Problem Daily

ZEROIDEAL (zeroideal@xjtu.edu.cn)

2025/8/12

目录

1 2025

1.1 2025-8

0811. $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. 证明：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{2}{n} (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i)$$

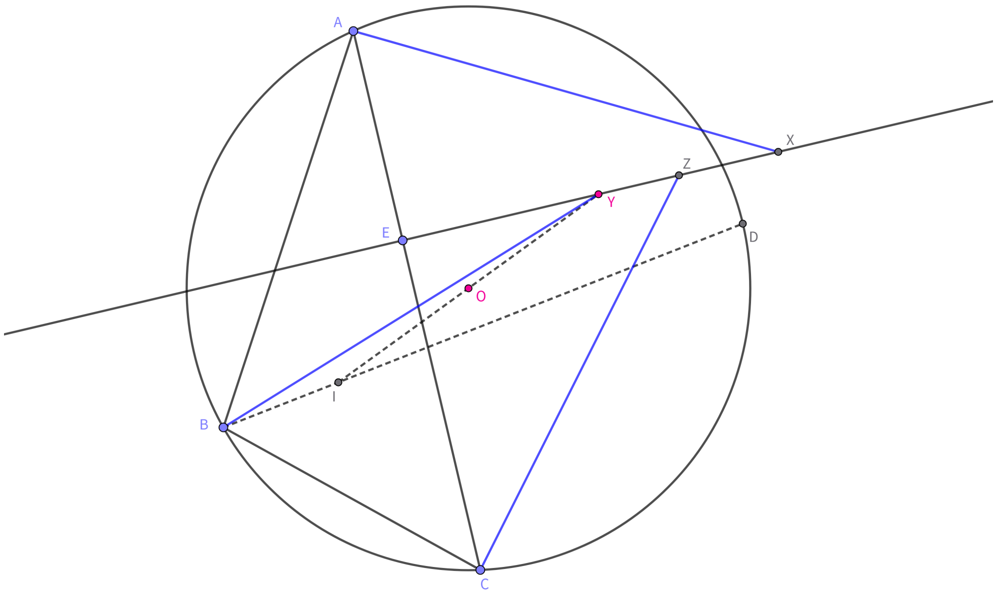
0812. $n \geqslant 2$，记 $M_n = (m_{ij})$ 为一个 n 阶方阵，满足

$$m_{ij} = \begin{cases} -1, & j \mid i+1 \\ 0, & j \nmid i+1 \end{cases}$$

记 $D_n = \det M_n$，求 D_n.

0813. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，$AB > BC$，E 是 AC 上一点使得 $AE < EC$，过 E 作 AC 的垂线 l，分别交 $\triangle AED, \triangle BED, \triangle CED$ 的外接圆于另一点 X, Y, Z，且 E, Y, Z, X 依次排列. 若 $AX = BY = CZ$，求证：BD 与 OY 的交点是 $\triangle ABC$ 的内心.

（CGMO 2025-D1P2）



0814. 对任意正整数 N，设 $\sigma(N)$ 表示 N 的所有正因数之和. 求所有正整数 $m \geqslant n \geqslant 2$，使得

$$\frac{\sigma(m) - 1}{m - 1} = \frac{\sigma(n) - 1}{n - 1} = \frac{\sigma(mn) - 1}{mn - 1}$$

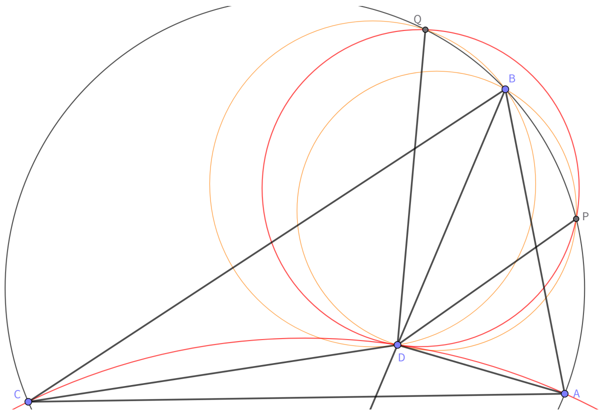
0815. 求所有非常数复系数多项式 $P(z)$，使得 $P(z)$ 与 $P(z) - 1$ 的所有复根的模均为 1.

