15：旋转和角动量对易关系

#Quantum_Mechanics

我们先来看看有限和无穷小转动。我们知道，对于 3×3 的向量，我们可以使用一个正交阵来表达它的转动：$v' = Rv$，其中 $RR^T = R^T R = 1$。转动矩阵形如：

$$R_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同时我们给出其无穷小格式：

$$R_z(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{\epsilon^2}{2} & -\epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 - \dfrac{\epsilon^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可以注意到的一个事实是：

$$R_x(\epsilon)R_y(\epsilon) - R_y(\epsilon)R_x(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon^2 & 0 \\ \epsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R_z(\epsilon^2) - 1 = R_z(\epsilon^2) - R_{any}(0)$$

我们直接把这些东西类比到量子力学中。设我们有一个态矢 $|\alpha\rangle$，而旋转后的态矢是 $|\alpha\rangle_R$，设它们之间有关系：

$$|\alpha\rangle_R = \mathscr{D}(R)|\alpha\rangle$$

如同我们构建平移算符时一样，我们构建旋转算符时，也先来考虑无穷小旋转。设旋转 ϵ 的无穷小旋转算符是：

$$U_\epsilon = 1 - iG\epsilon$$

我们之前已经多次用过这个手段，还记得只要取：

$$G \to \frac{p_x}{\hbar} \quad \epsilon \to dx'$$

就可以得到无穷小平移算符，以及

$$G \to \frac{H}{\hbar} \quad \epsilon \to dt$$

就可以得到无穷小时间演化算符。
我们现在先扔下几个定义，令：

$$G \to \frac{J_k}{\hbar} \quad \epsilon \to d\phi$$

其中 J_k 是角动量算符。更一般地，沿着轴 $\hat{n}$ 旋转 $d\phi$ 的无穷小旋转算符是：

$$\mathscr{D}(\hat{n}, d\phi) = 1 - i\left(\frac{J \cdot \hat{n}}{\hbar}\right)d\phi$$

这里的 J 是角动量算符，那么我们就得到了一个一般旋转算符：

$$\mathscr{D}_z(\phi) = \exp\left(-\frac{iJ_z\phi}{\hbar}\right)$$

我们现在用一个很粗糙的方式给出旋转算符的性质：只考虑三维的情况，这时候经典力学里面的旋转使用三维旋转矩阵 R 表示，我们假设每一个 R 都与一个能旋转态矢的 $\mathscr{D}(\mathscr{R})$ 对应，那么我们立刻得到以下性质：

- 单位元：$\mathscr{D}(R) \cdot 1 = \mathscr{D}(R)$
- 封闭性：$\mathscr{D}(R_1)\mathscr{D}(R_2) = \mathscr{D}(R_3)$
- 可逆性：$\mathscr{D}^{-1}(R)\mathscr{D}(R) = 1$
- 结合律：$[\mathscr{D}(R_1)\mathscr{D}(R_2)]\mathscr{D}(R_3) = \mathscr{D}(R_1)[\mathscr{D}(R_2)\mathscr{D}(R_3)] = \mathscr{D}(R_1)\mathscr{D}(R_2)\mathscr{D}(R_3)$

通过类比经典的旋转，我们可以给出角动量算符的对易关系，也就是：

$$\mathscr{D}_x(\epsilon)\mathscr{D}_y(\epsilon) - \mathscr{D}_y(\epsilon)\mathscr{D}_x(\epsilon) = \mathscr{D}_z(\epsilon) - 1$$

注意这里所有的旋转算符必须使用二阶近似，因为一阶项将被自然的消掉。换言之，近似是：

$$\mathscr{D}_x = 1 - \frac{iJ_x\epsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2\epsilon^2}{2\hbar^2}$$

重复这样的过程，最终可以得到角动量算符的基本对易关系：

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$$

因此，对于不同轴做旋转的角动量算符是不对易的，这对应经典力学里面对于不同轴的旋转也是不对易的。

我们现在展示一下之前定义的旋转算符为什么正确旋转了系统，考虑讲 $\mathscr{D}_z(\phi)$ 加到一个系统上，然后计算 J_x 的平均值，也就是计算 $\langle\alpha|\mathscr{D}_z^\dagger J_x \mathscr{D}_z(\phi)|\alpha\rangle$。使用贝克-豪斯多夫公式：

$$
\begin{aligned}
&\exp\left(\frac{iJ_z\phi}{\hbar}\right) J_x \exp\left(-\frac{iJ_z\phi}{\hbar}\right) \\
&= J_x + \left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)[J_z, J_x] + \left(\frac{1}{2!}\right)\left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)^2 [J_z, [J_z, J_x]] + \left(\frac{1}{3!}\right)\left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)^3 [J_z, [J_z, [J_z, J_x]]] + \cdots \\
&= J_x \left[1 - \frac{\phi^2}{2!} + \cdots\right] - J_y \left[\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \cdots\right] \\
&= J_x \cos\phi - J_y \sin\phi
\end{aligned}
$$

这确实符合经典的旋转！