# 3-4：Derivation of Algebra

#MathematicalPhysics

一个向量空间的自同态 $D:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 被称为代数的导数，如果它有性质：

$$D(ab)=[D(a)]b+a[D(b)]$$

容易验证数学分析中的导数符合这个定义。此外，对易括号 $D_A(B)=[A,B]$ 其实是一个导数，很容易验证其性质：$D_A([B,C])=[(D_A B),C]+[B,(D_A)C]$ 。

> Note
>
> 显然，要证明 $D$ 是代数的导数，只需验证定义式对所有基 $\{e_i\}$ 成立。

如果 $\mathcal{A}$ 有单位元 $1$，那么 $D(1)=0$。

> Note
>
> 导数 $D$ 服从莱布尼兹公式：$D^n(ab)=\sum_0^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} D^k(a)\cdot D^{n-k}(b)$

我们定义 $\mathrm{End}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 上自同态的集合，那么 $\mathcal{A}$ 上的导数是 $\mathrm{End}(\mathcal{A})$ 的子集。如果 $D_1,D_2$ 都是导数，那么容易验证 $\alpha D_1+\beta D_2$ 是导数，但是 $D_1D_2$ 不是导数。但是容易验证，$[D_1,D_2]$ 是一个导数。因此：

> Note
>
> $\mathcal{A}$ 上的导数 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 形成一个代数，这个代数装备的乘积运算就是 $[D_1,D_2]$

设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是代数，$\phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是一个同态。那么 $D:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 被称为 $\phi$ -导数，如果：

$$D(a_1a_2)=D(a_1)\phi(a_2)+\phi(a_1)D(a_2)$$

例如，设 $D_A$ 是 $\mathcal{A}$ 上的导数，那么 $D=\phi\circ D_A$ 是一个 $\phi$ -导数

设 $\mathcal{A}$ 是带有单位元的代数，$\omega$ 是 $\mathcal{A}$ 上的对合，线性变换 $\Omega \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ 被称为 $\mathcal{A}$ 相对于 $\omega$ 的反导数，如果：

$$\Omega(a_1 a_2) = \Omega(a_1) \cdot a_2 + \omega(a_1) \cdot \Omega(a_2)$$

特殊地，导数是对恒等映射的反导数。与导数一样，我们可以知道 $\mathrm{Ker}\Omega$ 是 $\mathcal{A}$ 的子代数，$\Omega(i) = 0$，以及 $\Omega$ 的行为是完全由其在 $\mathcal{A}$ 的生成元上的行为决定的。

**Note**

设 $\Omega_1, \Omega_2$ 是相对于对合 $\omega_1, \omega_2$ 的反导数，设 $\omega_1 \circ \omega_2 = \omega_2 \circ \omega_1$ 。此外，$\omega_1 \Omega_2 = \pm\Omega_2 \omega_1, \omega_2 \Omega_1 = \pm\Omega_1 \omega_2$，那么 $\Omega_1 \Omega_2 \pm \Omega_2 \Omega_1$ 是相对于对合 $\omega_1 \circ \omega_2$ 的反导数。