

北京理工大学第六届“博约杯”新生物理竞赛
(线下赛)

题目序号	题目名称	题目页码
A	小知识大杂烩	1 ~ 2
B	热学拼盘	3
C	力学拼盘	4
D	电磁学拼盘	5
E	带电的肥皂泡	6
F	二向箔打击警告	7
G	最速降线 × 都市天际线	8 ~ 9
H	黑洞热力学	10
I	阴间小游戏	11 ~ 12
J	从零开始的星穹列车	13 ~ 14
K	可爱猫猫生成器	15 ~ 16
L	扑朔迷离的路径	17 ~ 19

2024 年 10 月 8 日
18:30~22:30

考生注意事项

1. 考生务必将自己的个人信息填写在答题纸上.
2. 考生应先阅读全卷, 检查有无缺页、漏印、错印.
3. 回答 A 题时, 请按照题目要求, 将解释说明文字或数量级估计的步骤写在试卷上.
4. 回答 B~L 题时, 请将答案、必要方程和必要文字说明写在答题纸上.
5. 所有答案写在答题纸上, 写在本试卷和草稿纸上无效.
6. 考试结束后请上交答题纸, 试题卷与草稿纸可带回.
7. A、B、C、D 四题均不需要完全作答. 其中, A 题需从 21 个小题中选出 10 个作答; B、C、D 题需从每题所属的两个小题中选出一道作答. 如果在 A 题中回答的小题数多于 10 个, 则只计算作答问题中前 10 题的分数; 如果在 B、C、D 题中多做, 则按照其中的第一小题计分.
8. 本场考试允许携带一张 A4 纸入内. 除此之外, 不能携带任何多余的书籍、参考资料.
9. 考生仅允许携带无通讯与编程功能的计算器, 不得携带除此以外的电子设备, 如有携带, 可放在讲台处待考试结束取走.

A. 小知识大杂烩（40 分）

本题分为**第一部分：简答题部分**和**第二部分：数量级估计部分**，共计 21 小题，请从中**选择 10 个小题**作答，将你选择的题号填写在答题卡上的指定位置。每小题 4 分，**如果多做，只计算作答问题中前 10 题的分数**。在作答第一部分时，请用 **100 字**之内对每小问题做出解释（可以包含必要的计算）；在作答第二部分时，你需要写出估算的数量级（以 10^n 的格式回答，例如：一层楼高约 10^0 米），并简要给出估算步骤。

第一部分：简答题

- (1) 被过热蒸汽和沸水烫伤，哪个更危险？为什么？
- (2) 将汽车钥匙抵在头上可以增大信号范围，为什么？
- (3) 请写出超导体的两个基本性质。
- (4) 系列电影《流浪地球》中，太空电梯被设立在非洲加蓬（位于赤道附近），请解释这一设定的合理性。
- (5)（本题只需填写两空，无需做多余解释）空调这一发明深刻地改变了现代人类的生活方式，并持续带来更为舒适便捷的生活体验。可以说，它已是现代社会中不可或缺的一部分。作为一个如此重要的发明，我们有相当的必要了解它是如何运行的。只考虑制冷情况，空调的制冷循环包含压缩、冷凝、节流、蒸发四个过程。
 - a) 压缩过程：由蒸发器排出的低温低压制冷剂蒸汽被压缩机吸入后，被压缩成高温高压的过热蒸汽，并送入冷凝器。
 - b) 冷凝过程：使得来自压缩机的高温高压制冷剂蒸汽_____（放出/吸收）热量，变为液态。
 - c) 节流过程：进入毛细管的制冷剂液体发生节流过程转化成含少量蒸汽的液态制冷剂，在该过程中压强降低，温度_____（升高/降低）。
 - d) 蒸发过程：在蒸发器中，制冷剂吸收房间内空气的热量变回蒸汽同时降低了室内温度，实现了制冷的目的。
- (6) 为什么烤箱能够做出外焦里嫩的烤鱼，而微波炉不能？微波炉可以加热四氯化碳吗？
- (7) 已知水的表面张力系数约为 $7.28 \times 10^{-2} \text{ N/m}$ ，试解释为什么没有篮球一样大的雨滴？
- (8) 为什么静电力可以被屏蔽，而万有引力不可以？
- (9) 干冰接触不平整的金属时会产生尖锐的吱吱声，试解释原因。它与“响水不开，开水不响”有什么相同点？
- (10) 隔着山也可以收听中波段的电台广播，而电视广播等超短波却容易被高山或建筑物挡住。为什么？
- (11) 月亮绕地球旋转一周的时间和两次满月之间的时间间隔哪个更长？为什么？
- (12) 有句俗语叫“一人不进庙，两人不看井，三人不抱树”，其中“三人不抱树”这一小句指的是：三个人不能一起抬一根被砍伐的树干。这是为什么？
- (13) 请简要解释滑冰时使用的冰刀的原理。
- (14) 中国传统的五声音阶（“宫商角徵羽”）是使用“三分损益法”构造的。其中，对一个音进行“三分损”指的是将能弹奏出这个音的弦缩短为原来的 $\frac{2}{3}$ ；对一个音进行“三分益”指的是将能弹奏出这个音的弦增长为原来的 $\frac{4}{3}$ 。一个音经过“三分损”或“三分益”的处理后，分别与原来的音相差大约几个半音？

(15) 在吃鸳鸯火锅时，为什么麻辣锅一侧的水相较于清汤锅一侧升温更快？

第二部分：数量级估计

(16) 一个人手持一支全自动突击步枪竖直向下射击，如果他想要飞起来，则该突击步枪的射速大约是 _____ 发/分钟.

(17) 过生日时，很多人会吃一碗寓意着长长久久的长寿面. 假设一碗长寿面中只有一根面条，那么这根面条的长度大约是 _____ 米.

(18) 假设人不吃饭，改为通过充电的方式获取等量的能量，那么全世界的所有人每天大约耗电 _____ 千瓦时.

(19) 你所在的教室的空气中所有分子的平动动能总和大约是 _____ 焦耳.

(20) 用吉他的某根弦弹奏出中央 A（基频 $f_0 = 440 \text{ Hz}$ ）时，这根弦的张力的张力大约是 _____ 牛.

(21) 在标准对数视力表中，视力为 1.0（裸眼正常视力）一行的“**E**”字形视标的每条横线的宽度约为 1.45 mm ，那么在理论极限下，人眼可以在约 _____ 米远处分辨这一行视标的方向（“**E**”字形视标各笔画间的比例关系如图 1）.

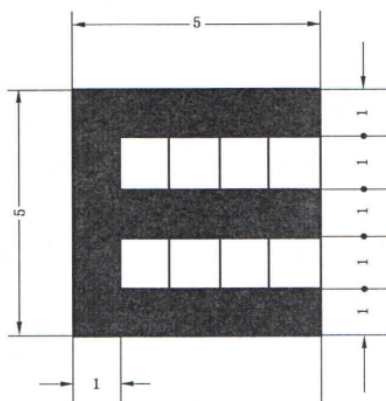


图 1: “**E**”字形视标的比例

B. 热学拼盘（40 分）

本题包含两个独立的小题，请从中选择一题作答，将你选择的题号写在答题卡上。若两小题都做，则按第一小题计分。

B.1 煮熟的鸡蛋

一只从温度为 $T_0 = 4^\circ\text{C}$ 的冰箱里取出的鸡蛋被直接放入一个盛有沸水的锅中，水始终保持沸腾，水的温度为 $T_1 = 100^\circ\text{C}$ 。已知如下参考数据：鸡蛋的密度 $\mu = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ；鸡蛋的比热容 $c = 4.2 \text{ J/(K} \cdot \text{g)}$ ；鸡蛋的半径 $R = 2.5 \text{ cm}$ ；蛋白（鸡蛋的蛋白质）的凝固点 $T_c = 65^\circ\text{C}$ ；热传导系数 $\kappa = 0.64 \text{ W/(K} \cdot \text{m)}$ ，假设液态和固态蛋白的热传导系数相同。估算下列结果：

- (1) (10 分) 使鸡蛋凝固所需的能量 U 是多少？
- (2) (10 分) 沸水传导给鸡蛋的热流量 J 是多少？
- (3) (10 分) 沸水传导给鸡蛋的热功率 P 是多少？
- (4) (10 分) 需要煮多久才能把鸡蛋煮透，即蛋白完全凝固？

提示：你可使用简化的傅里叶定律 $J = \kappa \frac{\Delta T}{\Delta r}$ ，其中 ΔT 是与问题的特征尺度 Δr 相关联的温度差。热流量 J 的单位是 W/m^2 。

