

# Problem Daily

ZEROIDEAL (zeroideal@xjtu.edu.cn)

2025/8/12

## 目录

<b>1</b>	<b>2025</b>	<b>1</b>
1.1	2025-8 . . . . .	1

# 1 2025

## 1.1 2025-8

0811.  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ . 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i + \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{2}{n} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right)$$

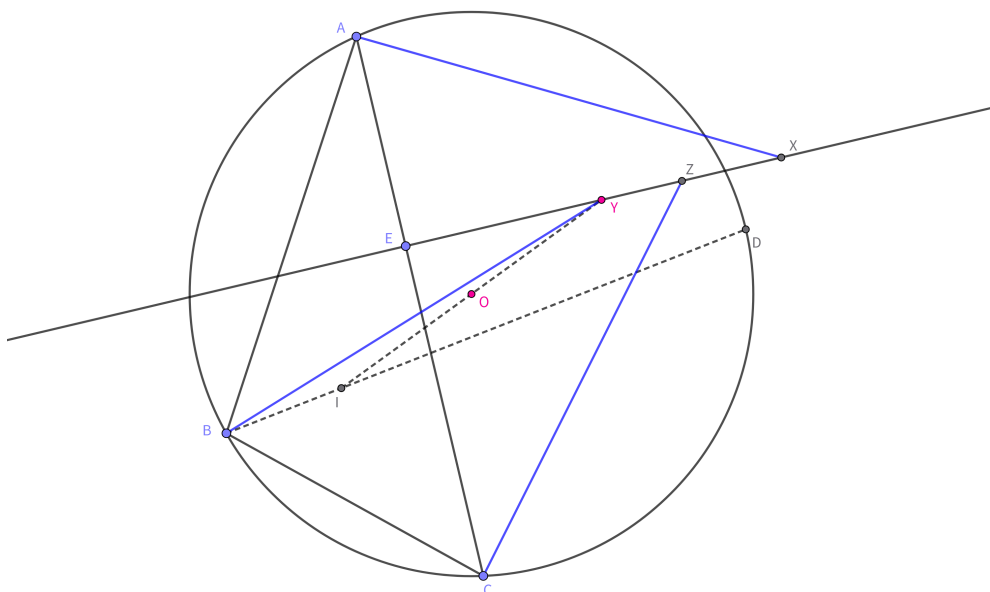
0812.  $n \geq 2$ , 记  $M_n = (m_{ij})$  为一个  $n$  阶方阵, 满足

$$m_{ij} = \begin{cases} -1, & j \mid i+1 \\ 0, & j \nmid i+1 \end{cases}$$

记  $D_n = \det M_n$ , 求  $D_n$ .

0813. 如图, 四边形  $ABCD$  内接于圆  $O$ ,  $AB > BC$ ,  $E$  是  $AC$  上一点使得  $AE < EC$ , 过  $E$  作  $AC$  的垂线  $l$ , 分别交  $\triangle AED, \triangle BED, \triangle CED$  的外接圆于另一点  $X, Y, Z$ , 且  $E, Y, Z, X$  依次排列. 若  $AX = BY = CZ$ , 求证:  $BD$  与  $OY$  的交点是  $\triangle ABC$  的内心.

(CGMO 2025-D1P2)



0814. 对任意正整数  $N$ , 设  $\sigma(N)$  表示  $N$  的所有正因数之和. 求所有正整数  $m \geq n \geq 2$ , 使得

$$\frac{\sigma(m) - 1}{m - 1} = \frac{\sigma(n) - 1}{n - 1} = \frac{\sigma(mn) - 1}{mn - 1}$$

