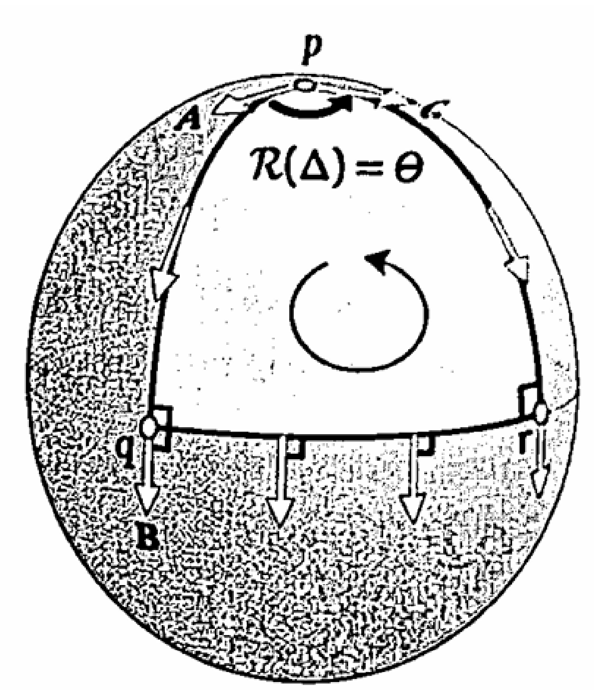
Chapter 24： 和乐性

#DifferentialGeometry

一个向量沿着不同的路径做平行移动，会得到不同向量的性质称为和乐性(holonomy)。我们现在引入一般的定义：曲面 $\mathcal{S}$ 上简单闭环 L 的和乐性 $\mathcal{R}(L)$ 是 $\mathcal{S}$ 的某个切向量绕 L 平行移动的净旋转角。在第 22 集中，我们说过，两个向量沿着同一条曲线平行移动，它们的夹角不发生变化，因此我们无需指定是哪个向量进行平行移动，换言之，由于所有切向量都旋转相同的角度，我们可以将和乐性看作整个切平面沿着环路平行移动的旋转角。进一步地，我们可以证明（这里直接给出结论），和乐性与环路的起点无关。
环路所包围的面积的曲率决定了环路上和乐性的正负号和大小。作为一个例子，我们看球面上测地线组成的环路：



容易证明，环路内三角形的全曲率 $\mathcal{K}(\Delta)$ 与环路上的和乐性相同，都等于图中标出的 Θ

现在我们研究一般曲面上一般测地三角形的和乐性。

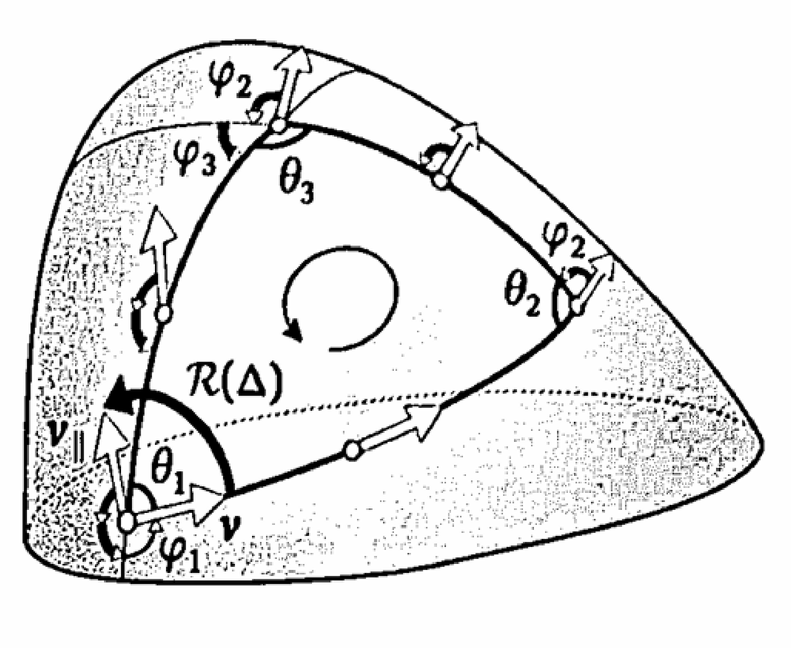


图 24-2　当一般曲面上的一般测地线三角形 Δ 的第一条边的切向量 $\boldsymbol{v}$ 沿 Δ 平行移动一圈，回到起点成为 $\boldsymbol{v}_\parallel$ 时，旋转的角度为和乐性 $\mathcal{R}(\Delta)$