B.2 大桶水压水器

如图 2 所示，纯净水桶上装有一压水器，压水器可以将其气囊内空气打入桶中，增大桶内压强从而将水从桶内压出来。已知气囊体积为 V_0 、桶的横截面积为 S 、大气压为 p_0 、水的密度为 ρ 、重力加速度为 g 。压水器气囊内空气与外界空气气压相等。出水管认为平行于水面且与水桶口平齐，管口距离水面高度记为 h ，所有管内液体所占体积均忽略。初始状态桶内与桶外空气气压相等，压水时认为空气进行等温过程，一次按压的时间可以忽略。

(1) (20 分) 假设压水器与桶连接处气密性良好。当至少完整按压 3 次压水器才能取到水时，求 h 的范围。

(2) (20 分) 在现实生活中，往往难以做到足够好的气密性。记桶内空气压强关于时间的函数为 $p(t)$ ，由于漏气，桶内压强会随时间降低接近 p_0 。若 $t = 0$ 时刻压强为 $p(0)$ ，则桶内压强—时间关系近似认为满足

$$p(t) - p_0 = (p(0) - p_0) \exp(-At)$$

取水者以一定周期 T 按压压水器，求能取到水时按压的最长周期 T_{\max} 。

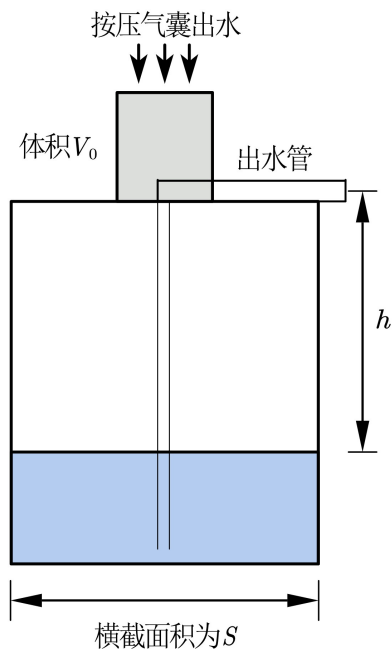


图 2: 压水器示意图

C. 力学拼盘 (40 分)

本题包含两个独立的小题，请从中选择一题作答，将你选择的题号写在答题卡上。若两小题都做，则按第一小题计分。

C.1 π 介子的衰变

如图 3 所示，一个 π^0 介子在运动时衰变为两个 γ 光子 $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ 。光子的能量动量满足关系式 $E = pc$ ，其中 E, p, c 分别为光子的能量、光子的动量大小和光速。

(1) (20 分) 若衰变前的 π^0 介子的速度为 v ($v < c$)，质量为 m_π ，衰变后的两个光子分别记为 γ_1 和 γ_2 。光子 γ_1 的运动方向相对于 π^0 介子最初的运动方向的夹角为 θ_1 ，用 m_π, v 和 θ_1 来表示光子 γ_1 的能量 E_1 。

提示：相对论情形下 π^0 介子的能量动量与速度 v 的关系为

$$E_\pi = \frac{m_\pi c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p_\pi = \frac{m_\pi v}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

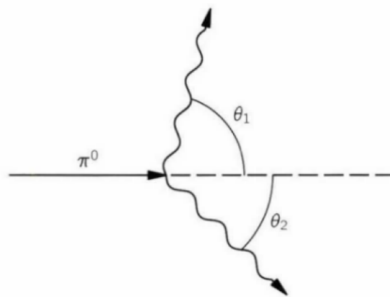


图 3: π 介子衰变示意图

(2) (10 分) 求光子 γ_1 的能量的最大值 E_{\max} 和最小值 E_{\min} ，以及它们对应的发射角度 $\theta_{1,\max}$ 和 $\theta_{1,\min}$ 。

(3) (10 分) 找到一个关于 E_{\max} 和 E_{\min} 的函数 $f(E_{\max}, E_{\min})$ ，要求这个函数与 π^0 介子的速度 v 无关。你能解释这个函数的物理意义吗？

提示：相对论下动量能量满足关系 $E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$ ，其中 m_0 是静止时的质量。

C.2 球碰球碰球

在半径为 R 的光滑圆管道中等间隔地放入 n 个小球（视作质点），依次编号为 $1 \sim n$ 。已知 1 号小球的质量 $m_1 = 1$ ，其余小球的质量分别为 m_2, m_3, \dots, m_n 。 $t = 0$ 时刻，给 1 号小球沿着管道切线方向的初速度 v_0 ，使之开始向着 2 号小球运动。小球间的碰撞均为完全弹性碰撞，忽略碰撞时间和一切摩擦。如果小球的质量 m_2, \dots, m_n 能使得系统周期性运动（若在运动开始后某一时刻，所有小球具有与 $t = 0$ 时刻相同的位置和速度，则称系统能够周期性运动），则称有限数列 $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ 为一个“ n -周期数列”。

(1) (20 分) 证明： $\{1, 2, 2\}$ 是一个“3-周期数列”，并求出对应系统的运动周期。

(2) (20 分) 写出两种不同的“2024-周期数列”，并求出对应系统的运动周期。

D. 电磁学拼盘（40 分）

本题包含两个独立的小题，请从中选择一题作答，将你选择的题号写在答题卡上。若两小题都做，则按第一小题计分。

D.1 闪电点灯

闪电的简化模型如下：闪电是由云层中所累积的电荷引起的，其结果通常是云层底部带正电，顶部带负电，云层下的地面带负电。当电场强度增大到足以击穿空气时，发生短时放电现象，形成闪电。把电流看作时间的函数，利用图 4 所示的简化曲线和以下数据：云层底部与地面之间的距离 $h = 1\text{ km}$ ；击穿湿润空气所需的电场强度 $E_0 = 300\text{ kV/m}$ ，回答下列问题：

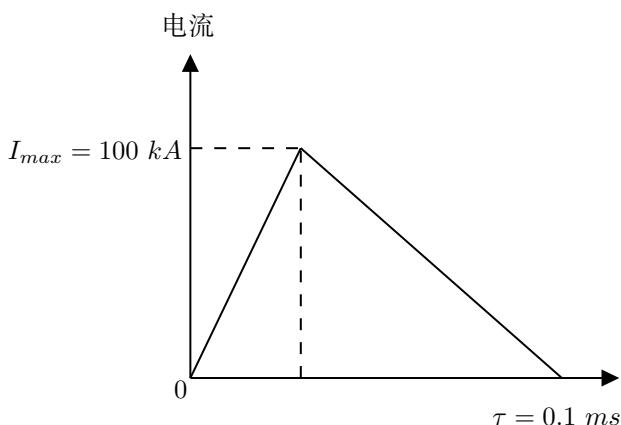


图 4: 闪电的电流曲线

(1) (10 分) 一次闪电释放的总电荷 Q 是多少？

(2) (10 分) 闪电时云层底部和地面之间的平均电流 I 是多少？

(3) (20 分) 假设一年内所有闪电的总能量被收集起来，并平均分配给每个人。若你分得的这份能量用来点亮 100 W 的灯泡，则灯泡可以正常工作多长时间？地球每年闪电数量 32×10^6 个，世界总人口 65 亿。

D.2 带电小球的运动

如图 5 所示，在竖直平面内放置一长为 L 、内壁光滑的薄壁玻璃管，在玻璃管的 a 端放置一个直径比玻璃管直径略小的球，小球带电荷量为 $-q$ 、质量为 m 。玻璃管右边的空间存在着匀强电场与匀强磁场。匀强磁场方向垂直于纸面向外，磁感应强度为 B ；匀强电场方向竖直向下，电场强度大小为 $\frac{mg}{q}$ ，场的左边界与玻璃管平行，右边界足够远。玻璃管带着小球以水平速度 v_0 垂直于左边界进入场中向右运动，由于水平外力 F 的作用，玻璃管进入场中速度保持不变，一段时间后小球从玻璃管 b 端滑出并能在竖直平面内自由运动，最后从左边界飞离电磁场。运动过程中小球的电荷量保持不变，不计一切阻力，求：

