Chapter 26： GGB的第四个证明（利用和乐性）

#DifferentialGeometry

我们现在为 GGB 提供一个完全内蕴的证明（使用另一种方法将曲率和奇点指数联系起来）。首先我们将和乐性推广到非闭合曲线 K。正如定义奇点指数一样，此时我们可以将和乐性定义为：

$$\mathcal{R}_U(K)=\delta_K(\angle U w_{\parallel})$$

显然，$\mathcal{R}_U$ 与 U 的选择一定是相关的，但是与 w 的选择无关。此时，三角形的和乐性就可以写成三边上的和乐性之和。

我们现在要证明：

$$\mathcal{K}(S_g)=\iint_{S_g}\mathcal{K}d\mathcal{A}=2\pi\sum_i\mathcal{J}_F(s_i)$$

之前我们已经证明过，$\sum_i\mathcal{J}_F=2-2g$，现在的问题让是如何将它与总曲率联系起来。

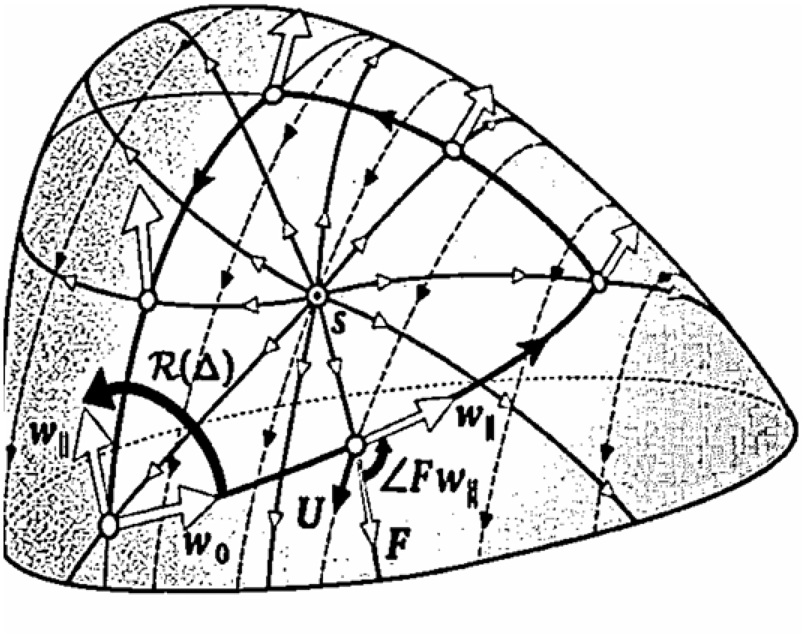

图 26-2　通过将图中所示的 $\angle F w_\parallel$ 沿每条 K_j 的变化 $\Phi(K_j)$ 相加，即 $w_\parallel$ 相对于 F 的旋转，就可求得差 $\mathcal{R}(\Delta)-2\pi\mathcal{J}_F(s)$

如图，我们找一个测地三角形，在其中放置一个奇点 s（我们这里放置了一个源），我们考察：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}(\Delta)-2\pi\mathcal{J}_F(s) &= \mathcal{R}(\Delta)-\delta_\Delta(\angle UF) \\
&= \sum_i [\mathcal{R}_U(K_i)-\delta_{K_i}(\angle UF)] \\
&= \sum_i [\delta_{K_i}(\angle U w_\parallel)-\delta_{K_i}(\angle UF)] \\
&= \sum_i \delta_{K_i}(\angle F w_\parallel)
\end{aligned}
$$

因此这个差值其实只与我们放置的向量场 F 有关系，独立于作为基准的 U。显然，走过边 K_i 的方向反向的时候，上面这个差值也会反向。

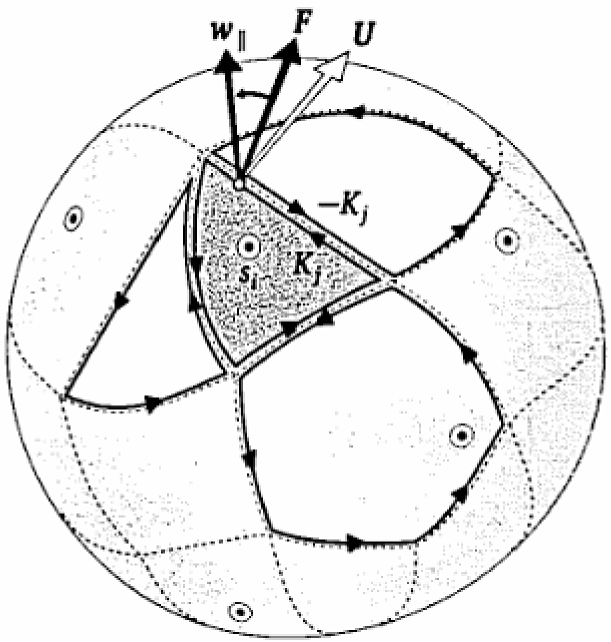

图 26-3 对曲面 $\mathcal{S}_g$ 做多边形剖分，其中每个多边形 P_l 至多只包含 F 的一个奇点 s_i. 通过将图中所示的 $\angle Fw_\parallel$ 沿（所有多边形 P_l 的）所有边 K_j 的变化 $\Phi(K_j)$ 相加，就可求得差 $\mathcal{K}(\mathcal{S}_g)-2\pi\sum_i \mathcal{J}_F(s_i)$. 但是，每一条边 K_j 都毗连相邻多边形的一条方向相反的边，于是，在所有这些边上的旋转角之和为零. 所以，$\mathcal{K}(\mathcal{S}_g)=2\pi\sum_i \mathcal{J}_F(s_i)$

现在在曲面上设置向量场，并对曲面做多边形剖分，使得每个多边形中至多包含一个奇点。对所有多边形求和，立刻得到：

$$\mathcal{K}(S_g) = 2\pi \sum_i \mathcal{J}_F(s_i) = 2\pi(2-2g)$$

从而定理得证。