3-5：Decomposition of Algebras

#MathematicalPhysics

我们现在要将代数分成更小的代数，现在我们来研究可分解的条件。在本小节中，我们认为所有的代数都是可交换的。

我们定义一个元素 $a \in \mathcal{A}$ 是幂零的，如果对于某些整数 k 有 $a^k = 0$，其中最小的整数称为 a 的指数。$\mathcal{A}$ 的子代数 $\mathcal{B}$ 被称为是幂零的，如果 $\mathcal{B}$ 的所有元素都是幂零的。如果 $\mathcal{B}^v = \{0\}$，但是 $\mathcal{B}^{v-1} \neq 0$，那么我们称 $\mathcal{B}$ 的指数是 v。$P \in \mathcal{A}$ 被称为幂等的，如果 $P^2 = P$。
一个例子是：$n \times n$ 的严格上三角矩阵是 n 阶的幂零代数。

> Note
>
> 一个幂零代数的理想也是幂零的。

一个代数的左、右、双侧幂零理想包含在某一个幂零理想中。接下来我们解释这一点。

> Note
>
> 设 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 的两个左（右）幂零理想，指数分别为 λ, μ，则 $\mathcal{L} + \mathcal{M}$ 也是 $\mathcal{A}$ 的左（右）幂零理想，其指数至多为 $\lambda + \mu - 1$。

显然 $\mathcal{A}(\mathcal{L} + \mathcal{M}) \subseteq \mathcal{L} + \mathcal{M}$，因此 $\mathcal{L} + \mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 的左理想。$(\mathcal{L} + \mathcal{M})^k$ 中的元素都可以被写成 $a_1 a_2 \cdots a_k$ 的形式，a_i 是 $\mathcal{L}$ 或 $\mathcal{M}$ 中的元素。不妨设其中有 l 项在 $\mathcal{L}$ 中，有 m 项在 $\mathcal{M}$ 中，设 j 是最大的整数，使得 $a_j \in \mathcal{L}$，从 a_j 开始往左看，直到碰到另一个 $\mathcal{L}$ 中的元素 a_r ，由于 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{A}$ 的左理想，那么我们立刻知道：

$$a_{r+1} \cdots a_j = a'_j \in \mathcal{L}$$

从而：

$$a_1 a_2 \cdots a_k = b_1 b_2 \cdots b_l c = c_1 c_2 \cdots c_m b$$

由于 $k=l+m$，如果 $k=\mu+\lambda-1$，那么 $(\mu-m)+(\lambda-l)=1$。这说明如果 $m<\mu$，那么 $l\geq\lambda$；如果 $l<\lambda$，那么 $m\geq\mu$，那么立刻得到 $a_1\cdots a_k=0$。

> Note
>
> 设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个幂零左理想，那么 $\mathcal{J}=\mathcal{L}+\mathcal{L}\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 的双侧幂零理想。

注意到：

$$\mathcal{A}\mathcal{J}=\mathcal{A}\mathcal{L}+\mathcal{A}\mathcal{L}\mathcal{A}\subseteq\mathcal{L}+\mathcal{L}\mathcal{A}=\mathcal{J}$$

$$\mathcal{J}\mathcal{A}=\mathcal{L}\mathcal{A}+\mathcal{L}\mathcal{A}\mathcal{A}\subseteq\mathcal{L}\mathcal{A}+\mathcal{L}\mathcal{A}\subset\mathcal{J}$$

因此 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{A}$ 的双侧理想。
现在考虑 $\mathcal{L}\mathcal{A}$ 中 k 个元素的乘积：$l_1a_1l_2a_2\cdots l_ka_k=l_1'l_2'l_k'a_k$，因此如果 k 高于 $\mathcal{L}$ 的次数，则上面的乘积是零，因此 $\mathcal{L}\mathcal{A}$ 是幂零的。由于 $\mathcal{L}$ 也是幂零的，利用上面的引理得证。

> Note
>
> 代数 $\mathcal{A}$ 存在一个唯一幂零理想，包含了 $\mathcal{A}$ 的每个左、右、双侧幂零理想。

设 $\mathcal{N}$ 是维度最高的幂零理想，$\mathcal{M}$ 是任意的幂零理想，根据引理，$\mathcal{N}+\mathcal{M}$ 是一个幂零理想。由于 $\mathcal{N}+\mathcal{M}\subset\mathcal{N}$，那么 $\mathcal{M}\subset\mathcal{N}$，显然 $\mathcal{N}$ 包含了所有幂零理想。如果我们有另一个极大幂零理想 $\mathcal{N}'$，那么 $\mathcal{N}'\subseteq\mathcal{N},\mathcal{N}\subseteq\mathcal{N}'$，这意味着 $\mathcal{N}'=\mathcal{N}$，那么 $\mathcal{N}$ 是唯一的极大幂零理想。如果 $\mathcal{L}$ 只是左侧幂零理想，那么 $\mathcal{L}\subset\mathcal{J}=\mathcal{L}+\mathcal{L}\mathcal{A}\subset\mathcal{N}$。对于右侧幂零理想是同理的。因此 $\mathcal{N}$ 包含了所有左侧、右侧、双侧幂零理想。

我们现在定义：代数 $\mathcal{A}$ 的极大幂零理想被称为 $\mathcal{A}$ 的根，使用 $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ 表示。

> Note
>
> 设 $\mathcal{A}$ 中有一个元素满足 $\mathcal{A}a^k=\mathcal{A}a^{k-1}$ 对于某个正整数 k 成立，那么 $\mathcal{A}$ 包含一个幂等元素。

令 $\mathcal{B}=\mathcal{A}a^{k-1}$，那么 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的右理想（$\mathcal{B}a=\mathcal{B}$）。两侧同乘以 a，得到：
$\mathcal{B}a^2=\mathcal{B}a^3=\mathcal{B}$，从而 $\mathcal{B}a^k=\mathcal{B}$。而 $a^k\in\mathcal{B}$，现在，令 $b=a^k$，我们得到 $\mathcal{B}b=\mathcal{B}$，也

就是说我们能找到 b 中一个元素 P，使得 $Pb = b$，也就是 $P^2 = P$，从而 $\mathcal{A}$ 中包含幂等元素 P。

> **Note**
>
> 一个代数是幂零的，当且仅当它不含幂等元素。

依照定义，幂零代数一定不能含有幂等元素。接下来证明另一侧。首先我们有 $\mathcal{A}a \subseteq \mathcal{A}$，那么就有 $\mathcal{A}a^k \subseteq \mathcal{A}a^{k-1}$。由上面的引理知道，如果 $\mathcal{A}$ 中无幂等元素：

$$\mathcal{A} \supset \mathcal{A}a \cdots \supset \mathcal{A}a^k \supset \cdots$$

由于 $\mathcal{A}$ 是有限维的，那么必然有 $\mathcal{A}a^r = \{0\}$，也就是 $a^{r+1} = 0$。得证。