3-1：From Vector Space to Algebra

#MathematicalPhysics

我们定义 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的代数是一个向量空间 $\mathcal{A}$，某个被称作“乘法”的运算对这个向量空间封闭，也就是说 $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to A$，这种乘法满足线性性和分配律，也就是说：

$$a(\beta b+\gamma c)=\beta ab+\gamma ac \quad (\beta b+\gamma c)=\beta ba+\gamma ca$$

其中 $a,b,c\in\mathcal{A},\beta,\gamma\in\mathbb{R}\ or\ \mathbb{C}$ 。此外，我们称一个代数满足结合律，则 $a(bc)=(ab)c$ ，满足交换律如果 $ab=ba$。代数的单位元 1 定义为 $a1=1a=a$，a 的左逆和右逆定义为 $ba=1$ 和 $ab=1$。由此，我们可以推出代数的一些性质：

- 具有零元：在上面的定义中，令 $b=c,\beta=1=-\gamma$ 即可立刻得到 $a0=0a=0$
- 具有唯一的单位元：不妨设有两个单位元 $1,e$，则 $1e=1$，因为 e 是单位元；而 $1e=e$，因为 1 是单位元，从而 $e=1$
- 若某个代数有结合律，则左逆和右逆相等：$bac=(ba)c=b(ac)$
  因此，我们显然地得到以下定理：

  > Note
  > $\mathcal{A}$ 是带有单位元的、结合律成立的代数，如果 $a\in\mathcal{A}$ 有左逆和右逆，那么它们相等且这个逆唯一。如果 a,b 均可逆，那么 $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$。

一个代数可以有子代数。设 $\mathcal{A}$ 是一个代数，$\mathcal{A}'$ 是 $\mathcal{A}$ 的线性子空间，那么我们称 $\mathcal{A}'$ 是 $\mathcal{A}$ 的子代数。设 $\mathcal{A}$ 是一个满足结合律的代数，S 是 $\mathcal{A}$ 的子集，那么由 S 诱导出的子代数是 $s_1s_2\cdots s_k,s_i\in S$ 的线性组合。如果 S 中只有一个元素 s，那么子代数就是 s 的多项式。考虑到子代数必须满足对乘法的封闭性，这是显然的。

代数 $\mathcal{A}$ 的中心是那些与其他所有元素都可交换的元素，记作 $Z(A)$。如果 $\mathcal{A}$ 是满足结合律的，那么 $Z(A)$ 是 $\mathcal{A}$ 的子代数。一个带有单位元的代数被称为是中心的，如果 $Z(A)=\mathrm{Span}(1)$。

如果 A,B 是 $\mathcal{A}$ 的子集，那么 AB 表示：

$$AB=\left\{x\in\mathcal{A}|x=\sum_k a_kb_k,a_k\in A,b_k\in B\right\}$$

我们将 $\mathcal{A}^2$ 称为 $\mathcal{A}$ 的诱导代数。

如果在代数 $\mathcal{A}$ 中，$a \times b = ab$，我们将 $a \times b = ba$ 的代数称为其反代数 A^{op}。

我们举出一些代数的例子：复数乘法、$n \times n$ 矩阵的乘法、线性空间 V 上算子的复合、对易括号、多项式的乘法（这是一个无穷维的代数）、定义在 $C^r(a,b)$ 上函数的乘法 $(fg)(t) = f(t)g(t)$（这也是一个无穷维的代数）

我们接下来定义代数的直和。为了使得代数的直和 $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ 也成为一个代数，我们需要在上面定义一个乘法：

$$(a_1 \oplus b_1)(a_2 \oplus b_2) = (a_1 a_2 \oplus b_1 b_2)$$

这意味着 a_1, a_2 与 b_1, b_2 先在原来的代数上做乘积，再直和起来。一个特殊的情形是：$a \in \mathcal{A}$ 可以被表示为 $a \oplus 0$，而 $b \in \mathcal{B}$ 可以被表示为 $b \oplus 0$，那么此时 $ab = 0$。

如果 $a \oplus b$ 是 $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ 的中心，那么我们有：

$$(a \oplus b)(x \oplus y) = (x \oplus y)(a \oplus b) \quad \forall x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{B}$$

