Chapter 16： 全局高斯-博内定理的介绍

#DifferentialGeometry

我们将曲面上一个区域的全曲率定义为：

$$\mathcal{K}(P)=\iint_{P}\mathcal{K}d\mathcal{A}$$

由高斯绝妙定理，我们已经知道：将一张纸 P 弯曲成不同的形状 $\tilde{P}$，那么 $K(\tilde{P})=0$ ，因为这是一个等距变换，连接曲面上任意两点的测地线的长度不变。但是，如果我们找到一个橡皮膜，对它进行拉伸和压缩操作，我们可能得到 $K(\tilde{P})>0$ 或者 $K(\tilde{P})<0$ 的结果。这样一个连续的、一对一的、可以保持长度不变或者角度不变的拉伸 $P\mapsto\tilde{P}$，被称为**拓扑映射**或**同胚**。拓扑学研究的正是在拓扑变换下图形的不变性质。

现在我们引入一些拓扑不变量。我们这里研究 $\mathbb{R}^3$ 中可以被定向的闭曲面，它们的一个基本特征是包含的“孔”的数目，这被称为曲面的亏格 g。可以直观感受到：具有相同亏格的曲面都是同胚的。亏格还有一个定义：我们在闭曲面上做切割，切割闭曲面的切口是不相交的闭合曲线，但是不会将闭曲面分成两个不相交的部分，能够这样做的最大次数是闭曲面的亏格。

我们首先叙述高斯-博内定理：

$$\mathcal{K}(S_g)=4\pi(1-g)=2\pi\chi(S_g)\quad \chi(S_g)=2-2g$$

其中 $\chi(S_g)$ 称为欧拉示性数。接下来我们会在几个例子上看看这个定理。

例子 1：球面

很容易看出球面的全曲率是 4π，不过这给我们一个更具有启发性的解释：设 P 是 S 上的一个区域，而 $\tilde{P}=n(P)$ 是 P 的球面像，那么 $K(P)=\mathcal{A}(P)$。这个结论容易利用高斯映射的性质证明：

$$dA_{\mathbb{S}^2}=KdA\Rightarrow\iint KdA=\iint dA_{\mathbb{S}^2}$$

这里 dA 是原曲面上的面积，$dA_{\mathbb{S}^2}$ 则是 $\mathbb{S}^2$ 上的有向面积。对于旋转曲面而言，该结论可以表述为：设 C 是平面曲线，L 是该平面上的一条直线，$\tilde{L}$ 是经过 $\mathbb{S}^2$ 的球心并

平行于 L 的直线。则当 C 绕着 L 旋转时，它的球面像 $\tilde{C}=n(C)$ 以同样的速率绕着 $\tilde{L}$ 旋转，由 C 扫过的曲面的全曲率等于 $\tilde{C}$ 在 $\mathbb{S}^2$ 上扫过的总面积。利用这个结论，我们可以看出橄榄球曲面的全曲率也是 4π。

例子 2：环面

我们可以使用上面的结论得到环面的总曲率为 0.

