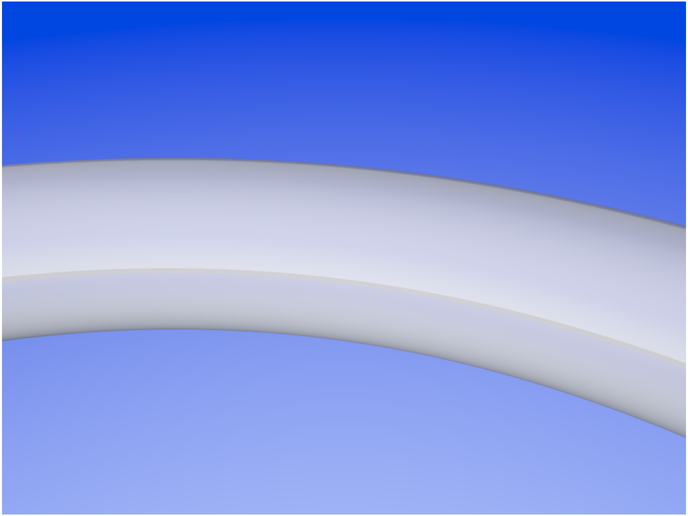
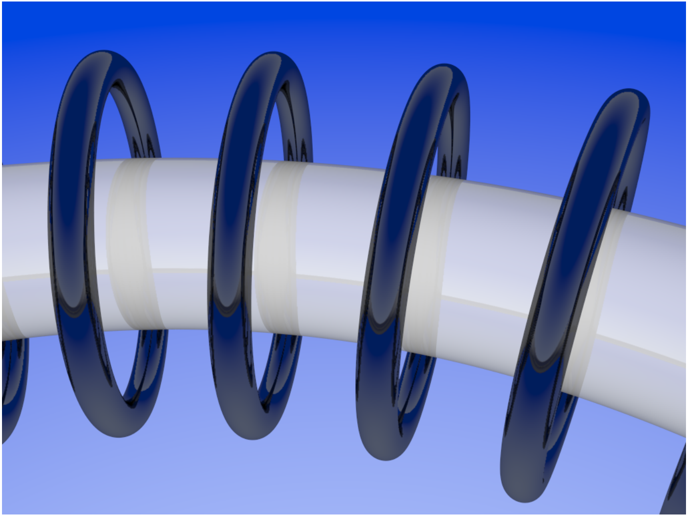
Prise en main de CaML Light - 4

Lycée Thiers 2015

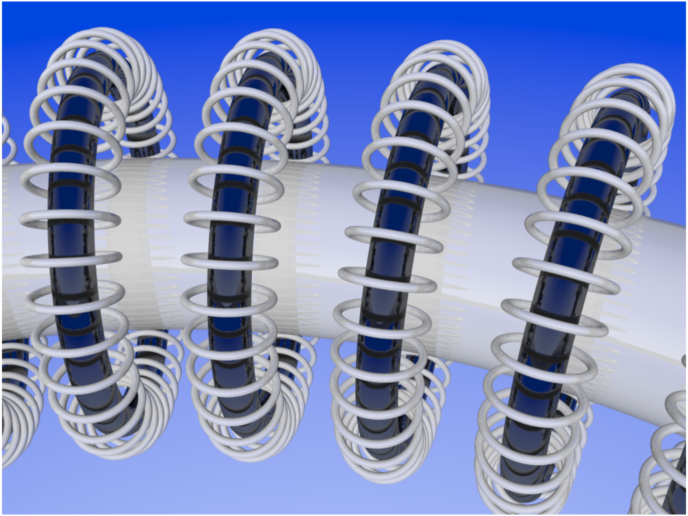
Récursivité



Récursivité

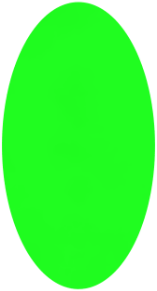


Récursivité

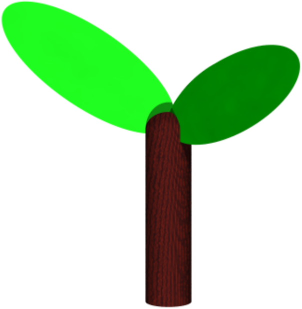


Dans la nature aussi !

