

Problem Daily

ZEROIDEAL (zeroideal@xjtu.edu.cn)

2025/8/12

目录

1 2025	1
1.1 2025-8	1
1.2 2025-9	5

1 2025

1.1 2025-8

0811. $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, ($i = 1, 2, \dots, n$), $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i + \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)$$

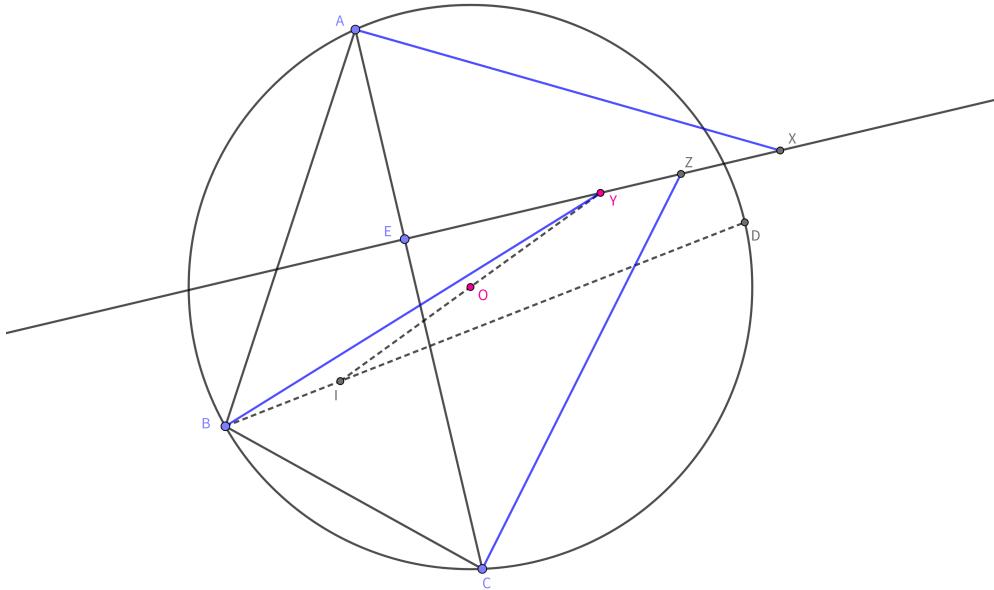
0812. $n \geq 2$, 记 $M_n = (m_{ij})$ 为一个 n 阶方阵, 满足

$$m_{ij} = \begin{cases} -1, & j \mid i+1 \\ 0, & j \nmid i+1 \end{cases}$$

记 $D_n = \det M_n$, 求 D_n .

0813. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O , $AB > BC$, E 是 AC 上一点使得 $AE < EC$, 过 E 作 AC 的垂线 l , 分别交 $\triangle AED, \triangle BED, \triangle CED$ 的外接圆于另一点 X, Y, Z , 且 E, Y, Z, X 依次排列. 若 $AX = BY = CZ$, 求证: BD 与 OY 的交点是 $\triangle ABC$ 的内心.

(CGMO 2025-D1P2)



0814. 对任意正整数 N , 设 $\sigma(N)$ 表示 N 的所有正因数之和. 求所有正整数 $m \geq n \geq 2$, 使得

$$\frac{\sigma(m)-1}{m-1} = \frac{\sigma(n)-1}{n-1} = \frac{\sigma(mn)-1}{mn-1}$$

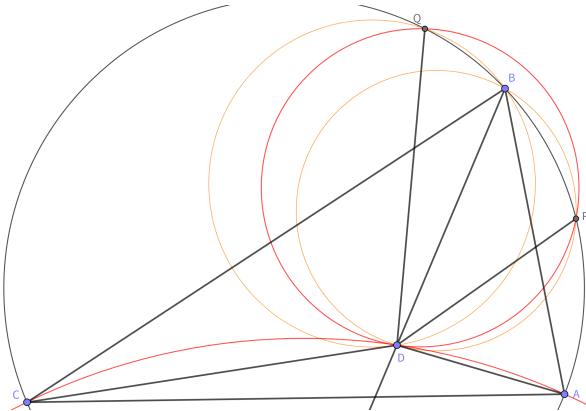
0815. 求所有非常数复系数多项式 $P(z)$, 使得 $P(z)$ 与 $P(z)-1$ 的所有复根的模均为 1.

