电动力学PART 4

#ElectroDynamics

库伦规范和洛伦兹规范

在静电场、静磁场的情况下,我们给出 $\rho(r)$, J(r),库仑定律和毕奥-萨伐尔定律就可以给出 E(r), B(r) 的分布。但是如果给定 $\rho(r,t)$, J(r,t),我们如何计算 E(r,t) 和 B(r,t) 呢?我们仍然考虑能不能找到电场和磁场的某种势。现在,电场有旋度,因此我们不能将其写成某个量的梯度的形式,但是磁场依然无源,因此:

$$B = \nabla imes A$$

使用麦克斯韦方程组:

$$abla imes E = -rac{\partial}{\partial t}(
abla imes A) \Rightarrow
abla imes \left(E + rac{\partial A}{\partial t}
ight) = 0$$

因此, 我们可以这样写:

$$E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}$$

将这个式子代入麦克斯韦方程组 (计算 E 的散度) ,我们得到:

$$abla^2 V + rac{\partial}{\partial t} (
abla \cdot A) = -rac{1}{\epsilon_0}
ho \quad (\star)$$

这替换了原来的泊松方程。此时,我们还有一条方程没用,我们计算 B 的旋度:

$$abla imes (
abla imes A) = \mu_0 J - \mu_0 \epsilon_0
abla \left(rac{\partial V}{\partial t}
ight) - \mu_0 \epsilon_0 rac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

使用 $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla (\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$, 可以将上式写成:

$$\left(\nabla^2 A - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right) - \nabla \left(\nabla \cdot A + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right) = 0 \quad (\star\star)$$

在推导 (*) 和 (**) 式的过程中,我们使用了全部的四条方程,因此这两个式子已经包含了麦克斯韦方程的全部信息。这两条方程中的场已经完全消去,完全是关于 V 和 A

的方程。虽然它的形式很丑陋,但是我们已经稍微化简了问题——将六个分量的求解 化简为四个分量的求解。

我们发现,上面的方程并不唯一确定 V 和 A,假设我们有两组势 (V,A) 和 (V',A'),它们之间有关系: $A'=A+\alpha, V'=V+\beta$ 。由于我们需要 $\nabla \times \alpha = 0$,那么 α 需要是某个标量的梯度: $\alpha = \nabla \lambda$ 。在静电场中,V 可以差一个常数(这时两个 V 给出相同的场),但是现在 $E=-\nabla V-\frac{\partial A}{\partial t}$,我们不能这么干。为了让新的势也给出相同的场,我们有:

$$abla eta + rac{\partial lpha}{\partial t} = 0 \Rightarrow
abla \left(eta + rac{\partial \lambda}{\partial t}
ight) = 0$$

因此,括号内的东西应该与位置无关。我们可以将 β 表达为:

$$eta = -rac{\partial \lambda}{\partial t} + k(t)$$

这样括号内只剩下一个 k(t) ,只与时间有关。为了方便写,我们一般将 λ 加上 $\int_0^t k(t')dt'$ 变成新的 λ ,从而将 k(t) 吸收掉。而这一项显然不影响 λ 的梯度(因为这一项只与时间有关)。因此,我们有:

$$A' = A +
abla \lambda \quad V' = V - rac{\partial \lambda}{\partial t}$$

我们将这样的变换称为"规范变换"。

前面学习静磁学的时候我们知道,只要设置 $\nabla \cdot A = 0$,很多问题都能迎刃而解(比如,磁矢势会很容易求出)。但是现在,我们可能需要根据问题选择 V 和 A 的最佳形式。接下来我们介绍两种最常见的情况。

库伦规范: 正如我们之前做的一样,设置 $\nabla \cdot A = 0$,那么(*)方程变成:

$$abla^2 V = -rac{1}{\epsilon_0}
ho$$

这就是泊松方程,而之前我们已经获得了它的解:

$$V(r,t) = rac{1}{4\pi\epsilon_0}\intrac{
ho(r',t)}{lpha}d au'$$

在库伦规范中, t 时刻的电势是由 t 时刻的电荷分布立刻确定的! 注意: 电势是一个不可测量的量, 我们能测量的只有电场 E, 而电场还与 A 有关。因此, 并不会出现信息

超过光速传播之类的问题。库伦规范的优势是V非常好计算,作为代价,A非常难以计算:

$$abla^2 A - \mu_0 \epsilon_0 rac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0
abla \left(rac{\partial V}{\partial t}
ight)$$

