

Problem Daily

ZEROIDEAL (zeroideal@xjtu.edu.cn)

2025/8/12

目录

1	2025	1
1.1	2025-8	1

1 2025

1.1 2025-8

0811. $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i + \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)$$

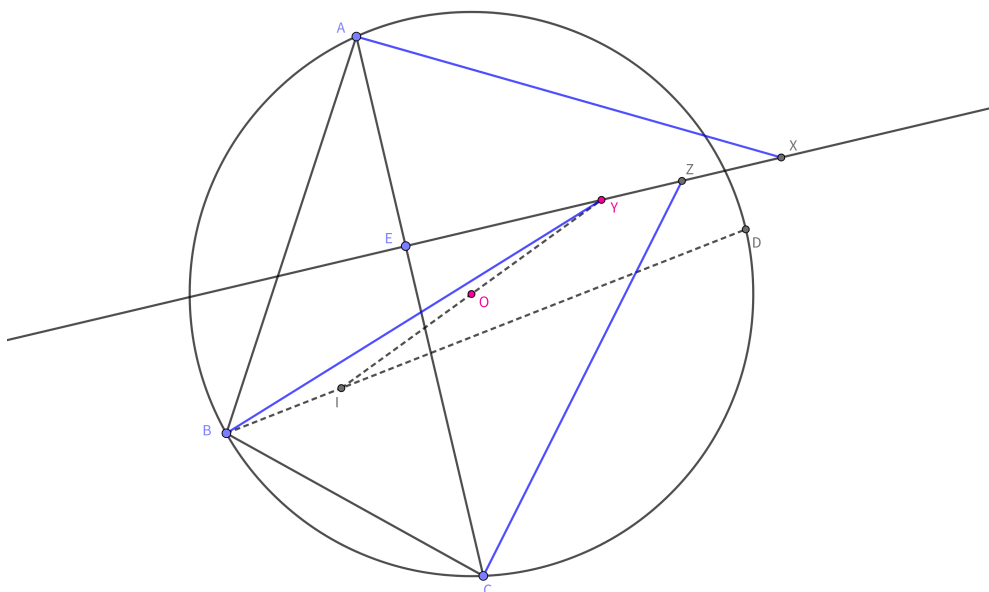
0812. $n \geq 2$, 记 $M_n = (m_{ij})$ 为一个 n 阶方阵, 满足

$$m_{ij} = \begin{cases} -1, & j \mid i+1 \\ 0, & j \nmid i+1 \end{cases}$$

记 $D_n = \det M_n$, 求 D_n .

0813. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O , $AB > BC$, E 是 AC 上一点使得 $AE < EC$, 过 E 作 AC 的垂线 l , 分别交 $\triangle AED, \triangle BED, \triangle CED$ 的外接圆于另一点 X, Y, Z , 且 E, Y, Z, X 依次排列. 若 $AX = BY = CZ$, 求证: BD 与 OY 的交点是 $\triangle ABC$ 的内心.

(CGMO 2025-D1P2)



0814. 对任意正整数 N , 设 $\sigma(N)$ 表示 N 的所有正因数之和. 求所有正整数 $m \geq n \geq 2$, 使得

$$\frac{\sigma(m) - 1}{m - 1} = \frac{\sigma(n) - 1}{n - 1} = \frac{\sigma(mn) - 1}{mn - 1}$$

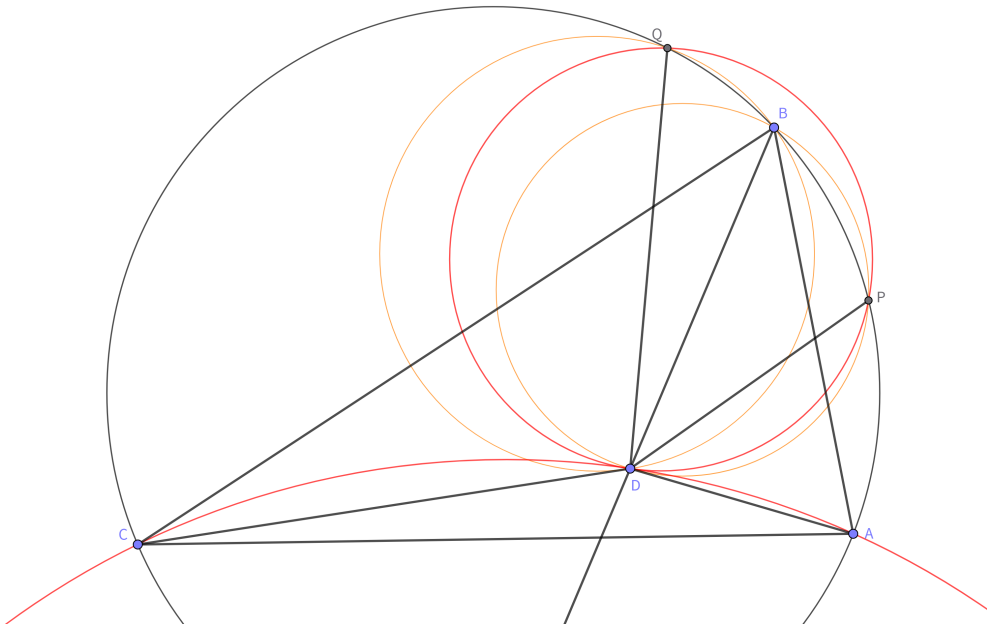
0815. 求所有非常数复系数多项式 $P(z)$, 使得 $P(z)$ 与 $P(z) - 1$ 的所有复根的模均为 1.

0816. 给定正整数 k, m, n , 满足 $mn = k^2 + k + 3$. 证明: $4m = x^2 + 11y^2$ 和 $4n = x^2 + 11y^2$ 中至少一个方程有奇数解.

(CMO 2006-P6)

0817. 点 D 在 $\triangle ABC$ 内, 且在 $\angle ABC$ 的角平分线上. 设 $\odot BDP$ 和 $\odot BDQ$ 是与 AD 和 CD 相切的圆, 且 $P, Q \in \odot ABC$. 证明: $\odot PQD$ 和 $\odot ACD$ 相切.

(Sharygin 2025 I-P14)



0818. 设 \mathbb{N}^2 表示二元有序正整数对. 若 \mathbb{N}^2 的子集 S 满足:

- 对任意 $(x, y) \in S$, 有 $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2: a \leq x, b \leq y\} \subseteq S$.

则称 S 是稳定的.

求证: 对任意稳定的集合 S , 其所有稳定的子集¹⁾中, 元素个数为偶数的集合至少占一半.

0819. 设 $n \geq 3$ 是正整数, $\alpha_i \in \left[0, \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$, $\sum_{i=1}^n \cos 2\alpha_i = n - 2$. 求证:

$$\sum_{i=1}^n \cot \alpha_i \geq (n-1) \sum_{i=1}^n \tan \alpha_i$$

¹⁾ 包括空集和它自己.