

Option Informatique en MPSI

Lycée Thiers 2015

En 1984 ...

Vous auriez certainement eu à votre disposition des ...



En 1984 ...

ou bien des ...



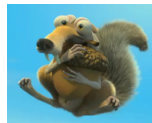
Aujourd'hui, votre ordinateur est **plusieurs millions** de fois plus puissant que celui dont disposait la NASA en 1969 pour expédier 3 hommes sur la lune et les ramener vivants !...

De la puissance ... pour quoi faire ?

Ce cours n'a pas pour but de ...

- 1 ... faire de vous des experts du web
- 2 ... faire de vous des experts de Linux
- 3 ... réaliser des dessins animés en 3D
- 4 ... vous aider à pirater votre ennemi(e) juré(e)

```
/* CSS */  
/* PHP comment */  
<!-- HTML -->
```



Les objectifs de ce cours

- S'initier au langage de programmation *CaML*
- Etudier un petit nombre d'algorithmes simples
- Découvrir quelques thèmes de l'algorithmique :
 - itération et récursivité
 - structures de données
 - complexité
 - ...

Qu'est-ce qu'un "algorithme" ?

- "Description non-ambigüe, en un nombre fini d'étapes, d'un calcul ou de la résolution d'un problème."
- Etymologie :

Al-Khawarizmi → Algorisme → **Algorithme**
Arithmos

Trois questions fondamentales

- ① Terminaison
- ② Correction
- ③ Complexité
 - ① temporelle
 - ② spatiale

Le plus vieil algorithme ?

Euclide ~ -300 BC

Eléments - Livre VII - Propositions 1 et 2

Calcul du **PGCD** de deux entiers $a, b \geq 1$

Le plus vieil algorithme ?

$$\begin{aligned}a &= bq_0 + r_0 \\b &= r_0q_1 + r_1 \\&\vdots \\r_{n-1} &= r_nq_{n+1} + \underbrace{r_{n+1}}_{=0}\end{aligned}$$

$$r_n = \text{PGCD} (a, b)$$

Terminaison de l'algorithme d'Euclide

Et si l'algorithme ne se terminait pas ?

$$a = bq_0 + r_0$$

$$b = r_0q_1 + r_1$$

...

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}$$

...

$(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ = suite strictement décroissante d'entiers naturels ...

→ un tel objet mathématique n'existe pas !

Correction de l'algorithme d'Euclide

- Lorsque $a = bq + r$:

$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r)$$

- donc :

$$\begin{aligned}\text{PGCD}(a, b) &= \text{PGCD}(b, r_0) = \text{PGCD}(r_0, r_1) = \dots \\ &= \text{PGCD}(r_n, \underbrace{r_{n+1}}_{=0}) = r_n\end{aligned}$$

La suite de FIBONACCI :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Lien avec l'algorithme d'Euclide ?

$$F_{n+1} = F_n \times 1 + F_{n-1}$$

Interlude

$$\mathbf{21} = 1 \times \mathbf{13} + 8$$

$$13 = 8 \times 1 + 5$$

$$8 = 5 \times 1 + 3$$

$$5 = 3 \times 1 + 2$$

$$3 = 2 \times 1 + 1$$

$$2 = 1 \times 1 + \mathbf{1}$$

$$1 = 1 \times 1 + 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi} \right)^n \right)$$

avec :

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Lorsque } n \rightarrow +\infty, F_n \sim \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$$

Efficacité de l'algorithme d'Euclide

Théorème

(Gabriel LAME, 1795 - 1870)

Si

$$\begin{cases} a \geq b \\ d = \text{PGCD}(a, b) \\ n = \text{nombre d'étapes} \end{cases}$$