或者 $(ax - xa) \oplus (by - yb) = 0 \Rightarrow ax - xa = 0, by - 0yb = 0$。这意味着 $a \in Z(\mathcal{A}), b \in Z(\mathcal{B})$，从而：$Z(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = Z(\mathcal{A}) \oplus Z(\mathcal{B})$

我们接下来定义代数的张量积。同理，如果我们要求代数的张量积也成为一个代数，我们需要定义乘法：

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$$

由于 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ 的同构关系，我们要求 $a \otimes b = b \otimes a, \forall a, b$。

接下来我们定义一个代数的结构常数。设代数 $\mathcal{A}$ 的基底为 $B = \{e_i\}$，我们可以写出：

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{N} c_{ij}^k e_k \quad c_{ij}^k \in \mathbb{C}$$

c_{ij}^k 称为代数 $\mathcal{A}$ 的结构常数。如果给我们 N 维向量空间，我们通过选出一组基和 N^3 个结构常数就能将其变成一个代数。

如果一个有单位元的代数中所有非零元素都有逆，那么这个代数被称为除法代数。

举一个可能比较常见的例子：如果我们有四个基 e_0, e_1, e_2, e_3，我们指定结构常数：

$$e_0^2 = -e_1^2 = -e_2^2 = -e_3^2 = e_0 \quad e_0e_i = e_ie_0 = e_i, i = 1,2,3 \quad e_ie_j = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}e_k, i \neq j$$

这样形成的代数称为四元数的代数，我们通常使用 1 代表 e_0，而使用 i, j, k 代表 e_1, e_2, e_3，并将四元数记作 $q = x + iy + jz + kw$。

利用与研究直和的代数时类似的思想，我们立刻可以得到：

$$Z(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = Z(\mathcal{A}) \otimes Z(\mathcal{B})$$

若 $\mathcal{A}$ 是可交换的代数，则 $\mathcal{A}$ 的生成元 S 定义为这样的子集：$\mathcal{A}$ 中的全部元素可以由 S 中元素之积的线性组合表出。例如，$(\mathbb{R}^3, \times)$ 的一个生成元是 $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y\}$。

类比从一个线性空间到另一个线性空间的线性映射，我们可以定义代数的同态。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是代数，那么线性映射 $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 若满足 $\phi(\mathcal{AB}) = \phi(\mathcal{A})\phi(\mathcal{B})$，则被称为是一个同态。一个代数自身到自身的同态称为自同态。

> **Note**
>
> 如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是代数，设 $\{e_i\}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一组基，那么 ϕ 是同态，当且仅当 $\phi(e_ie_j) = \phi(e_i)\phi(e_j)$

证明是简单的，设 $a = \sum_i \alpha_i e_i, b = \sum_j \beta_j e_j$，直接计算即可证明。

若 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 都是有单位元的代数，同态 $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 有性质 $\phi(1_A) = 1_B$，那么称 ϕ 是单位的。

> **Note**
>
> 若 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是有单位元的代数，且同态 $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是满射，那么 ϕ 必然是单位的。

这很好证明。首先，由于 ϕ 是满射，所以必然有 $\mathcal{A}$ 中的元素被映射到 1_B。其次，如果 1_A 不被映射到 1_B，那么下式不成立：

$$\phi(\alpha) = \phi(1\alpha) = \phi(1)\phi(\alpha) = 1\phi(\alpha)$$

如果一个向量空间 $\mathcal{V}$ 上的自同态 ω 满足 $\omega^2 = 1$，我们称 ω 是一个对合。（involution，内卷），它有性质 $\omega(a) = e$。这是因为，假设 $\omega(e) = a$，那么我们必须有 $\omega(a) = e$，从而：

$$\omega(ea) = \omega(e)\omega(a) = \omega(e)e = \omega(e)$$

在两侧再作用一次 ω，我们得到 $ea = e$，从而 $a = e$。

> **Note**
>
> 设 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ 是两个同构的向量空间，则 $\mathcal{L}(\mathcal{U}), \mathcal{L}(\mathcal{V})$ 是同构的代数。

证明：设 $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ 是线性空间的同构，容易构造出代数同构映射：

$$\psi(T) = \phi \circ T \circ \phi^{-1}$$