#MA

切向量和法向量

切向量

对于一条直线, 任意一点的切向量都和直线重合；对于一条曲线，曲线上任意一点的切向量都与曲线的切线平行；对于一个平面，某点上的切线有无数条，它们都落在同一平面内。我们显然可以使用切向量来定义一条直线：

$$x = k\hat{\tau} + c$$

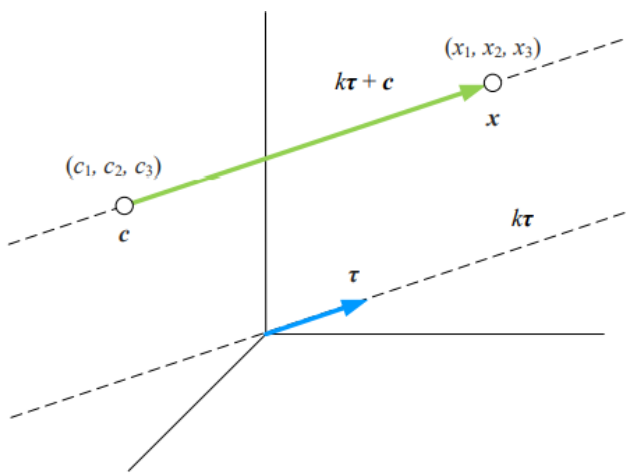


图 3. 空间直线定义

法向量

显然，直线的法向量与直线垂直，平面的法向量垂直于平面内的任意一条直线，曲面的法向量，是其在某点处切平面的法向量。
显然，给定空间中一点和一个法向量，就可以确定一个平面，已知一个平面时，法向量可以由平面内的两个向量叉乘得到。

超平面

超平面是一维直线和二维平面的推广：

$$w^T x + b = 0$$

w 是超平面的法向量，这容易通过二维（直线）和三维（平面）的情况下进行验证。显然，如果两个超平面平行，则它们的法向量也平行；两个超平面垂直时，它们的法向量就垂直。
此外，超平面通常被当作决策边界，$w^T x + b > 0$ 和 $w^T x + b < 0$ 划分出了两个区域。

当然，这也可以从函数的角度来看待，例如，一条直线 $3x_1 + x_2 + 6 = 0$ 也可以写成 $x_2 = 3x_1 - 6$，那么，我们将直线统一写成

$$y = w'^T x' + b$$

的形式，其中，w' 和 x' 都比之前少了一个变量。此时，构造函数

$$F(x, y) = w'^T x' + b - y$$

它的梯度向量就是超平面的法向量。

空间向量的几个作用

求线段中垂线的解析式——中垂线与线段垂直

如果一个线段的两端分别为 μ_1, μ_2，那么，线段的中点是 $\frac{\mu_1+\mu_2}{2}$，考虑中垂线上的任意一点，用 a 表示从中点指向中垂线上任意一点的向量，因为它与已知线段垂直，所以有

$$(\mu_2 - \mu_1)^T a = 0$$

成立。显然，若记中垂线上任意一点的坐标为 x，上式可以被改写为：

$$(\mu_2 - \mu_1)^T [x - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)] = 0$$

把这个式子打开，得到：

$$(\mu_2 - \mu_1)^T x - \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)^T (\mu_1 + \mu_2) = 0$$

