CORRIGE

Exercice 1

a) Quelle instruction permet d'obtenir le résultat de 14^{21} ?

```
14 ** 21
```

Quel est le chiffre des centaine dans le résultat obtenu ? `0` ....

b) Comment obtenir le reste dans la division euclidienne de $3 \times 4^{12} + 1$ par 13 ?

```
(3*4**12 + 1) % 13
```

Quelle est la valeur obtenue ? `4` ....

c) Quelle instruction permet de déterminer si le nombre $2^{31} - 1$ est un multiple de 7 ?

```
(2**31 -1) % 7 == 0
```

$2^{31} - 1$ est-il multiple de 7 ? Non ....

Exercice 2

b) Quelle est le PGCD des nombre 7112 et 195 902 ? `14` ....

Ecrire le code utilisé :

```
a = 7112
b = 195902
while b != 0:
    a, b = b, a%b
print(a)
```

a) Quelle est l'écriture en binaire du nombre 108 ? `1101100` ....

Ecrire le code utilisé :

```
a = 108
r = ""
while a>0:
    r = str(a % 2) + r
    a = a//2
print(r)
```

Exercice 3

Ecrire une <u>fonction</u> `arithmetico_geom(a,q,r,N)` prenant en paramètre 4 nombres `a,q,r` et un entier `N` et qui retourne le terme de rang N u_N de la suite arithmético-géométrique définie par : $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q.u_n + r$.

Code de la fonction :

```
def arithmetico_geom(a,q,r,N):
    u = a
    for i in range(N):
        u = q * u + r
    return u
```

b) Quel est la valeur du terme u_{10} de rang 10 de la suite arithmetico-géométrique définie par :$u_0 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2.u_n - 1$? `1025` ....

Exercice 4

Déterminer le plus petit entier naturel N tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \geqslant 6$: `227` ....

Donner le code utilisé :

```
s = 0
k = 0
while s < 6:
    k += 1
    s = s + 1/k
print(k)
```

Exercice 5

Ecrire une <u>fonction</u> `syracuse()` qui prend en paramètre un entier n et qui <u>retourne la liste</u> des $n+1$ premiers termes $u_0, u_1, \ldots, u_n$ de la suite $(u_n)_n$ définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = 7 \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

a) Donner le code de la fonction :

```
def syracuse(n):
    L = [7]
    for i in range(n):
        u = L[-1]
        if u%2 == 0:
            L.append(u/2)
        else:
            L.append(3*u+1)
    return L
```

b) Quelle est la valeur de u_{100} ? `1` ....

Exercice 6
On cherche les solutions de l'équation diophantienne :

$$(x, y, z) \in \ N^3, \ 0 < x, y, z \leqslant 57, \ x^2 + y^2 = z^2 \quad (*)$$

a) A l'aide d'une compréhension de liste créer la liste `L` constituée de toutes les listes `[x,y,z]` pour lesquelles (x, y, z) est solution de l'équation $(*)$.

```
L = [[x,y,z] for x in range(1,58) for y in range(1,58) for z in
    range(1,101) if x**2+y**2==z**2]
```

b) En déduire la longueur des côtés du triangle rectangle qui parmi tous les triangles rectangles dont les côtés sont des entiers naturels inférieurs ou égaux à 57, a le plus grand périmètre. Réponse : `33,44,55`..

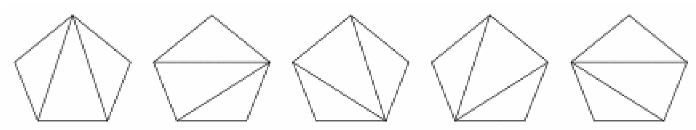
Code utilisé :

```
max =L[0]
for x in L:
    if sum(x)>sum(max):
        max =x
print(max)
```

Exercice 7
Pour un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ le n-ième nombre de Catalan C_n est le nombre de façon de décomposer un polygône régulier ayant $n + 2$ côtés en triangles en le découpant le long de diagonales. On peut aussi définir la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence :

$$C_0 = 1, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot C_{n-k}$$

Exemple : $C_3 = 5$ (voir la figure suivante).



a) Ecrire une fonction `catalan()` prenat en paramètre un entier n et qui retourne la liste des nombres de Catalan de C_0 à C_N.

Code de la fonction :

```
def catalan(N):
    C = [1]
    for n in range(N):
        s = 0
        for k in range(n+1):
            s += C[k] * C[n-k]
        C.append(s)
    return C
```

b) Quel est le résultat de l'appel de `catalan(12)` ?

`[1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012]` ....