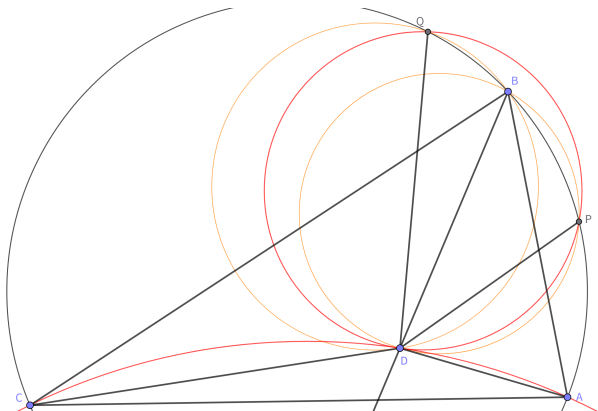
0815. 求所有非常数复系数多项式  $P(z)$ , 使得  $P(z)$  与  $P(z) - 1$  的所有复根的模均为 1.

0816. 给定正整数  $k, m, n$ , 满足  $mn = k^2 + k + 3$ . 证明:  $4m = x^2 + 11y^2$  和  $4n = x^2 + 11y^2$  中至少一个方程有奇数解.

(CMO 2006-P6)

0817. 点  $D$  在  $\triangle ABC$  内, 且在  $\angle ABC$  的角平分线上. 设  $\odot BDP$  和  $\odot BDQ$  是与  $AD$  和  $CD$  相切的圆, 且  $P, Q \in \odot ABC$ . 证明:  $\odot PQD$  和  $\odot ACD$  相切.

(Sharygin 2025 I-P14)



0818. 设  $\mathbb{N}^2$  表示二元有序正整数对. 若  $\mathbb{N}^2$  的子集  $S$  满足: 对任意  $(x, y) \in S$ , 有  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2: a \leq x, b \leq y\} \subseteq S$ . 则称  $S$  是稳定的.

求证: 对任意稳定的集合  $S$ , 其所有稳定的子集<sup>i)</sup>中, 元素个数为偶数的集合至少占一半.

0819. 设  $n \geq 3$  是正整数,  $\alpha_i \in [0, \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}]$ ,  $\sum_{i=1}^n \cos 2\alpha_i = n - 2$ . 求证:

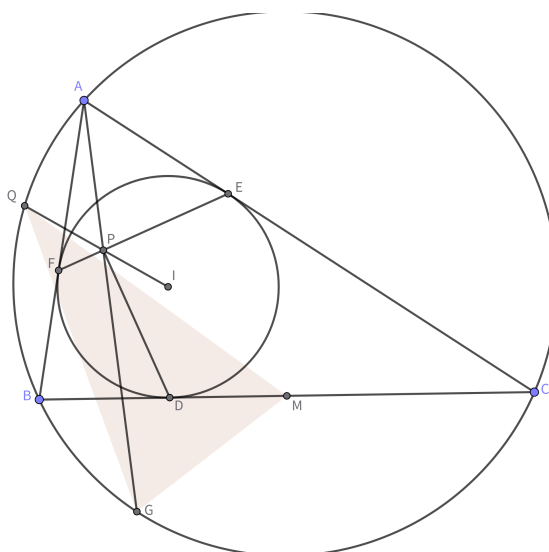
$$\sum_{i=1}^n \cot \alpha_i \geq (n-1) \sum_{i=1}^n \tan \alpha_i$$

0820.

$$S = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_{100}=2025} \frac{1}{2^{k_1}(2^{k_1}+2^{k_2})\dots(2^{k_1}+2^{k_2}+\dots+2^{k_{100}})}.$$

试求  $|v_2(S)|$ .

0821. 如图,  $\triangle ABC$  的内心为  $I$ . 内切圆与三边分别切于点  $D, E, F$ . 过点  $D$  作  $DP \perp EF$  于  $P$ . 射线  $AP, IP$  分别与  $\triangle ABC$  外接圆交于  $G, Q$ . 点  $M$  为线段  $BC$  中点. 证明:  $D$  为  $\triangle GQM$  内心.



<sup>i)</sup> 包括空集和它自己.