Chapter 22： 外在的构造

#DifferentialGeometry

平行移动的一个启发式想法是：设 K 是曲面 S 内连接 a,b 两点的曲线，对于曲面 S 的切向量 w 沿着曲线 K 的平行移动，我们要求 w 始终与曲面 S 相切，且 w 的方向在每个时刻都平行于前一个时刻的方向。在欧几里得平面中，这样的操作是平凡的：我们直接沿着 K 移动一个向量 w 即可，但是，在一般的曲面中，这个操作难以实现。

现在我们给出一种外在的构造方法：

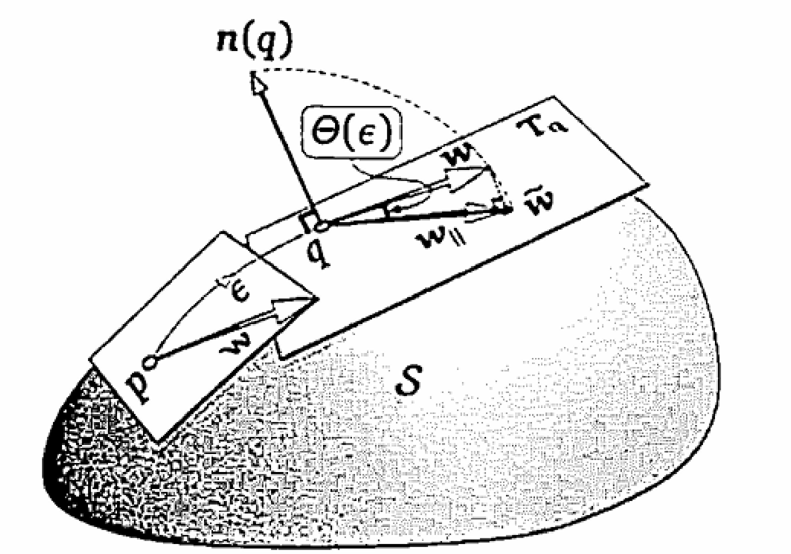


图 22-2　为了将点 p 的切向量 w 平行移动到距离 ϵ 的邻近点 q，我们将它平行于自身在 $\mathbb{R}^3$ 中移动时，(i) 将它投影到 T_q 上，得到 $w_\parallel$，或者 (ii) 一边走一边将它转下来得到 $\widetilde{w}$. 因为我们最终是要取 ϵ 趋于 0 的极限，所以这两种构作方法是等价的

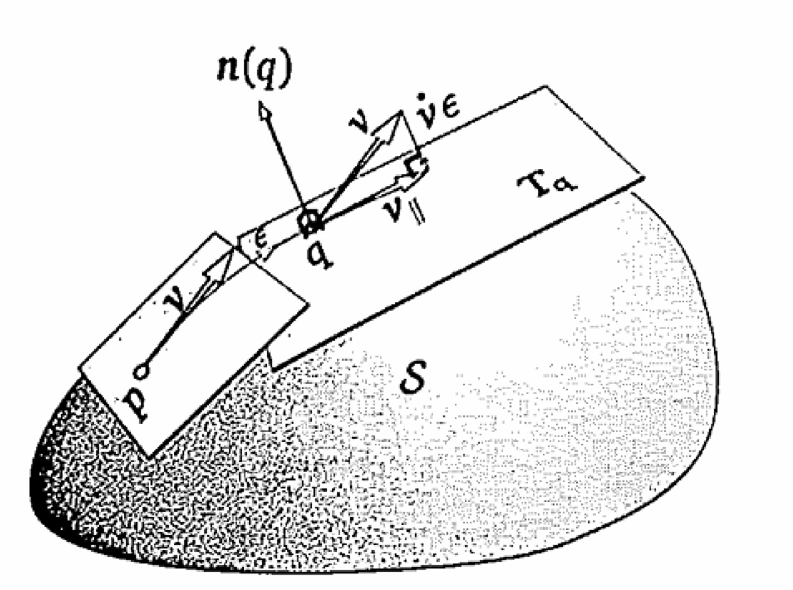
我们将 p 点的切向量移动到距离 ϵ 的点 q，则 w 不再是 q 点处的切向量。我们将 w 垂直投影到 T_q 得到 $w_\parallel$ ：

$$w_\parallel = \mathcal{P}[w] = w - (w \cdot n)n$$

我们将曲线 K 分成无数个这样的小段，一边移动 w，一边向曲面投影，并令 $\epsilon \to 0$，这样我们就构造了平行移动。取极限后，每一次投影都保持长度不变，因此平行移动

是保长度的。我们也可以看出一种等价的方法是：一边移动，一边将向量 w 旋转到切平面上。

现在我们讨论沿着测地线的平行移动：此时，初始与测地线相切的向量在平行移动的过程中始终与测地线相切。考虑一个沿着测地线匀速运动的质点，它的轨迹没有测地曲率，那么它的加速度将始终与曲面法向量平行。由图中容易看出，在 $\epsilon \to 0$ 时，δv 一定与切平面垂直，那么很容易得到结论。这也给了我们一种新的测地线的构造方法：给定初始点和初始速度 v，沿着 v 的方向平行移动 v 即可生成测地线。



由于一个矢量在平行移动时遵循：1）长度不变；2）时刻与曲面相切，因此我们可以找到另一个直观的方法：在曲面 S 上“削”下一条窄带，其中以曲线 K 为中心。将这条窄带铺在平面上，将向量 w 在平面上沿着这条窄带进行平行移动，之后再将这个窄带粘回曲面上。
这使得我们看到平行移动的其他性质：两个向量沿同一条曲线进行平行移动，它们的夹角不发生变化。