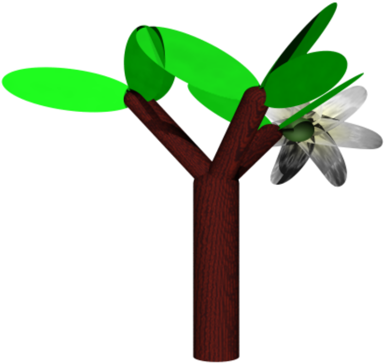
Un modèle simplifié de végétal



Un modèle simplifié de végétal

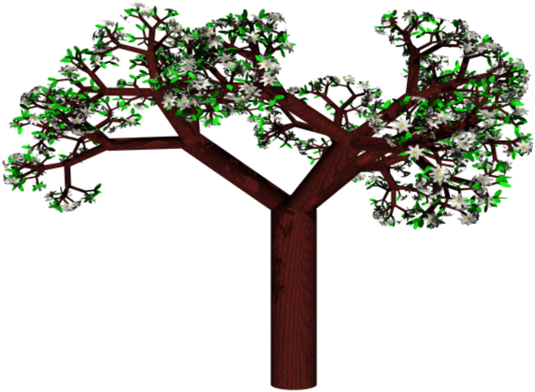


Un modèle simplifié de végétal

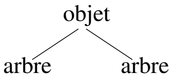


Un modèle simplifié de végétal

Un modèle simplifié de végétal



Structures récursives

- mot :
  - mot vide
  - mot ^ lettre
- liste :
  - liste vide [ ]
  - élément : : liste
- arbre binaire :
  - arbre vide
  - 

Fonctions récursives

- Factorielle (définition itérative) :
  $$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$
- Factorielle (définition récursive) :
  - $0! = 1$
  - $n! = n\,(n-1)!$
- **Fonction définie à partir d'elle-même ! ?**

Calcul récursif de n !

```
let rec fact n =
  if n = 0 then 1
  else n * (fact (n-1))
;;
```

Calcul récursif de n !

```
let rec fact n =
  if n = 0 then 1
  else n * (fact (n-1))
;;
```

Exemple : $n = 5$

Calcul récursif de n !

```
let rec fact n =
  if n = 0 then 1
  else n * (fact (n-1))
;;
```

Exemple : $n = 5$

$5! =$

Calcul récursif de n !

```
let rec fact n =
  if n = 0 then 1
  else n * (fact (n-1))
;;
```

Exemple : $n = 5$

$5! = 5 \times 4!$

Calcul récursif de n !

```
let rec fact n =
  if n = 0 then 1
  else n * (fact (n-1))
;;
```

Exemple : $n = 5$

$5! = 5 \times (4 \times 3!)$

Calcul récursif de n !

```
let rec fact n =
  if n = 0 then 1
  else n * (fact (n-1))
;;
```

Exemple : $n = 5$

$5! = 5 \times (4 \times (3 \times 2!))$

Calcul récursif de n !

```
let rec fact n =
  if n = 0 then 1
  else n * (fact (n-1))
;;
```

Exemple : $n = 5$

$5! = 5 \times (4 \times (3 \times (2 \times 1!)))$

Calcul récursif de n !

```
let rec fact n =
  if n = 0 then 1
  else n * (fact (n-1))
;;
```

Exemple : $n = 5$

$5! = 5 \times (4 \times (3 \times (2 \times (1 \times 0!))))$

Calcul récursif de n !

```
let rec fact n =
  if n = 0 then 1
  else n * (fact (n-1))
;;
```

Exemple : $n = 5$

$$5! = 5 \times (4 \times (3 \times (2 \times (1 \times 1))))$$

Calcul récursif de n !

```
let rec fact n =
  if n = 0 then 1
  else n * (fact (n-1))
;;
```

Exemple : $n = 5$

$5! = 5 \times (4 \times (3 \times (2 \times 1)))$

Calcul récursif de n !

```
let rec fact n =
  if n = 0 then 1
  else n * (fact (n-1))
;;
```