洛伦兹规范:将磁矢势的散度设置为: $\nabla\cdot A=-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}$ 。这样的话,上面的两条方程改写为:

$$abla^2 A - \mu_0 \epsilon_0 rac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 J \quad
abla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 rac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -rac{1}{\epsilon_0}
ho$$

我们闲杂记达朗贝尔算子: $abla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Box^2$, 那么麦克斯韦方程组被改写为:

$$\Box^2 V = -rac{1}{\epsilon_0}
ho \quad \Box^2 A = -\mu_0 J$$

这个方程组可以被视为泊松方程的四维推广。在洛伦兹规范下,V 和 A 均满足非齐次的波动方程,因此电动力学的所有问题转化为求解这个方程的问题。

下面我们会把洛伦兹力也一并改写一下。考虑到:

$$F = rac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = q(E + v imes B) = q \left[-
abla V - rac{\partial A}{\partial t} + v imes (
abla imes A)
ight]$$

利用矢量分析公式可以改写为:

$$rac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -q \left[rac{\partial A}{\partial t} + (v\cdot
abla)A +
abla(V-v\cdot A)
ight]$$

我们引用流体力学中的一个概念, $\frac{\partial A}{\partial t}+(v\cdot\nabla)A$ 称为 A 的物质导数,写作 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$,代表了随着电荷运动,电荷所在处 A 随着时间的变化:

$$dA = A(r+vdt,t+dt) - A(r,t) = \sum_{i=x,y,z} rac{\partial A}{\partial i} v_i dt + rac{\partial A}{\partial t} dt$$

此时, 洛伦兹力公式可以被改写成:

$$rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p+qA) = -
abla[q(V-v\cdot A)]$$

类比一个一般的运动方程 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-\nabla U$,现在新的动量 $p_{can}=p+qA$,被称为正则动量,新的势能则是 $q(V-v\cdot A)$ 。

推迟势

现在,我们考虑洛伦兹规范下的电势和磁矢势怎么写。一个直观感受是:当源发生变化后,信息以光速传播,推迟一段时间 $\frac{r}{c}$ 到达场点。(注意:现在我们关于 V,A 的方程是对称的,要想使得 E,B 是因果的,我们的 V,A 都得推迟相同的时间)于是我们猜测,V 和 A 应当满足以下的形式:

$$V(r,t) = rac{1}{4\pi\epsilon_0}\intrac{
ho(r',t_r)}{lpha}d au' \quad A(r,t) = rac{1}{4\pi\epsilon_0}\intrac{J(r',t_r)}{lpha}d au' \quad t_r = t - rac{lpha}{c}$$

现在我们要证明这个形式是正确的。我们要证明这个表达式满足非齐次波动方程和洛伦兹规范的条件。于是我们开始验证上面的 V,也就需要求出其二阶导数:

$$abla V = rac{1}{4\pi\epsilon_0}\intiggl[(
abla
ho)rac{1}{arkappa}+
ho
abla\left(rac{1}{arkappa}
ight)iggr]d au'$$

其中, $\nabla \rho = \dot{\rho} \nabla t_r = -\frac{1}{c} \dot{\rho} \nabla r$,于是我们得到:

$$abla V = rac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[-rac{\dot{
ho}}{c}rac{\hat{r}}{r} -
horac{\hat{r}}{r^2}
ight] d au'$$

继续向下求导:

$$abla^2 V = rac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left\{ -rac{1}{c} \left[rac{\hat{r}}{r} \cdot (
abla \dot{
ho}) + \dot{
ho}
abla \cdot \left(rac{\hat{r}}{r}
ight)
ight] - \left[rac{\hat{r}}{r^2} \cdot (
abla
ho) +
ho
abla \left(rac{\hat{r}}{r^2}
ight)
ight]
ight\} d au'$$

得到:

$$abla^2 V = rac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[rac{1}{c^2}rac{\ddot{
ho}}{r} - 4\pi
ho\delta^3(r)
ight]\!d au' = rac{1}{c^2}rac{\partial^2 V}{\partial t} - rac{1}{\epsilon_0}
ho(r,t)$$

