

# Chapter 37: 微分形式的积分学

#DifferentialGeometry

## 1-形式的线积分

流体沿着定向曲线  $K$  的环流量，或者粒子沿着曲线  $K$  运动时，外力场所做的功为：

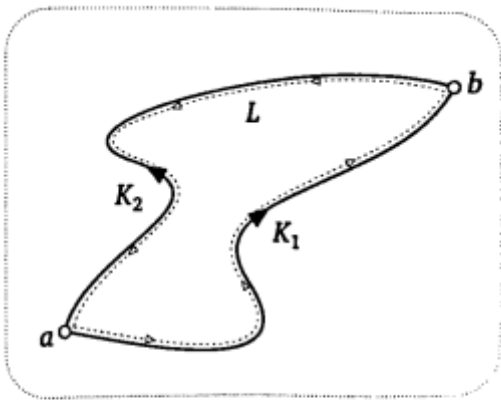
$$C_k(\underline{\phi}) = \int_K \underline{\phi} \cdot d\mathbf{r}$$

我们显然可以使用形式的语言来重写这个式子，令  $\phi$  是与力场相关的 1-形式，我们有：

$$\phi(d\mathbf{r}) = \underline{\phi} \cdot d\mathbf{r} = \phi_K ds$$

注意：这里的  $d\mathbf{r}, ds$  只是一般的向量微元和长度微元，而不是 1-形式。这样，我们可以给出 1-形式的线积分的定义：

$$\int_K \phi = \int_K \phi(d\mathbf{r}) = \int_K \phi_K ds$$



**图 37-2** 如果积分与从  $a$  到  $b$  的路径  $K$  无关，则沿闭合环路  $L$  的积分为零。反过来，如果沿所有闭合环路的积分都为零，则积分与路径无关

此外，假设积分与路径无关，显然我们有：

$$\int_L \phi = \int_{K_1 - K_2} \phi = \int_{K_1} \phi - \int_{K_2} \phi = 0$$

反过来也是一样的。因此路径的无关性与环路上的积分为 0 可以互相推出。特别地，如果  $\phi$  是恰当的，也就是说存在  $f$  使得  $\phi = \mathbf{d}f$ ，那么：

$$\phi(\delta r) = \mathbf{d}f(\delta r) = \delta f$$

因此：

$$\int_K \phi = \int_K \mathbf{d}f = f(b) - f(a)$$

我们有  $\phi = \nabla f$ ，这里的  $\phi$  是力场，而  $f$  就是势能。

## 外导数是一个积分

在一般的微积分中，显然导数和积分互为逆运算。不过我们马上就会看到：外微分是在闭环曲线或者封闭曲面上的积分，而不是积分的逆。

我们先考虑 1-形式的外导数：设  $\Pi(\epsilon u, \epsilon v)$  为一个平行四边形的有向边界，我们考虑一个 1-形式  $\phi$  环绕  $\Pi$  的积分：

$$\Omega(\epsilon u, \epsilon v) = \oint_{\Pi} \phi$$

接下来我们要证明这个东西是  $\phi$  的外导数：

$$\Omega(\epsilon u, \epsilon v) = \mathbf{d}\phi(\epsilon u, \epsilon v)$$

因此，我们只要将 1-形式沿着任意的平行四边形积分一圈，就得到了它的外导数！显然，我们希望使用不变的向量场  $u, v$ ，这样平行四边形自然是封闭的， $u, v$  之间的对易子也是 0。但是注意：在计算这个积分的时候，我们不能从每个边上随意取一个点，然后使用黎曼和来计算这个结果——因为本来我们期望得到的结果就是  $\epsilon^2$  量级的，我们这样随意取点又会引入  $\epsilon^2$  量级的误差。因此，我们选择每条边的中点来完成这个黎曼和的计算。我们设  $a, b, c, d$  分别为四条边的终点，那么我们有：

$$\begin{aligned} \Omega(\epsilon u, \epsilon v) &= \phi_a(\epsilon u) + \phi_b(\epsilon v) + \phi_c(-\epsilon u) + \phi_d(-\epsilon v) \\ &= [\phi_b(\epsilon v) - \phi_d(\epsilon v)] - [\phi_c(\epsilon v) - \phi_a(\epsilon v)] \\ &= \nabla_{\epsilon u} \phi(\epsilon v) - \nabla_{\epsilon v} \phi(\epsilon u) \\ &= \mathbf{d}\phi(\epsilon u, \epsilon v) \end{aligned}$$

