Курсовой проект по вычислительной математике Прямой быстрый метод решения СЛАУ уравнения Пуассона

В.Д. Ждановский, 611 группа

8 мая 2019 г.

1 Введение и постановка задачи

Рассмотрим уравнение Пуассона, дополненное условием Дирихле, в единичном квадрате

$$-\Delta u = f \text{ в } (0;1)^2, u = 0 \text{ на } \Gamma \tag{1}$$

где Γ – граница единичного квадрата.

Для численного решения таких уравнений применим аппроксимацию методом конечных разностей второго порядка на сетке $n \times n$. Это приводит нас к СЛАУ, имеющей $N = (n-1)^2$ неизвестных:

$$Au_h = g \tag{2}$$

Вид матрицы A показан на рис. 1.

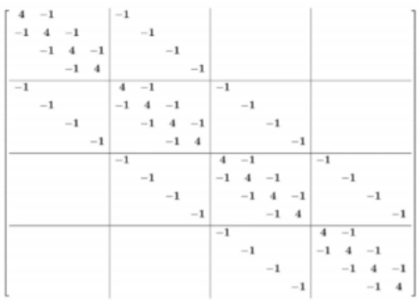

Рис. 1: Внешний вид матрицы A

Классические прямые методы решения таких систем, например, метод Гаусса или метод матричной прогонки, имеют значительную арифметическую сложность: $O(N^3)$ и $O(N^{2,5})$ соответственно. Это связано с тем, что они не учитывают разреженность блоков матрицы. В связи с этим более эффективными при решении данной задачи оказываются итерационные методы. Так, методы Якоби и Зейделя имеют сложность $O(N^2 \log \frac{1}{\varepsilon})$, а методы ПВР и ADI – $O(N^{1,5} \log \frac{1}{\varepsilon})$, где ε - требуемая норма невязки. Тем не менее, это все равно оказывается слишком большой величиной, чтобы применять данные методы на практике: необходимо как можно ближе приблизиться к нижней оценке арифметической сложности, составляющей $O(N)$.

2 Метод решения

Более эффективным методом для решения данной задачи является метод на основе **двойного быстрого синус-преобразования**. Его идея состоит в следующем. Имея спектральное разложение матрицы $A = W \cdot D \cdot W^{-1}$, решение системы можно представить в виде $u = W \cdot D^{-1} \cdot W^{-1} \cdot g$. Однако, "в лоб" применять этот метод непрактично, так как умножение на W имеет сложность $O(N^2)$.

Поступим несколько иначе. Собственные числа A и матрица W имеют следующий вид:

$$\lambda_{km} = \frac{4}{h^2}\left(\sin\left(\frac{\pi kh}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi mh}{2}\right)^2\right) \tag{3}$$

$$W_{km,ij} = C\sin(\pi ikh)\sin(\pi jmh), \tag{4}$$

где k и m – горизонтальные и вертикальные индексы узла p, т.е. $p = (m-1)(n-1)+k$.

Можно заметить, что умножение на матрицы W и W^{-1} эквивалентно применению прямого и обратного двумерных синус-преобразований, для которых существует алгоритм, аналогичный БПФ и работающий за $O(N\log N)$ операций.

Таким образом, можно предложить следующий метод решения исходной СЛАУ:

1. $v = W^{-1}g$ (обратное 2D ДСП, $O(N\log N)$ операций);
2. $p = D^{-1}p$ (умножение на диагональную матрицу, $O(N)$ операций);
3. $u = Wp$ (прямое 2D ДСП, $O(N\log N)$ операций).

Нетрудно заметить, что предложенный алгоритм имеет сложность $O(N\log N)$, что гораздо ближе к нижней оценке $O(N)$, чем все рассмотренные ранее методы решения СЛАУ.

3 Результаты

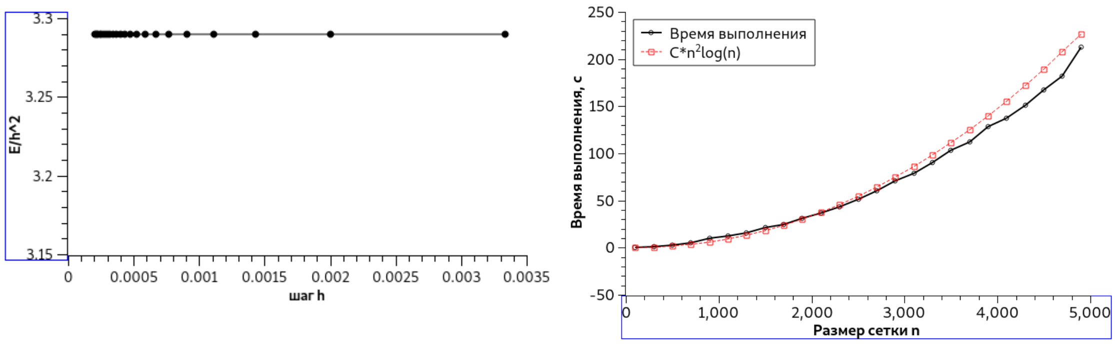

Рис. 2: Полученные результаты

Целью данной работы было реализовать и протестировать рассмотренный выше алгоритм на практике. Полученная программа была написана на языке Python с использованием библиотек SciPy и NumPy.

Работоспособность программы проверялась на функции $u = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$, являющейся решением уравнения:

$$\Delta u = -8\pi^2 \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) \tag{5}$$

Тестирование проводилось путем экспериментального вычисления зависимости нормы невязки E и времени работы программы от размерности сетки n (или, что эквивалентно, шага h). Результаты представлены на рис. 2.

Как видно из полученных графиков, предложенный метод правильно решает исходную задачу с порядком аппроксимации $O(h^2)$. Время работы алгоритма совпадает с полученной оценкой $O(n^2 \log n) = O(N \log N)$.

4 Вывод

В данной работе был рассмотрен и успешно реализован на практике метод решения СЛАУ уравнения Пуассона на основе двумерного быстрого синус-преобразования, была показана асимптотическая эффективность данного метода по сравнению с классическими прямыми и итерационными методами решения СЛАУ.