#MA

### 1120212364，孙宇皓

## Problem 1

假设线性空间 $V$ 的子空间 $W_1$ 是由一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 张成的，那么，线性空间 $V$ 必然是由更多的基张成的。不失一般性，我们取张成 $V$ 的基为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$
那么我们将 $W_2$ 构造为由基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 张成的空间，从而 $V = W_1 + W_2$。
此时，$\dim(W_1) = n$，$\dim(W_2) = m$，$dim(V) = m + n$，利用子空间的维度公式：

$$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$$

可知 $\dim(W_1 + W_2) = 0$，这意味着 $W_1$ 与 $W_2$ 两个子空间的交中只有零向量，从而，$V = W_1 + W_2$ 是 $W_1$ 和 $W_2$ 两个子空间的直和。

## Problem 2

因为 $A$ 是实对称矩阵，所以设 $A$ 合同到一个矩阵 $\Lambda$，有 $A = P^T \Lambda P$ 成立，$P$ 是正交矩阵，$\Lambda$ 的对角元是 $A$ 的本征值。
从而，

$$x^T A x = x^T P^T \Lambda P x = (Px)^T \Lambda (Px)$$

$P$ 矩阵代表正交变换，而正交变换是保长度的，因此 $(Px)^T(Px) = 1$，下面证明这一点

$$(Px)^T(Px) = x^T P^T P x = x^T I x = x^T x = 1$$

记 $y = Px, y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$，那么 $y^T y = 1$

$$x^T A x = y^T \Lambda y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

在 $\sum_i y_i^2 = 1$ 的约束条件下，显然，若 $\lambda_i$ 是最大特征值，$y_i = 1, y_{j \neq i} = 0$ 时，$x^T A x$ 取到最大值。因此，$\max x^T A x$ 是 $A$ 的最大特征值，而 $\min x^T A x$ 是 $A$ 的最小特征值。