它的物理意义是：如果某种流体以速度  $\phi$  流动，那么它绕着一个小四边形的环流是  $\phi$  绕着小四边形的积分，也是通量 2-形式  $\mathbf{d}\phi$  作用于小四边形两边所得的值。我们知道，对一个 1-形式求外导数相当于得到某个矢量场的旋度，那么我们有：

$$\int_{\Pi(\epsilon u, \epsilon v)} \phi = \mathbf{d}\phi(\epsilon u, \epsilon v) = (\nabla \times \phi) \cdot \hat{n} \delta \mathcal{A}$$

如果我们选择了一般的  $u, v$  呢？此时，2-形式的表达式变成

$$\mathbf{d}\phi(u, v) = \nabla_u \phi(v) - \nabla_v \phi(u) - \phi([u, v])$$

实际上，此时的平行四边形不再封闭，为了使得其封闭，我们必须额外补上一条短边。积分  $\Omega$  在这条短边上额外获得了贡献。（之前在定义黎曼曲率张量时，我们已讨论过这一点！）

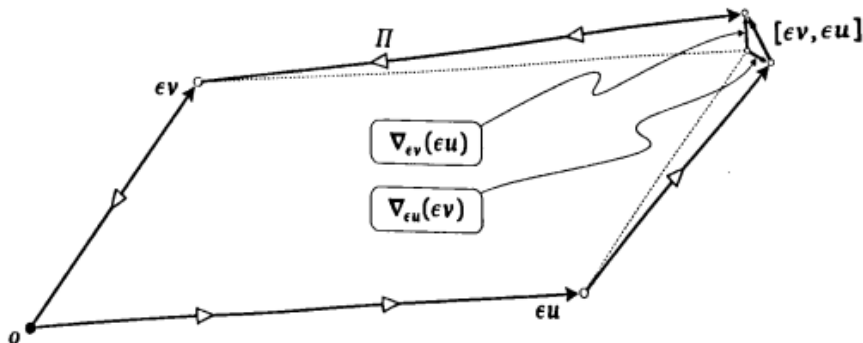


图 37-4 一般的向量场不会形成封闭的平行四边形，然而，我们可以用换位子  $[\epsilon u, \epsilon v] = \nabla_{\epsilon v} \epsilon u - \nabla_{\epsilon u} \epsilon v$  跨接这个缝隙，从而形成一个闭合的环路

接着我们可以看一下 2-形式的外导数。设  $\Pi(\epsilon u, \epsilon v, \epsilon w)$  是按照右手定则形成的小平行六面体的表面，我们考虑一个 2-形式  $\Psi$  在有向二维边界  $\Pi$  上的积分：

$$\Omega(\epsilon u, \epsilon v, \epsilon w) = \iint_{\Pi} \Psi$$

根据我们之前的定义，显然我们要做的是将 2-形式  $\Psi$  应用到一个一个小面元上，在将所得的值累加起来，用经典微积分的语言来说，就是：

$$\Omega(\Pi) = \iint_{\Pi} \underline{\Psi} \cdot \hat{n} d\mathcal{A}$$

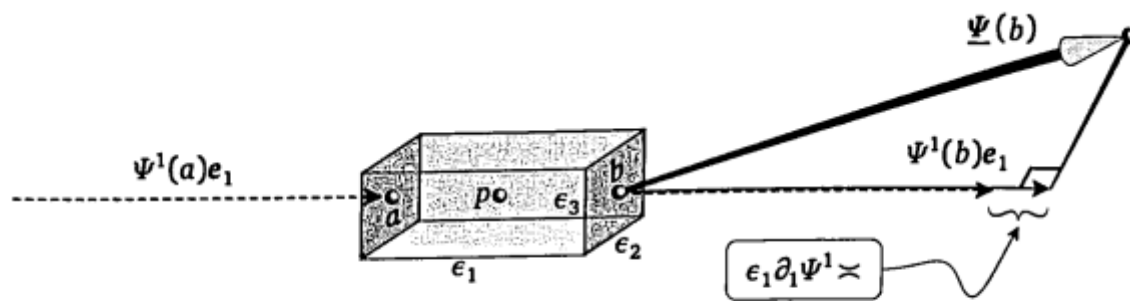


图 37-5 从右端面流出的流量  $\propto \epsilon_2 \epsilon_3 \Psi^1(b)$ . 从左端面流出的流量  $\propto -\epsilon_2 \epsilon_3 \Psi^1(a)$ . 所以, 从这一对端面净流出的流量  $\propto [\partial_1 \Psi^1 \epsilon_1] \epsilon_2 \epsilon_3 = [\partial_1 \Psi^1] \nu$

从如图所示的几何直观中很容易知道: 从左、右这一对端面流出的流量是  $[\partial_1 \Psi^1] \nu$ , 因此, 从这个“盒子”内流出的总流量自然是

$$[\partial_1 \Psi^1 + \partial_2 \Psi^2 + \partial_3 \Psi^3] \nu = (\nabla \cdot \underline{\Psi}) \nu$$

这显然是  $\Psi$  的外导数!

