Chapter 19： GGB的第三个证明（利用向量场）

#DifferentialGeometry

前置知识

我们有一个向量场 $V(z)$，假设它性质良好，以至于除了有限个孤立点之外都连续、可微。向量场不连续的点称为“奇点”，连续的点则被称为“正则点”。对于每个奇点，我们将 z 沿着绕它的闭环 L 旋转一圈时，$V(z)$ 旋转的圈数称为其奇点指数 $\mathcal{J}_v(a)$。换言之，我们定义 $\Theta(z)$ 是 $V(z)$ 与水平方向的夹角，令 $\delta_J\Theta$ 为 Θ 沿着某一定向曲线 J 从起点移动到终点时 Θ 的变化，那么我们将奇点指数定义为：$\mathcal{J}_V(s)=\dfrac{1}{2\pi}\delta_L\Theta$。举个例子：看图中 A, B, C 三个奇点：

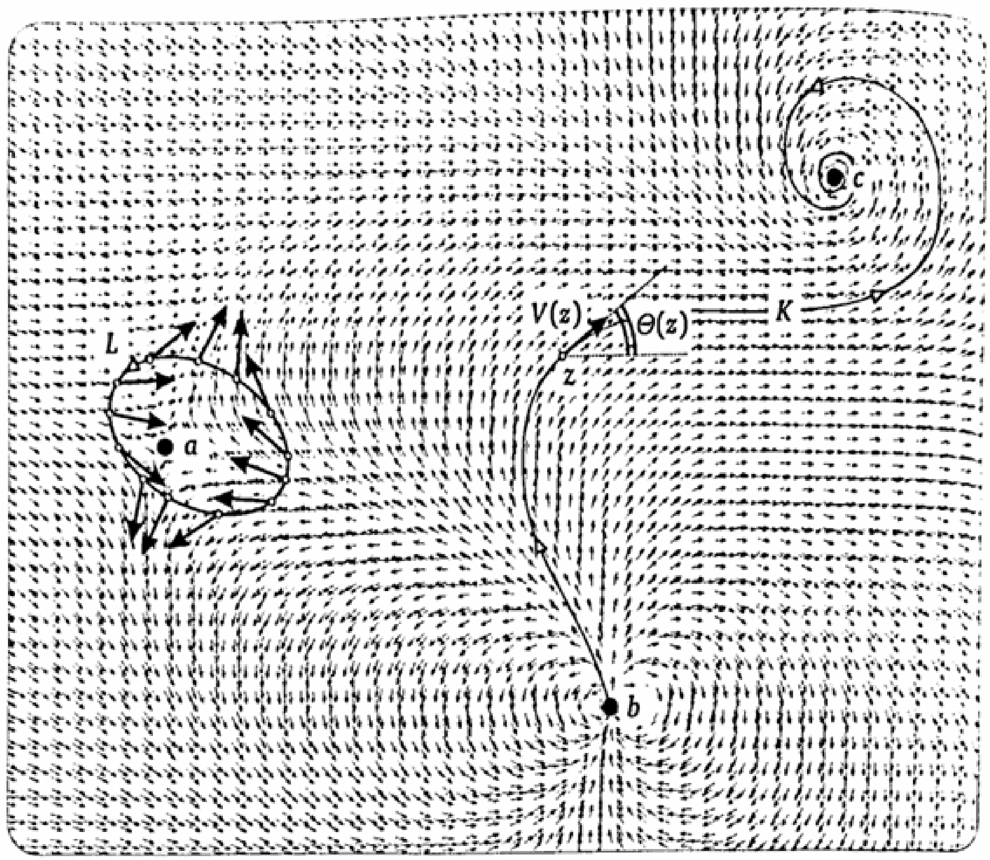


图 19-1 一个典型的向量场 $V(z)$. 图中显然有三个奇点：a 称为鞍点（或交叉点）；b 称为偶极子；c 称为涡旋（或焦点）. 图中还画出了流线 K. 当 z 绕奇点 a 逆时针旋转一圈，例如沿环绕点 a 的闭环 L 时，$V(z)$ 旋转的圈数称为 V 在点 a 处的奇点指数 $\mathcal{J}_V(a)$. 在图中，当我们绕 a 转一圈时，V 顺时针（即负向）转了一圈，所以 $\mathcal{J}_V(a)=-1$