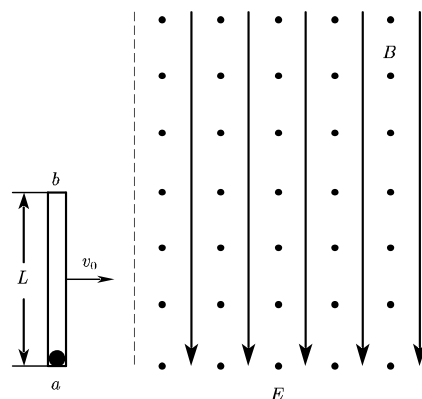


图 5: 带电小球的运动示意图

(1) (15 分) 小球从玻璃管 b 端滑出时的速度大小；

(2) (10 分) 从玻璃管进入磁场至小球从 b 端滑出的过程中，外力 F 随时间 t 变化的关系；

(3) (15 分) 小球离开场时与边界的夹角。

E. 带电的肥皂泡（60 分）

一个球形的肥皂泡，其内部空气密度为 ρ_i ，温度为 T_i ，半径为 R_0 。周围的大气密度为 ρ_a ，大气压强为 p_a ，温度为 T_a 。肥皂泡的表面张力系数为 γ ，密度为 ρ_s ，厚度为 t 。假定肥皂泡的质量和表面张力系数都不随温度变化，且 $R_0 \gg t$ 。

当肥皂泡-空气的界面的面积（肥皂泡液膜两侧都有肥皂泡-空气界面）增加 dA 时，肥皂泡的能量增加 $dE = \gamma dA$ ， γ 是肥皂膜的表面张力系数。

(1) (8 分) 用 γ ， p_a 和 R_0 表示比值 $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a}$ 。

(2) (3 分) 求 $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$ 的值，已知 $\gamma = 0.0250 \text{ N/m}$ ， $R_0 = 1.00 \text{ cm}$ ， $p_a = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ 。

(3) (9 分) 肥皂泡刚形成时的内部温度较高。请计算能使肥皂泡飘浮在空气中的内部空气温度 T_i 的最低值。已知 $T_a = 300 \text{ K}$ ， $\rho_s = 1000 \text{ kg/m}^3$ ， $\rho_a = 1.30 \text{ kg/m}^3$ ， $t = 100 \text{ nm}$ 和 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ 。

肥皂泡在形成一段时间后，将与其周围环境达到热平衡。这样，该肥皂泡就会在静止的空气中下沉。

(4) (9 分) 上升气流可以使与周围环境处于热平衡状态的肥皂泡飘浮在空中，求上升气流的最小速度 u ，用 ρ_s ， R_0 ， g ， t 以及空气的黏滞系数 η 表示。假设气流的速度很小，斯托克斯定律成立，并可忽略肥皂泡内气温降低而导致半径的变化。斯托克斯定律给出的黏滞力为 $F = 6\pi\eta R_0 u$ 。

(5) (3 分) 求上升气流的最小速度 u 的数值，已知 $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ 。

上述计算表明：涉及表面张力系数 γ 的项对结果的精确度影响较小。在以下所有问题中，都可忽略表面张力的影响。

(6) (10 分) 现使该球形肥皂泡均匀带电，带电量为 q ，求肥皂泡新的半径 R_1 ，用 R_0 ， p_a ， q 和真空介电常数 ϵ_0 表示。

(7) (8 分) 假设带电量 q 不是很大 $\left(\frac{q^2}{\epsilon_0 R_0^4} \ll p_a\right)$ ，且肥皂泡的半径只有微量增加，求 ΔR ，其中 $R_1 = R_0 + \Delta R$ 。已知当 $x \ll 1$ 时， $(1+x)^n \approx 1+nx$ 。

(8) (10 分) 要使均匀带电的肥皂泡能够静止不动地飘浮在静止的空气中，求带量 q ，用 t ， ρ_a ， ρ_s ， ϵ_0 ， R_0 ， p_a 表示，并计算带电量的数值。已知真空介电常数 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 。

F. 二向箔打击警告（60 分）

“嗡！嗡！嗡！”，睡梦中的你被刺耳的警报声吵醒。你揉着惺忪的睡眼拉开窗帘，发现天幕已被警报灯映照成了血红色。对面大厦上的屏幕赫然写着“距离降维打击到达只剩 10 分钟”。你的眼神中并没有害怕，而是充满无奈——你知道，这一天终于来了，自己，还有所有人，都要进入画里了！

第一部分：二维世界的天体轨道

我们知道三维世界的引力为平方反比力，这是由所谓高斯定理（穿过闭合曲面的引力通量正比于闭合曲面内包含的质量）导致的，其数学表达式为：

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = C \cdot m$$

(1.1) (4 分) 二维世界的“面”其实是一个封闭曲线，请取一个“高斯线”推导出二维世界的万有引力公式，并应用三维的万有引力公式得到二维的万有引力常数 G_2 。（三维世界中的万有引力常数 $G_3 = 6.67 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ；假设在三维世界和二维世界中应用高斯定理时，比例系数 C 在数值上相等）

二维的行星会绕着恒星转动，现在我们尝试定性半定量地分析其运动情况。

(1.2) (9 分) 考察二维世界中一颗在质量为 M 的恒星的引力场中运动的行星（其质量远小于恒星）。在二维世界中，行星的角动量是一个标量，设从恒星指向行星的位置矢量为 \mathbf{r} ，行星的速度为 \mathbf{v} ，质量为 m ， \mathbf{r} 与 \mathbf{v} 的夹角为 θ ，则行星的角动量是 $mr v \sin \theta$ 。行星的能量为其引力势能和动能的总和。已知在二维世界中，能量守恒和角动量守恒仍然成立，试判断以下情况是否可能发生，并简要说明理由：a) 行星在圆轨道上运动；b) 行星在 $r \in [r_1, r_2]$ 的区间内运动；c) 行星运动到无穷远处；d) 行星运动到 $r = 0$ 处。

(1.3) (11 分) 列出 (1.2) 中行星的动力学方程，通过联立动力学方程和换元 $u = \frac{1}{r}$ ，给出一个只包含 $\frac{d^2 u}{d\theta^2}$ 、 u 和其他若干常数的方程。

(1.4) (6 分) 已知椭圆的极坐标方程是 $\rho = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$ ，其中 ρ 是从原点指向椭圆上一点的矢量的长度， θ 是极角， e 是离心率， p 是一个几何参数 ($e > 0, p > 0$)。证明：在二维世界中，行星的轨道不可能是以中心恒星为一个焦点的椭圆。

第二部分：一般有心力场中的轨道

你再次揉了揉惺忪的睡眼，发现自己仍然在温暖的被窝中，窗外仍是熟悉的蓝天、白云和马路。你意识到刚才只是一场梦，但你还是心有余悸。为了避免降维打击的厄运真的降临在人类头上，你开始考虑三维世界的有心力场 $\mathbf{f} = kr^\alpha \hat{\mathbf{r}}$ ($k < 0, \alpha \in \mathbb{R}$) 中质点的运动 ($\hat{\mathbf{r}}$ 是径向的单位矢量)。

(2.1) (8 分) 列出在有心力场 $\mathbf{f} = kr^\alpha \hat{\mathbf{r}}$ ($k < 0, \alpha \in \mathbb{R}$) 中运动的质量为 m 的质点的动力学方程，并通过联立动力学方程，给出一个只包含 r 、 r 对时间的各阶导数和其他若干常数的方程。

(2.2) (2 分) 若质点在半径为 R 的圆轨道上运动，求出质点的运动周期。

(2.3) (10 分) 若质点的轨道对于径向微扰是稳定的，求出 α 的取值范围。

(2.4) (10 分) 在 (2.3) 问中条件满足的情况下，向在半径为 R 的圆轨道上运动的质点施加径向微扰，求出此后质点运动轨道闭合的条件。

G. 最速降线 × 都市天际线 (80 分)

类比是物理学中的一种重要思想. 本题中, 我们将通过两个独立的例子探索几何光学和经典力学之间的类比关系.

第一部分: 使用几何光学方法求解力学问题

最速降线问题是由瑞士数学家约翰·伯努利提出的经典问题, 问题表述为: 给定两点 A 、 B , 在重力场的作用下, 物体沿着某光滑曲线轨道从 A 点下滑到 B 点, 能最小化所用时间的轨道曲线是什么? 本部分中我们尝试解决这一问题.