Exemple : $n = 5$

$5! = 5 \times (4 \times (3 \times 2))$

Calcul récursif de n !

```
let rec fact n =
  if n = 0 then 1
  else n * (fact (n-1))
;;
```

Exemple : $n = 5$

$5! = 5 \times (4 \times 6)$

Calcul récursif de n !

```
let rec fact n =
  if n = 0 then 1
  else n * (fact (n-1))
;;
```

Exemple : $n = 5$

$5! = 5 \times 24$

Calcul récursif de n !

```
let rec fact n =
  if n = 0 then 1
  else n * (fact (n-1))
;;
```

Exemple : $n = 5$

$5! = 120$

Empilement / dépilement

Empilement / dépilement


acheter du pain

Empilement / dépilement

cadeau d'anniversaire

Empilement / dépilement

retirer des sous

Empilement / dépilement

prendre la voiture

Empilement / dépilement

aller chercher les clefs

Empilement / dépilement

Empilement / dépilement

Empilement / dépilement

Empilement / dépilement

Empilement / dépilement

Récursion dans le langage

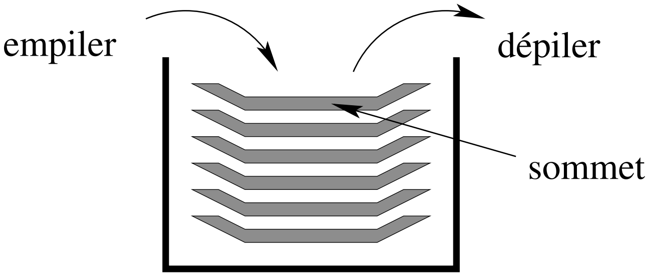
Sie gehen ins Kino, weil sie einen film **sehen wollen**.

Trop de niveaux refoulés → phrase incompréhensible !

Le phénomène allemand bien connu du rejet du verbe à la fin, sur lequel des histoires drôles de professeurs qui commencent une phrase, sautent d'un sujet à un autre pendant tout le cours, et finissent par débiter une série de verbes auxquels le public, pour qui la pile a depuis longtemps perdu toute cohérence, ne comprend plus rien, circulent dans tous les couloirs d'université, est un excellent exemple.

Gödel, Escher, Bach : les brins d'une guirlande éternelle
[an eternal golden braid]
Douglas Hofstadter

Une pile d'assiettes ...



Calcul de x^n : récursion

Calcul de x^n : récursion

```
let rec puissance x n =
  if n = 0 then 1
  else x * (puissance x (n-1))
;;
```

Calcul de x^n : récursion

```
let rec puissance x n =
  if n = 0 then 1
  else x * (puissance x (n-1))
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

Calcul de x^n : récursion

```
let rec puissance x n =
  if n = 0 then 1
  else x * (puissance x (n-1))
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$3^5 =$

Calcul de x^n : récursion

```
let rec puissance x n =
  if n = 0 then 1
  else x * (puissance x (n-1))
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$3^5 = 3 \times 3^4$

Calcul de x^n : récursion

```
let rec puissance x n =
  if n = 0 then 1
  else x * (puissance x (n-1))
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$$3^5 = 3 \times \left(3 \times 3^3\right)$$

Calcul de x^n : récursion

```
let rec puissance x n =
  if n = 0 then 1
  else x * (puissance x (n-1))
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$$3^5 = 3 \times \left(3 \times \left(3 \times 3^2\right)\right)$$

Calcul de x^n : récursion

```
let rec puissance x n =
  if n = 0 then 1
  else x * (puissance x (n-1))
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$$3^5 = 3 \times \left(3 \times \left(3 \times \left(3 \times 3^1\right)\right)\right)$$

Calcul de x^n : récursion

```
let rec puissance x n =
  if n = 0 then 1
  else x * (puissance x (n-1))
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$$3^5 = 3 \times (3 \times (3 \times (3 \times (3 \times 1))))$$

Calcul de x^n : récursion

```
let rec puissance x n =
  if n = 0 then 1
  else x * (puissance x (n-1))
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$$3^5 = 3 \times (3 \times (3 \times (3 \times 3)))$$