它们的奇点指数分别为 $-1,+2,+1$。容易证明：$\mathcal{J}_V(s)$ 只与 s 有关，而与环绕 s 的路径无关。因此，实际上向量场在奇点的无穷小邻域内的行为决定了该奇点的指数：

$$\mathcal{J}_V(s) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r\to 0} \delta_{C_r}\Theta$$

一个简单的想法是将向量场看作一个复映射：$z \mapsto V(z)$，此时，$\mathcal{J}_V(s)$ 可被看作映射的像回路围绕原点 0 的次数。此时，该映射不解析的点称为它的奇点，在奇点附近，$z \mapsto V(z)$ 可以被展开成洛朗级数。现在，我们很容易确定奇点的指数，这是因为奇点的原型来自于 z 的幂函数：

$$P_m(z) = z^m$$

显然，$P_m(z)$ 只在原点有唯一的有限奇点，容易确定其指数 $\mathcal{J}_V(0)=m$。

另外，虽然源、涡旋和汇在物理上有不同的性质，但是它们在拓扑上不可区分，这是由于它们有相同的奇点指数。考虑将向量场 $f(z)$ 乘上 $R\exp(i\phi)$，显然奇点指数不受影响，但是这会导致奇点的“形态”的变化。例如，取定 $f(z)=z$ ，令 ϕ 从 0 逐渐增大到 π，那么奇点会逐步演化成涡旋、中心和汇。

我们再给出一些一般的性质。首先，反转向量场，也就是令 $V(z)$ 变成 $-V(z)$ 完全不改变奇点指数。其次，$P_m(z)$ 和 $\bar{P}_{-m}(z)$ 的流线是相同的。更一般地说，$\bar{f}(z)$ 与 $f(z)$ 有完全相同的奇点，但是每个奇点指数都互为相反数。

曲面上的向量场

为了直观，让我们研究一个油炸香蕉上的蜂蜜流向量场，这些蜂蜜紧紧裹在香蕉上，在重力的作用下向下滴落。为了研究这些蜂蜜如何流动，我们可以做出油炸香蕉的等高线！由于重力没有沿着等高线的分量，因此我们说：在香蕉表面的每一点，蜂蜜流都是正交于等高线的。这在投影地图上也依然成立（注意：投影地图不是共形映射，只不过在我们的情境下，这个直角保持不变）

