#MA

北京理工大学《矩阵分析》模拟试题，限时 2 小时，总分 100 分

选择题（共 20 分）

1 关于《矩阵分析》课程中的基本概念、矩阵分析知识的基本应用，以下说法中不正确的一项是（5 分）
A PageRank 算法是一种给网页重要性排序的算法。其基本思想是：一个网上冲浪者从一个网页有概率转移到其他相连的网页，PageRank 算法试图计算网上冲浪者在各个网页停留的稳定概率，进而给网页的重要性排序。
B PCA 算法试图将数据投影到几个正交的方向上，并使得投影方向上，数据的方差尽可能大。这有利于我们在较少的几个维度上直观地观察数据中蕴含的重要特征。
C 我们说一个矩阵 A 是正的，那么 A 的谱半径 $\rho(A) > 0$
D 在一个非负矩阵 A 中，最大行（列）和是谱半径的下界

2 “超球”是一种特殊的球体，它与粗糙斜面碰撞时，没有能量的损失。将质量为 m，半径为 R 的匀质实心“超球”放置在倾角为 θ 的斜面上，给予其与斜面垂直的、大小为 V 的初速度，且初始时球不转动，即 $v_0 = V, \omega_0 = 0$ 。使用 v_n, ω_n 代表第 n 次碰撞后，“超球”沿斜面向下的速度和角速度，则经过推导可知：

$$
\begin{aligned}
v_n &= \frac{3}{7}(v_{n-1} + 2V\tan\theta) + \frac{4}{7}R\omega_{n-1} \\
R\omega_n &= \frac{10}{7}(v_{n-1} + 2V\tan\theta) - \frac{3}{7}R\omega_{n-1}
\end{aligned}
$$

则当“超球”与斜面碰撞的次数 n 为**奇数**时，“超球”沿着斜面向下的速度为（5 分）
A

$$v_n = \frac{10}{7}(n+1)V\tan\theta$$

B

$$v_n = \frac{2}{7}(5n-2)V\tan\theta$$

C

$$v_n = \frac{10}{7}nV\tan\theta$$

D

$$v_n = \frac{2}{7}nV\tan\theta$$

3 在电视剧《显微镜下的大明》中，提到了一种用于测量农田面积的方法——“推步聚顶之术”。剧中主人公总结出的此技术的口诀为：“先牵经纬以衡量，再点原初标步长，田型取顶分别数，再算推步知地方。”实际上，这个公式被称为“鞋带公式”，其基本原理是，由原点 O、点 $A(x_A, y_A)$、点 $B(x_B, y_B)$ 组成的三角形的面积为：

$$S(OAB) = \frac{1}{2}|\det\left(\begin{bmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{bmatrix}\right)|$$

那么，我们可以将形状不规则的田地分割成多个小三角形，分别计算面积后再求和。现有一块不规则多边形田地，其顶点分别位于 $(1,1),(4,3),(7,7),(6,9),(1,9),(3,6)$ 处，则其面积为（5 分）
A 26　　B 25　　C 24　　D 23

4 关于矩阵分析中的知识的说法，不正确的一项是（5 分）

A Hermite 矩阵的每个本征值都是实数

B 若 A 是正规矩阵，则 A 和 A^H 有相同的本征矢量

C 若 A 是半正定 Hermite 矩阵，则存在可逆矩阵 B 使得 $A = B^H B$

D 矩阵的 F 范数具有酉不变性

计算题（共 40 分）

5 矩阵分解（20 分）

（1）用 Householder 变换求矩阵 A 的 QR 分解（10 分）

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

（2）求矩阵 B 的 SVD 分解（10 分）

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6 矩阵的标准型（20 分）

求矩阵 C 的 Jordan 标准型，并求 $e^{At}, \sin A$（10 分+5 分+5 分）

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

证明题（共 40 分）

7 如果一个 $n \times n$ 的矩阵 A 满足

$$A^2 = A$$

我们就称矩阵 A 为 n 阶幂等矩阵。判断以下关于 n 阶幂等矩阵命题是否正确。若你判定为正确，给出证明；若你判定为错误，给出反例。（20 分）

命题 1 n 阶幂等矩阵的本征值只能为 0 或 1 (5 分)

命题 2 与**任意一个**n 阶幂等矩阵可交换的矩阵一定是 n 阶单位矩阵（5 分）

命题 3 与**所有**n 阶幂等矩阵可交换的矩阵一定是 n 阶单位矩阵（10 分）

8 证明以下两小题（20 分）

（1）n 阶酉矩阵的本征值不等于-1，则 $I + U$ 可逆，且 $i(I - U)(I + U)^{-1}$ 为 Hermite 矩阵。其中 i 为虚数单位（10 分）

（2）已知 n 阶 Hermite 矩阵 W，则 $I - iW$ 可逆，且 $(I + iW)(i - IW)^{-1}$ 为酉矩阵（10 分）