Chapter 18： GGB的第二个证明（利用角盈）

#DifferentialGeometry

欧拉示性数

在研究多面体时，欧拉将目光聚焦到多面体的面数、棱数、顶点数的离散计数上。他发现了：

$$\chi(\mathcal{P}) = V - E + F$$

其中 $\chi(\mathcal{P})$ 称为多面体 $\mathcal{P}$ 的欧拉示性数，它代表多面体 P 的特征。

柯西的证明

现在我们来看柯西如何证明上式。我们假设我们的多面体是在一个拓扑等价到 $\mathbb{S}^2$ 的气球上面绘制的，点和棱只是这个气球上的点和连接点的曲线。我们希望将这个多面体压平，那么我们剪去其中一个面 H，将多面体放置在一个平面上，让面 H 朝下。现在，我们的多面体成了一个有孔的气球，我们将孔 H 边上的所有顶点限制在孔 H 所在的平面上，并拿着这些顶点，放射状地向外拉整个气球并压平，最终，多面体将成为孔 H 所在的平面上的平面图形。

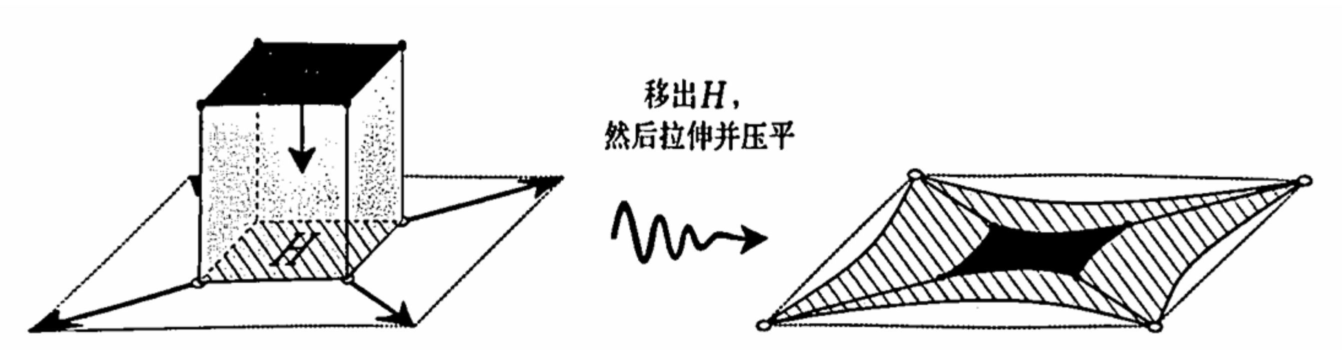


图 18-3 为了将一个立方体的表面压平，我们先移除底面 H，在底部形成一个孔（斜划线部分），然后拉伸这个孔边缘上的顶点，直到其他的面都被拉平到一个平面

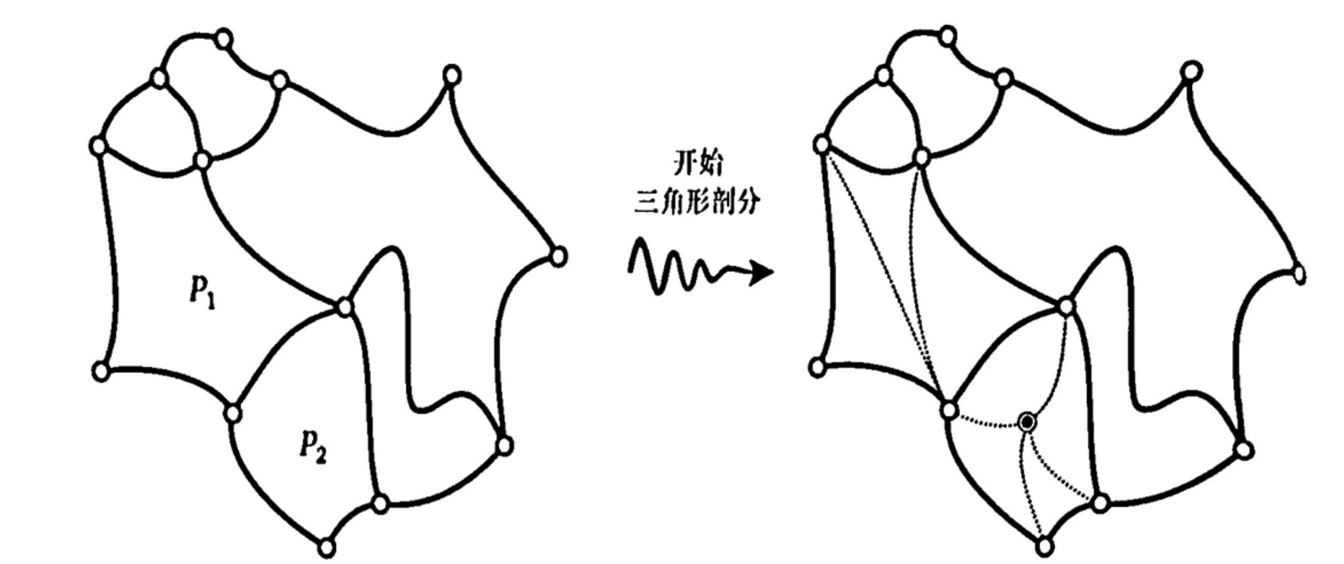
我们将这样操作后得到的图形称为“多边形网”。由于在拓扑等价到球面的多面体中，欧拉公式写为：

$$V - E + F = 2$$

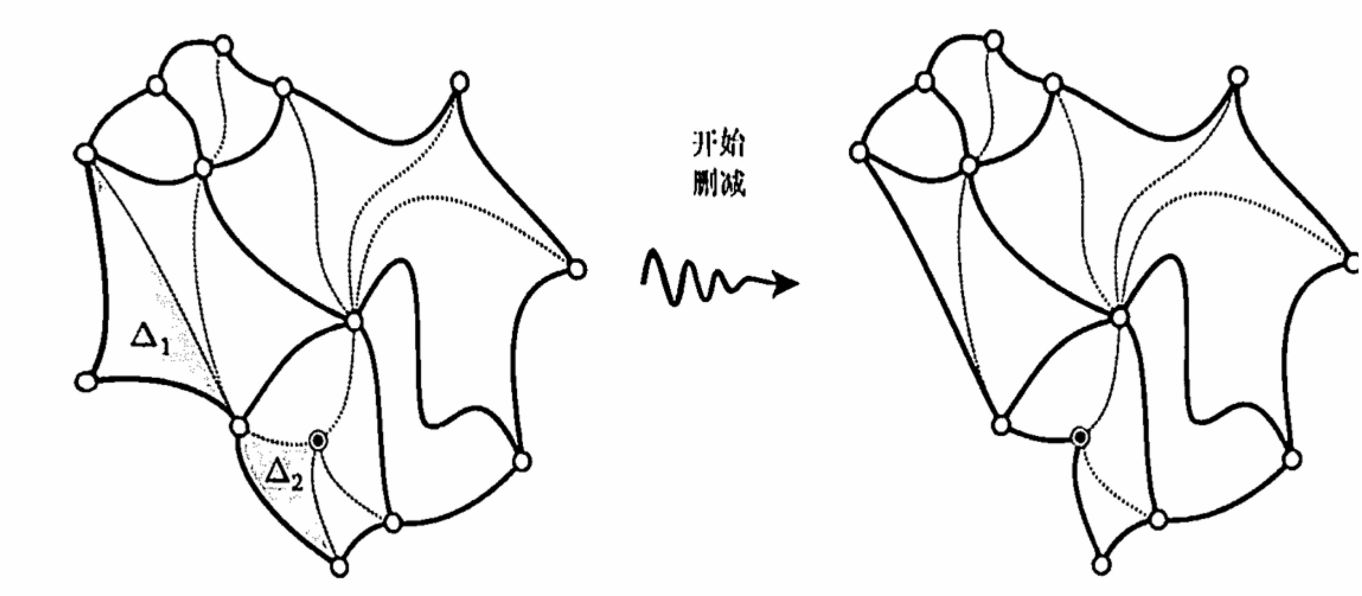
而现在，我们的操作没有改变 V, E 的数量，使得 F 减少了 1. 因此，我们需要证明：