## (★) 外微积分的基本定理: 广义斯托克斯定理

我们接下来介绍本节中最重要的定理。我们会先应用它得到经典微积分中的一些重要结论, 再给出证明。设我们有一个  $p+1$  维的定向紧区域  $R$ , 将其  $p$  维边界记为  $\partial R$ ,  $\phi$  是一个  $p$ -形式, 那么我们有:

$$\int_R d\phi = \int_{\partial R} \phi$$

我们先举出一些人畜无害的小例子吧。现在给出  $\mathbb{R}^2$  中的区域  $R$ , 设其面积为  $A(R)$ , 我们考虑 1-形式  $x dy$  顺时针绕其边界的积分。

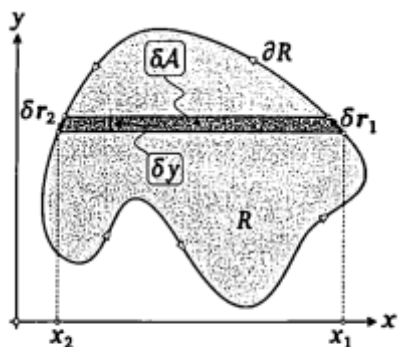


图 37-6 从  $\delta r_1$  到  $\delta r_2$  对  $\oint_{\partial R} x dy$  的贡献是  $\delta A$

从经典微积分的角度，我们可以被夹在高度  $(y, y + \delta y)$  之间的一条微元，点在运动过程中会先划过右侧，再划过左侧。因此，点划过这个条带的两侧时带来的贡献是：

$$(x dy)(\delta r_1) + (x dy)(\delta r_2) = (x_1 - x_2)\delta y = \delta \mathcal{A}$$

因此积分的结果应该是这个区域的面积。这可以通过外微分基本定理一眼看出来：

$$\oint_{\partial R} x dy = \iint_R d(x dy) = \iint_R dx \wedge dy = \mathcal{A}(R)$$

我们现在看一下  $d^2\Phi = 0$  的含义，使用两次基本定理：

$$0 = \int_R d^2\Phi = \int_{\partial R} d\Phi = \int_{\partial(\partial R)} \Phi$$

这里的  $\Phi, R$  都是任意的，因此这个结果似乎从几何上告诉我们：边界的边界是 0。这可以通过下图这个平行六面体的例子来理解：每条边界被正向走过一次，又反向走过一次：

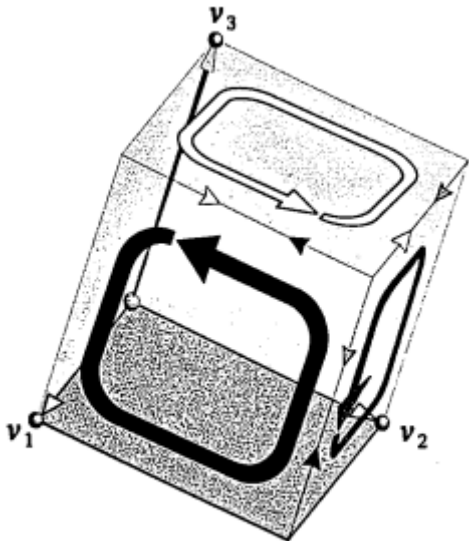


图 37-7 边界的边界是零： $\partial^2 = 0$

接下来，我们要说明外微分基本定理包含了所有经典向量微积分的定理。首先取  $\Phi = f$  为 0-形式，那么  $d\Phi = df$  是 1-形式， $R$  是一维的曲线  $K$ ，而  $\partial R$  则是曲线  $K$  的端点。因此此时我们有：

$$\int_K df = f(b) - f(a) \Rightarrow \int_K (\nabla f) \cdot dr = f(b) - f(a)$$

这是经典微积分中的牛顿-莱布尼兹公式。

再取  $\Phi = \phi$  为 1-形式，则  $d\Phi$  为向量场  $\nabla \times \underline{\phi}$  对应的通量 2-形式， $R$  是二维可定向曲面， $\partial R$  是其一维边界。将 1-形式写为：

$$\phi = \phi_x dx + \phi_y dy \Rightarrow d\phi = (\partial_x \phi_y - \partial_y \phi_x) \mathcal{A}$$

那么可以写出：

$$\oint_{\partial R} \phi_x dx + \phi_y dy = \iint_R (\partial_x \phi_y - \partial_y \phi_x) dx dy$$