Calcul de x^n : récursion

```
let rec puissance x n =
  if n = 0 then 1
  else x * (puissance x (n-1))
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$3^5 = 3 \times (3 \times (3 \times 9))$

Calcul de x^n : récursion

```
let rec puissance x n =
  if n = 0 then 1
  else x * (puissance x (n-1))
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$3^5 = 3 \times (3 \times 27)$

Calcul de x^n : récursion

```
let rec puissance x n =
  if n = 0 then 1
  else x * (puissance x (n-1))
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$3^5 = 3 \times 81$

Calcul de x^n : récursion

```
let rec puissance x n =
  if n = 0 then 1
  else x * (puissance x (n-1))
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$3^5 = 243$

Calcul de x^n : récursion

```
let rec puissance x n =
  if n = 0 then 1
  else x * (puissance x (n-1))
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$3^5 = 243$

5 multiplications + gestion de la pile

Calcul de x^n : récursion terminale

Calcul de x^n : récursion terminale

```
let puissance x n =
  aux 1 n where
    rec aux pp n =
      if n = 0 then pp
      else aux (x * pp) (n-1)
;;
```

Calcul de x^n : récursion terminale

```
let puissance x n =
  aux 1 n where
    rec aux pp n =
      if n = 0 then pp
      else aux (x * pp) (n-1)
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

Calcul de x^n : récursion terminale

```
let puissance x n =
  aux 1 n where
    rec aux pp n =
      if n = 0 then pp
      else aux (x * pp) (n-1)
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$3^5 =$

Calcul de x^n : récursion terminale

```
let puissance x n =
  aux 1 n where
    rec aux pp n =
      if n = 0 then pp
      else aux (x * pp) (n-1)
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$3^5 = aux\ 1\ 5$

Calcul de x^n : récursion terminale

```
let puissance x n =
  aux 1 n where
    rec aux pp n =
      if n = 0 then pp
      else aux (x * pp) (n-1)
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$3^5 = aux\ 3\ 4$

Calcul de x^n : récursion terminale

```
let puissance x n =
  aux 1 n where
    rec aux pp n =
      if n = 0 then pp
      else aux (x * pp) (n-1)
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$3^5 = aux\ 9\ 3$

Calcul de x^n : récursion terminale

```
let puissance x n =
  aux 1 n where
    rec aux pp n =
      if n = 0 then pp
      else aux (x * pp) (n-1)
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$3^5 = aux\ 27\ 2$

Calcul de x^n : récursion terminale

```
let puissance x n =
  aux 1 n where
    rec aux pp n =
      if n = 0 then pp
      else aux (x * pp) (n-1)
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$3^5 = aux\ 81\ 1$

Calcul de x^n : récursion terminale

```
let puissance x n =
  aux 1 n where
    rec aux pp n =
      if n = 0 then pp
      else aux (x * pp) (n-1)
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$3^5 = aux\ 243\ 0$

Calcul de x^n : récursion terminale

```
let puissance x n =
  aux 1 n where
    rec aux pp n =
      if n = 0 then pp
      else aux (x * pp) (n-1)
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$3^5 = 243$

Calcul de x^n : récursion terminale

```
let puissance x n =
  aux 1 n where
    rec aux pp n =
      if n = 0 then pp
      else aux (x * pp) (n-1)
;;
```

Exemple : $x = 3$, $n = 5$

$3^5 = 243$

5 multiplications + “récursion sans pile”

