排列. 记 P 为 $\triangle ACD$ 的外心，直线 AP 交 $\odot M$ 与点 $E \neq A$，交 $\odot N$ 于点 $F \neq A$. 设 H 为 $\triangle PMN$ 垂心，求证：过 H 且平行于 AP 的直线与 $\triangle BEF$ 的外接圆相切.

（IMO 2025-P2）



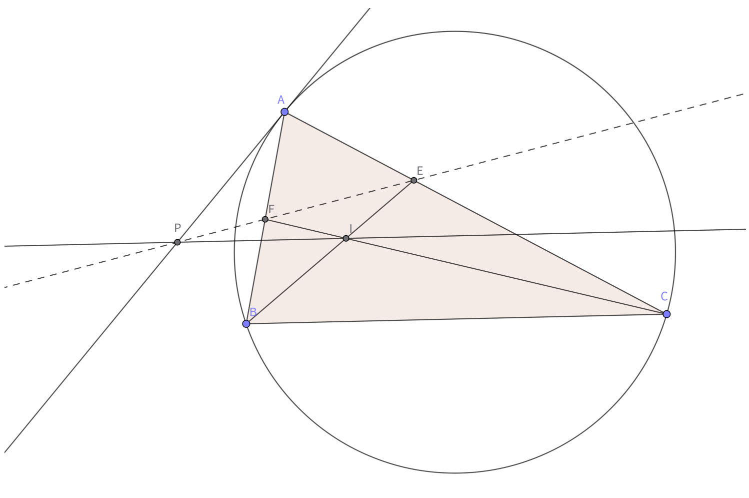
0902. 给定正整数 n，设 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ 为实数，证明：

$$[n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)]^2 \leqslant [n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2] \cdot [n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2]$$

0903. $n \geqslant 5$ 为正整数. n 个正整数 $a_1, \cdots, a_n$ 满足：对 $1 \leqslant i \leqslant n$，都有 $a_i \leqslant 2n$. 证明：

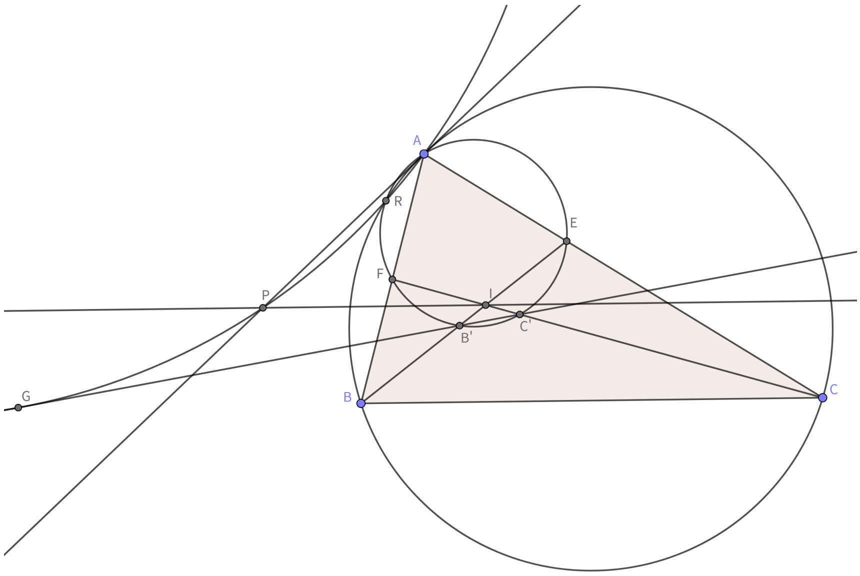
$$\min_{1 \leqslant i < j \leqslant n} [a_i, a_j] \leqslant 6(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)$$

0904. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I. 直线 BI, CI 分别与 AC, AB 交于点 E, F，$\odot(ABC)$ 在 A 处的切线与过点 I 平行于 BC 的直线交于点 P. 证明：P, E, F 共线.



0905. 构图同 **0904**，若 $\odot(AEF)$ 与 $\odot(ABC)$ 的第二个交点为 R，且 BI, CI 分别与 $\odot(AEF)$ 交于异于点 E, F 的点 B', C'，证明：$B'C'$ 与 $\odot(APR)$ 相切.

（Turkey Revenge 2025-P1）



0906. 给定正整数 $n \geqslant 2, x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n, y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$，且

$$x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n = 0$$
$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 1$$

证明：$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_{n+1-i} \geqslant \frac{2}{\sqrt{n-1}}$.

0907. 用 m 种颜色的珠子串成 n 颗珠子的项链，请问一共有多少种不同的项链？

0908. $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$，利用 $\mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ 的圈积和直积构造 S_n 的一个 Sylow-p 子群.

（L. A. Kaluznin）