Chapter 25： 高斯绝妙定理的一个直观证明

#DifferentialGeometry

我们会先从高斯漂亮定理入手：固定在曲面上的一个图形，如果改变曲面在空间中的形状，那么曲面上这个图形的球面像的面积不变。我们先明确一下记号：设 n 是 $\mathcal{S}$ 的单位法向量，$\mathbb{S}^2$ 是单位球面，$n:\mathcal{S}\to\mathbb{S}^2$ 是球面映射。$\mathcal{K}_{ext}$ 表示外在曲率，也就是球面映射的放大倍数；$\mathcal{K}$ 表示内蕴曲率。$\mathcal{R}(L)$ 表示回路 L 上的和乐性，而 $\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{L})$ 表示回路 $\tilde{L}$ 上的和乐性。我们已知的事实包括：

$$\iint_{\Omega}\kappa_1\kappa_2 d\mathcal{A}=\mathcal{K}_{ext}(\Omega)=\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{\Omega})=\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{L})$$

现在我们来看一个重要的事实：之前我们说过，平行移动的一种外在构造方式是“一边移动，一边向切平面投影”。考虑向量 w 在 $\mathcal{S}$ 上从 p 移动到 $p+\epsilon$，再向 $T_{p+\epsilon}$ 投影，得到 w' 的过程；与向量 w 在 $\mathbb{S}^2$ 上从 $n(p)$ 移动到 $n(p+\epsilon)$，再向 $T_{n(p+\epsilon)}$ 投影，得到 w'' 的过程。由于 $T_{p+\epsilon}$ 和 $T_{n(p+\epsilon)}$ 完全一样，所以 w' 和 w'' 完全相同。换言之：**球面映射保持平行移动不变**。也就是说，当曲面 $\mathcal{S}$ 的切向量沿着 L 凭心不给移动生成了在 p 处的向量 $w_{\parallel}$ 时，$n(p)$ 处的同一个向量 $w_{\parallel}$ 也是自动由 $\mathbb{S}^2$ 的切向量沿着 $\tilde{L}=n(L)$ 做平行移动生成的向量。从而我们可以延长一下上面的等式：

$$\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{L})=\ \mathcal{R}(L)$$

由于 $\mathcal{R}(L)$ 是曲面的内蕴几何性质，在等距变换下保持不变，因此 $\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{\Omega})$ 也不变。我们证明了高斯漂亮定理。只要将 Ω 缩小到一个点，我们立刻可以论证绝妙定理，也就是 $\mathcal{K}_{ext}=\kappa_1\kappa_2$ 的不变性。换言之：

$$\kappa_1\kappa_2=\lim_{\Delta_p\to p}\frac{\mathcal{R}(\Delta_p)}{\mathcal{A}(\Delta_p)}=K(p)$$

（这里利用了 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{E}$ 的关系。）

换言之，我们原来知道 $\kappa_1\kappa_2$ 和 $\mathbb{S}^2$ 上的面积/角盈/和乐性有关系，现在我们知道球面映射保持平行移动不变，就在 $\mathcal{S}$ 的和乐性（内蕴性质）与 $\mathbb{S}^2$ 的和乐性之间建起了桥梁。