Alors

$$a \geq d F_{n+2} \quad b \geq d F_{n+1}$$

et donc

$$n \leq \frac{\ln(b)}{\ln(\phi)} + 1$$



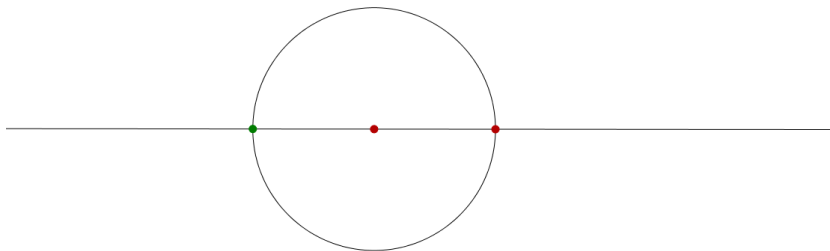
Construction à la règle et au compas

- ① Donnée : deux points initiaux.
- ② Règles du jeu : étant donnés des points A, B, C déjà construits, on peut tracer ...
 - la droite (AB)
 - le cercle de centre A et de rayon BC
- ③ Les intersections produisent de nouveaux points ...

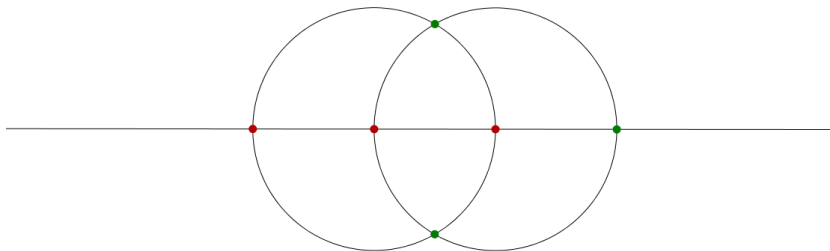
Application des règles



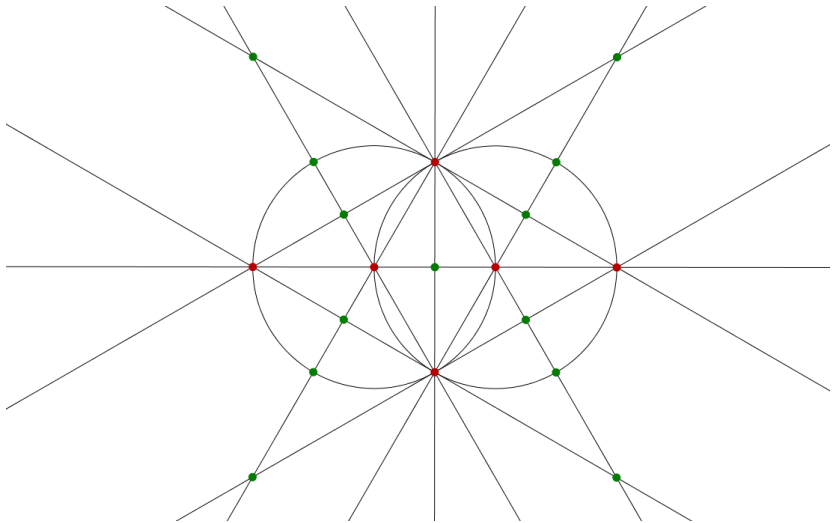
Application des règles



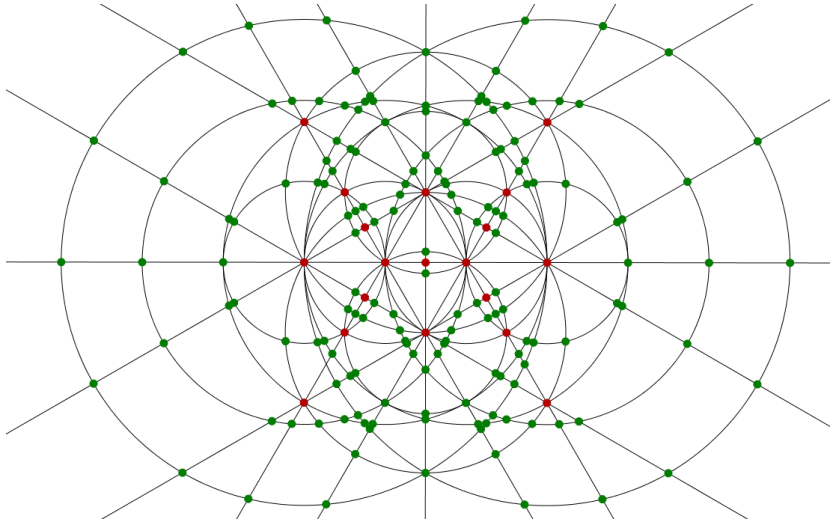
Application des règles



Application des règles



Application des règles



Questions ...

