Cours 8 : Calcul scientifique.
Méthodes numériques de résolution d'équations

MPSI - Lycée Thiers

2014/2015

Recherche d'une racine par dichotomie

Théorème

Soit f une application réelle continue sur l'intervalle $[a, b]$, et telle que :

$$f(a).f(b) < 0$$

Alors f admet une racine sur l'intervalle $[a, b]$ (c.à.d. $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$).

• Méthode de recherche d'une racine par dichotomie (à 10^{-3} près) :

```
TANT QUE b-a > 10^-3:
    m = (a+b) / 2
    SI f(a) * f(m) < 0 ALORS :
        a, b = a, m    # Dichotomie à gauche
    SINON :
        a, b = m, b    # Dichotomie à droite
FIN TANT QUE
RETOURNE (a+b)/2
```

Recherche d'une racine par dichotomie

- Code python :

```
def dichotomie(f,a,b,e):
    assert f(a) * f(b) < 0
    while b-a > e:
        m = (a+b)/2.
        if f(a)*f(m) < 0:
            a, b = a, m    # Dichotomie à gauche
        else:
            a, b = m, b    # Dichotomie à droite
    return (a+b)/2.
```

- Exemple :

```
>>> f = lambda x : x**2-2
>>> dichotomie(f,0,3,0.001)
1.4139404296875
```

Recherche d'une racine par dichotomie

- Quand utiliser une dichotomie pour la recherche d'une racine ?
  1. Sous une hypothèse de régularité faible de la fonction f : continuité,
  2. Recherche dur l'intervalle $[a, b]$ lorsque $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés.
- L'algorithme est rapide : complexité du même ordre que le nombre de passage dans la boucle `while` : $\approx \log_2\left(\frac{b-a}{e}\right)$.

$$\boxed{\text{Complexité en } O\left(\log\left(\frac{b-a}{e}\right)\right)}$$

- Quelle est la complexité en fonction de N de :

dichotomie(f, a, b, 10**(-N)) ?

Réponse : linéaire.

En effet, d'ordre : $\log((b-a)*10^N) = N.\log(10) + \log(b-a)$.

- Quelle est la complexité en fonction de N de :

dichotomie(f, 0, N, 0.01) ?

Réponse : logarithmique.

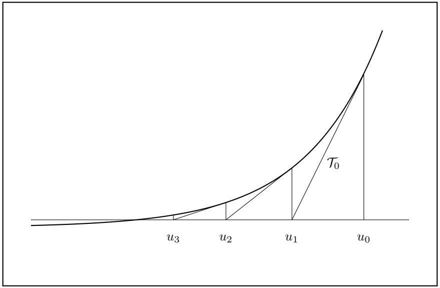
Recherche d'une racine : méthode de Newton

• La méthode de Newton (ou de Newton-Raphson) est une méthode célèbre (Isaac Newton XVII^e siècle) pour la résolution approchée d'une équation $f(x) = 0$. Elle est efficace est rapide pour peu que l'on soit assuré de la convergence.

• Elle considère la suite définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}}$$

Obtenue géométriquement du graphe de f à partir des tangentes et de leurs intersections avec $[O, x)$:



qui sous certaines hypothèses converge vers une racine de la fonction f.

Recherche d'une racine : méthode de Newton

Théorème (Méthode de Newton)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et x_0 une solution de l'équation

$$(E) : \; f(x) = 0$$

en laquelle $f'(x_0) \neq 0$.
• *Alors il existe $r > 0$ tel que dans l'intervalle $I =]x_0 - r; x_0 + r[$ l'équation (E) ait pour solution unique x_0, et de plus la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :*

$$u_0 \in I \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

est convergente et a pour limite cette racine x_0.
• *Si de plus f est de classe C^2, alors la convergence est quadratique, c.à.d., lorsque n est suffisamment grand, en notant $r_n = |x_0 - u_n|$ le reste au rang n :*

$$r_{n+1} \leqslant r_n^2$$

(c.à.d. lorsque $r_n \leqslant 10^{-1}$, alors par exemple : $r_{n+1} \leqslant 10^{-2}$ et $r_{n+2} \leqslant 10^{-4}$, etc...)

Recherche d'une racine : méthode de Newton

On prend comme critère d'arrêt un nombre n d'itérations (calcul de u_n) ou bien $u_{n+1} - u_n < 10^{-N}$.

Il faut savoir calculer la fonction dérivée, et avoir démontré que pour une valeur u_0 la suite (u_n) est bien définie (pas de division par zéro) et converge.

```
def newtonRaphson(f, g, u0, e):
    u = u0
    v = u0 - f(u0)/g(u0)
    while abs(v-u) > e:
        u = v
        v = v - f(v)/g(v)
    return v
```

Recherche d'une racine de fonction réelle

On dispose de deux méthodes efficaces, à savoir programmer :

1. **Par dichotomie**
   1.1 Avantages : hypothèse de régularité de la fonction faible : continuité. Rapide.
   1.2 Désavantages : $f(a)$ et $f(b)$ doivent être de signes opposés.
2. **Méthode de Newton**
   2.1 Lorsqu'elle converge, très rapide si la fonction est de classe C^2.
   2.2 Désavantage : hypothèse de régularité fortes C^1 ou C^2. Convergence non certaine : seulement lorsque le point initial est suffisamment proche de la racine.