Chapter 27： 度量曲率公式的几何证明

#DifferentialGeometry

我们现在要证明之前提出的曲率公式：

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{AB}\left(\partial_v\left[\frac{\partial_v A}{B}\right] + \partial_u\left[\frac{\partial_u B}{A}\right]\right)$$

这里，u, v 是曲面上的正交坐标系，而 A, B 是 u, v 坐标的变化和 X, Y 坐标变化的比例：

$$\delta X = A\delta u \quad \delta Y = B\delta v$$

利用度量公式表示曲面上两点之间的距离：

$$d\hat{s}^2 = dX^2 + dY^2 = A^2du^2 + B^2dv^2$$

我们现在引入一下向量场的旋度。我们定义向量场 V 围绕 L 的环流量 $C_L(V)$ 是 V 的分量沿着 L 方向的曲线积分：

$$C_L(V) = \oint_L V \cdot dr = \oint_L [Pdu + Qdv]$$

当环路 L 的面积越缩越小的时候，我们可以定义：V 的旋度是单位面积上的局部环流量

$$\text{curl}V = \partial_u Q - \partial_v P$$

我们先从最简单的例子开始：研究平面上的一个小环路的和乐性。我们取极坐标，选择基准向量场是径向向外的射线：

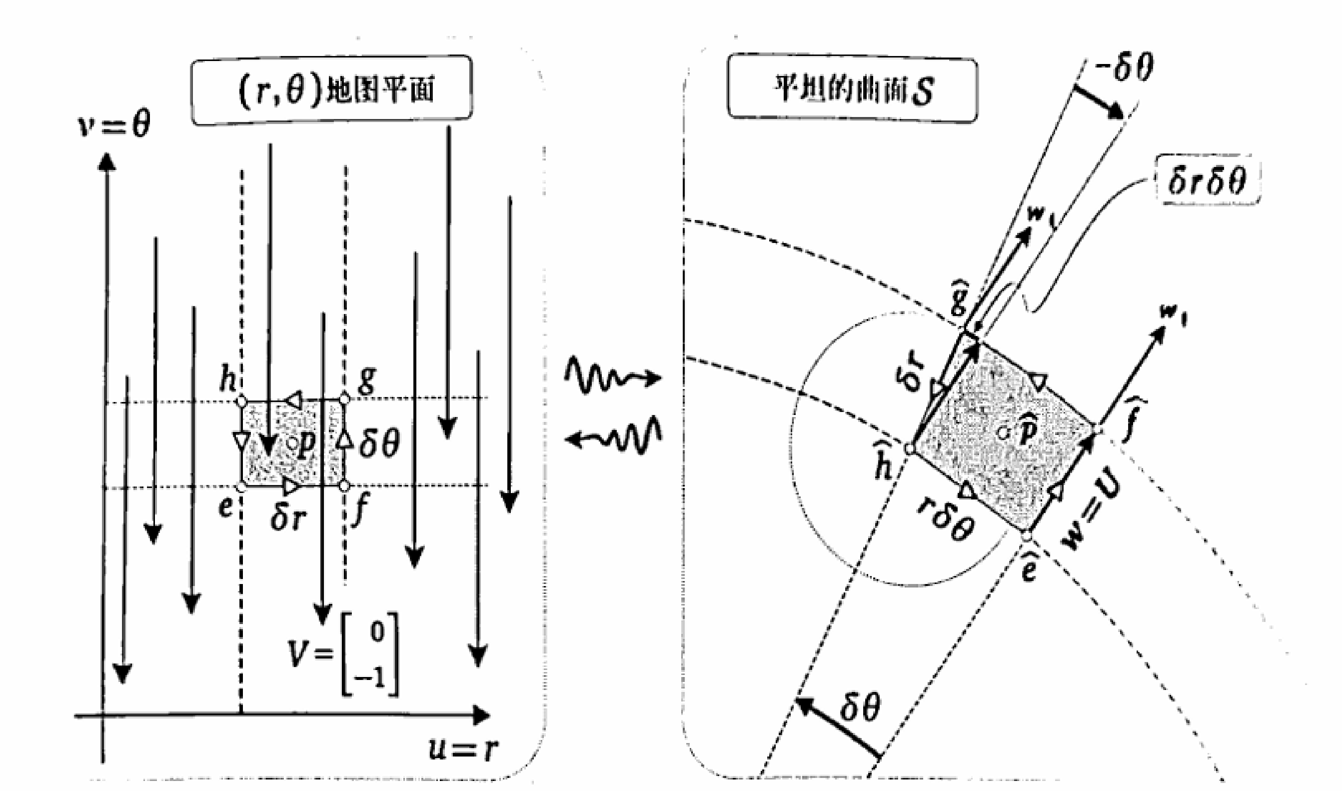

图 27-3　由于近侧边比对边短 $\delta r\delta\theta$ 的度量事实，可以证明 $\delta\mathcal{R}_U(\widehat{he})=\delta\theta$. 左图中地图平面 V 围绕闭回路的环流量产生了右图中（平坦的）曲面上（为 0）的和乐性

