



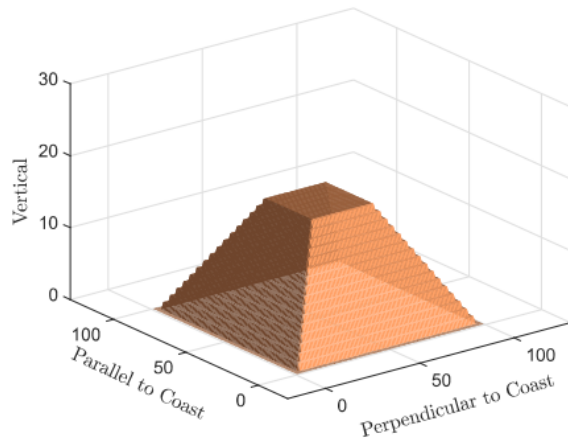
#MCM

## 2013836

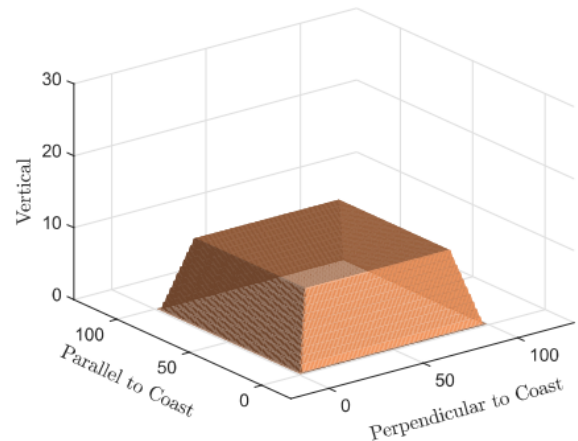
**总模型：**（三维）元胞自动机，将沙堡分成许多长方形元胞，模拟复杂系统随着时间的演化过程

### STEP 0 准备工作：沙堡的生成

文章假设沙堡上面的方块不能在没有任何支持的情况下存在，因此文章采用了自下向上、逐渐收缩地沙堡生成方式：每一次都在下面的地基上盖一层新方块，并且新的方块的边界将比下面一层略微收缩。



