Chapter 17： GGB的第一个（启发式）证明

#DifferentialGeometry

一维曲线上的霍普夫旋转定理

在上一集中我们引入了拓扑度的概念，现在我们要在极其简单的一维情况下讨论这个概念。我们只讨论一维简单闭曲线。一个直观上容易看出的定理是：当一个质点沿着一个简单闭环走过一圈时，它的速度会转过 2π。

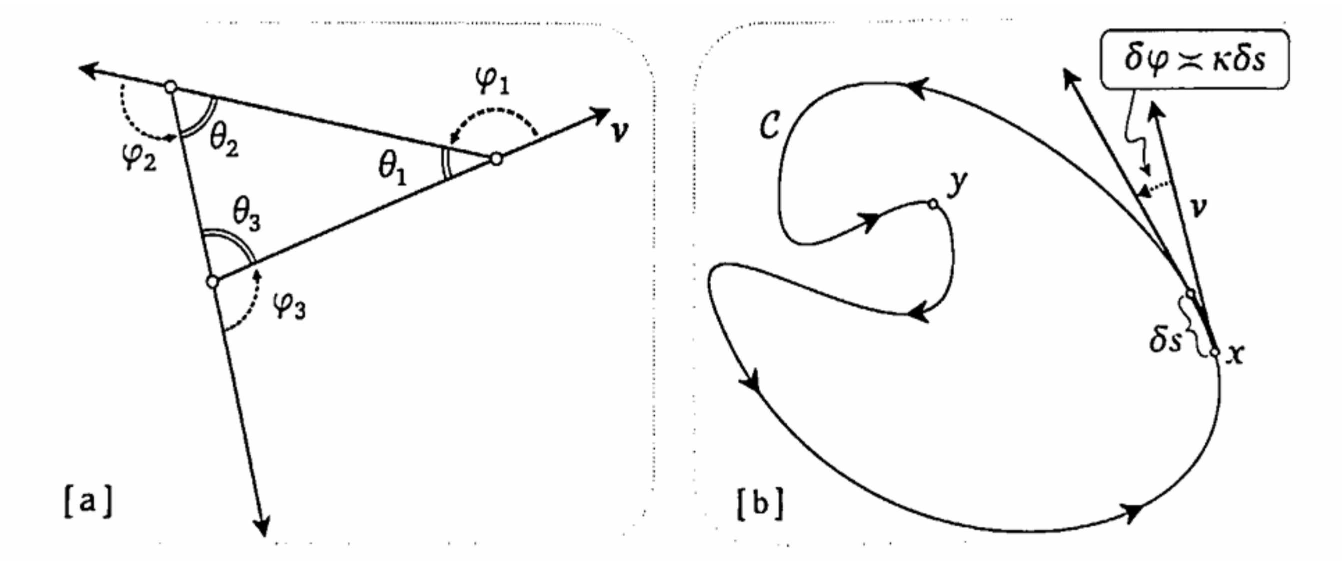

图 17-1 霍普夫旋转定理：当质点沿一个简单闭环走过一圈时，它的速度会经历一次正向旋转. 在 [a] 中，$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=2\pi$；在 [b] 中，$\oint_C d\varphi = v$ 的净旋转 $=2\pi$

这可以表述为闭曲线的全曲率具有拓扑不变性：

$$\oint_C \kappa ds = \oint c d\phi = 2\pi$$

我们令曲线 C 的单位法向量为 N，我们可以将 C 上的点 p 映射到 $\mathbb{S}^1$ 上对应于 N_p 端点的点 $\tilde{p} = N(p)$。对于 C 上的弧长 δs，其被映射到 $\mathbb{S}^1$ 上的弧长 $\delta\tilde{s}$，那么：

$$\kappa = \frac{\delta\tilde{s}}{\delta s} \Rightarrow \oint_C \kappa ds = 2\pi[N(C)\text{覆盖}\mathbb{S}^1\text{的次数}]$$

同理我们可以定义 $\mathbb{S}^1$ 上一点的拓扑度定义为：

$$\deg[N(C),\tilde{p}] = \mathcal{P}(\tilde{p}) - \mathcal{N}(\tilde{p})$$

这个 $N(C)$ 的定义与 $\tilde{p}$ 的选择无关，这样：

$$\oint_C \kappa ds = 2\pi \deg[N(C)]$$

到这里，我们可以给霍普夫旋转定理一个启发式的证明了：设我们初始时有一个圆周 $C(0)$，在演化到 t 时刻时，曲线记为 $C(t)$，最终到 $C(1)$ 时，曲线变成我们想要研究的一般简单闭曲线。设演化过程中曲线不自相交，也不出现尖角。在 $C(t)$ 演变时，$\tilde{x}$ 的轨迹也在不断演变。一旦 $C(t)$ 上出现曲率的拐点，$\tilde{x}$ 上就出现一个“褶皱”。那么显然 $\mathcal{P}(\tilde{p})$ 和 $\tilde{N}(\tilde{p})$ 要么同时增加 1，要么同时减少 1. 因此，$\deg[N(C)] = 2\pi$ 对曲线上每一点恒成立。