这是格林公式。对于更加一般的情况，我们将其推广到空间中，取  $R$  为三维空间中的二维曲面，我们就得到了：

$$\oint_{\partial R} \underline{\phi} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial R} \phi = \iint_R d\phi = \iint_R (\nabla \times \underline{\phi}) \cdot \hat{n} \cdot d\mathcal{A}$$

这是所谓斯托克斯公式。

最后，如果我们将  $\Phi = \Psi$  取为 2-形式， $d\Psi = (\nabla \cdot \underline{\Psi}) \mathcal{V}$ 。那么此时的  $R$  是一个有向体积  $V$ ，边界  $\partial R$  是一个二维可定向曲面。于是我们就得到了所谓的高斯公式：

$$\iiint_R (\nabla \cdot \underline{\Psi}) d\mathcal{V} = \iint_{\partial R} \underline{\Psi} \cdot \hat{n} \cdot d\mathcal{A}$$

现在，我们将针对二维的特殊情形证明外微积分基本定理。

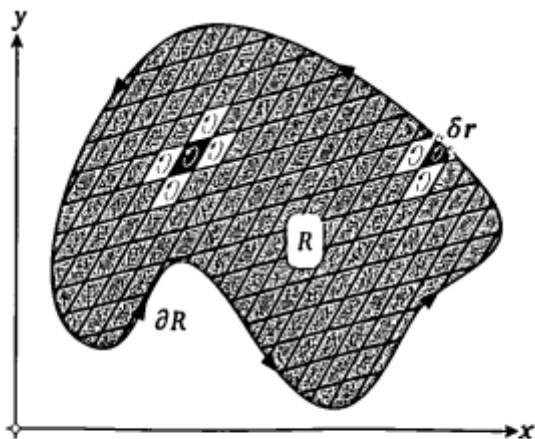


图 37-8 因为内部的黑色平行四边形的边与毗连的白色平行四边形的边的方向相反，所以环量被抵消。将所有单元格加起来，只有邻接区域边界上（例如  $\delta \mathbf{r}$ ）的环量不会被抵消

如图，很容易发现：假如我们有一个 1-形式，那么下式成立：

$$\oint_{\partial R} \phi = \sum_{R \text{ 内部的单元格}} \oint_{\partial(\text{单元格})} \phi = \sum_{R \text{ 内部的单元格}} d\phi(\epsilon u, \epsilon v) \Rightarrow \oint_{\partial R} = \iint_R d\phi$$

这样我们就完成了这个特殊情形下的证明。这种手段在数学分析中被用于证明格林公式、斯托克斯定理和高斯定理。

之前我们说过，一个解析的复变函数满足：

$$\mathbf{d}(f\mathbf{d}z) = 0$$

那么我们可以立刻得到解析函数满足的柯西定理：

$$\oint_{\partial R} f\mathbf{d}z = \iint_R \mathbf{d}(f\mathbf{d}z) = 0$$

就算我们研究的函数不是解析的，这种方法也可以用于计算某些积分的值，例如取  $f(z) = \bar{z}$ ：

$$\oint_{\partial R} \bar{z}\mathbf{d}z = \iint_R \mathbf{d}(\bar{z}\mathbf{d}z) = 2i \iint_R \mathcal{A} = 2i\mathcal{A}(R)$$

除此之外，我们还可以得到所谓庞加莱引理。这里我们只处理一个简单的情形，即 1-形式的庞加莱引理。设  $\phi$  在  $\mathbb{R}^n$  的单连通区域上是闭的，我们要证明  $\phi$  也是恰当的。我们构造势能：

$$f(p) = \int_o^p \phi$$

其中  $o$  是势能零点。如图，设  $p_1, p_2$  是临近的两个点，连接它们的短向量是  $\epsilon v$ ，那么两点间的势能差是

$$\delta f = \mathbf{d}f(\epsilon v) = \int_{-K_1+K_2} \phi = \int_{\epsilon v} \phi = \phi(\epsilon v)$$

