14: 势场和规范变换

#Quantum_Mechanics

在经典力学中,我们知道一个势场的零点是无关紧要的。我们现在考虑一个态矢 $|\alpha\rangle$ 在势场 $\tilde{V}(x)=V(x)+V_0$ 中的演化。我们设它在 V(x) 中演化的结果是 $|\alpha,t_0;t\rangle$,那么现在:

$$|lpha, ilde{t_0};t
angle = \exp\left(-rac{iV_0(t-t_0)}{\hbar}
ight) |lpha,t_0;t
angle$$

因此,其实只有一个相位差距。最简单的情况下,假如系统初始处在能量为 E 的本征态上,那么只需要将 E 换成 $E+V_0$ 就行了!

 $V(x) \rightarrow V(x) + V_0$

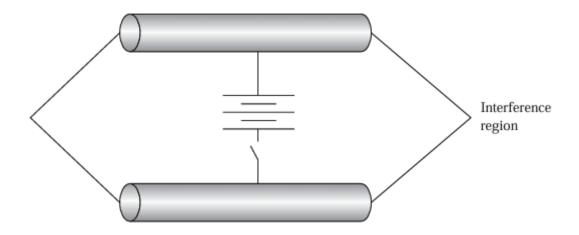
这导致态矢和波函数的变化:

$$|lpha,t_0;t
angle
ightarrow \expigg(-rac{iV_0(t-t_0)}{\hbar}igg)|lpha,t_0;t
angle\quad \psi(x',t)
ightarrow \expigg(-rac{iV_0(t-t_0)}{\hbar}igg)\psi(x',t)$$

假如 V_0 是含时的,那么也很容易得出:

$$|lpha,t_0;t
angle
ightarrow \expigg(-\int_{t_0}^t dt' rac{iV_0(t')}{\hbar}igg) |lpha,t_0;t
angle$$

于是我们有一个有趣的小实验:将一个粒子束分成两部分,在两部分之间维持一个电势差,之后让两束粒子束干涉,可以观察到它们的相位差明显发生了变化:



现在让我们考虑一下重力场在量子力学中的影响。我们知道在经典力学的运动方程里面,任何在重力场中的自由粒子都以相同的加速度下落。但是在量子力学中,我们却有:

$$iggl[-iggl(rac{\hbar^2}{2m}iggr)
abla^2+m\Phi_{grav}iggr]\psi=i\hbarrac{\partial\psi}{\partial t}$$

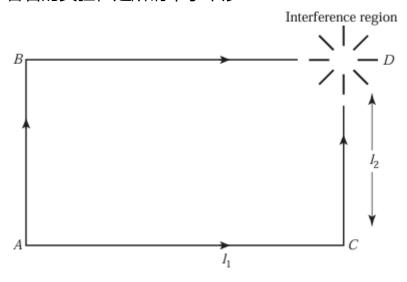
或者从路径积分的角度看:

$$\langle x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1}
angle = \sqrt{rac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}\exp\left(i\int_{t_{n-1}}^{t_n}dtrac{\left(rac{1}{2}m\dot{x}^2-mgz
ight)}{\hbar}
ight)$$

所以这里我们看到 $\frac{m}{\hbar}$ 这个组合出现,我们没法消去 m! 如果我们只是从埃伦费斯特定理来推平均值的话,那么只会看到:

$$rac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\langle x
angle = -g\hat{z}$$

这是一个平凡的效应。要是想观测一些非平凡的情况,我们需要把 \hbar 暴露出来。但事实上,直到 1975 年,一直都没有人做这样的实验。这个实验非常难做的一个原因是重力相比于电磁力太弱了。例如,由万有引力束缚的电子和中子系统的基态半径 $a_0=\frac{\hbar^2}{G_Nm_e^2m_n}$ 大约是 10^{13} 光年,这甚至比宇宙半径都大好几个数量级!有一个比较著名的实验,是所谓中子干涉:



如图,这样一个回路最初被放在平面上,之后将 AB 边轻微的抬起,使之与平面夹角为 δ ,那么根据之前的推导,两束中子流在达到干涉区时会出现相位差

$$\Delta\phi=-rac{m_n^2gl_1l_2\lambda\sin\delta}{\hbar^2}$$

这里的 $\lambda = \frac{l_1}{v_{wavepacket}}$ 或者你也可以换一种方式理解:中子的能量是守恒的,那么走两边的粒子有动量差,这导致走两边的粒子有波长差,从而有了相位差,从而发生干涉。

接下来我们看最重要的一部分: 电磁场的规范变换。我们可以将电磁场写成:

$$E = -
abla \phi \quad B =
abla imes A$$

而带电粒子的哈密顿量写成:

$$H=rac{1}{2m}igg(p-rac{eA}{c}igg)^2+e\phi$$

做量子化的时候,由于 $[X,P] \neq 0$,所以 $[A,P] \neq 0$,因此:

$$\left(P-rac{eA}{c}
ight)^2 o P^2-\left(rac{e}{c}
ight)(P\cdot A+A\cdot P)+\left(rac{e}{c}
ight)^2\!A^2$$

在海森堡绘景下,有:

$$\frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}t} = \frac{P_i - e\frac{A_i}{c}}{m}$$

因此,我们这里的 P 是正则动量,而 $\Pi=m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P-\frac{eA}{c}$ 则是运动学(机械)动量。我们知道。两个不同方向的正则动量算符是对易的,但是机械动量算符不是:

$$[\Pi_i,\Pi_j] = igg(rac{i\hbar e}{c}igg)\epsilon_{ijk}B_k$$

通过研究 Ⅱ 的变化率, 我们可以给出:

$$mrac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} = rac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}t} = e\left[E + rac{1}{2c}igg(rac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} imes B - B imes rac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}igg)
ight]$$

考虑在磁场中的粒子满足的薛定谔方程:

$$rac{1}{2m}igg(-i\hbar
abla'-rac{eA(x')}{c}igg)\left(-i\hbar
abla'-rac{eA(x')}{c}
ight)\!\langle x'|lpha
angle+e\phi(x')\langle x'|lpha
angle=i\hbar\langle x'|lpha
angle$$

考虑现在的概率流连续性方程: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla' \cdot j = 0$, 其中 ρ 还是 ψ^2 , 但是:

$$j = \left(rac{\hbar}{m}
ight) {
m Im}(\psi^\star
abla'\psi) - \left(rac{e}{mc}
ight) A |\psi|^2$$

这与之前标量势下的结果有巨大差别。换言之,改变是:

$$abla'
ightarrow
abla' - igg(rac{ie}{\hbar c}igg) A$$

令 $\psi = \sqrt{\rho} \exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right)$,可以得到:

$$j = \left(rac{
ho}{m}
ight)\left(
abla S - rac{eA}{c}
ight)$$

注意:对 ;进行全空间积分,得到的是机械动量而不是正则动量。

在电动力学中,我们学习过:下面这样的变换不会改变势场给出的 E, B:

$$\phi
ightarrow \phi - rac{1}{c}rac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad A
ightarrow A +
abla \Lambda$$

因此,经典力学中的正则坐标、机械动量是规范不变量,但是正则动量不是!我们期望在量子力学里面看到类似的效果(这是由于前面我们已经看到了类似的类比,例如量子力学中的洛伦兹力),我们考察一下这些量的均值。我们做规范变换 $\tilde{A} = A + \nabla \Lambda$,考察是否有:

$$\langle lpha | X | lpha
angle = \langle ilde{lpha} | X | ilde{lpha}
angle$$

也就是说,我们需要找到一个算符 \mathscr{G} ,使得: $|\tilde{\alpha}\rangle = \mathscr{G}|\alpha\rangle$,以及 $\mathscr{G}^{\dagger}X\mathscr{G} = X$ 。考虑到机械动量的规范不变性, \mathscr{G} 还应该有一个性质:

$$\mathscr{G}^{\dagger}\left(P-rac{eA}{c}-rac{e
abla\Lambda}{c}
ight)\mathscr{G}=p-rac{eA}{c}$$