GCB 的启发式证明

我们找一条曲线，将其旋转，生成一个“梨形”的旋转体：

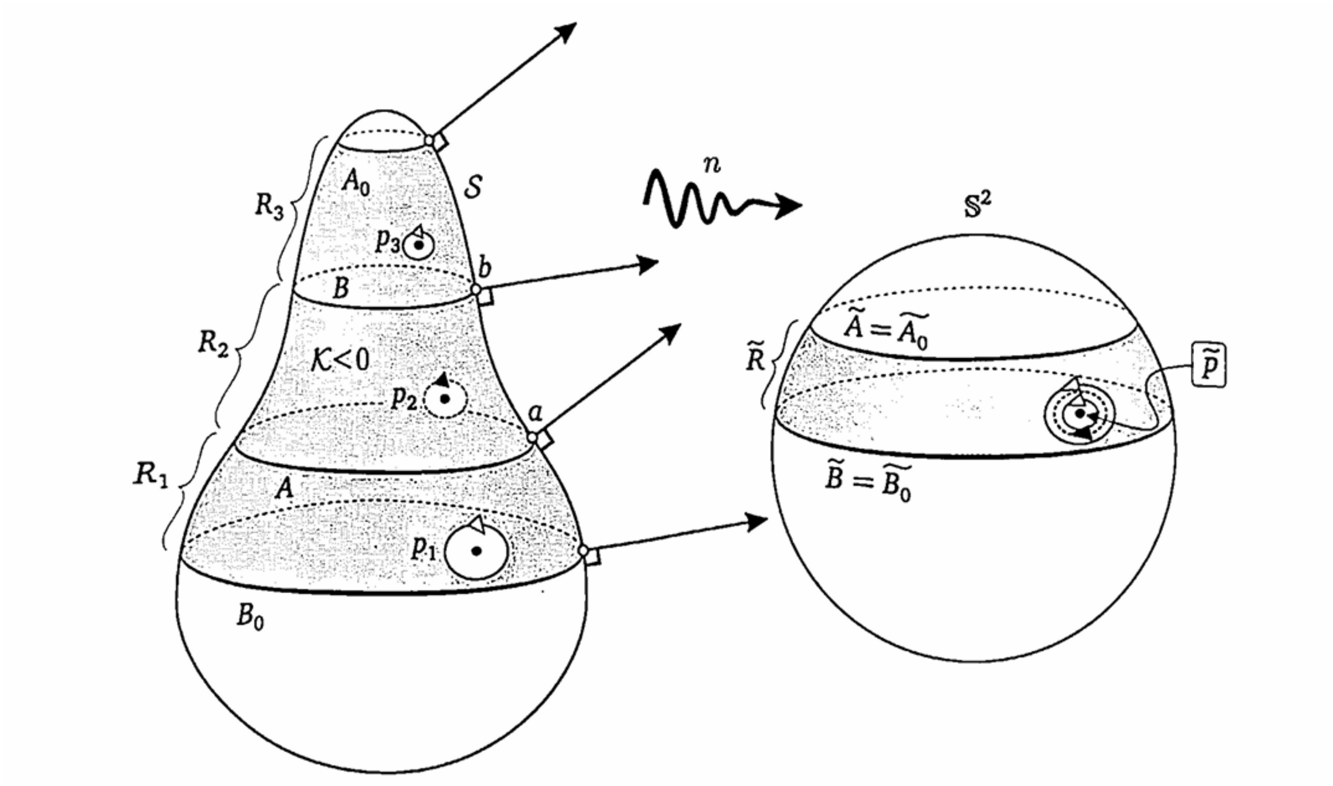

图 17-5 法映射 N 的度是 $N(\mathcal{S})$ 覆盖 $\mathbb{S}^2$ 的次数的代数和. 曲率 $\mathcal{K}$ 的正负号在我们越过 A 和 B 的时候发生改变，引起 $\mathbb{S}^2$ 上的像在我们越过 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}$ 时反转方向. 因为点 $\widetilde{p}$ 被走过了三次，其中两次是正向的，一次是负向的，所以点 $\widetilde{p}$ 被覆盖的净次数为 $2-1=1$

容易注意到左图中标出的 R_1, R_2, R_3 区域都被映射到右图中的区域 R，区域 R 被净覆盖的次数为 1. 所以我们容易理解这个“梨形”曲面的全曲率为何是 4π。下面的图展示了“梨形”曲面上的各个区域是如何覆盖 $\mathbb{S}^2$ 的。类似于前面一维的情况，我们可以想象有一层薄膜正在覆盖 $\mathbb{S}^2$，我们要研究的曲面逐步从 $\mathbb{S}^2$ 连续地演化到最终的曲面。演化

过程中，一旦“梨形”曲面上出现一个曲率的拐点，这层“薄膜”就出现一个“褶皱”。因此 $\mathbb{S}^2$ 上每一点被净覆盖的次数是不变的。因此球面上每一点的拓扑度都相同，且总曲率是拓扑不变量。

这个证明不甚严谨，因此我们说他是一个启发式证明。