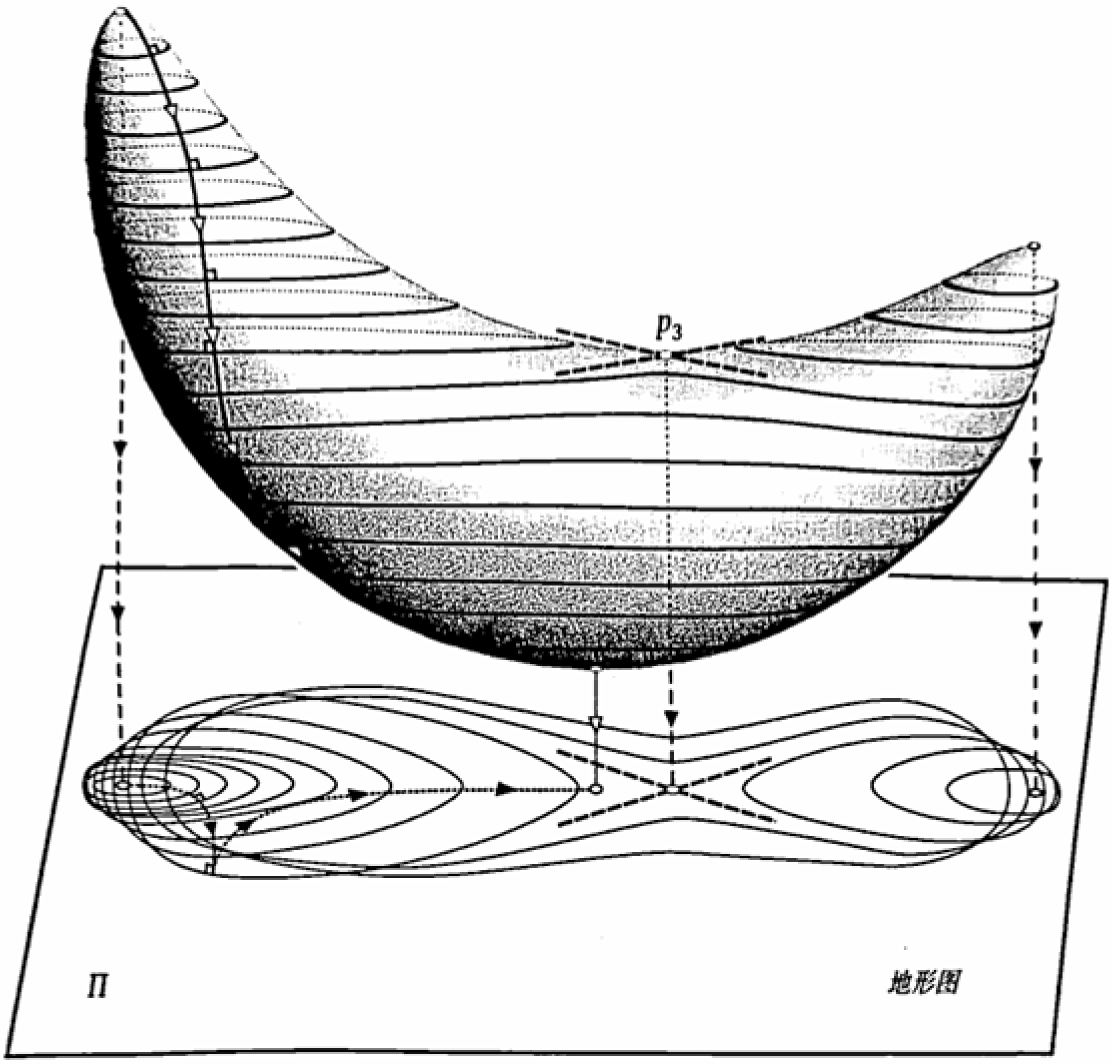


图 19-6　曲面与一组等距平行平面相交生成等高线，将等高线垂直向下投影到地图平面 Π 上，就形成了曲面的地形图.（为了避免地形图太复杂混乱，我们没有绘制曲面下半部分的等高线.）经过鞍点 p_3 的等高线是 8 字形的，图中只显示了 8 字形等高线的切线（虚线）. 曲面上蜂蜜流的流线是正交于等高线的，在垂直投影到地图平面 Π 上后仍然正交于等高线（尽管地形图不是共形的）

