4：观测与不确定性关系

#Quantum_Mechanics

现在我们介绍重要的观测公理。一个系统被观测前，它的状态使用算符本征矢的线性组合表示：$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$。

> **观测公理**
>
> 一个系统被观测后，它的态矢立刻坍缩到 A 的一个本征态 $|a'\rangle$ 上，概率为 $|\langle a'|\alpha\rangle|^2$

显然，尽管我们只讨论单个物理系统，但是我们要考虑作用于这个系统的大量拷贝（换言之，一个系综）的大量观测。我们现在讨论的系综都是纯系综 (pure ensemble)。我们将观测量的期望定义为：

$$\langle A\rangle = \langle\alpha|A|\alpha\rangle$$

这很容易看出，只需插入两次完备性关系：

$$\langle A\rangle = \sum_{a'}\sum_{a''}\langle\alpha|a''\rangle\langle a''|A|a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle = \sum_{a'} a'|\langle a'|\alpha\rangle|^2$$

像我们一开始介绍的 S-G 实验中一样，每次只选择一个本征矢的观测称为选择性观测，它意味着将投影算符 $\Lambda_{a'}$ 作用在 $|\alpha\rangle$ 上。

我们再次考虑开始时的 $\dfrac{1}{2}$ 自旋系统。由于根据实验结果，S_{x^+} 态以均等的概率坍缩到 $|+\rangle, |-\rangle$ 态上，那么：

$$|\langle +|S_x;+\rangle| = |\langle -|S_x;+\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

那么我们可以将 S_{x^+} 态记为：

$$|S_x;+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{2}\exp(i\delta_1)|-\rangle$$

S_{x^-} 与其正交，容易写出：

$$S_x = \frac{\hbar}{2}[\exp(-i\delta_1)(|+\rangle\langle-|) + \exp(i\delta_1)(|-\rangle\langle+|)]$$

同理有：

$$S_y = \frac{\hbar}{2}[\exp(-i\delta_2)(|+\rangle\langle-|) + \exp(i\delta_2)(|-\rangle\langle+|)]$$

如何确定 δ_1, δ_2？继续考虑 S-G 实验，我们可以得到：

$$|\langle S_y; +/-|S_x;+\rangle| = |\langle S_y; +/-|S_x;-\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

从而求出 $\delta_2 - \delta_1 = +/-\frac{\pi}{2}$.
一种简单的选法是令：

$$|S_x;+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \quad |S_y;+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

我们可以得到算符之间的一些关系：$S_+ = S_x + iS_y$，$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar S_k$，$\{S_i, S_j\} = \frac{1}{2}h^2\delta_{ij}$。我们也可以定义 $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$，根据反对易关系得到：

$$S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$$

以及容易得到 $[S^2, S_i] = 0$。

我们称两个算符相容，如果它们对易：$[A, B] = 0$，否则反之。之前我们有件事情一致每提到：如果 A 的某个本征值对应两个本征矢量，我们就说这个本征值是简并的。这会带来很大的问题：符号 $|a'\rangle$ 不能正确表达我们指的是哪一个本征矢量，之前的本征矢量互相正交的证明也依赖于本征值互不相同的假设，因此这甚至会导致基底的完备性出现问题！幸运的是，我们可以从一个与之对易的算符那里"借"一套基底。

Note

设 A, B 是对易的算符，A 的本征值不简并，那么矩阵 $\langle a''|B|a'\rangle$ 是对角矩阵。

证明依赖于直接计算：

$$\langle a''|[A, B]|a'\rangle = (a'' - a')\langle a''|B|a'\rangle = 0$$

因此得证。通过插入两次完备性关系，并利用以上对角矩阵的事实，可以将 B 写成：

$$B=\sum_{a''}|a''\rangle\langle a''|B|a''\rangle\langle a''|$$

我们发现将 B 作用在 A 的本征矢量上得到:

$$B|a'\rangle=(\langle a'|B|a'\rangle)|a'\rangle$$

这意味着 A,B 有相同的本征矢量，可以被同时对角化。有时，我们使用 $|a',b'\rangle$ 表示这些能将 A,B 同时对角化的本征矢量，代表着它同时是算符 A,B 的本征矢量，对应的本征值为 a',b'，因此:

$$A|a',b'\rangle=a'|a',b'\rangle \quad B|a',b'\rangle=b'|a',b'\rangle$$

我们可以轻松地将结论推广到多个算符对易的情景，例如，对于三个算符，我们有 $[A,B]=[B,C]=[A,C]=0$。每个算符的本征矢量可能有退化，但是 $|K'\rangle=|a',b',c',\cdots\rangle$ 可以唯一地声明一个本征矢量。此时我们有:

$$\langle K''|K'\rangle=\delta_{K'K''}=\delta_{a'a''}\delta_{b'b''}\cdots$$

以及完备性关系:

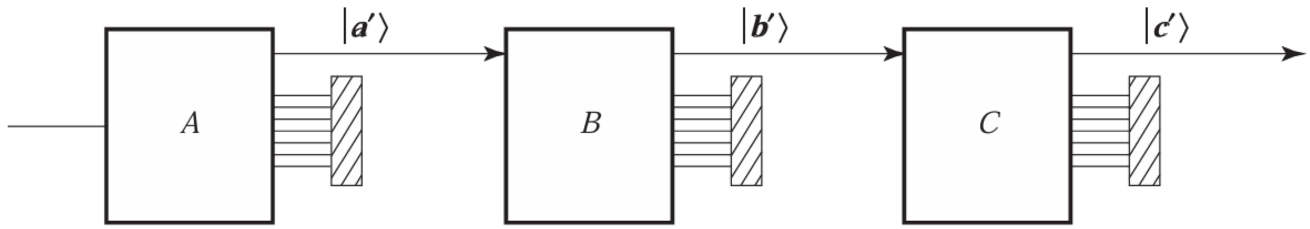
$$\sum_{K'}|K'\rangle\langle K'|=\sum_{a'}\sum_{b'}\cdots|a'b'\cdots\rangle\langle a'b'\cdots|=1$$

考虑对于两个对易算符代表的物理量进行观测: 先观测 A 得到 a'，再观测 B 得到 b'，此时再观测 A 仍然将得到 a'。也就是说，第二次对 B 的观测没有破坏我们对 A 的观测得到的信息。这在 A 的本征矢量非退化的情况下是显然的，而在 A 的本征矢量退化的情况下，第一次观测后，系统坍缩到 $\sum_{i=1}^{n}c_{a'}^{(i)}|a',b^{(i)}\rangle$ 态，其中 n 是简并度。显然，此时再对 B 进行观测，系统将坍缩到某一个 $|a',b'\rangle$ 态上，再对 A 进行观测仍得到 a'。

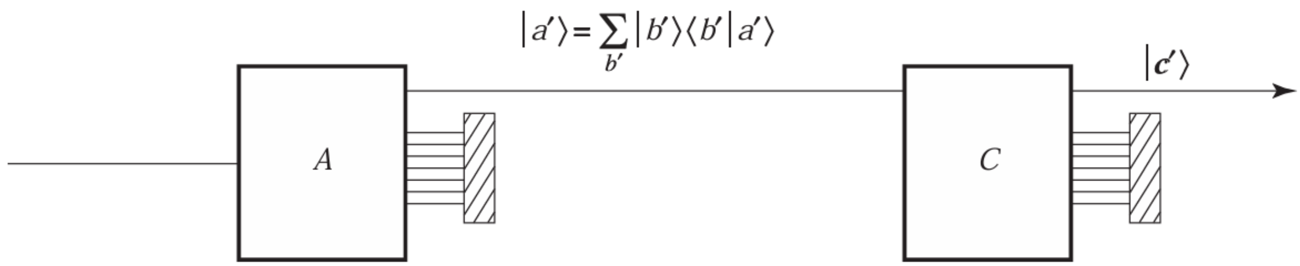
接下来我们考虑不相容，也就是不对易的算符，现在我们说明它们不可能被同一组本征矢量对角化。使用反证法，假设存在一组基底使得它们能被对角化，那么有:

$$AB|a',b\rangle=BA|a',b'\rangle=a'b'|a',b'\rangle$$

这显然不符合条件。假设我们接连测量两个不相容的物理量 A,B，则对 B 的测量会破坏测量完 A 后系统的态。一个简单的例子是:



(a)



(b)

在图 a)中，我们依次过滤 a', b', c' 三个态，并且对所有 b' 态求和。此时粒子通过装置的概率是：

$$\sum_{b'}|\langle c'|b'\rangle|^2|\langle b'|a'\rangle|^2=\sum_{b'}\langle b'|c'\rangle\langle b'|a'\rangle\langle a'|b'\rangle\langle b'|c'\rangle$$

对照过滤器 b' 缺失的情况，粒子通过的概率为：

$$|\langle c'|a'\rangle|^2=|\sum_{b'}\langle c'|b;\rangle\langle b'|a'\rangle|^2=\sum_{b'}\sum_{b''}\langle c'|b'\rangle\langle b'|a'\rangle\langle a'|b''\rangle\langle b''|c'\rangle$$

显然这两个式子是不同的，可以验证它们相等的条件是 $[A,B]=0$ 或者 $[B,C]=0$。

最后我们来看大名鼎鼎的不确定性关系。我们定义一个算符 $\Delta A=A-\langle A\rangle$，其平方的平均称为一个物理量的方差：

$$\langle(\Delta A)^2\rangle=\langle(A^2-2A\langle A\rangle+\langle A\rangle^2)\rangle=\langle A^2\rangle-\langle A\rangle^2$$

在给出不确定性关系之前，我们需要三个引理：

Note

- Cauchy-Schwarz 不等式：$\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle\geq|\langle\alpha|\beta\rangle|^2$
- 厄米算符的期望值是实数
- 反厄米算符的期望值是纯虚数

接下来我们给出不确定关系：首先考虑态矢 $|\alpha\rangle = \Delta A|\psi\rangle, |\beta\rangle = \Delta B|\psi\rangle$，使用不等式：

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq |\langle\Delta A\Delta B\rangle|^2$$

注意到：

$$\langle\Delta A, \Delta B\rangle = \frac{1}{2}\langle[A, B]\rangle + \frac{1}{2}\langle\{\Delta A, \Delta B\}\rangle$$

容易验证第一项是反厄米的，而第二项是厄米的，计算它的平方：

$$|\langle\Delta A, \Delta B\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{\Delta A, \Delta B\}\rangle|^2$$

其中第二项是正的，那么我们得到不等式：

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2$$

这就是不确定性关系。