0816. 给定正整数 k, m, n , 满足 $mn = k^2 + k + 3$. 证明: $4m = x^2 + 11y^2$ 和 $4n = x^2 + 11y^2$ 中至少一个方程有奇数解.

(CMO 2006-P6)

0817. 点 D 在 $\triangle ABC$ 内，且在 $\angle ABC$ 的角平分线上。设 $\odot BDP$ 和 $\odot BDQ$ 是与 AD 和 CD 相切的圆，且 $P, Q \in \odot ABC$ 。证明： $\odot PQD$ 和 $\odot ACD$ 相切。

(Sharygin 2025 I-P14)



0818. 设 \mathbb{N}^2 表示二元有序正整数对。若 \mathbb{N}^2 的子集 S 满足：对任意 $(x, y) \in S$ ，有 $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \leq x, b \leq y\} \subseteq S$ 。则称 S 是稳定的。

求证：对任意稳定的集合 S ，其所有稳定的子集ⁱ⁾中，元素个数为偶数的集合至少占一半。

0819. 设 $n \geq 3$ 是正整数， $\alpha_i \in \left[0, \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$ ， $\sum_{i=1}^n \cos 2\alpha_i = n - 2$ 。求证：

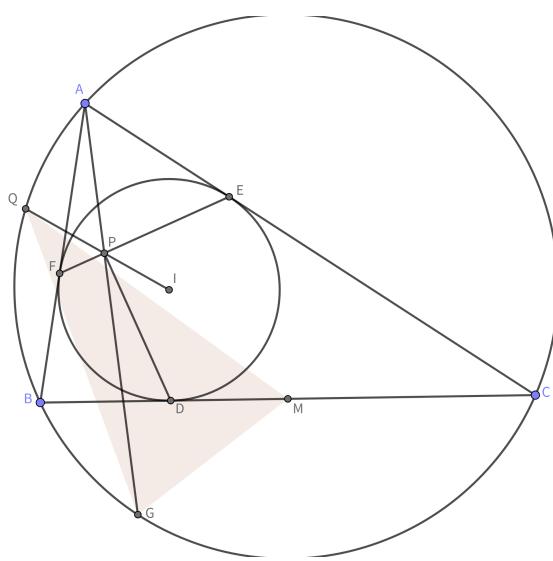
$$\sum_{i=1}^n \cot \alpha_i \geq (n-1) \sum_{i=1}^n \tan \alpha_i$$

- 0820.

$$S = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_{100}=2025} \frac{1}{2^{k_1}(2^{k_1}+2^{k_2})\cdots(2^{k_1}+2^{k_2}+\dots+2^{k_{100}})}.$$

试求 $|v_2(S)|$ 。

0821. 如图， $\triangle ABC$ 的内心为 I 。内切圆与三边分别切于点 D, E, F 。过点 D 作 $DP \perp EF$ 于 P 。射线 AP, IP 分别与 $\triangle ABC$ 外接圆交于 G, Q 。点 M 为线段 BC 中点。证明： D 为 $\triangle GQM$ 内心。



ⁱ⁾包括空集和它自己。

0822. $a, b, c \in \mathbb{R}$, 且 $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. 试求 $2(a + b + c) - abc$ 的最大值和最小值.

0823. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 为平面向量, 满足 $|\alpha_i| = 1$ ($i = 1, \dots, n$). 证明:

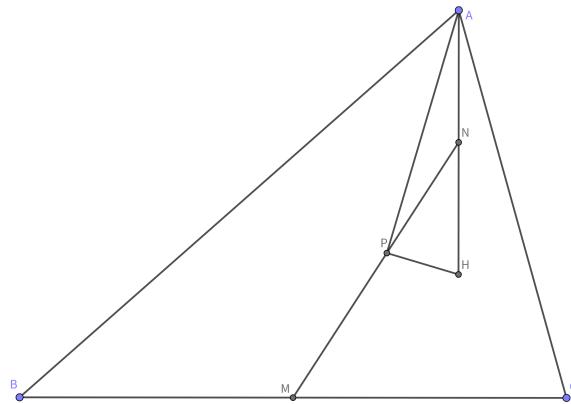
$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle < \frac{\pi}{2}}}^n \alpha_i \cdot \alpha_j \geq \frac{n^2}{4}.$$

(Xuda Ye)

0824. 求所有的正整数对 (a, b) , 使得 a 整除 $b^4 + 1$, b 整除 $a^4 + 1$, 且 $[a] = [b]$.