$$\chi(\text{多边形网}) = 1$$

我们希望将这个网格通过剖分全部变成三角形，为此我们提出了两种剖分方式：



如图，方式 1 是选择一个顶点，画 $n-3$ 条边将其与其他所有顶点连接起来；方式 2 则是在中间新建一个顶点，画 n 条边将其与原来的 n 个顶点连接起来。容易证明，这两种剖分方法均不改变多边形网的欧拉示性数。
现在，我们要做的是将这些三角形依次移除掉。每一轮移除中，我们只有两种方法：



如图，方法 1 是移除一个与其他三角形有 1 条公共边的三角形，而方法 2 则是移除一个有 2条公共边的三角形。容易证明，这两种方式也不改变欧拉示性数。因此，最后只会剩下一个三角形，它的欧拉示性数是 1。 得证。

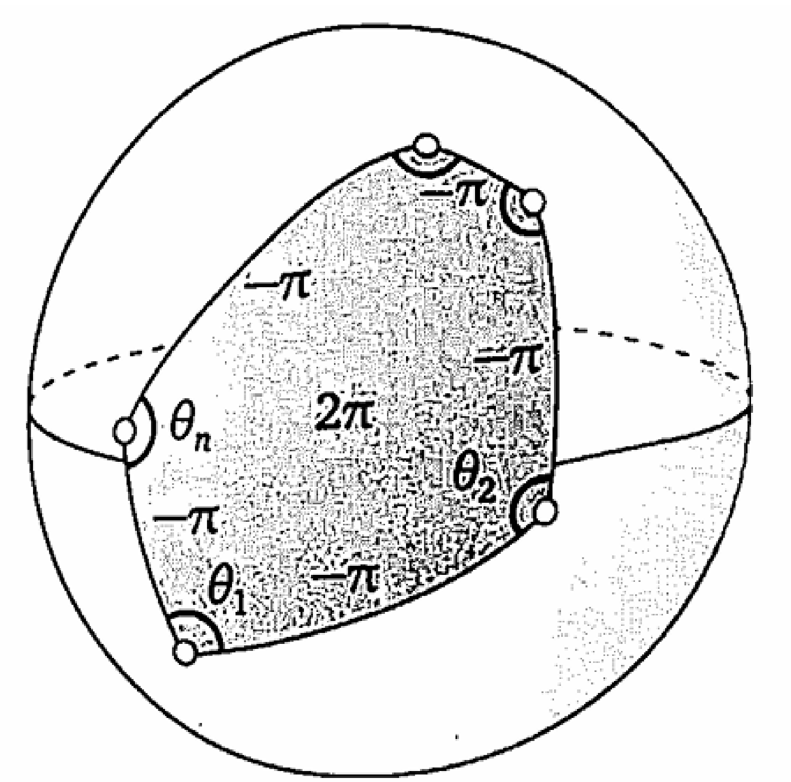
勒让德的证明

接下来我们再提供一个证明，这个证明是由勒让德完成的。我们将球面上三角形角盈的结果推广到球面上的 n 边形：

$$\frac{1}{R^2}\mathcal{A}=\epsilon=\text{内角和}-(n-2)\pi$$

现在，我们考虑我们的多面体是一个气球，我们要给它充气，使之最终变成一个球形（注意：我们的表述很模糊，我们可没有说“充气”完成后各条边是球面上的测地线）。现在，我们将这个气球“硬化”，在每个顶点处钉上一根钉子，在钉子之间连接橡皮筋来形成各条边。现在我们“释放”所有的橡皮筋，那么系统将自然达到势能极小的状态——各条橡皮筋成为测地线。这样，我们从一个多面体得到了球面上的测地线网，而且所有的步骤中，欧拉示性数都没改变。

那么现在总的角盈是多少呢？注意到每条边都贡献 -2π ，每个顶点贡献 2π（每个顶点周围的一圈角都要相加），每个面贡献一个 2π（下图可视化了一个多边形的贡献）：