从右图中，容易看出，绕着所选回路的和乐性为 0. 现在我们考虑另一个推导：边 $\hat{g}\hat{f}$ 略长于边 $\hat{h}\hat{e}$，如果没有长出这一段的话，w 在移动到 $\hat{g}\hat{h}$ 上的时候是与 $\hat{g}\hat{h}$ 没有夹角的！两条边长度的差距是 $\delta r\delta\theta$。更一般地，如果我们将边长表为 $\delta Y=B\delta v$，那么由 u 增加 δu 引起的边长增加：

$$\delta^2 Y=[\partial_u B\delta u]\delta v$$

另外显然容易从左图中看出，每条边上的环流量恰好等于这条边上的和乐性，换言之：

$$\mathcal{R}(\hat{L})=C_L(V)$$

现在我们论证上述结论。我们设 R 是地图上以 p 为中心的一个平行四边形，而它被映射到曲面上以 $\hat{p}$ 为中心的 $\hat{R}$。虽然此时的 $\hat{R}$ 很像一个真正的矩形，但是显然，它对边的长度是不同的。

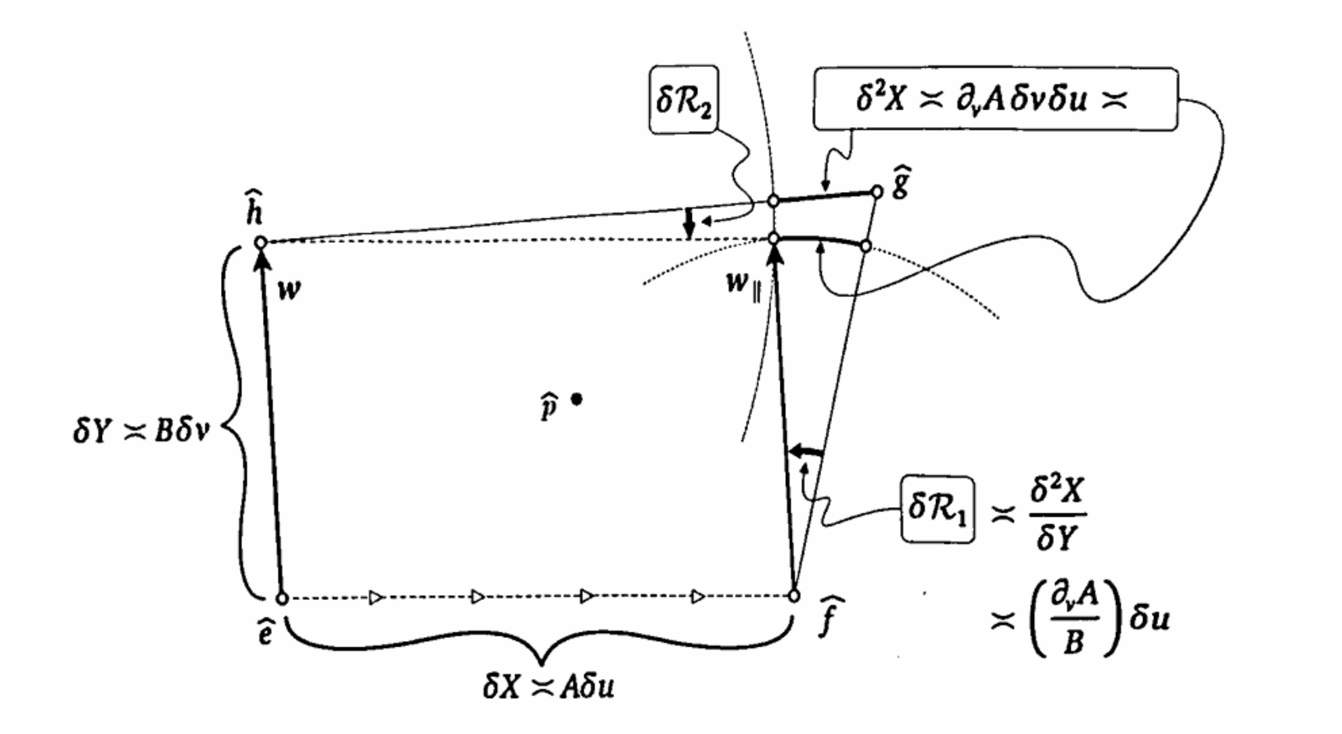

图 27-4 度量曲率公式的几何证明. 沿 $\widehat{ef}$ 的平行移动导致（相对于 (u,v) 曲线的）旋转 $\delta\mathcal{R}_1$ 由 $\delta\mathcal{R}_1 \asymp \left(\frac{\partial_v A}{B}\right)\delta u$ 决定

这里，我们将小矩形投影到 $\hat{p}$ 的切平面上。如图，两条对边的长度差距是 $\delta^2 X = [\partial_v A\delta v]\delta u$。根据上面在极坐标系中的推理，我们知道这会导致向量 w 在平行移动的过程中相对于某个基准向量场（这里选为 u 曲线）旋转角度：

$$\delta\hat{\mathcal{R}}_1 = \frac{\partial_v A\delta v\delta u}{B\delta v} = \frac{\partial_v A}{B}\delta u$$

同理，沿着 $\hat{f}\hat{g}$ 的平行移动会产生和乐性（这里是相对于 v 曲线的旋转角度）：

$$\delta\hat{\mathcal{R}}_2 = -\frac{\partial_u B}{A}\delta v$$

现在我们只计算出沿着两条边走，带来的和乐性。如果我们要计算整个曲线的和乐性，做法显然应该是在地图平面上定义向量场 $V = \begin{bmatrix} \frac{\partial_v A}{B} \\ = \frac{\partial_u B}{A} \end{bmatrix}$，并计算该向量场的环量。

这样我们就证明了曲率公式，此外，我们还可以得到在共形地图下它的特殊形式：

$$\mathcal{K} = \frac{\nabla^2 \ln\Lambda}{\Lambda^2} \quad A = B = \Lambda$$