1：古典概型和几何概型

#StochasticProcess

在正式开始我们的随机分析课程之前，先来看一个小例子。我们来扔一个均匀的硬币，如果扔出正面就得一分，扔出反面就得零分。设 X_i 为第 i 轮的得分，S_n 为前 n 轮的得分之和。显然，根据古典概率模型：

$$P(S_n = k) = \frac{1}{2^n} C_n^k$$

用斯特林公式：

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

可以得到：

$$P(S_{2n} = n) = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \to 0$$

从另外一个角度来说，根据弱大数定律：

$$\frac{S_{2n}}{2n} \approx \frac{1}{2}$$

换言之，更精确的表述是：

$$P\left(\left|\frac{S_{2n}}{2n} - \frac{1}{2}\right| \geq \epsilon\right) \to 0 \quad \text{when } n \to \infty$$

我们甚至可以来计算一下这个事情：

$$P(\cdot) \leq 2 \cdot \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k > n+2n\epsilon} \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} \leq 2(n - 2n\epsilon) \cdot \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{\lceil n + 2n\epsilon \rceil ! \lfloor n - 2n\epsilon \rfloor !} \to 0$$

（最后一步需要使用斯特林公式）

在上面抛硬币的例子中，结果的数目是有限的。相反地，另一种情况下，结果的数目却是无限的。例如 τ 是一个 $\mathbb{R}^3$ 中的随机向量，设 $\rho(n), n \in \mathbb{S}^2$ 是朝向的分布密度，那么：

$$P(\tau \in A) = \iint_A \rho(n) dS$$

在 τ 的朝向没有偏好时，根据几何概率模型，我们有 $\rho(n) = \frac{1}{4\pi}$。这时我们说 τ 是各向同性的。