Exponentiation rapide - Exemple : x^{27}

Exponentiation rapide - Exemple : x^{27}

$$x^{27} = x\left(x^{13}\right)^2$$

Exponentiation rapide - Exemple : x^{27}

$$x^{27} = x\left(x^{13}\right)^2$$

$$x^{13} = x\left(x^{6}\right)^2$$

Exponentiation rapide - Exemple : x^{27}

$$x^{27} = x\left(x^{13}\right)^2$$

$$x^{13} = x\left(x^{6}\right)^2$$

$$x^{6} = \left(x^{3}\right)^2$$

Exponentiation rapide - Exemple : x^{27}

$$x^{27} = x\left(x^{13}\right)^2$$

$$x^{13} = x\left(x^{6}\right)^2$$

$$x^{6} = \left(x^{3}\right)^2$$

$$x^{3} = x\,x^2$$

Exponentiation rapide - Exemple : x^{27}

$$x^{27} = x\left(x^{13}\right)^2$$

$$x^{13} = x\left(x^{6}\right)^2$$

$$x^{6} = \left(x^{3}\right)^2$$

$$x^{3} = x\,x^{2} \qquad \rightarrow 2$$

Exponentiation rapide - Exemple : x^{27}

$$x^{27} = x\left(x^{13}\right)^2$$

$$x^{13} = x\left(x^{6}\right)^2$$

$$x^{6} = \left(x^{3}\right)^2 \qquad \rightarrow 1$$

$$x^{3} = x\,x^{2} \qquad \rightarrow 2$$

Exponentiation rapide - Exemple : x^{27}

$$x^{27} = x\left(x^{13}\right)^2$$

$$x^{13} = x\left(x^{6}\right)^2 \qquad \rightarrow 2$$

$$x^{6} = \left(x^{3}\right)^2 \qquad \rightarrow 1$$

$$x^{3} = x\, x^{2} \qquad \rightarrow 2$$

Exponentiation rapide - Exemple : x^{27}

$$x^{27} = x\left(x^{13}\right)^2 \qquad \to 2$$

$$x^{13} = x\left(x^{6}\right)^2 \qquad \to 2$$

$$x^{6} = \left(x^{3}\right)^2 \qquad \to 1$$

$$x^{3} = x\,x^{2} \qquad \to 2$$

Exponentiation rapide - Exemple : x^{27}

$$x^{27} = x\left(x^{13}\right)^2 \qquad \rightarrow 2$$

$$x^{13} = x\left(x^{6}\right)^2 \qquad \rightarrow 2$$

$$x^{6} = \left(x^{3}\right)^2 \qquad \rightarrow 1$$

$$x^{3} = x\, x^{2} \qquad \rightarrow 2$$

Coût total = 7 multiplications

Calcul de x^n : exponentiation rapide

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ x^n = \begin{cases} \left(x^{n/2}\right)^2 & \text{si } n \text{ pair} \\ x\left(x^{(n-1)/2}\right)^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$T(1) = 0 \qquad\qquad T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1 + (n \bmod 2)$$

$$T(n) = \lfloor \log_2(n) \rfloor + \sigma_n - 1$$

$$\boxed{\log_2(n) \leqslant T(n) \leqslant 2\log_2(n)}$$

Exponentiation rapide

Retour à l'exemple :

x^{27} calculé avec 7 multiplications ...

$$T(27) = \lfloor \log_2(27) \rfloor + \sigma_{27} - 1$$

$$16 = 2^4 < 27 < 2^5 = 32 \Rightarrow \lfloor \log_2(27) \rfloor = 4$$

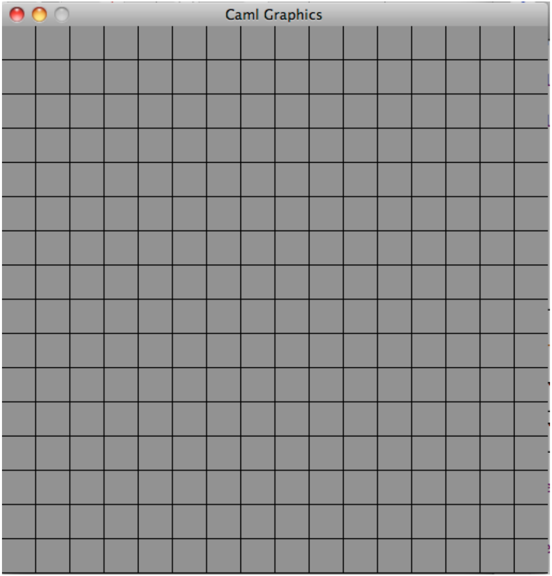
$$27 = 11011_2 \Rightarrow \sigma_{27} = 4$$