从图中可以看出，v 的旋转方向与我们的绕行方向是相同的，那么容易计算出环路上的和乐性是 $2\pi-(\phi_1+\phi_2+\phi_3)$，对于欧几里得平面上，和乐性显然为 0。容易发现，它和角盈是相等的，对于测地线多边形也是如此。容易想到和乐性和角盈一样是可加

的，采用简单的几何观察就能证明这一点：

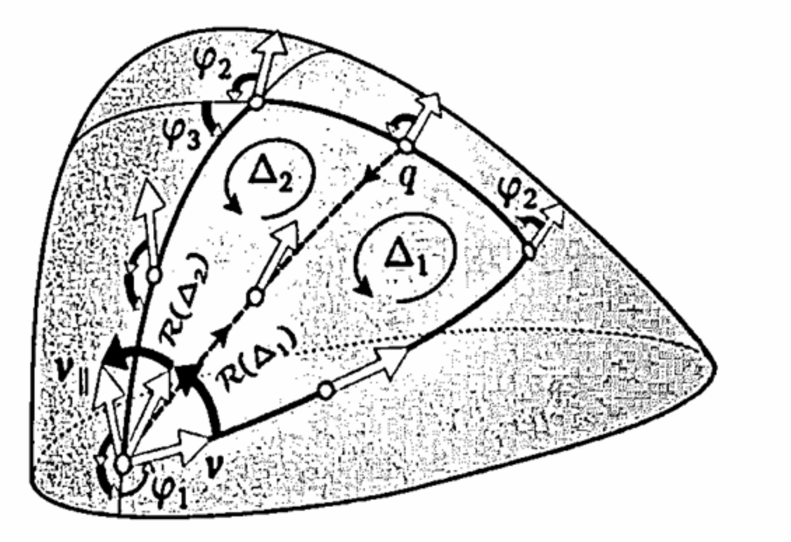
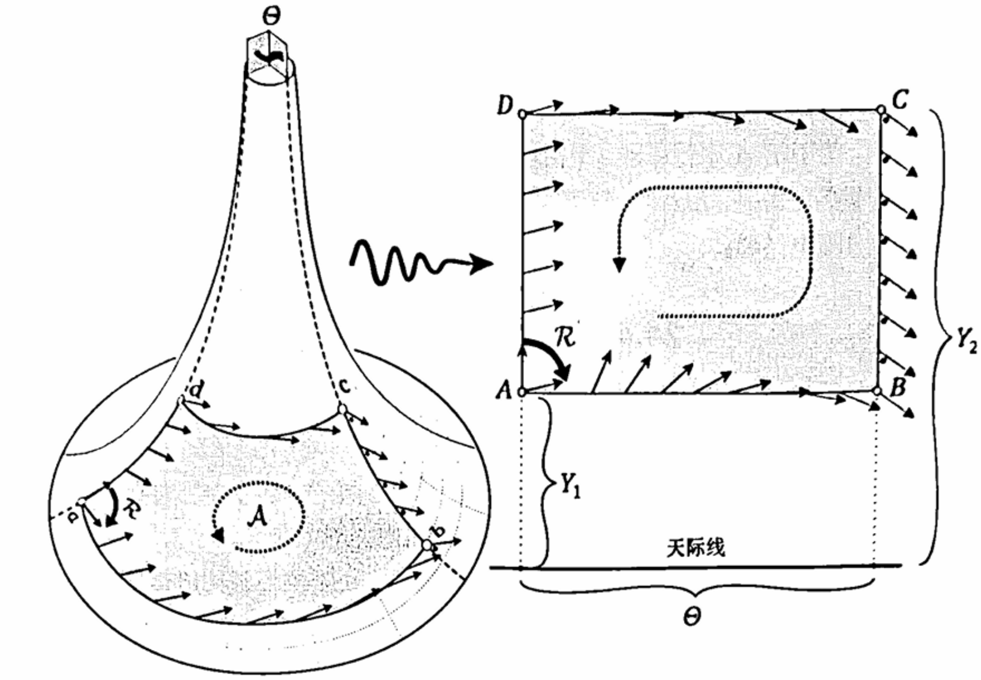