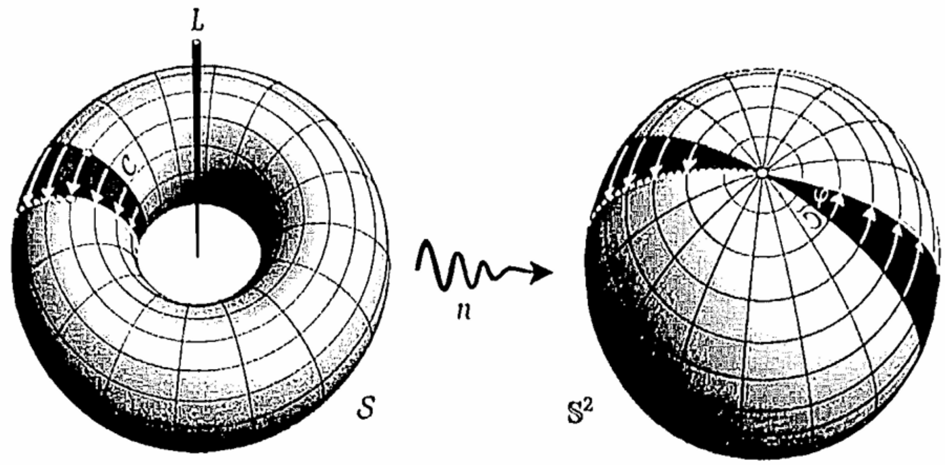

图 16-5 当圆周 C 绕 L 旋转角度 φ 时，其球面像 $\tilde{C}$（大圆）在 $\mathbb{S}^2$ 上以相同的速率旋转，产生两个角度为 φ 的月牙形，它们的面积相等. 正如我们所看到的，球面地图上对应于甜甜圈外半边的月牙形保持方向不变，取正号；对应于内半边的月牙形则反转方向，取负号. 楔形甜甜圈的全曲率等于两个月牙形一正一负的面积之和，所以为 0. 于是，整个甜甜圈的全曲率也为 0

这里，我们可以注意到，环面上最上面和最下面的两个圆周被映射到 $\mathbb{S}^2$ 的南北极点。这些分别完全覆盖 $\mathbb{S}^2$ 的两层连接在一起的地方，称为“分枝点”。对于有多个孔的“厚煎饼”，每增加一个孔，就贡献 -2π 的总曲率。我们将环面的内半圈“拉伸”或“压缩”，还可以得到这个：

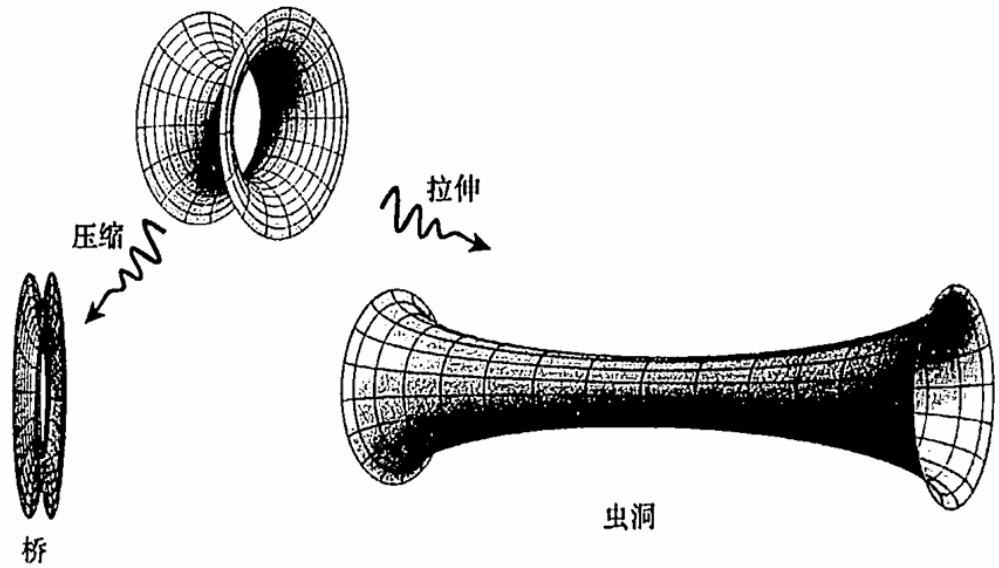

图 16-7 上方的曲面是环面的内半圈，$K=-4\pi$. 将它压缩成一个面包圈桥（左）或拉伸成虫洞（右），全曲率不变

仔细思考：连在一起的几个面包圈的曲率是多少？将它们撕开之后曲率又是多少？

拓扑度

通过前面的观察，我们可以发现：无论对于何种形式的曲面 S_g，$n(S_g)$ 总是覆盖球面上几乎每个点 $1-g$ 次，覆盖的层数是正负相加的代数和，正负号由球面像的方向决定。考虑 $\mathbb{S}^2$ 上一点 $\tilde{p}$，它的原像是 p_i，令 $P(\tilde{p})$ 为 S 上所有取正曲率的原像个数，$N(\tilde{p})$ 反之，那么我们将 $\tilde{p}$ 的拓扑度定义为：

$$\deg[n(S_g),\tilde{p}]=P(\tilde{p})-N(\tilde{p})$$

根据 GCB，拓扑度也是一个拓扑不变量：

$$\deg[n(S_g)]=\frac{1}{2}\chi(S_g)$$

换言之，只要证明了上式，就证明了 GCB。