(1.1) (10 分) 设 A 为起始点, B 为终点, C 点在 A 点正下方, 且满足 AC 竖直, CB 水平, $AC = CB = L$. 从 A 点无初速度地释放一小球, 小球沿着如图 6 所示的三条光滑路径从 A 点运动到 B 点: a) 直线路径: 小球沿直线 AB 运动; b) 直角转弯路径: 小球先沿着 AC 下滑至 C , 再沿着 CB 滑至 B (在转弯处有一小圆弧, 小球经过小圆弧时无能量损失); c) 四分之一圆弧路径: 物体沿着与 AC 、 CB 均相切的圆弧由 A 滑至 B . 将小球沿着三条路径从 A 点运动到 B 点的时间分别记为 t_a, t_b, t_c , 使用小于号连接它们. 你可能使用如下数值积分的结果:

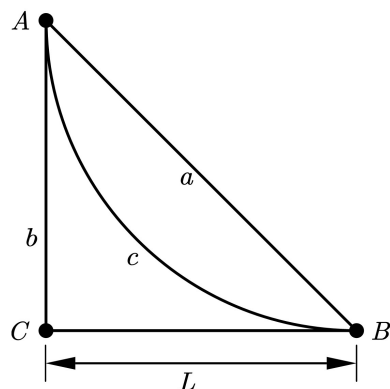


图 6: 三条可能的轨道

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta}} \approx 2.622$$

(1.2) (30 分) 在光学中, 费马原理 (Fermat's Principle) 指出, 光在传播过程中总是选择使光程 (即光传播所需时间) 最短的路径. 当光穿过不同介质时, 其速度会发生变化, 因此光在两种介质的交界面处会发生折射, 折射现象遵循斯涅尔定律 (Snell's Law). 约翰·伯努利在研究最速下降曲线问题时, 意识到物体在重力场中的运动与光在不同介质中的传播存在相似性. 特别是, 当物体沿曲线从高处下滑时, 不同位置的速度取决于高度的变化, 这与光在介质中传播时速度变化的情况类似. 因此, 伯努利将这一物理现象类比为光的折射问题. 设点 A 的坐标为 $(0, 0)$, 点 B 的坐标为 (x_0, y_0) , 其中 x 轴水平向右, y 轴竖直向下, 最速下降曲线由函数 $f(x)$ 表示, 满足 $f(0) = 0$ 且 $f(x_0) = y_0$. 根据最速降线问题到光的折射问题的类比, 证明: 曲线 $f(x)$ 应满足方程:

$$\frac{2f(x)f''(x)}{1 + (f'(x))^2} = -1$$

第二部分: 使用力学方法求解几何光学问题

夏季常出现的海市蜃楼、变成椭圆形的落日都是光线在变折射率介质中传播而引发的现象. 本部分中我们尝试讨论大气层折射率的变化对人登高远眺时看到的最远距离有何影响.

(2.1) (8 分) 如图 7 所示, 设地球的半径为 R , 一个身高可以忽略的人登上高度为 h 的建筑物 ($h \ll R$, 本部分中所有小问的答案只需保留 $\frac{h}{R}$ 的最低阶项), 忽略大气层折射率的变化, 求他在无遮挡情况下所能看到的最远距离 (即图中弧 AB 的长度), 使用 h 和 R 表示.

(2.2) (12 分) 实际上, 大气层的折射率随着高度变化. 如图 8 所示, 以地球中心为原点建立极坐标系, 则大气层的折射率记为 $n(r) = 1 + n_0 \exp\left(\alpha \frac{R-r}{R}\right)$, 其中 α, n_0 都是已知常数. 若使用矢量 \mathbf{r} 表示光线上一一点的位矢, dl 表示光线轨迹的线元, 那么光线在介质中的传播满足轨迹方程:

$$\frac{d}{dl} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) = \nabla n$$

证明: 光线的轨迹与一个质量为 1、能量为 E 的粒子在势场 $V = E - \frac{n^2}{2}$ 中的运动轨迹相同.

(2.3) (6 分) 如图 8 所示, 设 r 是光线上一点到地球中心的距离 (即矢量 \mathbf{r} 的长度), ϕ 是光线与 \mathbf{r} 方向的夹角. 证明: 光线在大气层中传播时, $n(r)r \sin \phi$ 是守恒量. 提示: 极坐标系中的梯度算子:

$$\nabla f(r, \theta) = \frac{\partial f(r, \theta)}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f(r, \theta)}{\partial \theta} \hat{\theta}$$

其中 $\hat{r}, \hat{\theta}$ 分别是 r, θ 方向上的单位矢量.

(2.4) (14 分) 如图 8 所示, 一个身高可以忽略的人登上高度为 h 的建筑物, 在考虑大气层折射率变化的情况下, 求他能看到的最远距离 (弧 $A'B'$ 的长度), 结果使用 α, n_0, h 和地球的半径 R 表示.

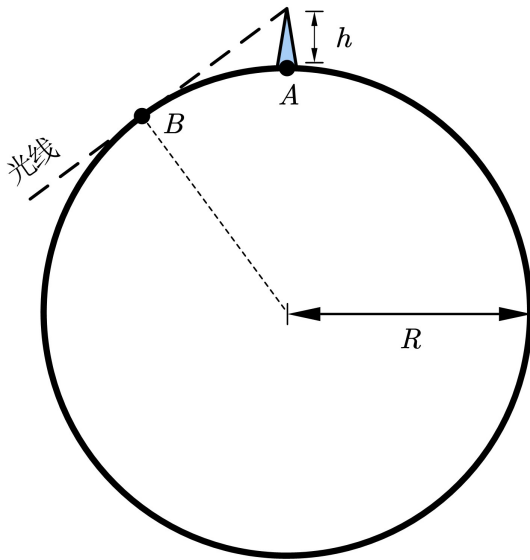


图 7: 忽略折射率变化的情况

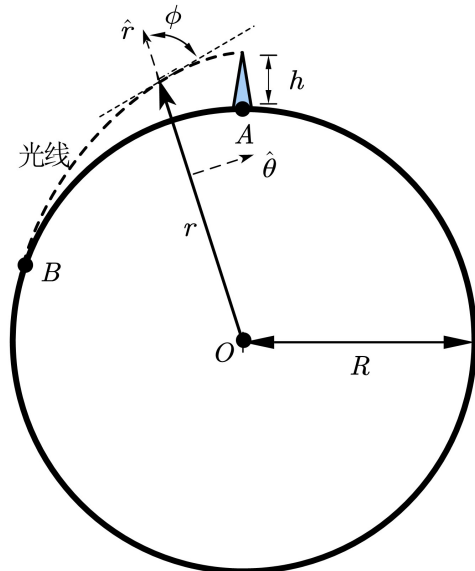


图 8: 考虑折射率变化的情况

H. 黑洞热力学 (80 分)

黑洞是宇宙中最神奇的天体之一，我们尝试通过一些热力学的方法对其性质进行一些研究。按照黑洞无毛定理，我们现在考虑的黑洞不旋转也不带电，所有性质只与其质量相关。黑洞最重要的特征量之一是其视界面积。事件视界可以简单地视作黑洞的边界，在其内部引力可以束缚住光使其不能逃逸。

(1) (8 分) 我们希望得出黑洞质量 m 与其事件视界面积 A 之间的关系。已知此关系依赖于黑洞的质量 m 、光速 c 与万有引力常量 G ，记作 $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$ 。请用量纲分析的方法求出 α 、 β 与 γ 的值。

从上一问中我们可以看出，事件视界的面积随黑洞质量的增加而增加，并且没有任何东西可以脱离黑洞，因此，黑洞的表面积只能增加而不能减少。此时我们联想到，热学中的热力学第二定律指出，孤立体系的熵同样只能增加而不能减少，故黑洞的熵和其事件视界表面积存在正比关系。贝肯斯坦为一个黑洞赋予了正比于事件视界面积的熵 S ，并且 $S = \eta A$ ，由严格的广义相对论与热力学可以证明其正确性。

(2) (8 分) 熵的热力学定义为 $dS = \frac{dQ}{\theta}$ ，其中 dQ 为交换的热量， θ 为系统的开尔文温度。利用上式求出熵的量纲，并把有量纲的常数 η 表示为基本常数 h, c, G, k_B (普朗克常数、光速、万有引力常数和玻尔兹曼常数) 的函数。

但是当考虑量子效应时事情会有一些不同。霍金提出，黑洞在霍金温度下将会有辐射出现。请利用上题得到的 S 与 A 的关系继续作答。

(3) (8 分) 假设黑洞对于周围环境不做功，利用质能关系方程 $E = mc^2$ 以及热力学定律，将一个黑洞的霍金温度 θ_H 表示为其质量 m 与基本常数的函数。

(4) (16 分) 孤立黑洞的质量会因为霍金辐射而改变，请利用斯特藩玻尔兹曼定律，求出质量的变化率对黑洞霍金温度的依赖关系，用黑洞质量 m 与基本常数表示结果。并给出质量为 m 的黑洞完全蒸发，即质量变为零的所需时间 t^* 。

(5) (8 分) 由严格的数学推导可知黑洞的热容是负的，请用已知的条件计算质量为 m 的黑洞的热容。

现实宇宙中存在背景辐射，黑洞可以从中获得能量。它是一种温度为 θ_B 的黑体辐射，并且充满了整个宇宙。总面积为 A 的物体从中获取能量的功率为 $\sigma\theta_B A$ 。因此，黑洞可经霍金辐射损失能量，同时从宇宙背景辐射中获取能量。