$$\boxed{T(27) = 7}$$

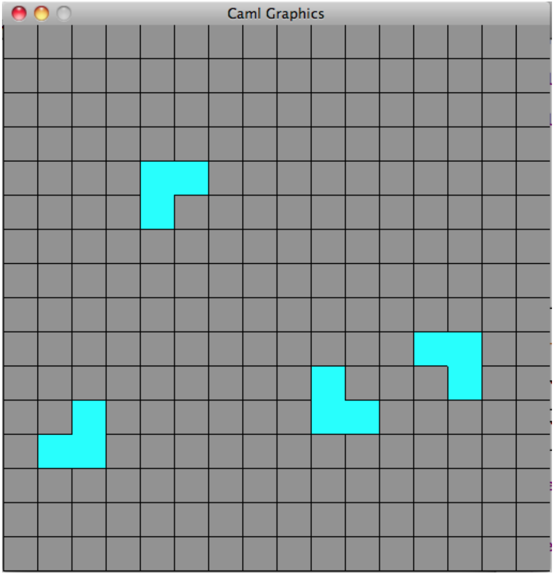
Calcul de x^n : on récapitule ...

1. version itérative
2. version récursive
3. version récursive terminale
4. exponentiation rapide

Remplissage d'un damier $2^n \times 2^n$



Remplissage d'un damier $2^n \times 2^n$



Remplissage d'un damier $2^n \times 2^n$

Peut-on recouvrir le damier entier ?

C'est impossible, car ...

$$4^n \not\equiv 0 \; [3]$$

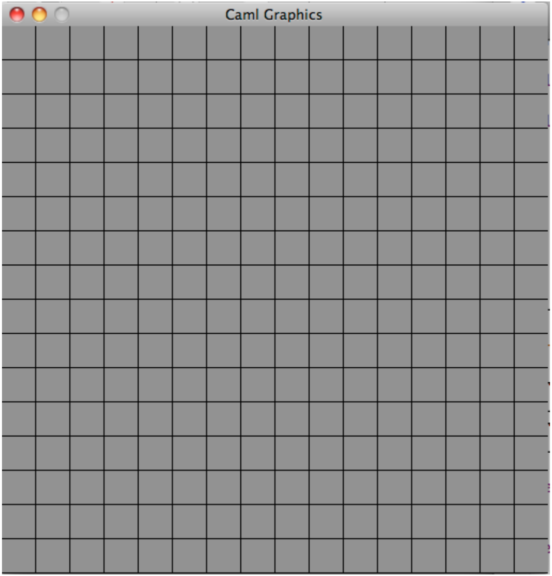
Et si on enlève une case ?

$$4^n - 1 \equiv 0 \; [3]$$

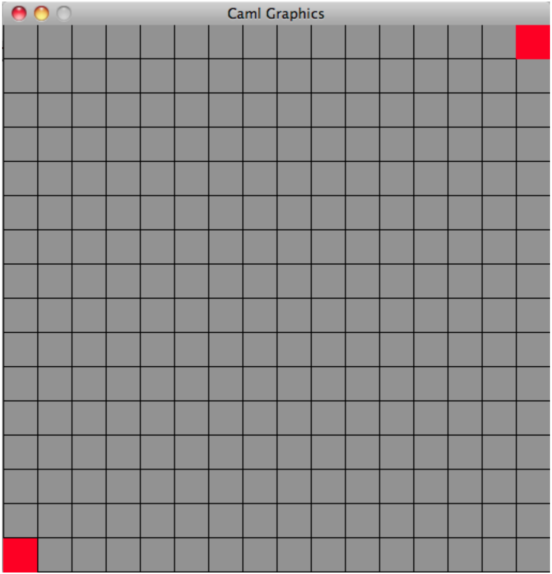
ça peut marcher ... mais ce n'est pas garanti a priori !