0825. 设 H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心, M 、 N 分别为 BC 、 AH 的中点, $\angle BAC$ 的平分线与 MN 交于点 P . 求证: $PH \perp PA$.

(Estonia TST-2015)



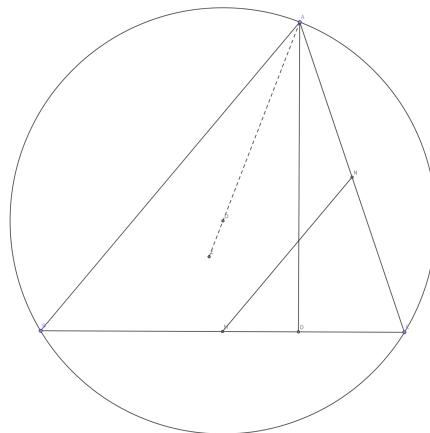
0826. 设整数 $n \geq 2$, a_1, \dots, a_n 为实数. 证明: 可以选取 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, 使得

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i \right)^2 \leq (n+1) \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

0827. 设 $n \in \{-1, -2, -3\}$, $p > 3$ 为素数. 若 n 为 p 的二次剩余, 证明: 存在 $a, b \in \mathbb{Z}$, 使得 $a^2 - nb^2 = p$.

0828. 设 AD 是锐角 $\triangle ABC$ 的高, M 、 N 分别是边 BC 、 CA 的中点, E 是点 D 关于直线 MN 的对称点. 求证: $\triangle ABC$ 的外心在直线 AB 上.

(WenYuan 108)



0829. 设 n 为正整数, S 是 $\{-n, -n+1, \dots, n-1, n\}$ 的一个子集, 且 S 中不存在元素 a, b, c (不必不同) 使得 $a+b+c=0$. 求 $|S|$ 的最大值.

0830. 求所有的正整数 n , 使得对 n 的任意正因数 d , 或者 $d+1 \mid n$, 或者 $d+1$ 为质数.

(ISL 2024-N1)

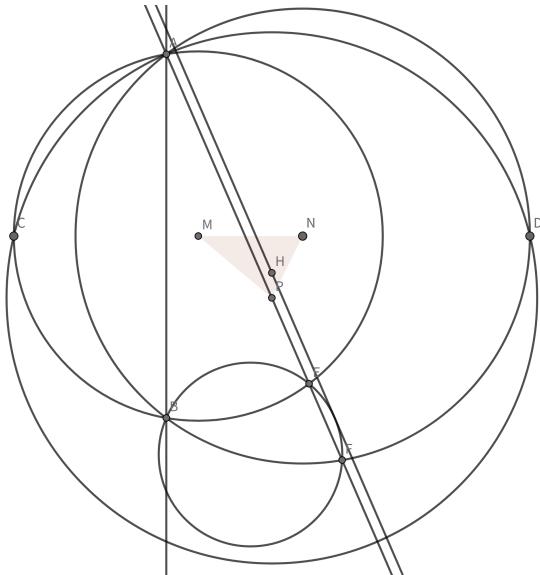
0831. 对所有有限数集 U , 用 $|U|, \sigma(U), \pi(U)$ 分别表示 U 中元素个数、元素之和、元素之积. 约定 $\pi(\emptyset) = 1, |\emptyset| = \sigma(\emptyset) = 0$. 设 S 是由有限多个正整数构成的集合, 证明: 对任意整数 $m \geq \sigma(S)$, 有

$$\sum_{U \subseteq S} (-1)^{|U|} \binom{|S|}{m - \sigma(U)} = \pi(S)$$

1.2 2025-9

0901. 设 $\odot M$ 与 $\odot N$ 交于两点 A, B , 且 $\odot M$ 的半径更小. 设直线 MN 与 $\odot M, \odot N$ 分别交于点 C, D 且点 C, M, N, D 在直线上顺次排列. 记 P 为 $\triangle ACD$ 的外心, 直线 AP 交 $\odot M$ 与点 $E \neq A$, 交 $\odot N$ 于点 $F \neq A$. 设 H 为 $\triangle PMN$ 垂心, 求证: 过 H 且平行于 AP 的直线与 $\triangle BEF$ 的外接圆相切.