显然我们知道，蜂蜜流线和等高线在共同的奇点上具有相同的奇点指数。但是，现在

我们需要明确定义曲面上的奇点指数：向量场 W 相对于一个正则流 U 的旋转圈数。

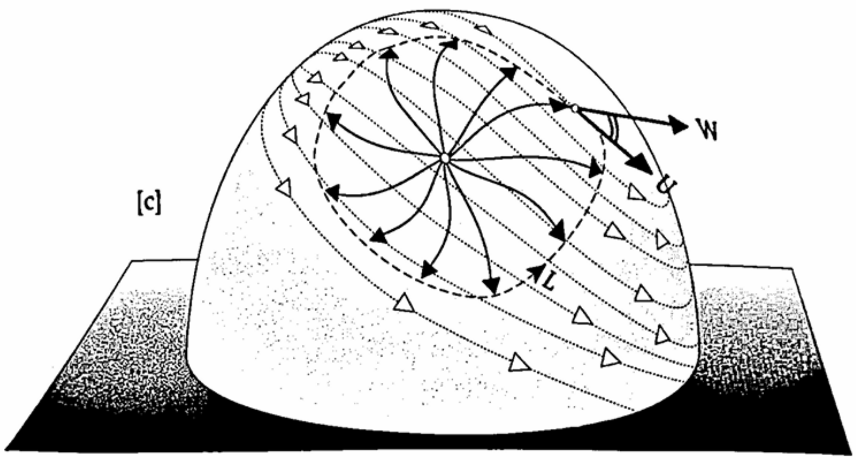


图 19-7 曲面上奇点指数的定义. 我们通常量度平面向量场 W 关于水平基准（或参照系）场 U 的旋转，如 [a] 所示. 也可以量度这个向量场关于其他任意没有奇点的向量场的旋转，如 [b] 所示. 最后，在 [c] 中，我们推广到曲面上：画出一个正则流 U，穿过包含向量场奇点的一个区域，则奇点指数是 W 关于 U 的旋转圈数

庞加莱-霍普夫定理

现在我们要给出一个定理来说明曲面上向量场的奇点指数的性质：设 S_g 是亏格为 g 的光滑曲面，v 是 S_g 上的向量场，具有有限个奇点 p_i，则它们的指数和等于曲面的欧拉示性数：

$$\sum_i \mathcal{J}_v(p_i) = \chi(S_g) = 2 - 2g$$

它的直接结论包括：球面上的向量场必然有奇点，而没有奇点的向量场只能存在于欧拉示性数为 0 的曲面上。

现在我们给出霍普夫本人的证明：
第一步，我们要证明在给定了拓扑亏格的曲面上，所有向量场的奇点指数之和是相等的。如图，我们将这两个场绘制在曲面上，并使用多边形分割曲面，使得曲面中的每一个多边形至多分别包含 X, Y 的一个奇点。现在我们研究在多边形边界 K_i 内的两个向量场奇点指数的差。设我们有一个非奇异向量场 U 作为基准，那么这个差值：

$$\mathcal{J}_Y[K_i] - \mathcal{J}_X[K_i] = \frac{1}{2\pi}[\delta_{K_i}(\angle UY) - \delta_{K_i}(\angle UX)] = \frac{1}{2\pi}\delta_{K_i}(\angle XY)$$

与 U 无关。注意：如果一个多边形没有包含 X 的奇点，则 $\mathcal{J}_X[K_i] = 0$，但是上式依然成立。现在我们需要对所有多边形求和，考虑到每条边都要被正向、反向各经过一

次，因此：

$$\sum_{S_Y}\mathcal{J}_Y(s)-\sum_{S_X}\mathcal{J}_X(s)=\frac{1}{2\pi}\sum\delta_{K_i}(\angle XY)=0$$

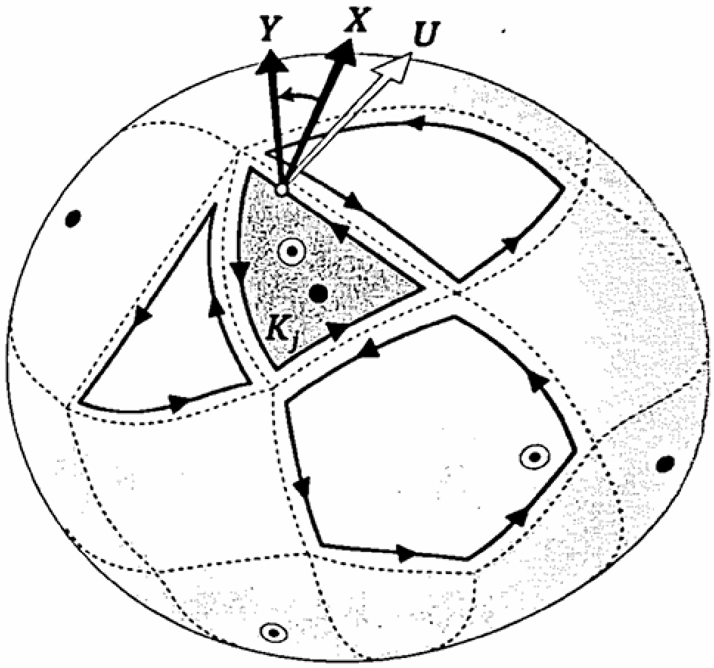


图 19-10　在 K_j 包围的区域内，向量场 X 和 Y 的奇点（分别记为 • 和 ⊙）的指数差只依赖于 Y 相对于 X 的旋转. 但是 K_j 的每条边都与相邻多边形的一条反方向边相毗连，所以所有多边形上的这些旋转之和一定为 0