0816. 给定正整数 k, m, n，满足 $mn = k^2 + k + 3$. 证明：$4m = x^2 + 11y^2$ 和 $4n = x^2 + 11y^2$ 中至少一个方程有奇数解.

（CMO 2006-P6）

0817. 点 D 在 $\triangle ABC$ 内，且在 $\angle ABC$ 的角平分线上. 设 $\odot BDP$ 和 $\odot BDQ$ 是与 AD 和 CD 相切的圆，且 $P, Q \in \odot ABC$. 证明: $\odot PQD$ 和 $\odot ACD$ 相切.

（Sharygin 2025 I-P14）



0818. 设 $\mathbb{N}^2$ 表示二元有序正整数对. 若 $\mathbb{N}^2$ 的子集 S 满足：对任意 $(x,y) \in S$，有 $\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \colon a \leqslant x, b \leqslant y\} \subseteq S$. 则称 S 是稳定的.

求证：对任意稳定的集合 S，其所有稳定的子集[i]中，元素个数为偶数的集合至少占一半.

0819. 设 $n \geqslant 3$ 是正整数，$\alpha_i \in \left[0, \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$，$\sum\limits_{i=1}^{n} \cos 2\alpha_i = n-2$. 求证：

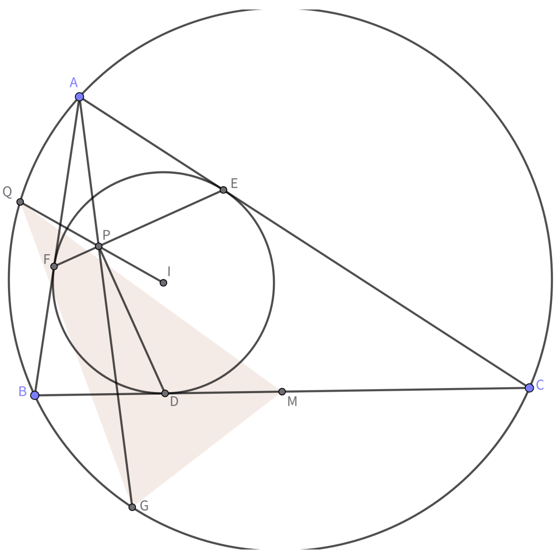
$$\sum_{i=1}^{n} \cot \alpha_i \geqslant (n-1) \sum_{i=1}^{n} \tan \alpha_i$$

0820.

$$S = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_{100}=2025} \frac{1}{2^{k_1}(2^{k_1}+2^{k_2})\cdots(2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_{100}})}.$$

试求 $|\upsilon_2(S)|$.

0821. 如图，$\triangle ABC$ 的内心为 I. 内切圆与三边分别切于点 D, E, F. 过点 D 作 $DP \perp EF$ 于 P. 射线 AP, IP 分别与 $\triangle ABC$ 外接圆交于 G, Q. 点 M 为线段 BC 中点. 证明：D 为 $\triangle GQM$ 内心.



[i] 包括空集和它自己.

0822. $a, b, c \in \mathbb{R}$，且 $a^2+b^2+c^2=9$. 试求 $2(a+b+c)-abc$ 的最大值和最小值.

0823. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为平面向量，满足 $|\alpha_i|=1$ $(i=1,\cdots,n)$. 证明：

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ \langle\alpha_i,\alpha_j\rangle<\frac{\pi}{2}}}^{n} \alpha_i \cdot \alpha_j \geqslant \frac{n^2}{4}.$$

（Xuda Ye）