6：连续基底

#Quantum_Mechanics

在之前，我们总是假设基底是离散的，但是实际上在量子力学中许多物理量都是连续的，例如位置或者动量，它们的本征值往往可以是 $-\infty$ 到 $+\infty$ 中的任意值。此时，希尔伯特空间显然是无限维的，但幸运的是，之前我们在有限维空间上导出的很多结论仍然成立。连续谱情况下的本征值方程：

$$\xi|\xi'\rangle = \xi'|\xi'\rangle$$

本征矢量之间的正交性：

$$\langle\xi'|\xi''\rangle = \delta(\xi' - \xi'')$$

完备性关系：

$$\sum_{\xi'}|\xi'\rangle\langle\xi'| = I$$

一个态矢分解到某一算符的本征矢量上：

$$|\alpha\rangle = \int d\xi'|\xi'\rangle\langle\xi'|\alpha\rangle$$

概率密度的归一化：

$$\int d\xi'|\langle\xi'|\alpha\rangle|^2 = 1$$

两个态矢的内积（我们仍然插入一个完备性关系）：

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \int d\xi\langle\beta|\xi'\rangle\langle\xi'|\alpha\rangle$$

另外我们还有：

$$\langle\xi''|\Xi|\xi\rangle = \xi'\delta(\xi'' - \xi')$$

在前面，我们使用 S-G 实验阐明了量子力学中的“观测”实际上是一个不断"过滤"的过程，现在我们在连续谱的情况下再来讨论一下这件事，作为特例，这次我们关注一维

位置算符 X，它的本征矢量 $|x'\rangle$ 形成一组完备的基底，任意一个态矢 $|\alpha\rangle$ 都可以这样表示：

$$|\alpha\rangle=\int dx'|x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$$

我们假设一个实际的检测仪器作用在系统上之后，系统的态矢中，只有 $\left[x-\frac{\Delta}{2},x+\frac{\Delta}{2}\right]$ 的部分被筛选出来，那么上面的积分范围就变成 $\left[x-\frac{\Delta}{2},x+\frac{\Delta}{2}\right]$ 。系统的位置被观测到处于 $[x',x'+dx']$ 的概率为 $|\langle x'|\alpha\rangle|^2dx'$，显然它是归一化的。这里的 $\langle x'|\alpha\rangle$ 也就是所谓位置表象下的波函数。

我们也可以看三维的情况，此时的态矢写为：

$$|\alpha\rangle=\int d^3x'|x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$$

这里的 $|x\rangle$ 同时是 X,Y,Z 三个方向上位置算符的本征矢量，我们需要三个坐标来唯一地找到一个本征矢量：

$$|x'\rangle=|x',y',z'\rangle\quad X|x'\rangle=x'|x'\rangle,Y|x\rangle'=y'|x'\rangle,Z|x'\rangle=z'|x'\rangle$$

既然 X,Y,Z 三个算符有相同的本征矢量，这意味着它们两两对易，也就是说我们可以同时测量其中的两个或者三个量。

现在我们来介绍平移算符 $\mathscr{F}(dx')$，它对 $|x'\rangle$ 的本征矢起到如下作用：

$$\mathscr{F}(dx')|x'\rangle=|x+dx'\rangle$$

那么我们可以看到它作用在一般态矢上的效果：

$$\mathscr{F}(dx')|\alpha\rangle=\mathscr{F}(dx')\int d^3x'|x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle=\int d^3x'|x'+dx'\rangle\langle x'|\alpha\rangle=\int dx^3x'|x'\rangle\langle x'-dx'|\alpha\rangle$$

平移算符的直观意义是将量子态进行平移，在之后的计算中我们可以更清晰地看出这一点。我们现在列出平移算符的一些性质。首先，平移算符是幺正的，这是因为我们对态矢的归一化约定：

$$\langle\alpha|\mathscr{F}^\dagger(dx')\mathscr{F}(dx')|\alpha\rangle=1\Rightarrow\mathscr{F}^\dagger(dx')\mathscr{F}(dx')=I$$

另外，根据平移的自然性质，我们显然希望：

$$\mathscr{F}(dx'')\mathscr{F}(dx')=\mathscr{F}(dx'+dx'')\quad\mathscr{F}(-dx')=\mathscr{F}^{-1}(dx')\quad\lim_{dx'\to0}\mathscr{F}(dx')=I$$