证明的第二步自然是要对亏格为 g 的特定曲面下手。这很容易通过在具有 g 个孔的曲

面上使用我们一开始提到的"蜂蜜流向量场"证明：

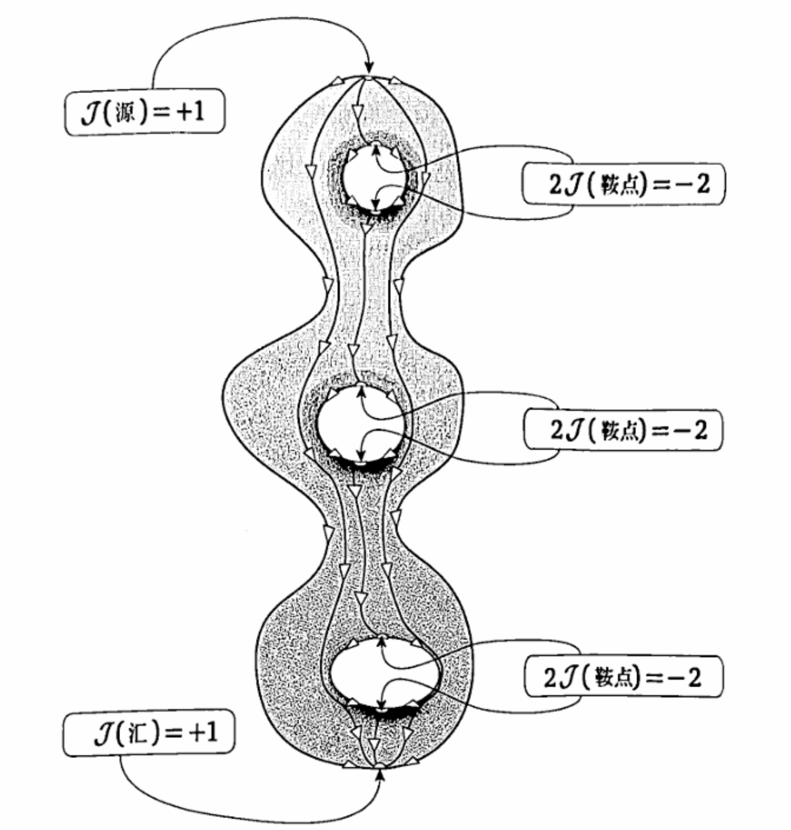


图 19-11 这是亏格为 g 的曲面上的蜂蜜流向量场. 对于奇点指数的和，顶部的源和底部的汇各贡献 $+1$，每一个孔贡献 -2. 所以，奇点指数之和为 $2-2g=\chi$