D'ailleurs, voici un exemple classique ... (page suivante)

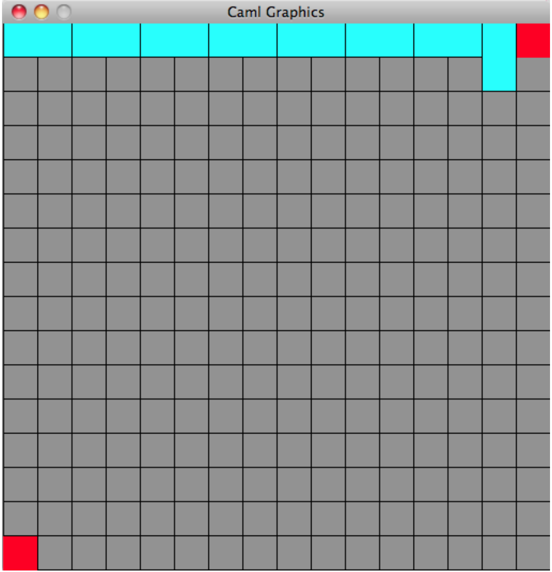
Damier $(2n) \times (2n)$ et dominos



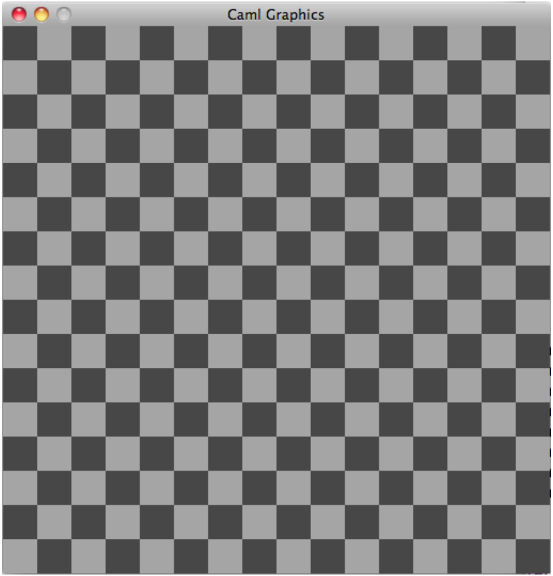
Damier $(2n) \times (2n)$ et dominos



Damier $(2n) \times (2n)$ et dominos



Damier $(2n) \times (2n)$ et dominos

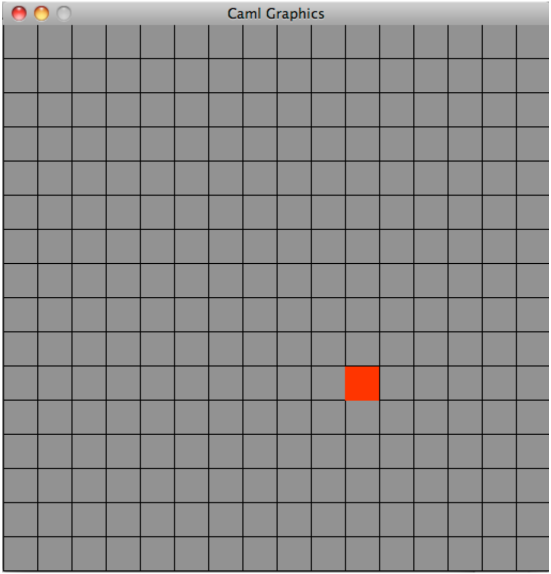


Damier $(2n) \times (2n)$ et dominos

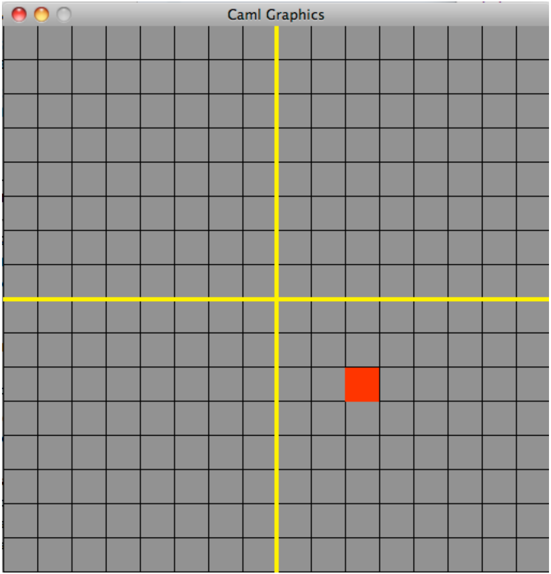
Etant donné un damier de format $(2n) \times (2n)$ duquel on a retiré deux cases diagonalement opposées, il est impossible de recouvrir ce qui reste à l'aide de dominos (chaque domino pouvant recouvrir deux cases, horizontalement ou bien verticalement).