从而我们就得到了  $\phi = \mathbf{d}f$ 。

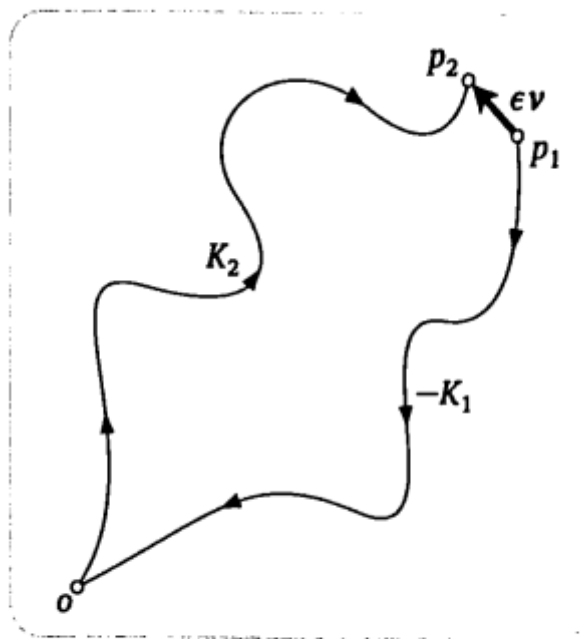


图 37-9 如果  $\mathbf{d}\varphi = 0$ ，则  $f(p) \equiv \int_o^p \varphi$  是路径无关的，且  $\varphi = \mathbf{d}f$

## 德拉姆上同调简介

前面的庞加莱引理指出：在单连通区域上，一个微分形式是闭的等价于它是恰当的。但若区域  $R$  不是单连通的，那么这一结论基于不成立。在非单连通区域上，研究那些是闭的但是不是恰当的微分形式可以得到关于  $R$  的详细拓扑信息。

我们首先从闭的但不是恰当的 1-形式开始，构建德拉姆上同调群  $H^1(R)$ 。为此，我们关注一个特殊的二维涡旋向量场。



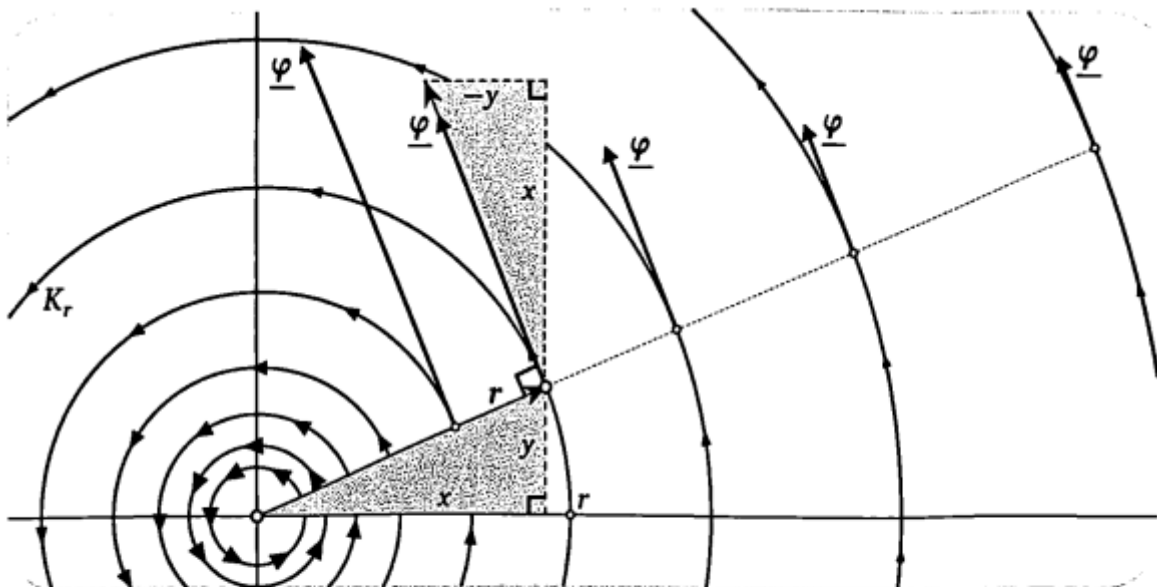


图 37-10 一个特殊的圆形涡旋向量场  $\underline{\varphi}$ ，其速度为  $|\underline{\varphi}| = q/2\pi r$ 。注意，当我们从原点离开时，速度会减慢。 $\underline{\varphi}$  的方向是通过将半径向量  $r$  旋转一个直角得到的，但由于半径的长度为  $r = |r|$ ，我们必须将它乘以  $q/2\pi r^2$ 。因此，涡旋 1-形式是  $\varphi = (q/2\pi r^2)[-ydx + xdy]$ 。原点是一个速度无穷大的奇点，必须排除

