#MA

第一题

首先，我们十分断定原题面是有错误的，因为我们希望证明

$$\max x^T Ay = \sigma_1$$

并且此时有 $||x||=1, ||y||=1$ ，这显然是不对的。如果我们将 x 和 y 的模长增大，那么 $x^T Ay$ 的结果也会相应地增大。因此，我们将题面改述为：

$$\max x^T Ay \qquad s.t. ||y|| = 1, ||x|| = 1$$

现在我们故技重施，按照之前求瑞丽商的最大值的做法，我们将矩阵 A 进行 SVD ：

$$f(x,y) = x^T U\Sigma V^T y = (Ux)^T \Sigma (V^T y)$$

由于 U 和 V 都是正交变换，所以变换得到的 $z = Ux$ 和 $t = V^T y$ 的模长都是 1，例如：

$$||z|| = z^T z = x^T U^T Ux = x^T Ix = x^T x = 1$$

那么，原来的优化问题转化成新的优化问题：

$$\max f(z,t) = z^T \Sigma t \qquad ||z|| = 1, ||t|| = 1$$

其中，Σ 是对角矩阵，对角线上就是各个奇异值。如何求解这个优化问题呢？我们不妨将上式看作两个向量的内积：

$$f(z,t) = z^T (\Sigma t)$$

那么，如何使得两个向量的内积最大？——两个向量的模长要尽量大，夹角要尽量小。因为 z 和 Σt 是完全独立的两个向量，所以在 Σt 的方向选好之后，z 的方向可以任意选择，总能找到一个 z 使得 z 与 Σt 同向。由于 z 是单位向量，因此在 z 与 Σt 同向时，我们有：

$$||z^T \Sigma t|| = ||\Sigma t||$$

也就是说，我们只要最大化 Σt 的模长即可，那么：

$$||\Sigma t||_2^2 = \sum_{i=1}^{q} \sigma_i^2 t_i^2$$

由于 $\sum t_i^2 = 1$，那么显然上式的最大值是 σ_1^2 ，那么，原式的最大值就是 σ_1 ，得证。

然而，这个证法过于繁琐，相信本题一定有十分简单的证法

第二题

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

计算矩阵的特征值和特征向量.

$$A-\lambda I: \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & -11 & -6-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -11 & -6-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\,(6\lambda+\lambda^2+11) - 1\cdot(+6)$$

$$= -6\lambda^2-\lambda^3-11\lambda-6 = 0$$

则 $\lambda_1 = -1.$ $\lambda_2 = -2.$ $\lambda_3 = -3.$

当$\lambda_1=-1$时.

$$A+I=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & -11 & -5 \end{bmatrix}$$

则其对应的特征向量为 $[-1, 1, -1]^T$

当$\lambda_2=-2$时,

$$A+2I=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -6 & -11 & -4\end{bmatrix}$$

则其对应的特征向量为: $[1,\ -2,\ 4]^T$

当 $\lambda_3=-3$ 时.

$$A+3I=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ -6 & -11 & -3\end{bmatrix}$$

则对应的特征向量为 $[1, -3, +9]$

由于 v_1、v_2、v_3 是线性无关的 故A可相似对角化.

变换阵

$$P=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ +1 & -2 & -3\\ -1 & +4 & +9\end{bmatrix} \qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & -2.5 & 0.5\\ -3 & -4 & -1\\ 1 & 1.5 & 0.5\end{bmatrix}$$