(6) (8 分) 在宇宙背景辐射与霍金辐射的影响下求出黑洞质量的变化率。

(7) (16 分) 我们会发现对于某个特定质量 m^* 质量的变化率为零。求出这个质量，将小题 (6) 中变化率函数中的 θ_B 替换为 m^* ，然后用数学方法指出黑洞在宇宙背景辐射与霍金辐射作用下的热平衡是否稳定。

(8) (8 分) 在宇宙背景辐射下仍然有霍金温度，求出这个温度。

I. 阴间小游戏（80 分）

小羽同学经常在庙会上看到一种小游戏：参与者需要将购买的球投入指定的圆柱形容器内，若球最终停在容器内，则参与者获得一定奖金。然而，这个游戏实操起来非常困难，球经常从容器口中飞出。本题通过研究球体在粗糙竖直圆管内壁的纯滚动过程来解释这一现象。如图 9 所示，建立柱坐标系，考虑半径为 r_b ，质量为 m 的均匀粗糙球体在半径为 r_c 的竖直放置的粗糙圆管内的运动 ($r_c > r_b$)。为研究方便起见，取转动参考系 S' 并在 S' 系内考察 (1) ~ (7) 小题。转动参考系 S' 的角速度 $\Omega = \Omega \hat{z}$ (Ω 未知)， \hat{z} 为 z 方向单位矢量。在转动参考系 S' 中，球的质心只沿着 z 轴方向上下移动。在转动参考系 S' 中，球的角速度记为 $\omega = (\omega_r, \omega_\phi, \omega_z)$ 。重力加速度为 g 。

(1) (8 分) 利用纯滚约束，给出 Ω 和 ω_z 的关系。

(2) (4 分) 在转动参考系 S' 中，位置矢量为 \mathbf{r} 的质量微元 Δm 受到虚拟力：

$$\mathbf{F}_I = \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_{CO} + \mathbf{F}_E = \Delta m \Omega^2 \mathbf{r} - 2\Delta m \Omega \times \dot{\mathbf{r}} - \Delta m \dot{\Omega} \times \mathbf{r}$$

三项虚拟力分别称为惯性离心力、科里奥利力和欧拉力。证明球体受到的总科里奥利力为零。

(3) (12 分) 虽然球体受到的总科里奥利力为零，但是科里奥利力对球心的力矩不为零。已知：若球体的角速度为 ω ，从球心指向球体内和球体表面上任意一点的矢量为 \mathbf{r}' ，那么球体相对任意过球心的对称轴的转动惯量 I 和相对球心的角动量 \mathbf{L} 分别写为：

$$I = \frac{2}{3} \int_D dm r'^2 \quad \mathbf{L} = \int_D dm \mathbf{r}' \times (\omega \times \mathbf{r}') = I\omega$$

其中积分号的下标 D 指积分对整个球体进行，对于均匀球体有 $I = \frac{2}{5}mr_b^2$ 。证明：科里奥利力对球心的力矩可以写为：

$$\mathbf{M}_{CO} = \mathbf{L} \times \Omega$$

其中你会使用矢量运算的性质：

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})] = a^2 \mathbf{c} \times \mathbf{b} - [\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})] \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a}]$$

(4) (8 分) 通过考察球体与圆管的接触点，导出 $\dot{\omega}$ 的分量 $\dot{\omega}_z$ 满足的方程，进而证明 ω_z 是常数。

(5) (8 分) 通过考察球心，证明球体所受的摩擦力沿 z 轴方向。

(6) (16 分) 如图 10，由于在 S' 系中球体的质心只沿着 z 轴方向上下移动，因此球体与圆柱的接触点只在一条直线上沿 z 轴方向上下移动。通过考察这条直线上的任意一个固定点 P ，列出球体的动力学方程，进而导出 $\dot{\omega}$ 的分量 $\dot{\omega}_r, \dot{\omega}_\phi$ 满足的方程，即使用 $m, g, \omega_r, \omega_\phi, \omega_z$ 来表示 $\dot{\omega}_r, \dot{\omega}_\phi$ 。

(7) (12 分) 导出球的 z 坐标满足的微分方程（其中可保留待定常数），进而证明球在 z 方向做简谐振动，求出该简谐振动的角频率 Ω_z 与 S' 系的角速度 Ω 之比。

(8) (12 分) 现在有一小球从一足够长的圆管顶部被投入管内。 S' 系中小球初始时的角速度是 $\omega^{(0)} = (\omega_r^{(0)}, 0, \omega_z^{(0)})$ 。 a) 若在地面系内可以观察到小球只在某一水平面上运动，则 $\omega_r^{(0)}, \omega_z^{(0)}$ 应满足何种条件？ b) 若在地面系内可以观察到小球 z 轴方向上简谐振动，先下降后上升， $\omega_r^{(0)}, \omega_z^{(0)}$ 又应满足何种条件？管壁与小球的摩擦因数 μ 应满足何种条件？

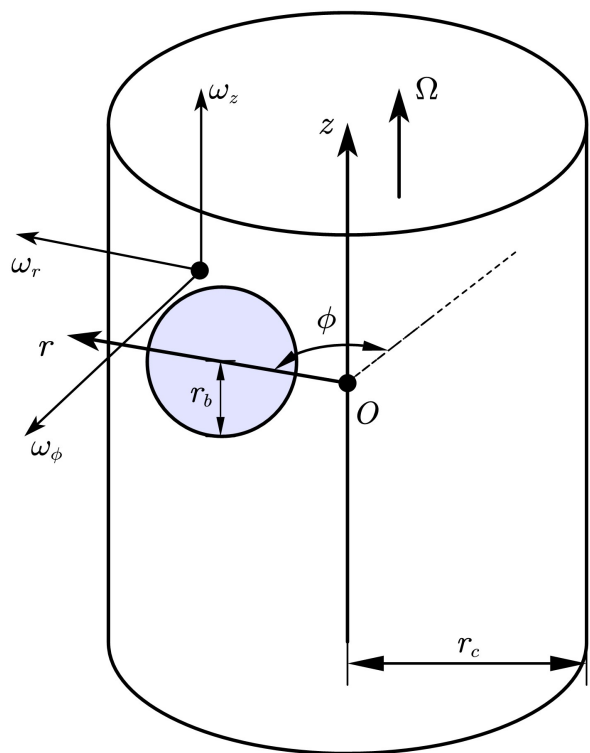


图 9: 圆管内运动的小球

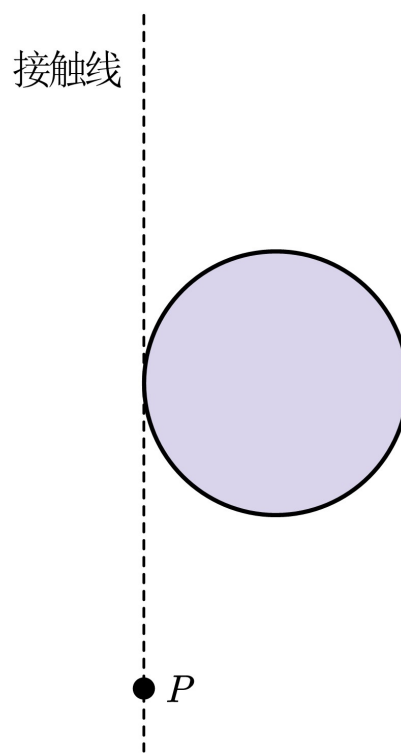


图 10: 小球与圆管的接触线

J. 从零开始的星穹列车（80 分）

所谓“开拓”，就是沿着前人未尽的道路，走出更遥远的距离。星穹列车仍将不断前进，而探索改进列车引擎的重任将由你来完成。

第一部分：核能引擎

星穹列车在强大的核能驱动下获得了可以持续输出能量而总质量几乎不变的能力。

在地面系考虑低速情况下，受恒定阻力 f ，有恒定牵引功率 P ，总质量 m 不变的列车由静止启动的加速过程：

(1.1) (4 分) 求出列车最终能获得的最大速度；

(1.2) (10 分) 求出速度与时间的关系。（可用隐函数表示）

注：根据姬子姐姐的提示，你意识到积分公式：

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

第二部分：反物质引擎

星穹列车装备大量的正反质子，利用它们之间湮灭（1: 1）产生光子的过程驱动自身。装备有反物质引擎的列车总质量初始为 m ，驱动过程列车的固有时记作 τ ，在列车参考系看，“燃料”消耗的速率 $\dot{m} = \frac{dm}{d\tau} = -h$ 为一常数，光速用 c 表示。