这个定理有很多应用。例如，我们可以在球面上绘制一个同胚于球面的多面体在球面上的投影，然后，构造一个向量场：在 V 个顶点中的每一个放置一个源，每条边上放

置一个鞍点，每个面上放置一个汇，那么结论自然证成：

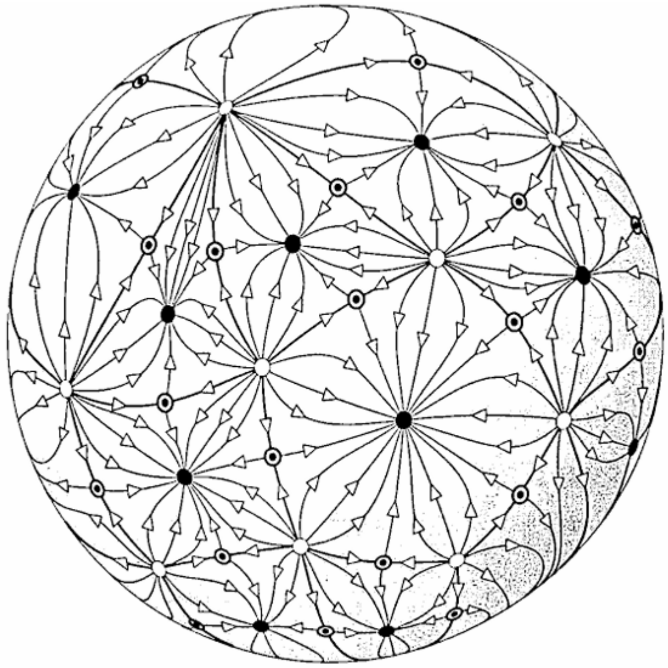


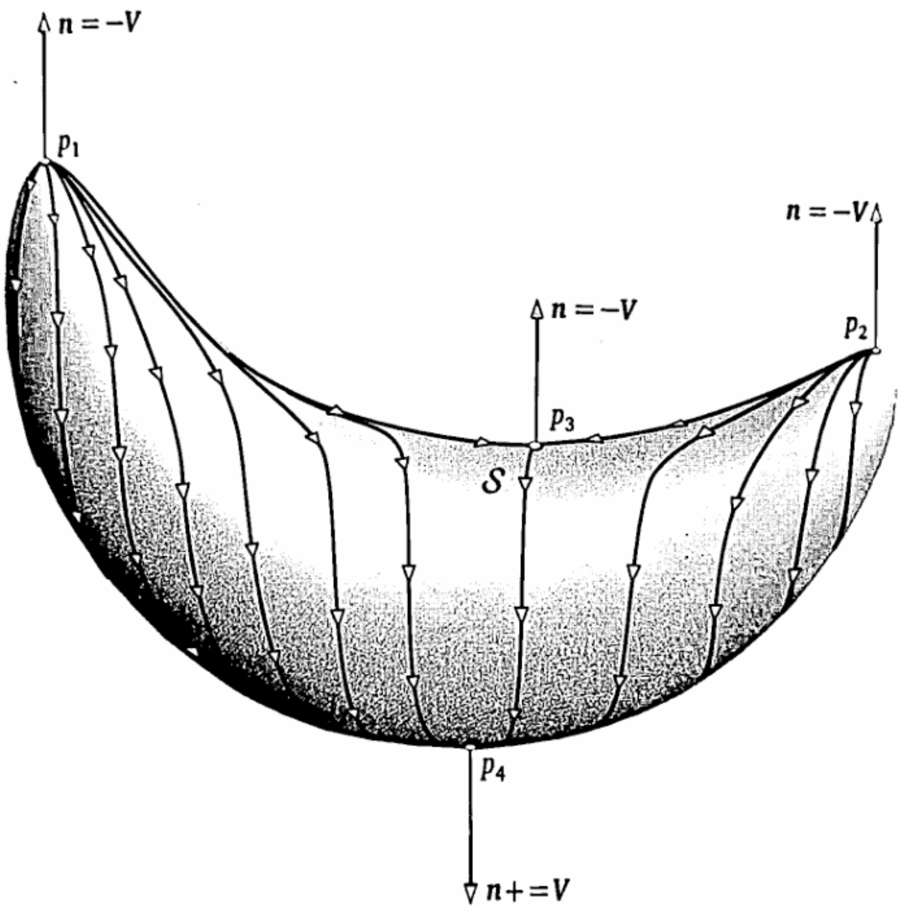
图 19-12 设 S_g 是亏格为 g 的曲面，对于 S_g 的任意多边形划分，通过在每一个顶点上放置一个源（○），在每一条边上放置一个鞍点（⊙），在每一个面上放置一个汇（●，把它想象成一个黑洞！）构建一个相容的施蒂费尔向量场. 因此 $\sum \mathcal{J} = V - E + F$

这一套理论还可以用作微分方程的定性分析，例如：我们考虑 (x, y) 平面上的一阶微分方程 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$，积分曲线处处与向量场 $[P, Q]^T$ 正交。