从而：

$$\sum_i \epsilon(P_i)=2\pi[V-E+F]=2\pi\chi(P)$$

又由于这些多边形覆盖了整个球面，因此：

$$\frac{1}{R^2}\sum_i \mathcal{A}(P_i)=4\pi$$

从而我们立刻得到：$\chi(P)=2$，上式得证。

一般情况

刚才我们研究的都是多面体拓扑等价到球面的情况，其欧拉示性数为 2，现在，我们希望证明一般的情形：

$$\chi(S_g)=2-2g$$

我们将从一个断言开始：环面拓扑等价到一个带有柄（就像咖啡杯的把手一样）的球体，更一般地，S_g 拓扑等价到含有 g 个柄的球体。现在，我们只需证明：在闭曲面 S 上增加一个柄，$\chi(S)$ 就减少 2.
如图，我们很容易做出欧拉示性数为 0 的柄，因为它移除了两个面：

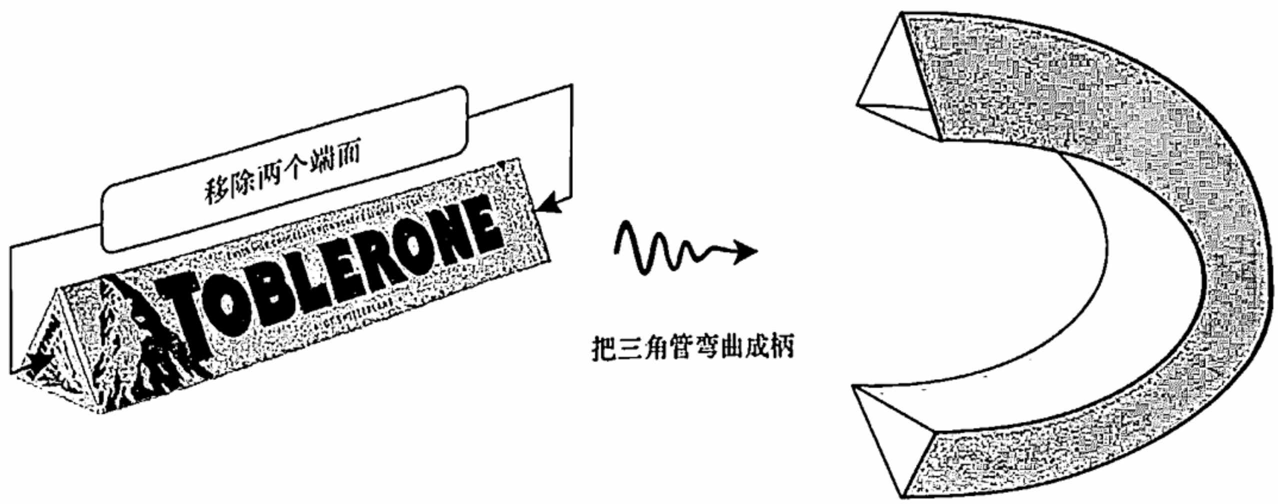


图 18-9 要做一个简单的柄，将三棱柱（这里用瑞士著名的三角巧克力的盒子表示）的两个端面移除，然后弯曲三角管生成把手（其欧拉示性数为 0）

现在，我们要将这个柄粘到一个曲面上，这需要对曲面进行三角剖分，并移除两个三角形的面：

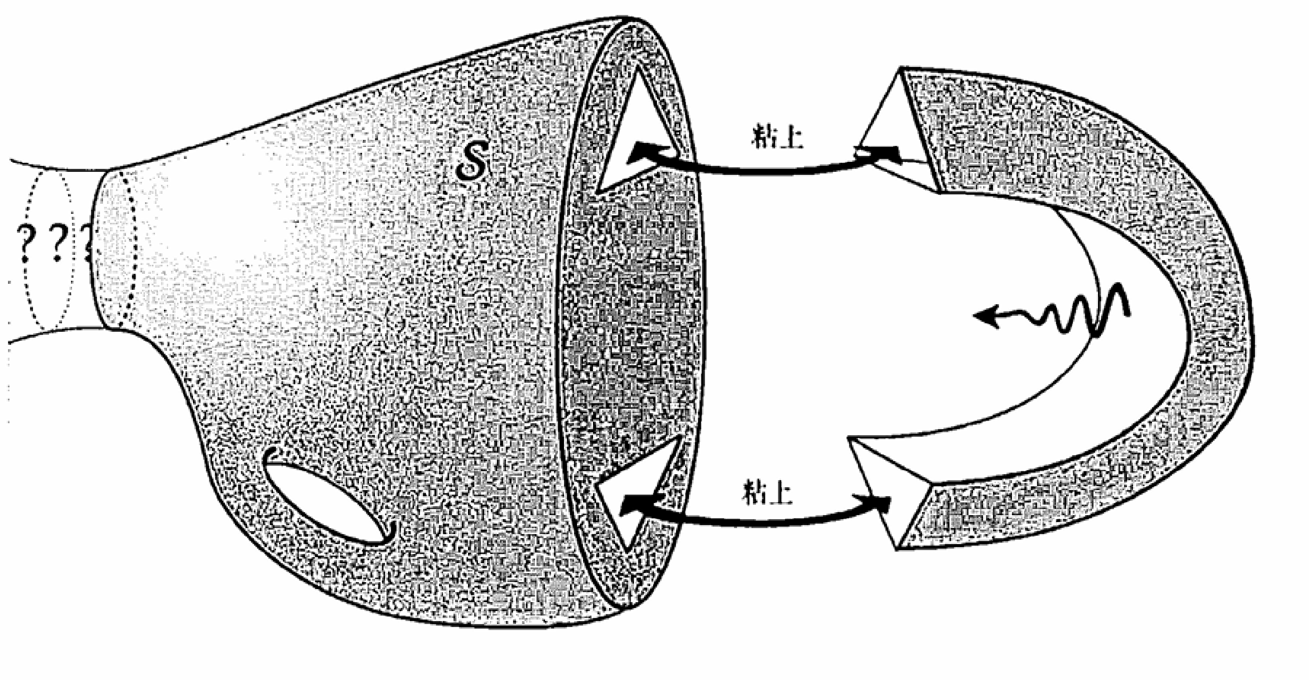


图 18-10 $\mathcal{S}$ 是一个一般的闭曲面，它的左边以未知的方式延伸出去，标记为？？？. 我们对 $\mathcal{S}$ 做三角形剖分（未画出）并移除两个三角形，就将 $\chi(\mathcal{S})$ 减小了 2，然后再将柄粘在挖掉的三角形上，这时 $\mathcal{S}$ 并未增加. 所以粘上柄使得 $\mathcal{S}$ 减小了 2