在闵可夫斯基时空（平直时空）中，取坐标

$$x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$$

闵可夫斯基时空线元为

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu}^{0, 3} g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu} = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

对于列车的时空间隔，其与固有时的关系（不论时空平直与否）为

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2$$

考虑列车不受其他外力、不断向后抛出湮灭产生光子，从而直线加速的过程：

(2.1) (12 分) 计算在相对初始静止的参考系观察列车的速度 v 与固有时 τ 的关系

(2.2) (10 分) 试说明时空间隔在洛伦兹变换下不变，并给出坐标时 t 与固有时 τ 的关系，从而进一步给出 (1) 中列车速度 v 与坐标时 t 的关系；

(2.3) (6 分) 如果出发时反质子占列车总质量的 $\frac{1}{10}$ ，那么最终列车能获得的最大速度是多少？并说明无论如何配置反质子的质量，列车速度都无法超过光速 c 。

第三部分：曲速引擎

反物质引擎终究是有极限的，膨胀的野心渴望实现超光速飞行。

在姬子姐姐的帮助下，星穹列车拥有了曲速引擎，其可以操作崩坏能，在一定范围（以自身为球心，半径为 R 的球）内产生负能量密度的时空泡，造成小范围内浮夸的时空弯曲，使时空间隔在参考系变为

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu}^{0-3} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = -(c^2 - v_s^2 f^2(r_s)) dt^2 - 2v_s f(r_s) dt dx + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

其中 $r_s(t, x, y, z) = \sqrt{(x - x_s(t))^2 + y^2 + z^2}$ 是同一时刻某空间点与星穹列车的距离， $f(r_s)$ 是一个在 $(0, +\infty)$ 上恒大于 0 的单调递减的可导函数，且 $f(\infty) = 0, f(0) = 1, f(r_s > R) \approx 0$

星穹列车的时空坐标记作 $(ct_s, x_s, 0, 0)$ ，则其运动方程即 $x_s = x_s(t_s)$ ，列车的坐标速度 $v_s = \frac{dx_s(t)}{dt}$ 。考虑曲速引擎驱动下列车沿直线的飞行：

(3.1) (4 分) 展开时空间隔中的求和，对比得出度规的全部非零分量（注意 $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ 例如 $g_{12} = g_{21}$ ）

(3.2) (8 分) 定义空间膨胀率为 $K = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial g_{0i}}{\partial x_i}$ ，将 $K > 0$ 处的空间点称为“膨胀点”，反之称作“收缩点”；试指出对于时空泡内部，哪些是“膨胀点”、哪些是“收缩点”。

(3.3) (6 分) 四维语言相对论中，将“任何物体不能超过光速”这一限制严格表述为其四速度满足“ $\sum_{\mu, \nu}^{0-3} g_{\mu\nu} U_\mu U_\nu < 0$ ”，其中“四速度”定义为 $U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$ 。证明：在时空泡外 $r_s \geq R$ 处，这一定义与“参考系测得物体速度不超光速”一致。

(3.4) (8 分) 给出星穹列车的固有时与坐标时的关系。并且试判断，若 $v_s > c$ ，列车实际是否打破“物体运动不能超过光速”这一规则？星穹列车能否在该参考系实现“超光速”旅行？为什么？

(3.5) (4 分) 根据多普勒效应，定性分析列车接收到的迎正面射入的泡外光信号是发生红移还是蓝移？

(3.6) (8 分) 考虑引力红移效应。姬子姐姐发现：对同一束光所经过的任意两个相对静止的观者 p 、 q 而言，其分别测得的光的圆频率 ω 与光经过其瞬间（即测量瞬间）各自的固有时微小变化 $d\tau$ 的比值近似相同，且 $dt_p = dt_q$ 。即 $\frac{\omega_p}{d\tau_p} = \frac{\omega_q}{d\tau_q}$ 。

匹诺康尼（看作质点）相对于参考系静止，星穹列车匀速驶过，若在匹诺康尼恰与列车的时空泡中心重合的同时，收到了时空泡外因故障而静止的某仙舟发出的求救光信号（三者均在星穹列车的直线路径上， $y = 0, z = 0$ ），判断此信号会发生红移还是蓝移？猜测星穹列车在坐标速度提升到多高时，与时空泡中心重合的匹诺康尼无法在列车正面的方向接收到时空泡外的任何光信号？

K. 可爱猫猫生成器（100 分）

在本题的表述和答题过程中，我们使用以下记号：

- 不加粗的物理量（如 x ）表示标量，加粗的物理量（如 \mathbf{x} ）表示矢量；
- \mathbf{x}_α 表示矢量 \mathbf{x} 的第 α 个分量；
- $\|\mathbf{x}\|$ 表示矢量 \mathbf{x} 的模长. 对于 n 维矢量 \mathbf{x} ， $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- $p^{(n)}(\mathbf{x})$ 表示一个 n 维随机变量的概率密度函数，这意味着该随机变量出现在点 $\mathbf{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ 附近微元 $\{\mathbf{x} | x_1 \in (\tilde{x}_1, \tilde{x}_1 + dx_1), x_2 \in (\tilde{x}_2, \tilde{x}_2 + dx_2), \dots, x_n \in (\tilde{x}_n, \tilde{x}_n + dx_n)\}$ 内的概率是 $p^{(n)}(\mathbf{x})dx_1dx_2 \cdots dx_n$. 上标 (n) 表示该随机变量是 n 维的.
- $\rho^{(n)}(\mathbf{x})$ 表示 \mathbf{x} 处的电荷密度，这意味着点 $\mathbf{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ 附近微元 $\{\mathbf{x} | x_1 \in (\tilde{x}_1, \tilde{x}_1 + dx_1), x_2 \in (\tilde{x}_2, \tilde{x}_2 + dx_2), \dots, x_n \in (\tilde{x}_n, \tilde{x}_n + dx_n)\}$ 内的电荷量是 $\rho^{(n)}(\mathbf{x})dx_1dx_2 \cdots dx_n$. 上标 (n) 表示 $\rho^{(n)}(\mathbf{x})$ 是 n 维空间中的电荷密度.

在人工智能领域中，生成模型（如 ChatGPT）是一种用于拟合数据集中数据分布的模型. 小羽同学喜欢猫猫，他计划搭建一个生成模型来拟合猫猫图片的概率分布，从而自动生成猫猫图片. 具体来说，数据集中的每个猫猫图片都由 N 个像素组成，可以表示为一个 N 维的矢量 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)$ ，每个像素是矢量 \mathbf{v} 的一个分量. 这些数据是依照图片数据的概率密度函数 $p^{(n)}(\mathbf{v})$ 采样得到的. 如图 11 所示，小羽同学使用的方法是：在一个 $N+1$ 维的空间中的 N 维超平面上按照图片的概率密度函数 $p^{(n)}(\mathbf{v})$ 设置电荷，再从一个以原点为中心的、半径非常大的球面上均匀采样一些点，从这些点出发，沿着该点处电场线反向运动，直至找到电场线与设置有电荷的 N 维超平面的交点，他期望取到的这些交点的概率密度函数就是图片数据的概率密度函数 $p^{(n)}(\mathbf{v})$. 本题试图验证这一方法的可行性.

(1) n 维空间中球的表面积和体积 (6 分)：众所周知，3 维空间中半径为 R 的球的体积是 $V^{(3)}(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ ，表面积是 $S^{(3)}(R) = 4\pi R^2$. 将 n 维空间中半径为 R 的球的体积记为 $V^{(n)}(R) = c_V^{(n)} R^{\alpha(n)}$ ，表面积记为 $S^{(n)}(R) = c_S^{(n)} R^{\beta(n)}$ ，直接写出 $\alpha(n), \beta(n)$ 的表达式. 在之后的小问中， $c_V^{(n)}$ 和 $c_S^{(n)}$ 可当作已知量使用.

(2) n 维空间中的高斯定理 (20 分)：在 n 维空间中有一闭合曲面 \mathcal{S} ，记 \mathcal{S} 包围的电荷量为 q_S ，穿过 \mathcal{S} 的电通量为 ϕ_S ，它们满足关系 $q_S = \epsilon_0 \phi_S$ ，其中 ϵ_0 是真空电导率. 假设在 n 维空间中的 \mathbf{x} 点处有一带电量为 q 的点电荷，求出 \mathbf{y} 处的场强 $\mathbf{E}_q^{(n)}(\mathbf{y})$ 和电势 $\phi_q^{(n)}(\mathbf{y})$. 假设 n 维空间中有连续分布的电荷，电荷体密度为 $\rho^{(n)}(\mathbf{x})$ ，再求出 \mathbf{y} 处的场强 $\mathbf{E}^{(n)}(\mathbf{y})$ 和电势 $\phi^{(n)}(\mathbf{y})$. 本问答案中可以出现矢量 $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ 的模长 $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$.