我们直接将 $\mathscr{F}$ 的形式钦定为：

$$\mathscr{F}(dx') = 1 - i\,K \cdot dx'$$

这里的 K 是厄米算符，那么以上性质全部满足（证明略），那么我们现在导出 X 和 K 的关系。注意到：

$$X\mathscr{F}|x'\rangle = X|x' + dx'\rangle = (x' + dx')|x' + dx'\rangle$$

以及：

$$\mathscr{F}(dx')X|x'\rangle = x'\mathscr{F}(dx')|x'\rangle = x'|x' + dx'\rangle$$

从而我们得到：

$$[X, \mathscr{F}(dx')]|x'\rangle = dx'|x' + dx'\rangle \approx dx'|x'\rangle \Rightarrow [X, \mathscr{F}(dx')] = dx'$$

或者：

$$[x_i, K_j] = i\delta_{ij}$$

我们自然要好奇在我们钦定的平移算符中, K 的意义是什么？在经典力学中，无穷小平移可以视作一个正则变换：

$$X = x + dx \quad P = p$$

它的生成函数为：

$$F(x, P) = x \cdot P + p \cdot dx$$

由于单位变换的生成函数是 $x \cdot P$，那么这里的 p 貌似就和平移算符中的 K 有了相同的地位。当然，无穷小平移算符必须是无量纲的，因此 K 的量纲是 长度^{-1}，这是 p 除以作用量的量纲，为此，我们需要引入一个宇宙学常数，于是普朗克常数就在这里出现了：

$$\mathscr{F}(dx') = 1 - iP \cdot \frac{dx'}{\hbar}$$

这里的 P 是动量算符。于是，位置算符和动量算符的对易关系变成：

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

因此我们不幸地发现——我们无法同时精确测量某个方向上的位置和动量了，这里有不确定性关系：

$$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p_x)^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

上面我们一直在研究无穷小的平移，现在我们研究一般的平移。我们可以这样算出一般平移算符：

$$\mathscr{F}(\Delta x \hat{x}) = \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{ip_x\Delta x'}{N\hbar}\right) = \exp\left(-\frac{ip_x\Delta x'}{\hbar}\right)$$

另外，平移自然要求性质：

$$\mathscr{F}(\Delta y'\hat{y})\mathscr{F}(\Delta x'\hat{x}) = \mathscr{F}(\Delta x'\hat{x})\mathscr{F}(\Delta y'\hat{y}) = \mathscr{F}(\Delta x'\hat{x}+\Delta y'\hat{y})$$

这就自然要求：

$$[\mathscr{F}(\Delta y'\hat{y}), \mathscr{F}(\Delta x'\hat{x})] \approx -\frac{(\Delta x')(\Delta y')[p_y, p_x]}{\hbar^2} = 0$$

因此我们有：

$$[P_i, P_j] = 0$$

这里的 P 被称为平移算符 $\mathscr{F}$ 的生成元，由于 P 是对易的，我们看到了 $\mathscr{F}$ 是对易的，这时候我们称 $\mathscr{F}$ 是某个交换群中的元素。
此外，我们还可以看看 $\mathscr{F}$ 作用在 P 的本征矢量上会发生什么：

$$\mathscr{F}(dx')|p'\rangle = \left(1-\frac{ip\cdot dx'}{\hbar}\right)|p'\rangle = \left(1-\frac{ip'\cdot dx'}{\hbar}\right)|p'\rangle$$

因此，$|p'\rangle$ 也是 $\mathscr{F}(dx')$ 的本征矢量。

现在，总结我们以上见到的所有对易关系：

$$[X_i, X_j] = 0 \quad [P_i, P_j] = 0 \quad [X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

以上这些关系称为正则对易关系。我们可以将这些对易关系与经典泊松括号类比：

$$[\cdot,\cdot]_{classical} \to \frac{[\cdot,\cdot]}{i\hbar}$$

比如说 $[x_i, p_j]_{classical} = \delta_{ij}$。无论是经典泊松括号，还是量子化的对易子，都有以下性质

$$[A, A] = 0 \quad [A, B] = -[B, A] \quad [A, const] = 0$$

$$[A+B, C] = [A, C] + [B, C] \quad [A, BC] = A[B, C] + B[A, C]$$

$$[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$$

我们显然可以从经典类比来引入量子化对易子，但是我们这里选择的是一个更强大】更通用的方法：我们仅仅使用了（1）平移的性质（2）将动量算符设置为平移算符的生成元除以约化普朗克常数。