在  $\mathbb{R}^2$  的极坐标系下，考虑以原点为中心的逆时针涡旋，其流速为：

$$|\underline{\phi}| = \frac{q}{2\pi r}$$

我们将长度为  $r$  的半径向量旋转  $\frac{\pi}{2}$  后得到对应的涡流的方向向量。为了使得涡旋 1-形式沿着圆周的积分与半径无关，我们选择涡旋 1-形式为：

$$\phi = \frac{q}{2\pi r^2}[-ydx + xdy]$$

此时有：

$$\mathcal{C} = \oint_{K_r} \phi = q$$

这说明  $\phi$  绝对不可能是恰当的，然而我们却能证明它是闭的：

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi}{q}\right) d\phi &= -\frac{1}{r^4}(\mathbf{dr}^2) \wedge [-ydx + xdy] + 2\frac{1}{r^2} \mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy} \\ &= -\frac{1}{r^4} 2(xdx + ydy) \wedge [-ydx + xdy] + 2\frac{1}{r^2} \mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy} \\ &= -\frac{1}{r^4} 2(x^2 + y^2) \mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy} + 2\frac{1}{r^2} \mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy} \\ &= 0 \end{aligned}$$

我们可以来看看涡旋 1-形式的几何意义：

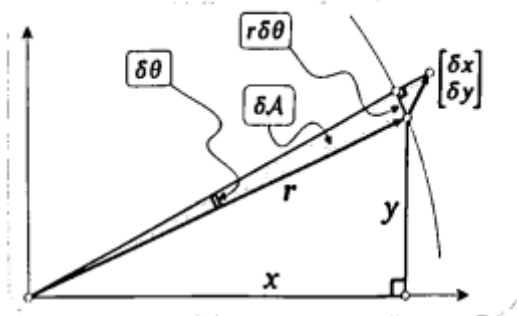


图 37-11 阴影三角形的面积  $\delta A$  可以通过其边的行列式来计算，得到  $\delta A = \frac{1}{2}(-y\delta x + x\delta y)$ ，或者从图形上得到  $\delta A \approx \frac{1}{2}r^2\delta\theta$ 。由于这些表达式相等，我们发现涡旋 1-形式为  $\varphi = \frac{q}{2\pi}d\theta$

从图中可以明显看出：

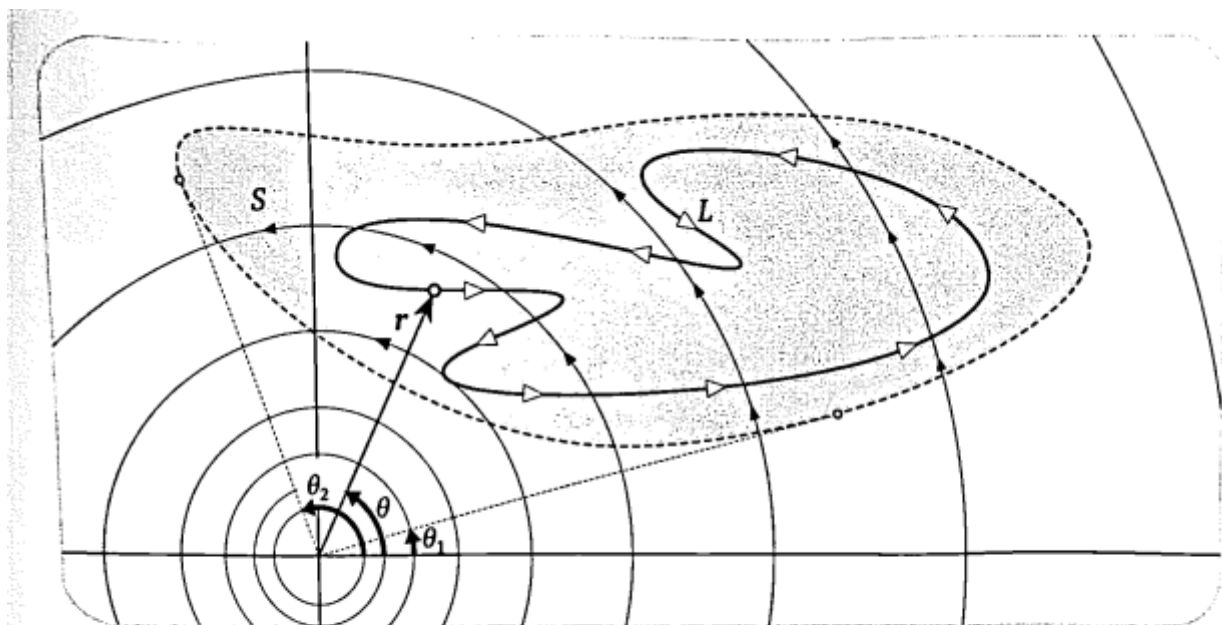
$$\frac{1}{2}(-y\delta x + x\delta y) = \delta A = \frac{1}{2}r(r\delta\theta)$$