(3) 远场电势分布 (25 分)：在 n 维空间中有连续分布的电荷，电荷体密度是 $\rho^{(n)}(\mathbf{x})$. 设电荷的分布是有界的，即对于所有 $\rho^{(n)}(\mathbf{x}) \neq 0$ 的点，都有 $\|\mathbf{x}\| \leq l_0$. 那么对于 n 维空间中满足条件 $\|\mathbf{y}\| \gg l_0$ 的点 \mathbf{y} ， \mathbf{y} 处的电势可以展开为：

$$\phi^{(n)}(\mathbf{y}) = q\phi_0^{(n)}(\mathbf{y}) + \sum_{\alpha=1}^n q_\alpha \phi_\alpha^{(n)}(\mathbf{y}) + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n q_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta}^{(n)}(\mathbf{y}) + \cdots$$

其中：

$$q = \int_{\mathbb{R}^n} \rho^{(n)}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad q_\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \rho^{(n)}(\mathbf{x}) x_\alpha dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$q_{\alpha\beta} = \int_{\mathbb{R}^n} \rho^{(n)}(\mathbf{x}) x_\alpha x_\beta dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$\phi^{(n)}(\mathbf{y})$ 的展开式中的前三项（上文中写出的三项）分别被称为点电荷项、偶极子项、四极子项。求出 $\phi_0^{(n)}(\mathbf{y}), \phi_\alpha^{(n)}(\mathbf{y}), \phi_{\alpha\beta}^{(n)}(\mathbf{y})$ 的表达式。本问答案中可以出现 \mathbf{y} 的各个分量、 \mathbf{y} 的模长 $\|\mathbf{y}\|$ 以及符号 $\delta_{\alpha\beta}$ （在 $\alpha = \beta$ 时 $\delta_{\alpha\beta} = 1$ ，否则 $\delta_{\alpha\beta} = 0$ ）。

提示：你可能用到的数学公式： n 维函数 $f(\mathbf{y})$ 在 \mathbf{x} 处的泰勒展开式：

$$f(\mathbf{y}) \approx f(\mathbf{x}) + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \bigg|_{\mathbf{x}} (y_\alpha - x_\alpha) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \bigg|_{\mathbf{x}} (y_\alpha - x_\alpha)(y_\beta - x_\beta) + \cdots$$

(4) “足够大”的球面 (10 分)：比较 (3) 问中点电荷项、偶极子项、四极子项对 \mathbf{y} 处电势贡献，从而说明随着 $\|\mathbf{y}\|$ 的增大，四极子项的衰减速度远大于偶极子项，偶极子项的衰减速度远大于点电荷项（只需定性地说明衰减速度，无需精确比较）。因此，在 $\|\mathbf{y}\|$ 很大时，电场的分布与放置在原点的电量为 q 的点电荷的电场分布几乎相同。

(5) 算法正确性的证明 (12 分)：现在研究小羽同学使用的算法。考虑一个 $N+1$ 维欧氏空间，空间中每一点可以使用 $N+1$ 个坐标 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1})$ 表示。自然地， N 维超平面 $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} | x_{N+1} = 0\}$ 上一点可以使用前 N 个坐标 $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 表示。小羽同学在超平面 \mathcal{P} 上分布电荷， \mathbf{x}' 处的电荷密度为 $\rho^{(N)}(\mathbf{x}')$ 。设电荷的分布是有界的，即对于所有 $\rho^{(N)}(\mathbf{x}') \neq 0$ 的点，都有 $\|\mathbf{x}'\| \leq l_0$ 。已知电荷的密度恰好与图片数据的概率密度相等，即 $\rho^{(N)}(\mathbf{x}') = p^{(N)}(\mathbf{x}')$ 。现在，在 $N+1$ 维空间中取一个半径为 R_{N+1} 的球面 ($R_{N+1} \gg l_0$)，在球面上均匀取点（即对于球面任意位置，单位面积上取点的概率相同），从每个被取到的点开始，沿着该点处电场线的反方向不断前进，直到找到该条电场线与超平面 \mathcal{P} 的交点。证明：按照以上方式取到的电场线与超平面 \mathcal{P} 的交点的概率密度函数恰好是 $p^{(N)}(\mathbf{x}')$ 。

(6) 从超平面上采样 (22 分)：小羽同学认为从 $N+1$ 维空间中的球面上取点太复杂，于是他转而从超平面 $\mathcal{Q} = \{\mathbf{x} | x_{N+1} = R_{N+1}\}$ 上取起始点。 N 维超平面 $\mathcal{Q} = \{\mathbf{x} | x_{N+1} = R_{N+1}\}$ 上一点也可以使用前 N 个坐标 $\mathbf{x}'' = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 表示。从 \mathcal{Q} 上每个被取到的点开始，沿着该点处电场线的反方向不断前进，直到找到该条电场线与超平面 \mathcal{P} 的交点。如果希望按照这一方式取到的电场线与超平面 \mathcal{P} 的交点的概率密度函数仍然是 $p^{(N)}(\mathbf{x}')$ ，求出超平面 \mathcal{Q} 上选取的起始点的概率密度 $p_{\text{prior}}^{(N)}(\mathbf{x}'')$ ，即所谓先验分布。本问答案中可以出现矢量 \mathbf{x}'' 的模长 $\|\mathbf{x}''\|$ 。

(7) “升维”的原因 (5 分)：为什么小羽同学不在 N 维空间中按照图片数据的概率密度设置电荷，而要将电荷设置在 $N+1$ 维空间中的 N 维超平面上？这样做有何好处？（回答一点即可）

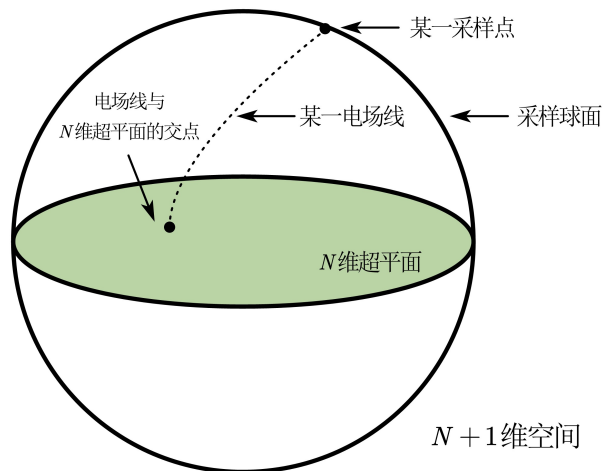


图 11: 生成模型的采样过程示意

L. 扑朔迷离的路径（100 分）

研究物理运动时，不去考虑物体的具体运动而考虑物体的整条运动路径往往会有意想不到的结果。

光的路径

在高中物理中，我们常常用三角函数来表示光的电场的方向和强度，由此可以推导出光的干涉和衍射等多种神奇的现象。如图 12，假设有一条单缝和一张光屏，两者间距为 l 。

(1) (2 分) 通过计算光从单缝出发，经过与单缝平行且到单缝与到光屏距离相同的双缝（双缝间距 d ）后到达光屏上的光程，求出光源经过双缝干涉后在光屏上的振幅分布（不进行近似）。

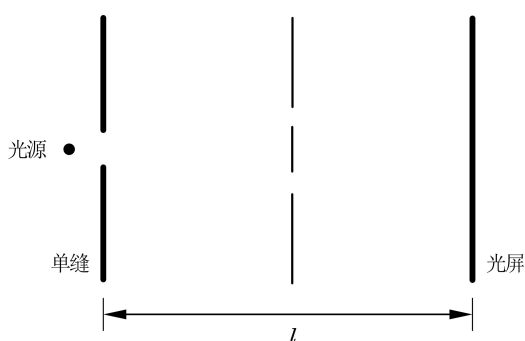


图 12: 双缝干涉

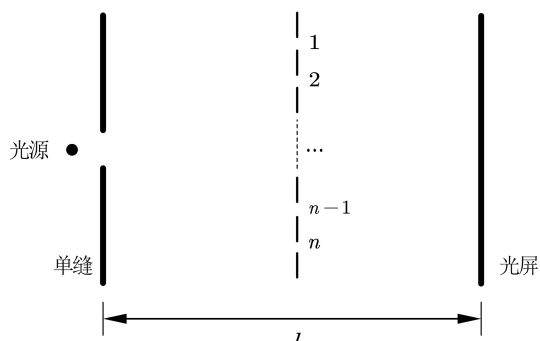


图 13: 多缝干涉

根据欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (i 为虚数单位) 我们发现, e^{ix} 的实部和虚部是两个相位相差 $\frac{\pi}{2}$ 的三角函数, 正好能同时表示出电场和磁场的传播状态 (此处取特殊的单位使电场和磁场的最大值在数值上都为 1). 用 ae^{ix} 表示这束光的波动情况, 其中 x 为相位, 则相对光强 $I = |ae^{ix}|^2$.