图 24-3 和乐性是可加的．插入用虚线画出的测地线，将测地线三角形 Δ 划分为 Δ_1 和 Δ_2．将 Δ_1 第一条边的切向量 ν 沿 Δ_1 平行移动，然后再沿 Δ_2 平行移动．因为沿着虚线画出的测地线来回的平行移动"相互抵消"，所以 $\mathcal{R}(\Delta)=\mathcal{R}(\Delta_1)+\mathcal{R}(\Delta_2)$

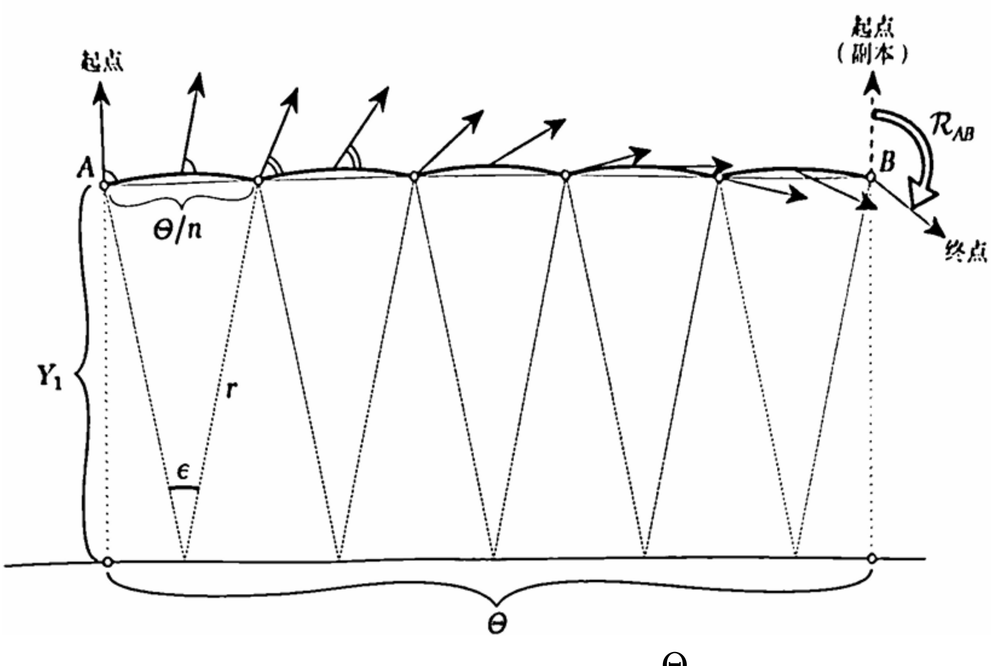
接下来我们看一个伪球面上的小例子。在这个例子中，我们假定和乐性 = 环路内部的全曲率这一点成立。之前，我们使用"单位面积上的角盈"定义了曲率，自然，现在我们也可以使用"单位面积上的和乐性"来定义曲率：

$$\kappa(p)=\lim_{L_p\to p}\frac{\mathcal{R}(L_p)}{\mathcal{A}(L_p)}$$

我们在伪球面上取如图所示的一小片区域：



容易求出该区域的面积为 $\mathcal{A}=R^2\Theta(\dfrac{1}{Y_1}-\dfrac{1}{Y_2})$，图中，曳物线 ad,bc 是测地线，而 ab,cd
却不是测地线（测地线在共形地图上应该是圆弧）。我们以 a 点为起点，选择沿着 ad 方向的向量为初始向量，我们现在希望在共形地图上处理这个向量在 ab 和 cd 上的平行移动。



我们使用测地线逼近 AB，在每个弧长为 $\dfrac{\Theta}{n}$ 的小圆弧上，由于向量和测地线的夹角要保持不变，因此就旋转了 $-\epsilon$，累计所有小圆弧，在 AB 边上旋转的总角度就是 $-\dfrac{\Theta}{Y_1}$

，因此，走完一圈的旋转角就是 $-\frac{\Theta}{Y_1}+\frac{\Theta}{Y_2}=-\frac{1}{R^2}\mathcal{A}$。因此这证明了伪球面的曲率确实是 $-\frac{1}{R^2}$。