(IMO 2025-P2)



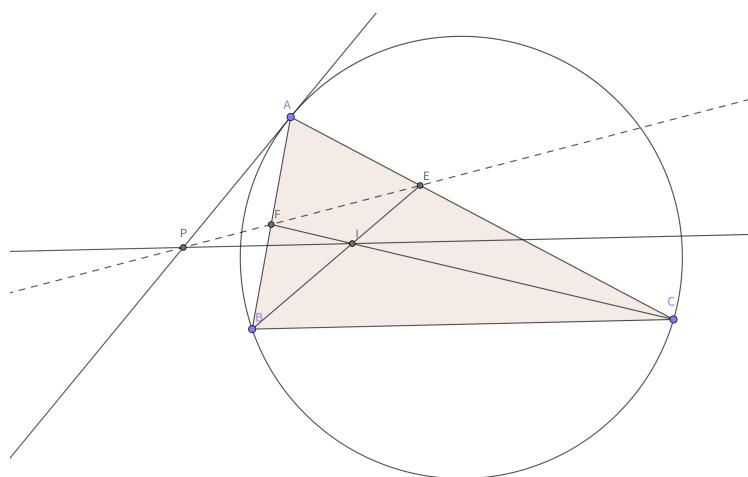
0902. 给定正整数 n , 设 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ 为实数, 证明:

$$[n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)]^2 \leq [n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2] \cdot [n \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n y_i)^2]$$

0903. $n \geq 5$ 为正整数. n 个正整数 a_1, \dots, a_n 满足: 对 $1 \leq i \leq n$, 都有 $a_i \leq 2n$. 证明:

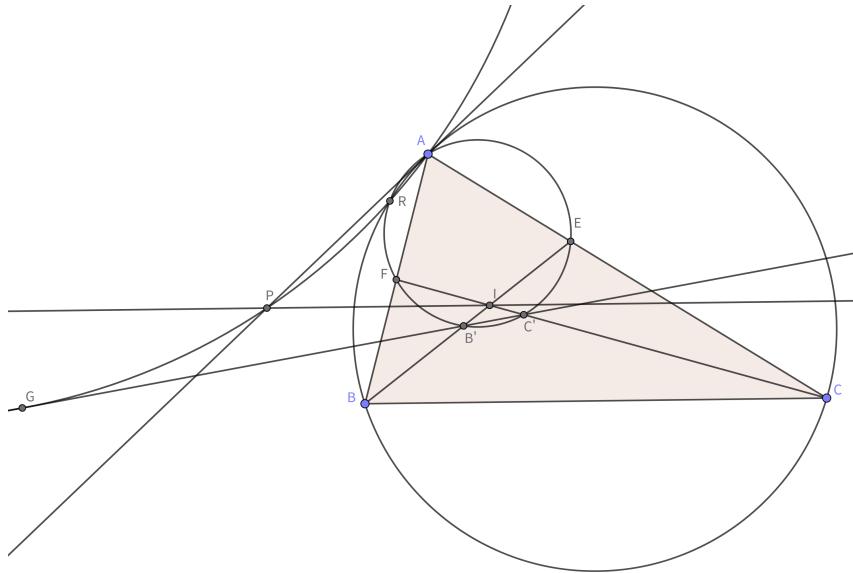
$$\min_{1 \leq i < j \leq n} [a_i, a_j] \leq 6(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)$$

0904. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I . 直线 BI, CI 分别与 AC, AB 交于点 E, F , $\odot(ABC)$ 在 A 处的切线与过点 I 平行于 BC 的直线交于点 P . 证明: P, E, F 共线.



- 0905.** 构图同 **0904**, 若 $\odot(AEF)$ 与 $\odot(ABC)$ 的第二个交点为 R , 且 BI, CI 分别与 $\odot(AEF)$ 交于异于点 E, F 的点 B', C' , 证明: $B'C'$ 与 $\odot(APR)$ 相切.

(Turkey Revenge 2025-P1)



- 0906.** 给定正整数 $n \geq 2, x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$, 且

$$\begin{aligned}x_1 + \dots + x_n &= y_1 + \dots + y_n = 0 \\x_1^2 + \dots + x_n^2 &= y_1^2 + \dots + y_n^2 = 1\end{aligned}$$

证明: $\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_{n+1-i} \geq \frac{2}{\sqrt{n-1}}$.