这会使得曲面的欧拉示性数减小 2。而曲面的欧拉示性数+柄的欧拉示性数等于粘上柄之后的曲面的欧拉示性数（这是因为在粘上柄的一瞬间，消失了 6 个顶点和 6 条棱）。因此我们证明了上面的结论。

现在让我们回到勒让德的证明。容易看到，就算我们球面上多边形网的边（或者推广到任意曲面上多边形网的边）不是测地线，以下式子也成立：

$$\sum_i \epsilon(P_i) = 2\pi[V - E + F] = 2\pi\chi(P)$$

我们不加证明地将其推广到任意亏格的曲面 S_g。再考虑推广下式：

$$\frac{1}{R^2}\mathcal{A}(P_i) = \epsilon(P_i)$$

实际上，左侧是球面多边形 P_i 中的全曲率。对于任意曲面上（不一定是球面），由局部高斯-博内定理可以知道一个多边形内的角盈：

$$\epsilon(P_i) = \iint_{P_i} \kappa d\mathcal{A} = \kappa(P_i)$$

从而：

$$\kappa(S_g)=\sum_i \kappa(P_i)=\sum_i \epsilon(P_i)=2\pi\chi(S_g)=2\pi(2-2g)$$

第一个等号是对每个多边形求和，第二个等号来自局部高斯-博内定理，第三个等号来自勒让德证明中几何直观的推广，第四个等号来自来自通过 S_g 同胚于带有 g 个柄的球面求出的 S_g 的欧拉示性数。至此，我们给出了 GGB 的一个相对严格（但是也很不严格）的证明。