(a)  $s=0.5$



(b)  $s=1$

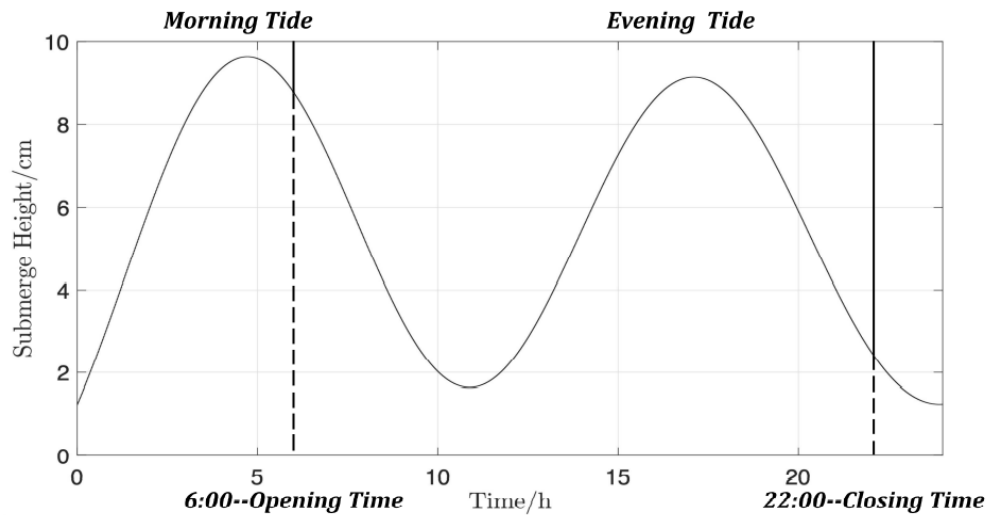
作者定义变量  $s$  (Gradient) 来描述沙堡倾斜的程度，定义为

$$S = \frac{n}{w}$$

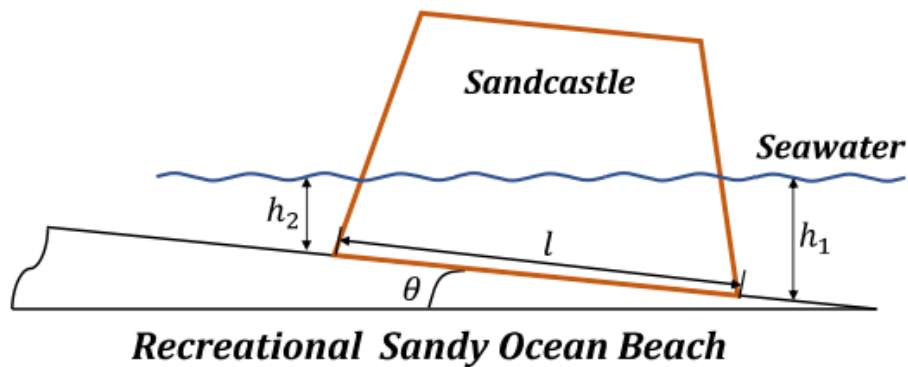
即沙堡的层数比上沙堡的总收缩量。由于每个方块的高度是相同的，因此叠的层数越高，沙堡也越高， $s$  就表示了沙堡的倾斜程度。

## 准备工作：潮汐的描述

首先，我们知道，每天有两次高潮，两次低潮，潮汐变化可以近似使用正弦函数描述，娱乐海滩的开放时间是 6:00-24:00



接下来，建立描述海水速度变化的模型



如图，沙堡被放置在小倾角的海滩上，通过物理定律（列写波动方程，具体怎么做请看普通物理学课本）可以知道浅水波的波速是  $v = \sqrt{gh}$ ，那么假设海水可以完全浸透沙堡的底部，海水来和去时的波速就是

$$v_1 = \sqrt{gh} \quad v_2 = \sqrt{g(h - l \sin \theta)}$$

==由于水的速度是不断变化的，作者选择对沙堡的前面、后面计算一个平均速度，来作为前、后面感受到的真实海水速度，计算的方法是，先定义一个整体的平均速度

$$\bar{v} = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{2}$$

之后，前面和后面感受到的真实海水速度是

$$\bar{v}_1 = \frac{v_1 + \bar{v}}{2} \quad \bar{v}_2 = \frac{v_2 + \bar{v}}{2}$$

个人认为，这一段作者可能是考虑到了沙堡在侵蚀中会逐渐变形，从而使得前面和后面移动。但是个人对于这种做法不太能够苟同（因为上面已经由太多近似，不知道这里为什么要再用一个奇怪的近似）。==