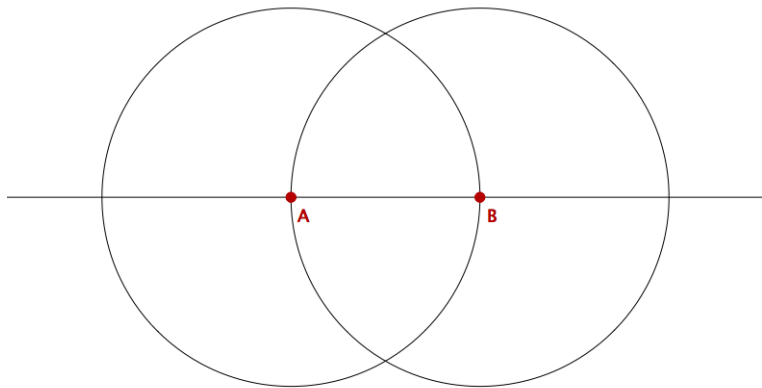
- ① Tous les points du plan sont-ils constructibles ?
- ② Pour atteindre un point constructible ...
 - ① Combien d'étapes ?
 - ② Quelle portion de plan au minimum ?

Construction du milieu

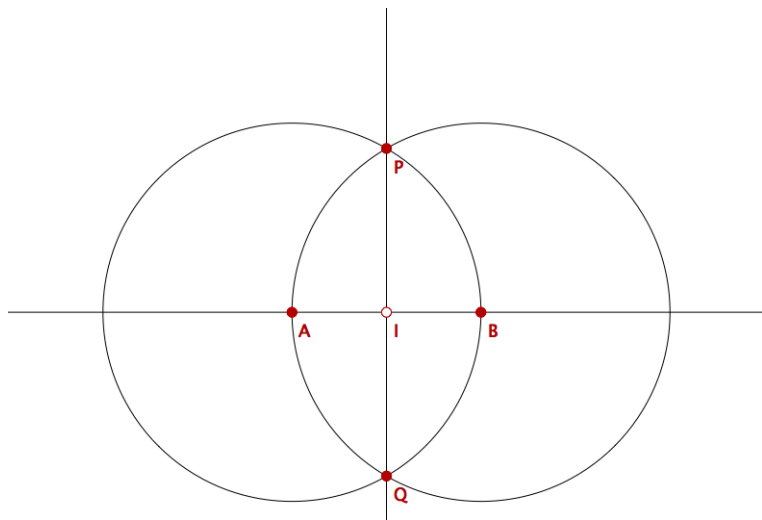
A

B

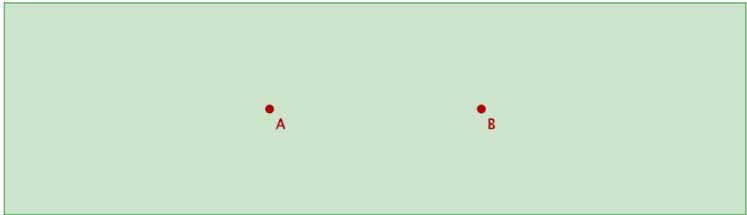
Construction du milieu



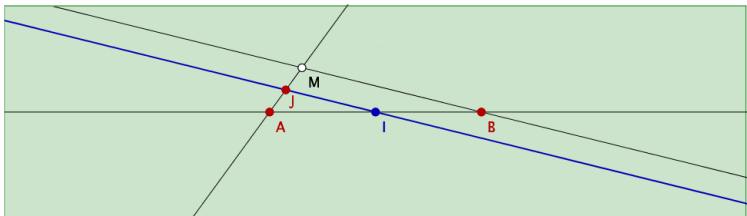
Construction du milieu



Et avec moins d'espace ?



Et avec moins d'espace ?



Retour aux algorithmes

Construction possible \leftrightarrow **Existence d'un algorithme**

Validité de la construction \leftrightarrow **Correction de l'algorithme**

Nombres d'étapes \leftrightarrow **Complexité temporelle**

Portion de plan utilisée \leftrightarrow **Complexité spatiale**

The End!