GCB 的证明

一个显然的结论是：设 S 是任一光滑闭曲面，则其球面像覆盖 $\mathbb{S}^2$ 上每一对对径点 $+V, -V$ 至少一次。
另外，归结我们在第 17 集中的推论，我们得到：设 V 是 $\mathbb{S}^2$ 上的一个点，其原像是 S 上的点 p_i。考虑 $\mathbb{S}^2$ 上包含 V 的面积为 $\delta\tilde{A}$ 的微元，设其原像面积为 $\delta\mathcal{A}_i$，那么。在 $\delta\mathcal{A}_i$ 上的全曲率 $\sum_i \kappa(p_i)\delta\mathcal{A}_i = [\mathcal{P}(V) - \mathcal{N}(V)]\delta\tilde{A}$。
在第 17 集中，我们还使用套在曲面表面的"薄膜"的方式认识到 $\mathbb{S}^2$ 上所有点的拓扑度都相同：$\deg[n(S_g)] = \mathcal{P} - \mathcal{N} = (1-g) = \dfrac{1}{2}\chi(S_g)$ 。

但是，在我们接下来的论证中，我们不假设拓扑度在整个 $\mathbb{S}^2$ 上相同，换言之可能有 $\deg[W] \neq \deg[V]$ 存在。现在我们重新看看油炸香蕉上的蜂蜜流：



容易发现这些奇点只出现在曲面外法向与重力方向平行的地方，也就是说 $n=+V$ 或 $n=-V$ 的地方。然而 V 的方向其实可以是任意的。根据这样的观察，我们可以正式地将我们的“蜂蜜流”场定义成：

$$v(p) = \mathrm{proj}_{T_p} V$$

也就是 V 在 p 点处切平面上的投影。换言之，此时所有的奇点都被映射为 $\mathbb{S}^2$ 上的点 $+V$ 或 $-V$。容易注意到，在源点、汇点处曲面的曲率为正，而在鞍点处曲率则为负。这意味着：设 p 是蜂蜜流的一个奇点，它在球面映射下的像为 $+V$ 或 $-V$，如果 $\mathcal{J}(p)=+1$，则其球面像被正向覆盖；若 $\mathcal{J}(p)=-1$，则其球面像被反向覆盖。

考虑前面的庞加莱-霍普夫定理：

$$\chi(S) = \sum_i \mathcal{J}_v(p_i) = [\mathcal{P}(+V) - \mathcal{N}(+V)] + [\mathcal{P}(-V) - \mathcal{N}(-V)]$$

现在我们注意到，实际上在重力场 $+V$ 和重力场 $-V$ 作用下的蜂蜜流是完全一致的，反转重力场的方向不会导致奇点的位置、指数发生变化。现在令 V 取遍 $\mathbb{S}^2$ 北半球的所有点，则 v 的奇点将取遍 $\mathbb{S}^2$ 的所有点。那么既然 $+V, -V$ 附近的两块小微元被净覆盖的次数之和是 $\chi(S)$，那么这两块小微元对应的原像的全曲率之和就是 $\chi(S)d\tilde{A}$，对对半个球面求和，就得到了 GGB：

$$\kappa(S) = 2\pi\chi(S)$$

现在假设拓扑度是整个球面上相同的，那么我们立刻得到和之前一样的结果：

$$\chi(S) = \deg(+V) + \deg(-V) = 2\deg$$

总之，这个方法是通过找到一种特殊的向量场（"蜂蜜流"），这个向量场形成的奇点很简单，其球面像全部在 $+V, -V$ 两个点上，并且这两个点处 $\mathbb{S}^2$ 被覆盖的次数恰好可以与奇点指数扯上关系（正向覆盖的原点、汇点恰好有 $+1$ 的指数，而反向覆盖的鞍点恰好有 -1 的指数，P-H 定理的作用是将奇点指数与欧拉示性数扯上关系）。通过改变 V 的方向，我们可以遍历 $\mathbb{S}^2$ 上的所有点，从而（在不假设拓扑度相等的情况下）完成证明。