- 0907.** 用 m 种颜色的珠子串成 n 颗珠子的项链, 请问一共有多少种不同的项链?

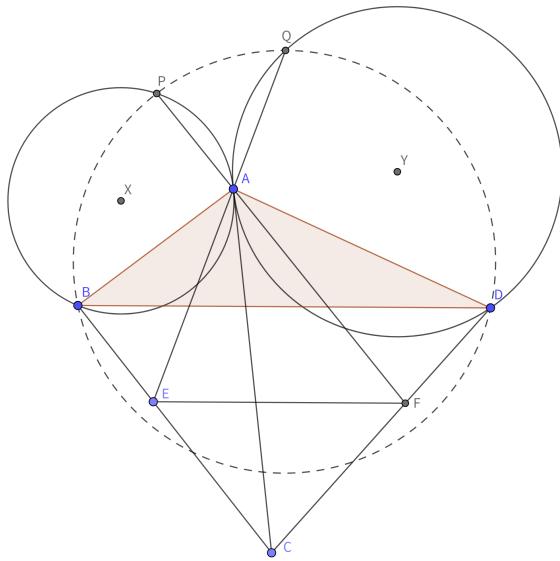
- 0908.** $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 利用 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的圈积和直积构造 S_n 的一个 Sylow- p 子群.

(L. A. Kaluznin)

- 0909.** 有 r 种颜色的珠子, 每种珠子有 λ_r 颗, 用这 $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = n$ 颗珠子串成项链, 请问一共有多少种不同的项链?

- 0910.** 如图, 在凸四边形 $ABCD$ 中, AC 平分 $\angle BAD$, 点 E, F 分别在边 BC, CD 上, 满足 $EF \parallel BD$. 分别延长 FA, EA 至点 P, Q , 使得过点 A, B, P 的圆 ω_1 以及过点 A, B, Q 的圆 ω_2 均与直线 AC 相切. 证明: B, P, Q, D 四点共圆.

(高联 2024)



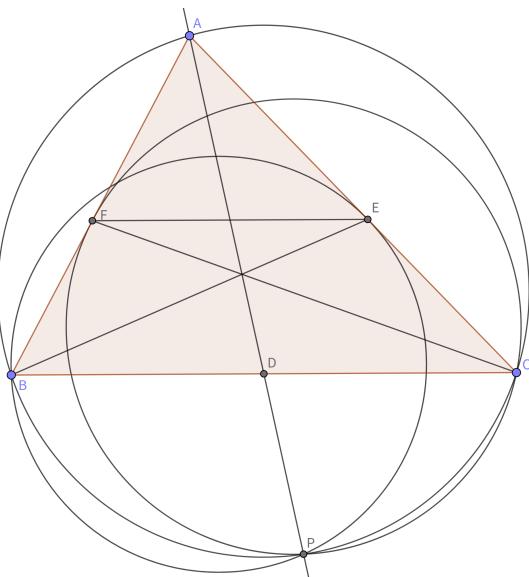
0911. $\{a_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2[a_n] - a_n + 1}$, 求 a_{2025} .

0912. 证明：在一个由 $2n$ 个人组成的集合 S 中存在两人，他们的公共朋友数目为偶数.

0913. 在平面直角坐标系中，双曲线 $\Gamma: x^2 - y^2 = 1$ 的右顶点为 A . 将圆心在 y 轴上，且与 Γ 的两支各恰有一个公共点的圆称为“好圆”. 若两个好圆外切于点 P ，圆心距为 d ，求 $\frac{d}{|PA|}$ 的所有可能值.

0915. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 为边 BC 的中点，延长 AD 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 P ，过点 B, P 作一个圆与边 AC 相切于点 E ，过点 C, P 作一个圆与边 AB 相切于点 F . 求证： AD, BE, CF 三线共点.

(高联 2025)



0917. 证明：任意 n 阶图 G ，若 $|E(G)| \geq n$ ，则必含圈.

0918. 计算完全二部图 $K_{n,n}$ 中长为 $2n$ 的圈的个数.

0921. 给定椭球 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{5} = 1$, 考虑椭球面上任意一点处的切平面与三个坐标平面围成的四面体, 求该四面体体积最小可能值 V .