#MA

1120212364，孙宇皓

第一题

根据矩阵范数的定义，矩阵的范数实际上是一个极值问题：

$$||I-A|| = \max_{||x||=1} ||(I-A)x||$$

由于 A 是奇异的，也就是说 A 不满秩，那么方程组 $Ax=0$ 存在非零解。我们将这个非零解记为 x_0，且单位化这个解使得 $||x_0||=1$，那么：

$$(I-A)x_0 = Ix_0$$

那么

$$||Ix_0|| = ||x_0|| = 1$$

也就是说

$$||I-A|| = \max_{||x||=1} ||(I-A)x|| \geq ||Ix_0|| \geq 1$$

这就得到了我们想要的结论。

第二题

这是第一题的推广。同样地，我们将矩阵范数写成一个极值问题的形式：

$$||A-B|| = \max_{||x||=1} ||(A-B)x||$$

考虑到 A 是非奇异的，而 B 是奇异的，那么存在某一单位非零向量 x_0 使得：

$$Bx_0 = 0$$

此时：

$$||(A-B)x_0|| = ||Ax_0||$$

然后，这里实际上我们只要说明存在一个符合条件的 x_0 使得上式取到 $1/||A^{-1}||$ 就可以了。但是，由于 x_0 不是任意取的，所以我们将针对上式的下界进行估计。
考虑 $||A^{-1}||$ ：将其写成一个极值问题：

$$
\begin{aligned}
&||A^{-1}|| \\
&\qquad = \max_{||x||=1} ||A^{-1}x|| \\
&\qquad = \max_{x\neq 0} \frac{||A^{-1}x||}{||x||} \\
&\qquad = \max_{x\neq 0} \frac{||AA^{-1}x||}{||Ax||} \\
&\qquad = \max_{x\neq 0} \frac{||x||}{||Ax||} \\
&\qquad = \max_{x\neq 0} \frac{1}{\frac{||Ax||}{||x||}} \\
&\qquad = \frac{1}{\min_{||x||=1} ||Ax||}
\end{aligned}
$$

因此，我们有:

$$
\min_{||x||=1} ||Ax|| = \frac{1}{||A^{-1}||}
$$

那么,

$$
||Ax_0|| \geq \frac{1}{||A^{-1}||}
$$

那么

$$
||A-B|| \geq ||(A-B)x_0|| \geq \frac{1}{||A^{-1}||}
$$