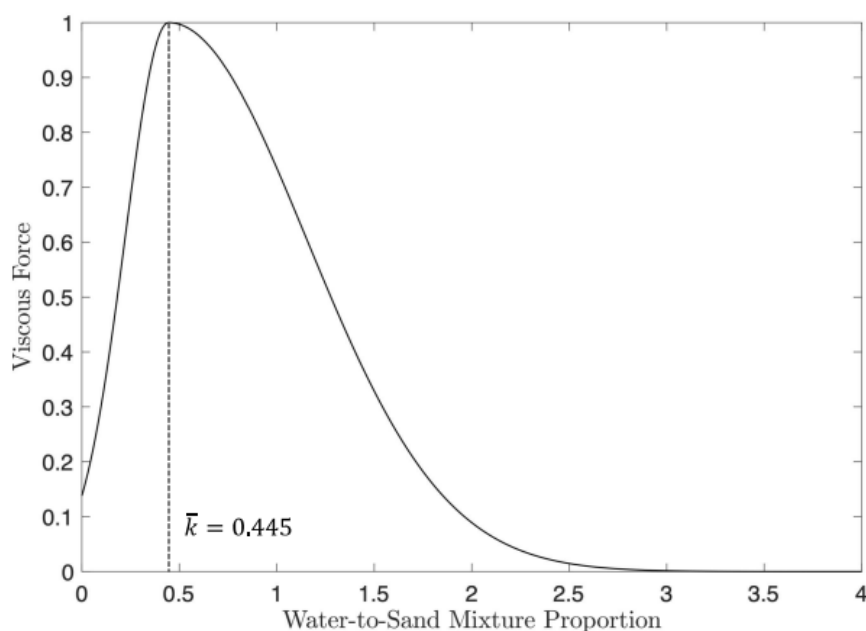
## STEP 1: 元胞之间的内力描述

各个元胞之间内力产生的机理是：

- 水-沙比较低时，主要是沙子之间的摩擦力起作用
- 较高时，主要是水分子之间的电磁力起作用

然而，水分子之间的电磁力不能持续增大，在水-沙比例充分高的时候，混合物将变成流体。因此，作者构造了元胞间的内力与水-沙比的关系函数：

$$f = \begin{cases} f_0 \cdot A e^{-\frac{(k-\bar{k})^2}{k_1}} \\ f_0 \cdot A e^{-\frac{(k-\bar{k})^2}{k_2}} \end{cases}$$



## STEP 2: 沙堡的几个崩解模式

### 局部梯度过高引起的崩解

对于任意一个元胞，定义其局部梯度为

$$s'(x, y) = \max\{h(x, y) - h(x \pm 1, y \pm 1)\}$$

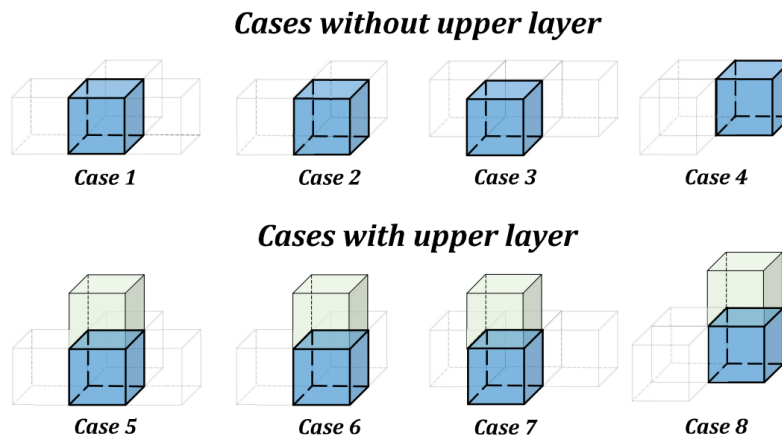
(也就是衡量它高出了周围八个元胞的最高高度是多少)

当  $s'$  达到一个临界值时，这个元胞就会崩解，临界值是多少与上面的内力大小有关

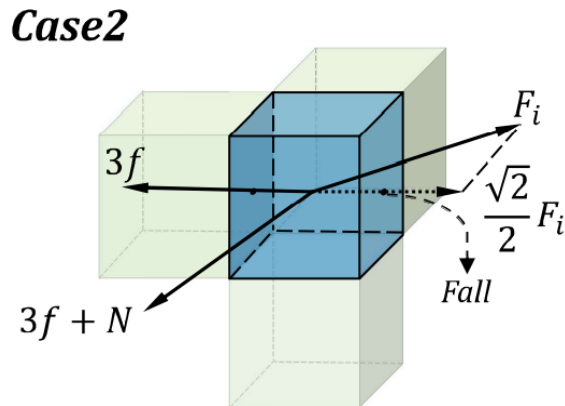
$$s'_c = \begin{cases} 1 & 0 \leq f_N < 0.2 \\ 2 & 0.2 \leq f_N < 0.4 \\ 3 & 0.4 \leq f_N < 0.6 \\ 4 & 0.6 \leq f_N < 0.8 \\ 5 & 0.8 \leq f_N \leq 1 \end{cases}$$

## 海水冲刷引起的崩解

这一项效应用于描述沙堡中的元胞直接受到海水冲刷后的崩解。对于每一个元胞，其崩解的临界状态就是所有面上的相互作用力达到最大。作者根据方块所处的不同位置，划分了八个情况