于是我们有：

$$\phi = \frac{q}{2\pi}d\theta \Rightarrow d\phi = \frac{q}{2\pi}d^2\theta = 0$$

这就怪了！我们目前明明处在单连通区域上啊！解决这个问题的方式相当微妙：这是由于  $\theta$  的多值性——对于给定的一个点， $\theta$  可以有无数多个值，因此， $\theta$  甚至不是坐标的函数！我们可以在  $S$  上定义一个单值角函数，这时确实有：

$$\oint_L \frac{q}{2\pi}d\theta = 0$$



**图 37-12** 设  $S$  是一个不包含原点的单连通区域，我们可以在上面定义一个单值的角函数  $\theta$ ，满足  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ 。于是  $\varphi = \frac{1}{2\pi} d\theta$  在  $S$  内是恰当的。当  $r$  沿环路  $L$  行进时，尽管一路来回摇摆，但当它回到起点时，其角度  $\theta$  的净变化为零，所以  $C = \oint_L \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$

(其实这个例子还有一个很简单的解释，虽然  $\mathbb{R}^2$  是单连通的，但是  $\mathbb{R}^2 - \text{原点}$  却不是单连通的，一个回路无法穿过原点，连续变形，直至收缩到一点。) 但是，如果我们在有孔的平面上这样做，我们将立刻遇到麻烦—— $\theta$  不是连续的，更不是可微的！

我们之前看到  $C = \oint_{K_r} \phi$  与  $K_r$  的大小无关，这实际可以被进一步推广：如果我们将圆周逐渐变形成任意的形状，只要在变形过程中不跨过任何奇点（这里当然就是原点啦），积分的值都不会改变。换言之，在包含涡旋奇点的回路上，闭 1-形式都有相同的环量  $q$ ，而在不包含奇点的回路上环量为 0。注意：这个结论不止对我们刚刚构造的涡旋 1-形式有用，它对于任何闭 1-形式都是有用的！我们可以将其换一种表述方法：在环路连续变形的情况下，一个闭 1-形式沿着环路的环量（称为“德拉姆周期”）是不变的。考虑到这个环量只与环路围绕的奇点有关，因此我们可以认为每个奇点拥有一个内禀的属性，这个属性就是我们所说的“留数”。

现在我们回到所谓第一德拉姆上同调群  $H^1(\mathbb{R}^2 - \text{原点})$ ，群中的元素是 1-形式的等价类：如果两个 1-形式在绕所有环路时具有相同的环量，则我们认为它们之间存在等价关系。用术语来说，我们称这两个 1-形式是上同调的。

显然，如果两个 1-形式  $\tilde{\phi}$  和  $\phi$  是等价的，这意味着：

$$\exists f, \tilde{\phi} - \phi = df$$

每个等价类（称为“上同调类”）都按照环量  $C$ （称为上同调类的“周期”）来定义。显然，如果我们取该群的两个不同元素相加，必然有：

$$\mathcal{C}(\phi_1 + \phi_2) = \mathcal{C}(\phi_1) + \mathcal{C}(\phi_2)$$

因此，我们可以说群  $H^1(\mathbb{R}^2 - \text{原点})$  同构于实周期加法群  $\mathbb{R}$ 。

接下来可以考虑  $\mathbb{R}^3$  中的 1-形式。注意到  $\mathbb{R}^3 - \text{原点}$  是单连通的（即使从  $\mathbb{R}^3$  中挖去原点，我们仍然能将一个回路连续地收缩到一点），因此  $\mathbb{R}^3 - \text{原点}$  中的闭 1-形式也是恰当 1-形式。而  $\mathbb{R}^3 - z\text{轴}$  的情况则与  $\mathbb{R}^2 - \text{原点}$  的情况类似。

接下来我们要讨论与 2-形式相关的第二德拉姆上同调群，我们先定义一个在  $\mathbb{R}^3$  中有奇点的向量场，令：

$$\hat{r} = \frac{1}{r} \vec{r} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

我们要定义的向量场是：

$$\underline{\Psi} = \frac{q}{4\pi} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

这可以看作流体以匀速被泵入原点的流速场，也可以被看作点电荷的电场或者质点的引力场。我们可以先考虑与这个向量场相关的 1-形式：

$$\psi = \frac{q}{4\pi r^3} (x\mathbf{d}x + y\mathbf{d}y + z\mathbf{d}z)$$

此时，沿着环路的积分就是引力或静电力做功！那么显然有  $\mathcal{W}_J = \int_J \Psi = 0$ ，因此  $\Psi$  是闭的，又容易证明  $\Psi$  是恰当的，对应的 0-形式势能：

$$f = -\frac{q}{4\pi r}$$

这验证了我们对  $\mathbb{R}^3 - \text{原点}$  区域上  $H^1(R)$  的研究——没有什么特殊的。

接着我们开始研究与这个矢量场相关的通量 2-形式：

$$\Psi = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{r^3} (x\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z + y\mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x + z\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y)$$