这意味着，中垂线的法向量是 $\mu_2 - \mu_1$。这有很多应用，例如，将各个类别质心的中垂线作为分类的决策边界。

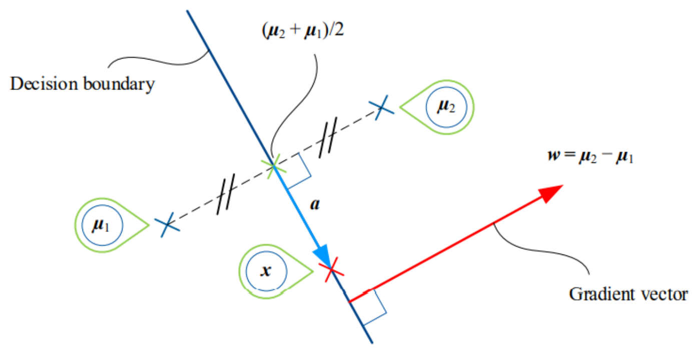


图 15. $\mu_1 \neq \mu_2$ 时，中垂线位置

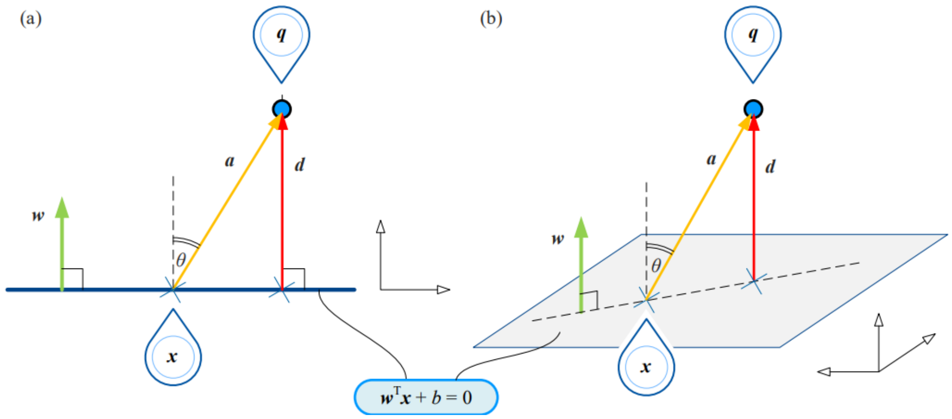
计算超平面外一点到超平面的距离——任意向量向着法向投影

超平面的方程记为

$$w^T x + b = 0$$

现在，记超平面外的点为 q，而超平面上的**任意一点**为 x，那么记 a 为从点 x 指向点 q 的向量

$$a = q - x$$



显然，向量 a 向着平面法向量的方向投影，就得到了向量 d，d 的模长就是点到平面的距离

$$d=||a||\cos\theta\frac{w}{||w||}=||a||\frac{w^Ta}{||a||||w||}\frac{w}{||w||}=\frac{w^Ta}{||w||^2}w$$

如果我们想要求距离，那么两边各求一次模长，也就是：

$$||d||=\frac{w^Ta}{||w||^2}||w||=\frac{w^Ta}{||w||}$$

把 a 代入，并考虑到 w^Ta 可能有正有负，我们加个绝对值，那么

$$\text{dis}=\frac{|w^T(q-x)|}{||w||}=\frac{|w^Tq+b|}{||w||}$$

这与高中时学习的

$$\text{dis}=\frac{|Ax+Bx+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

不谋而合。

计算点在超平面上的投影点坐标——利用已知的垂直条件设解

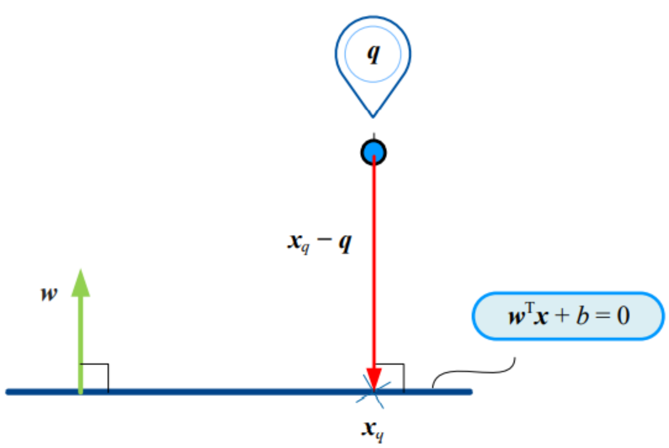


图 18. 直线外一点到直线的正交投影点

直接将正交投影点的坐标记为 x_q，那么由于这一点落在超平面上，显然有：

$$w^T x_q + b = 0$$

由于正交投影点到点 q 的连线与平面的法向量平行，则：

$$x_q - q = kw$$

以上两式联立，得到：

$$w^T(kw+q)+b=0$$

那么，直接计算得到（这里不涉及到任何矩阵求逆，等等奇怪的操作）：

$$k = -\frac{w^T q + b}{w^T w} \Rightarrow x_q = q - \frac{w^T q + b}{w^T w} w$$

向量在平面内、垂直于平面的分量

只有考虑一个始端在平面上的向量的两个分量才是有意义的，如果某一向量的始端不再平面上，那么我们要首先进行平移。
前面已经求出，

$$q - x_q = \frac{w^T q + b}{w^T w} w$$

这就是向量 q 在垂直于平面的方向上的分量；平行分量就是 x_q（从 q 的始端指向 x_q 的向量），也就是

$$x_q = w(1 - \frac{w^T q + b}{w^T w})$$

两平行平面之间的距离

给定两个相互平行的超平面：

$$w^T x + b_1 = 0 \quad w^T x + b_2 = 0$$

在第一个超平面上选择点 A，坐标为 x_A，在第二个上选择点 B，坐标为 x_B，向量 a 由 A 指向 B，那么，我们只需计算 a 在 w 方向的单位向量上的投影：

$$\text{dis} = \frac{|w^T a|}{||w||} = \frac{|w^T(x_A - x_B)|}{||w||} = \frac{|b_2 - b_1|}{||w||}$$