3-3：Total Matrix Algebra

#MathematicalPhysics

现在我们考虑 $n \times n$ 的矩阵，我们将基底取为 (e_{ij})，代表只在 (i,j) 位置为 1，其余位置全为 0 的矩阵。这意味着 $(e_{ij})_{lk} = \delta_{il}\delta_{jk}$，并且：

$$(e_{ij}e_{kl})_{mn} = \sum_r (e_{ij})_{mr}(e_{kl})_{rn} = \sum_r \delta_{im}\delta_{jr}\delta_{kr}\delta_{ln} = \delta_{jk}(e_{il})_{mn}$$

或者说 $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$。结构常数是 $c_{ij,kl}^{mn} = \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{ln}$ 。如果一个抽象代数的乘积和结构常数由上面的式子给出，我们就称这样的抽象代数是一个全矩阵代数。在 $\mathcal{F}$ 上的矩阵代数记作 $\mathcal{M}_n(\mathcal{F})$，它与实数（复数）矩阵代数同构，但是元素不一定要是 $n \times n$ 的矩阵。我们现在来构建这个代数的左理想。考虑：

$$\left(\sum_{i,j} \alpha_{ij}e_{ij}\right)e_{pq} = \sum_i \alpha_{ip}e_{iq}$$

这个矩阵只在第 q 列有东西。于是我们显然要猜测这样的矩阵是不是全矩阵代数的一个左理想。考虑：

$$\left(\sum_{l,m} \beta_{lm}e_{lm}\right)\left(\sum_i \gamma_i e_{iq}\right) = \sum_l \left(\sum_m \beta_{lm}\gamma_m\right)e_{lq} = \sum_l \eta_l e_{lq}$$

这样我们就找到了左理想，同理我们能找到右理想。

> **Note**
>
> $M_n(\mathbb{F})$ 的极小左（右）理想是除了一列（行）外均为零的矩阵。

显然，$\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ 是不存在双侧理想的。容易找到 $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ 的中心是单位矩阵（通过直接计算证明，首先证明其中心必然是对角阵，其次可以证明必须是单位阵），因此 $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ 是一种简单的中心代数。