由于：

$$\Omega = \iint_S \Psi = q$$

$\Psi$  显然不是恰当的，但是我们可以证明它是闭的：

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{4\pi}{q}\right) d\Psi &= \frac{3}{r^3} \mathcal{V} - \frac{3}{r^4} \mathbf{dr} \wedge (x\mathbf{dy} \wedge \mathbf{dz} + y\mathbf{dz} \wedge \mathbf{dx} + z\mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy}) \\
 &= \frac{3}{r^3} \left[ \mathcal{V} - \frac{1}{r^2} (x^2 + y^2 + z^2) \mathcal{V} \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

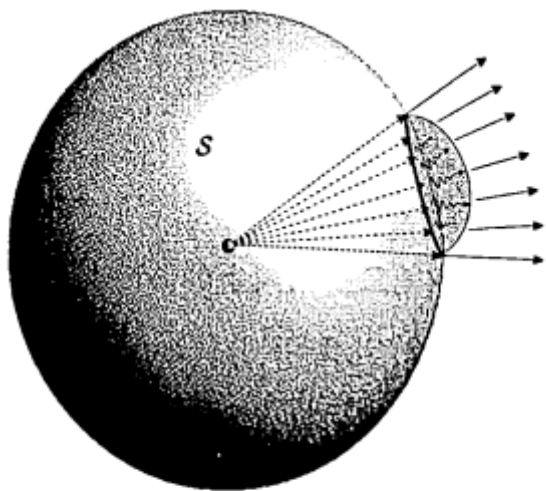


图 37-14 因为这个 2-形式是闭的，流进鼓泡的流体一定都从外表面流出去，所以从  $S$  流出的流量是不变的

如图，很容易证明：在曲面连续变性的情况下，一个闭 2-形式从二维闭曲面流出的通量（称为“周期”）是不变的。这样， $H^2(\mathbb{R}^3 - \text{原点})$  也与  $\mathbb{R}$  同构。

最后，我们来看环面上的第一上同调群。

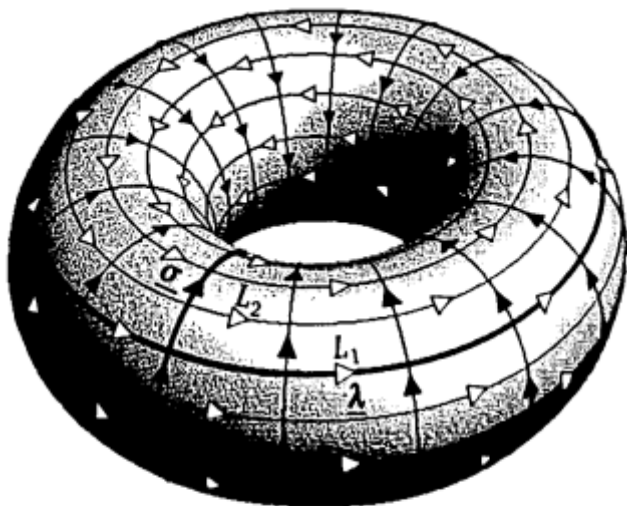


图 37-15 环绕环面赤道的环路  $L_1$  和穿过环面的洞的环路  $L_2$  在拓扑上是不同的：我们不能将其中一个变形为另一个，因此环面上一个闭的 1-形式流的等价类需要用两个独立的周期来表示

如图，我们在环面上放置两种流  $\lambda, \sigma$ ，假设两种流都是闭的，它们的流线  $L_1, L_2$  显然在拓扑上不等价。另外， $\lambda, \sigma$  都是不恰当的，这是因为：

$$\omega_1(\lambda) = \int_{L_1} \lambda \neq 0, \omega_2(\lambda) = \int_{L_2} \lambda = 0, \omega_1(\sigma) = \int_{L_1} \sigma = 0, \omega_2(\sigma) = \int_{L_2} \sigma \neq 0$$

现在考虑一个更一般的向量场  $\phi = a\lambda + b\sigma$ ，显然它是闭的，但不是恰当的，而且它有两个独立的周期  $\omega_1(\phi), \omega_2(\phi)$ 。环面上闭 1-形式的等价类正是由这两个独立的拓扑周期确定！容易发现， $H^1(\text{环面})$  是同构于  $\mathbb{R}^2$  的。

因此，德拉姆上同调群用于研究非单连通区域中的闭  $p$ -形式来获得这个区域拓扑结构的信息。其中装的是  $p$ -形式的等价类。