Lycée Thiers | Informatique
Année 2014/15 | MPSI

Feuille d'Exercices n° 9

Calcul approché d'intégrales (Newton-Cotes).

Exercice 1.

(1) Tracer à l'aide de `pyplot` dans la portion du plan $\mathscr{P}$ constitué des points :

$$\{M(x,y) \in \mathscr{P} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2 \ ; \ -2 \leqslant y \leqslant 2\}$$

(le plan étant rapporté à un repère orthonormé) :
– l'axe des abscisse,
– l'axe des ordonnées, et
– le "cercle unitaire" centré en l'origine et de rayon 1.

$$\mathscr{S} = \left\{M(x,y) \in \mathscr{P} \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

Le cercle $\mathscr{S}$ délimite le disque $\mathscr{D}$.

(2) Appliquer la méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée de l'aire du disque $\mathscr{D}$.

(3) Même question en appliquant la méthode des rectangle.

(4) En déduire un calcul approché du nombre π.

Exercice 2.

(1) Appliquer la méthode des trapèzes pour calculer une valeur approchée de l'aire de l'ellipse d'équation

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

(2) Même question en appliquant la méthode des rectangles.

(3) Comparer avec la valeur exacte.
On rappelle que l'aire d'une ellipse est $\pi \times$ demi grand-axe $\times$ demi-petit axe.

Exercice 3. La **méthode de Simpson** calcule une valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a,b]$, en utilisant une subdivision régulière (a_k) de $[a,b]$ et en approximant le graphe de la fonction sur chaque segment $[a_k, a_{k+1}]$ par un arc de parabole de fonction f_k qui coïncide avec le graphe de f aux points d'abscisses a_k, a_{k+1} et $m_k = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$.

Le calcul montre que l'aire sous la parabole ainsi construite est :

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(t)dt = \frac{a_{k+1}-a_k}{6}\left(f(a_k)+4f(m_k)+f(a_{k+1})\right)$$

Après sommation on obtient l'approximation (après avoir changé la subdivision (a_n) en $(a_0, m_0, a_1, \dots, m_n, a_{n+1})$:

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{1}{3}.\frac{(b-a)}{n}\left(f(a)+f(b)+2.\sum_{0<k\,\text{pair}<n} f(a_k)+4.\sum_{0<k\,\text{impair}<n} f(a_k)\right)$$

pour une subdivision à $n+1$ points $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ (c'est à dire n segments).

(1) En déduire une fonction `simpson(f,a,b,n)` sous `python` qui applique la méthode de Simpson pour le calcul approché de $\int_a^b f(t)dt$ à l'aide d'une subdivision régulière par $n+1$ points.

(2) L'appliquer pour retrouver une valeur approchée de π comme dans l'exercice 1.