可以验证:

$$\mathscr{G}=\exp\left(rac{ie\Lambda(x)}{\hbar c}
ight)$$

能够符合上面的要求。

除了通过与经典(电动)力学的类比来给出规范变换算符 g 的具体形式之外,我们也可以直接从薛定谔方程拿到 g 的形式。考虑:

$$\left(rac{\left(p-rac{eA}{c}
ight)^2}{2m}+e\phi
ight)|lpha
angle=i\hbar|lpha
angle$$

而在进行规范变换后:

$$\left(rac{\left(p-rac{eA}{c}-rac{e
abla\Lambda}{c}
ight)^2}{2m}+e\phi
ight)| ilde{lpha}
angle=i\hbar| ilde{lpha}
angle$$

对比上下两式, 立刻得到:

$$| ilde{lpha}
angle = \expigg(rac{ie\Lambda}{\hbar c}igg)|lpha
angle \quad ilde{\psi}(x',t) = \expigg(rac{ie\Lambda(x')}{\hbar c}igg)\psi(x')$$

如果我们仍然写成 $\psi=
ho S$ 的形式,那么规范变换使得 $S o S+rac{e\Lambda}{c}$ 。

我们考虑另一件事情:标度变换。有一个函数 F(x),我们希望表达 F(x+dx) 的值,我们可以泰勒展开:

$$F(x + dx) = F(x) + (\nabla F) \cdot dx$$

但是如果我们再使用一个标度变换:

$$1|_{at\;x}
ightarrow [1+\Sigma(x)\cdot dx]|_{at\;x+dx}$$

也就是说 x + dx 处的单位 1 比 x 处的单位 1 大了,那么我们必须重新将 F(x) 写为:

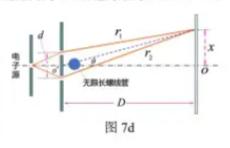
$$F(x+dx)|_{rescaled} = F(x) + [(
abla + \Sigma)F] \cdot dx$$

这里的 $\nabla + \Sigma$ 就像规范不变量 $\nabla - \left(\frac{ie}{\hbar c}\right) A$ 一样。

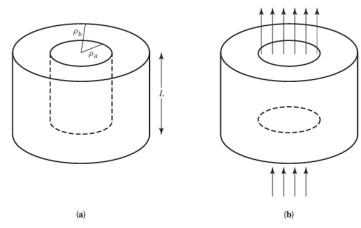
接下来看点例子。首先出场的是 40 th-CPHO-Final 考察过的 AB 效应:

(3) 阿哈罗诺夫-玻姆效应 (即 A-B 效应) 的实验证明: 即使在磁感应强度为零的区域,也可能会因为 $A \neq 0$ 出现磁效应。它揭示了磁矢势 A 的物理意义。用自由电子双缝干涉实验可验证 A-B 效应。在该实验中,双缝(缝宽很小)与屏之间的距离为 D,双缝间距为 d ($d \ll D$);

一根无限长的极细直螺线管垂直放置于电子经过双缝后的路径之间,其单位长度匝数为n,横截面积为S,如图 7d 所示。电子源发出的自由电子的动量大小为p、电荷为-e (e>0)。若螺线管中的电流从 0 变化到I,求中心亮条纹在屏上移动的距离。已知动量为p 的电子在矢势场A 中的波矢为 $k=\frac{1}{h}(p-eA)$,其中h 为约化普朗克常量。



我们考虑如下情景:



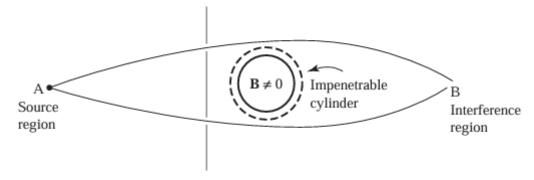
如图,粒子被约束在厚度为 ρ_a , ρ_b 的管壁之间,它的波函数不能穿透管壁。现在在 ρ_a 内部加一个磁场,波函数会发生变化吗?很多人会说不会,但是实际上是会的。注意 到匀强磁场 $B=B\hat{z}$ 产生的磁矢势是:

$$A=igg(rac{B
ho_a^2}{2
ho}igg)\hat{\phi}$$

根据前面的讨论,我们只需要将梯度算子改改: $abla o
abla - \left(rac{ie}{\hbar c}
ight)A$,特别地:

$$rac{\partial}{\partial \phi}
ightarrow rac{\partial}{\partial \phi} - \left(rac{ie}{\hbar c}
ight) rac{B
ho_a^2}{2}$$

现在我们考虑上面题目中描述的标准版 A-B 效应:



我们尝试使用费曼路径积分来解决这个问题。考虑粒子的拉格朗日量:

$$L = rac{m}{2} igg(rac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}igg)^2 + rac{e}{c} rac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot A$$

那么每一个环节上的积分都发生了如下的改变:

$$S(n,n-1) o S(n,n-1) + rac{e}{c} \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \left(rac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}
ight) \cdot A = rac{e}{c} \int_{x_{n-1}}^{x_n} A \cdot ds$$

考虑任意一条从圆柱上面经过的路径和一条从圆柱下面经过的路径,每一条路径的传播子都是

$$\int_{\text{above or below}} \mathscr{D}[x(t)] \exp\bigg(\frac{iS(N,1)}{\hbar}\bigg) \Delta\phi_{\text{above or below}}$$

的形式,考察这一对路径的相位差是:

$$\left(\left(rac{e}{\hbar c}
ight)\int_{x_1}^{x_N}A\cdot ds
ight)_{above}-\left(\left(rac{e}{\hbar c}
ight)\int_{x_1}^{x_N}A\cdot ds
ight)_{below}=\left(rac{e}{\hbar c}
ight)\oint A\cdot ds=\left(rac{e}{\hbar c}
ight)\Phi_B$$

也就是说,上、下两条路径之间被加上了一个恒定的相位差,这就使得光屏上的亮条纹移动了。

接下来我们看看磁单极子。我们想问:为什么在麦克斯韦方程组中没有一项

$$abla \cdot B = 4\pi
ho_m$$

呢? 量子力学要求: 假如磁单极子存在, 那么它的磁荷量必须是量子化的。考虑这样的一个磁单极子:

$$B = \Big(rac{e_M}{r^2}\Big)\hat{r} \quad A = \left\lceilrac{e_M(1-\cos heta)}{r\sin heta}
ight
ceil\hat{r}$$

这个磁矢势有一个问题:它在 $\rho = \pi$ 处奇异。但是这没关系——如果磁矢势不奇异,那么 $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$,根据高斯定理,我们就没有磁单极子了!为了解决这个问题,我们会选取两套矢势:

$$A^{(I)} = igg(rac{e_M(1-\cos heta)}{r\sin heta}igg)\hat{\phi} \quad A^{(II)} = -igg(rac{e_M(1+\cos heta)}{r\sin heta}igg)\hat{\phi}$$

其中 $A^{(I)}$ 在 $\theta < \pi - \epsilon$ 时使用,而 $A^{(II)}$ 在 $\theta > \epsilon$ 处使用。考虑二者重叠的区域,有:

$$A^{(II)}-A^{(I)}=-\left(rac{2e_M}{r\sin heta}
ight)\hat{\phi}\Rightarrow \Lambda=-2e_M\phi$$

那么两套波函数的关系是:

$$\psi^{(II)} = \exp{\left(-rac{2iee_M\phi}{\hbar c}
ight)}\psi^{(I)}$$

而 $\psi^{(II)}$ 和 $\psi^{(I)}$ 都是单值的,也就是说,我们将 ϕ 从 0 增加到 2π 时,它们必须返回原来的值。假设 $\psi^{(I)}$ 是单值的,那么 $\psi^{(II)}$ 是单值的条件是:

$$rac{2ee_{M}}{\hbar c}=\pm N$$

这就是我们对磁单极子的"磁荷量"提出的要求。