(注意这里需要将前面的 V 直接代入。这没有逻辑问题,因为我们就是将猜测的 V 的表达式作为已知条件,验证麦克斯韦方程是否成立。) 我们就完成了 V 的证明。关于 A 的证明此处不再写。提请注意:如果取 $t_r = t + \frac{\gamma^r}{c}$,也可以完成证明。但是这显然 违反因果律。

Jefimenko 方程给出了电场和磁场的显式表达式。在前面,我们已经计算过 ∇V ,现在我们又知道:

$$rac{\partial A}{\partial t} = rac{\mu_0}{4\pi} \int rac{\dot{J}}{r} d au'$$

那么直接得到:

$$E(r,t) = rac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[rac{
ho(r',t_r)}{r'^2}\hat{ec{r}} + rac{\dot{
ho}(r',t_r)}{cr'}\hat{ec{r}} - rac{\dot{J}(r',t_r)}{c^2r'}
ight]d au'$$

计算 A 的旋度:

$$abla imes A = rac{\mu_0}{4\pi} \int \left[rac{1}{r}(
abla imes J) - J imes
abla \left(rac{1}{r}
ight)
ight] d au'$$

将 $\nabla \times J$ 拆开成三个方向计算:

$$(
abla imes J)_x = rac{\partial J_z}{\partial y} - rac{\partial J_y}{\partial z}$$

注意到其中:

$$rac{\partial J_z}{\partial y} = \dot{J}_z rac{\partial t_r}{\partial y} = -rac{1}{c} \dot{J}_z rac{\partial m{arkappa}}{\partial y} \Rightarrow (
abla imes J)_x = -rac{1}{c} igg(\dot{J}_z rac{\partial m{arkappa}}{\partial y} - \dot{J}_y rac{\partial m{arkappa}}{\partial z} igg) = rac{1}{c} [\dot{J} imes (
abla m{arkappa})]_x$$

从而 $\nabla \times J = \frac{1}{c} \dot{J} \times r$ 。磁场的显式表达式为:

$$B(r,t) = rac{\mu_0}{4\pi} \int \left[rac{J(r',t_r)}{{arkappa}^2} + rac{\dot{J}(r',t_r)}{c{arkappa}}
ight] imes \hat{r'} d au'$$

我们可以看出,电场与 $\rho, \dot{\rho}, \dot{J}$ 有关,而磁场与 J, \dot{J} 有关。这个方程实际上不常用,因为求出推迟势再进行微分经常是一个更简单的做法。

运动粒子的电磁场

我们现在计算一个运动的粒子的电磁场。比如我们计算电场:

$$V(r,t) = rac{1}{4\pi\epsilon_0}\intrac{
ho(r',t_r)}{lpha}d au'$$

看起来,对于一个点电荷,我们可以直接将其写为 $\frac{q}{4\pi\epsilon_0r}$,其中 r 是推迟过的位置。但很不幸这是错误的。原因是:

$$\int
ho(r,t_r)d au' = rac{q}{1-\hat{ec{r}}\cdot v/c}$$

这是因为推迟项的存在,因此在场点上看起来,带有电荷的区域会在运动方向上被"拉长"一个系数倍(更远的地方产生的影响,会在更晚的时候到达场点)

现在,我们用 $w(t_r)$ 记点电荷推迟过的位置,令 $r=r-w(t_r)$ (显然,在这个问题里面,只有推迟过的位置是有意义的) ,那么我们可以得到:

$$V(r,t) = rac{1}{4\pi\epsilon_0} rac{qc}{(rc-r\cdot v)} \quad A(r,t) = rac{v}{c^2} V(r,t)$$

注意这里的 v 也是推迟过的速度。从这个势中,我们可以显式计算出电场、磁场(这里计算量逆天,我们直接给出结果):

$$E(r,t) = rac{q}{4\pi\epsilon_0}rac{r}{(r\cdot u)^3}[(c^2-v^2)u + r imes (u imes a)] \quad B(r,t) = rac{1}{c}\hat{r imes} imes E(r,t)$$

特别地,对于匀速运动的带电粒子,令 R=r-vt,其中 r 是粒子现在的位置,则 R 是推迟过的位置,那么:

$$E(r,t) = rac{q}{4\pi\epsilon_0} rac{1 - rac{v^2}{c^2}}{(1 - rac{v^2}{c^2} \sin^2 heta)^{rac{3}{2}}} rac{\hat{R}}{R^2} \quad B = rac{1}{c^2} (v imes E)$$