En effet, chaque domino recouvre une case blanche et une case noire, or les deux cases supprimées étaient de la même couleur !

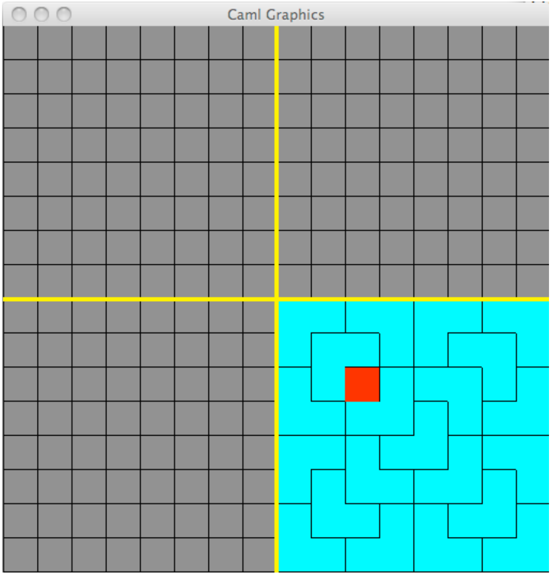
Damier $2^n \times 2^n$ privé d'une case (reprise)



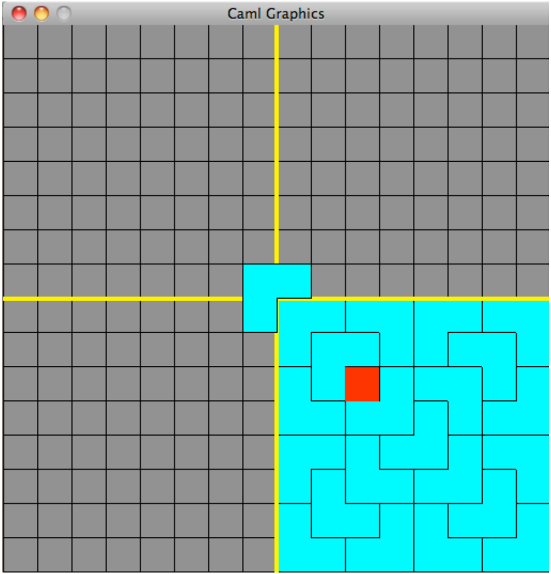
Damier $2^n \times 2^n$ privé d'une case (reprise)



Damier $2^n \times 2^n$ privé d'une case (reprise)



Damier $2^n \times 2^n$ privé d'une case (reprise)

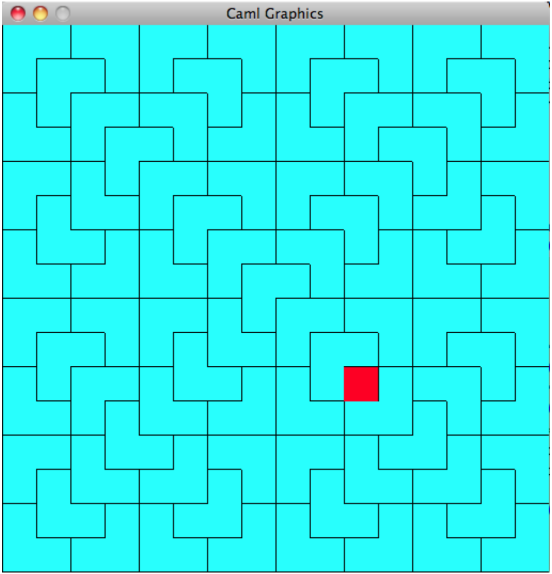


Damier $2^n \times 2^n$ privé d'une case

Solution récursive pour le problème à l'ordre n :

- Si $n = 1$, c'est évident !
- Si $n \geqslant 2$:
  - on partage en 4 damiers $2^{n-1} \times 2^{n-1}$
  - on place un 'L' au centre avec la bonne orientation
  - on résout 4 problèmes à l'ordre $n - 1$

Damier $2^n \times 2^n$ privé d'une case



Damier $2^n \times 2^n$ privé d'une case