(2) (4 分) 用 e 的复指数代替三角函数推导上一问中双缝干涉图案的相对光强公式 (保留常数 a).

(3) (4 分) 已知光子的能量 $E = 2\pi\hbar\nu$, 其中 \hbar 为约化普朗克常数, ν 为光的频率. 我们一般用 $\frac{S}{\hbar}$ 来表示相位, 其中 $S = S(E, t)$ 为能量和时间的函数. 求 S 的表达式.

(4) (4 分) 如图 13, 把双缝替换成均匀排列有 n (n 为奇数) 条缝, 宽度为 d 的光栅, 中心的缝、光源和光屏的中心在同一直线上. 求出经过第 i 条缝 (其中最上端为第 1 条缝, 最下端为第 n 条缝, 中心为第 $\frac{n+1}{2}$ 条缝) 打到光屏上距中心 y 处的 S 值, 并求出光屏上的相对光强分布表达式 (保留求和符号, 不考虑其中的单缝衍射).

(5) (4 分) 设作为光源的单缝到光屏的距离为 L , 中间均匀地放置 m 块与上一问完全相同的光栅. 已知光的某条传播路径在经过第 i 块光栅时穿过这块光栅的第 k_i 条缝 (对于每块光栅, 最上端为第 1 条缝, 最下端为第 n 条缝). 求出这条路径的 S 值, 并根据求得的 S 值求出光屏上的相对光强分布的表达式 (保留求和符号).

量子力学中的路径

量子力学中，光屏上的光强分布正比于光子打到光屏不同位置的概率。当 a 取特定值时， I 在整个光屏上的积分为 1，此时 I 的分布也就是光子打在光屏上的不同概率密度，对应的 ae^{ix} 也就是概率幅， x 则称为概率幅的相位。

对于光子以外的其他物体，我们可以认为物体已知从一点出发而后到另一点的概率由所有连接两点的路径的概率幅决定，概率幅的相位由这条路径的 S 值决定，表达式与先前的光的干涉相同，只不过其中光子的能量变成了物体的动能。此时，我们一般在这样的坐标中研究物体的量子现象：其中一条坐标轴为时间轴，表示物体所处的不同时间；另外的坐标用于表示物体的位置。则物体的坐标可以表示为 (x, t) ，其中 x 是一个用来表示物体位置的向量， t 表示时间。下面我们来讨论一维运动（只能沿一个方向运动）的质量为 m 的物体。

在光的干涉中，光栅是一种用来限制光的路径上某点位置的工具。而量子力学中，我们常常限制粒子在不同时间的位置来构建粒子的路径。运用与光的干涉类似的思想，我们可以画出下图

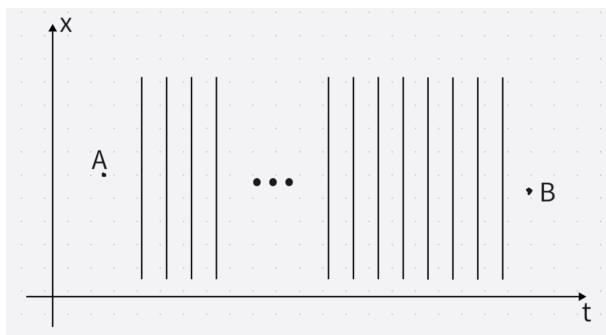


图 14: 一维粒子运动示意图

图中，我们在点 $A(x_a, t_a)$ 和点 $B(x_b, t_b)$ 之间均匀画上很多条无限长直线，每条线上可以取到的点可以看作粒子在这条线所对应的时间时可能的位置，每条线上各取一个点，把这些点与 A 和 B 按之间次序相连便得到粒子从点 A 运动至 B 的一条运动路径。

(6) (4 分) 设物体从点 $A(x_a, t_a)$ 做匀速运动到点 $B(x_b, t_b)$ ，求出这次运动对应的 S 值。

(7) (8 分) 先讨论有限条线且线上可以取有限个点的情况。假设点 $A(x_a, t_a)$ 和点 $B(x_b, t_b)$ 之间按时间均匀排布有 l 条线，每条线长度有限，且可以均匀取 n (n 为奇数) 个点，线长为 d ，且条线的中心点都位于 $x = 0$ 处，求粒子从 A 点出发后到达 B 点的概率幅（保留提到的常数 a ）。

(8) (10 分) 已知当从 A 点出发后到达所有地方的总概率为 1 时， $a = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon}\right)^{\frac{n+1}{2}}$ ，其中 ϵ 线之间的时间间隔，为粒子质量。对于之前提到的无穷多线且每条线可取无穷多点的情况，可以把线的数量、线的长度以及单位线长中可取点的数量都看作无穷大，用积分表示出粒子从 A 点出发后到达 B 点的概率幅。

(9) (15 分) 设上一问的结果表示为 $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$ ，已知某一维自由粒子在 $t = t_a$ 时位于 x_a 处，求证：粒子在 t 时刻位置 x 处的概率幅为

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)}} \cdot \exp\left(\frac{im(x_b - x_a)^2}{2\hbar(t_b - t_a)}\right)$$

可能用到的积分公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{ia[(m-x)^2 + (x-n)^2]\}dx = \sqrt{\frac{i\pi}{2a}} \cdot \exp\left[\frac{ia}{2}(m-n)^2\right], a \in R$$

(10) (10 分) 用代入法证明：

$$i\hbar \frac{\partial K(x_b, t_b; x_a, t_a)}{\partial t_b} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 K(x_b, t_b; x_a, t_a)}{\partial x_b^2}$$

(11) (12 分) 已知 t_a 时刻粒子在一维空间中的概率幅分布为 $\psi(x, t_a)$ ，则 t_b 时刻粒子在空间中的概率分布为

$$\psi(x, t_b) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t_b; x_a, t_a) \psi(x_a, t_a) dx_a$$

试着推导出一维自由粒子的薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t).$$

经典力学中的路径

(12) (6 分) 上面用路径求概率的方法就是量子力学中的路径积分，其中 S 被就是称为作用量，所提到的自由粒子的动能 E 在更一般情况下用拉格朗日量 $L = T - V$ 替代，其中 T 为动能， V 为势能。求出势场 $V(x)$ 中粒子从 $A(x_a, t_a)$ 做变速运动到 $B(x_b, t_b)$ 的作用量表达式（保留积分号）。

在上述讨论中可以看到，在量子力学中，粒子从一点到另一点的过程中可能走过空间中所有的路径，而走每一条路径的概率由这条路径的作用量决定。然而我们在进行经典力学的计算时，发现只要给定环境和初始状态，物体只会沿着一条路径走，这似乎与量子力学有所出入。为了弄清楚这一矛盾，我们来研究经典力学中的路径。在经典力学中人们常用“变分法”对作用量进行研究，并且在变分中拉格朗日量需要被写成位置 x 、速度 \dot{x} 以及时间 t 的函数，并把他们看作互相独立的自变量。与微分类似，对于一条路径 $x = x(t)$ 以及从这条路径到一个实数上的映射 $S(x(t))$ ，我们可以使 $x(t)$ 发生一个微小的变化 $\delta x(t)$ ，从而使 S 也发生一微小变化 δS 。这种操作就是变分。

可能用到的变分的性质：

- $\delta(\int_a^b f(x) dx) = \int_a^b \delta f(x) dx$
- $\delta(f(x)g(x)) = f(x)\delta g(x) + g(x)\delta f(x)$
- $\delta(\int_a^b f(x)\dot{g}(x) dx) = [f(x)\delta g(x)]|_a^b - \int_a^b \delta g(x)\dot{f}(x) dx$

(13) (12 分) 请根据上述性质证明：若 x , \dot{x} 和 t 的关系满足牛顿力学的要求，则作用量的变分 δS 为 0（即经典力学中物体只会走 S 为极值的路径，称为经典力学的最小作用量原理）。

(14) (5 分) 根据上述的讨论定性说明，为什么经典力学中物体只会走作用量为极值的一条路径，而不是像量子力学中那运动路径有很多种可能。

以下空白