使用 Case2 作为例子，作者的受力分析图如下：



这个冲击力  $F_i$  是与方块的对角线共线的 (这应当是一个近似)，只有水平向右的分力才可能将蓝色的方块拉出原位置，因此真正有效的力其实是冲击力的一个分量，又因为这个方块同时和其他三个方块接触，因此临界条件：

$$\frac{\sqrt{2}}{2} F_i > 3f$$

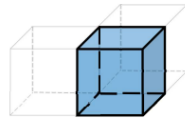
其余的方块可以照着做。

## 方块浮起

对于使得方块浮起的作用力，作者考虑了两个：方块受到的浮力和方块上下表面的水流速度差造成的压力差，也就是

$$F_{lift} = \frac{1}{2}\rho(v_u^2 - v_d^2)S + \rho gV$$

在这个力达到临界状态时，该方块会浮起



Case 2

对于临界条件的定义，和上文差不多，比如 Case2 中研究的方块和另外两个方块相连，那么临界条件就是

$$F_{lift} > 2f + G$$

## 下雨的影响

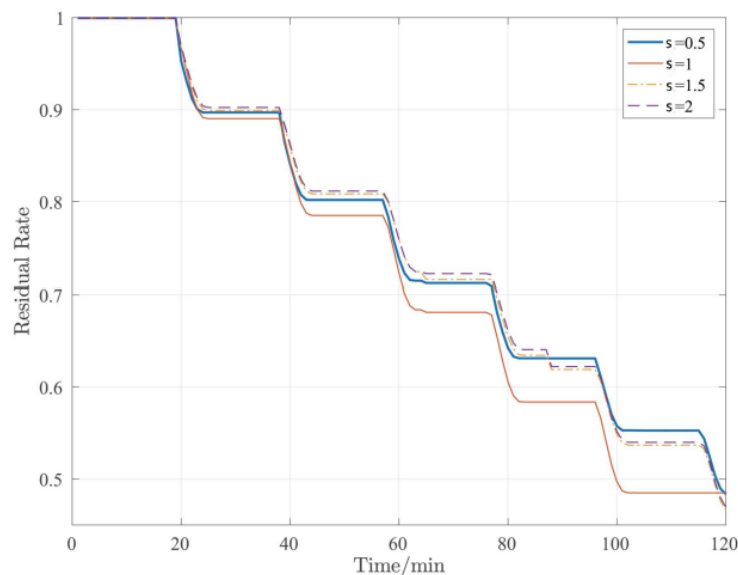
由于下雨的影响甚至比海浪的冲击还要强，因此有必要把下雨的影响单独拿出来讨论。将所有方块划分成两类：

- 只有一面暴露在空气中的方块：不会被雨水冲走，但雨水会增加该方块的含水量
  - 有两面暴露在空气中的方块：一旦碰到雨，立刻被冲走
- 此外，如果一个方块被海水击中，那么它的含水量增加一定值

$$\Delta k = \alpha \exp(-k)$$

## STEP 3: 模型的验证和应用

### 沙堡剩余方块数目随时间的变化



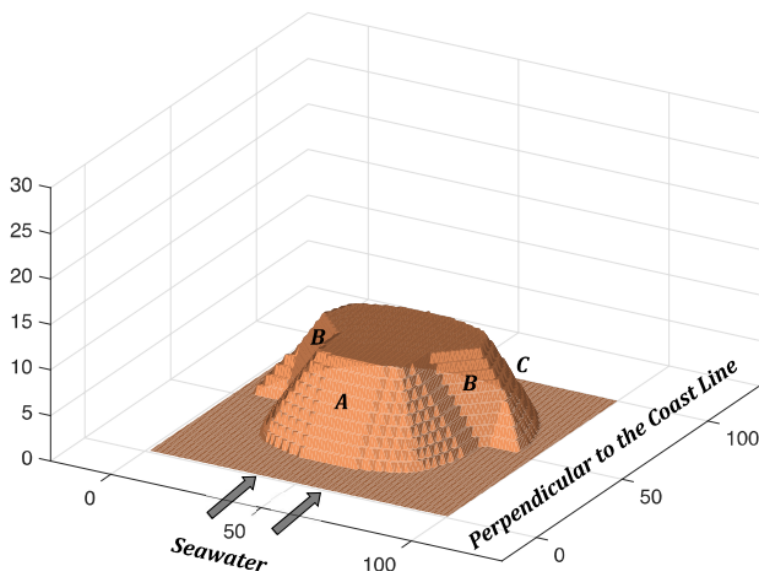
可以看到，倾斜程度最小的沙堡保留的比例最大，这与现实生活是十分符合的

## 如何优化沙堡的形状（全文最妙的地方）

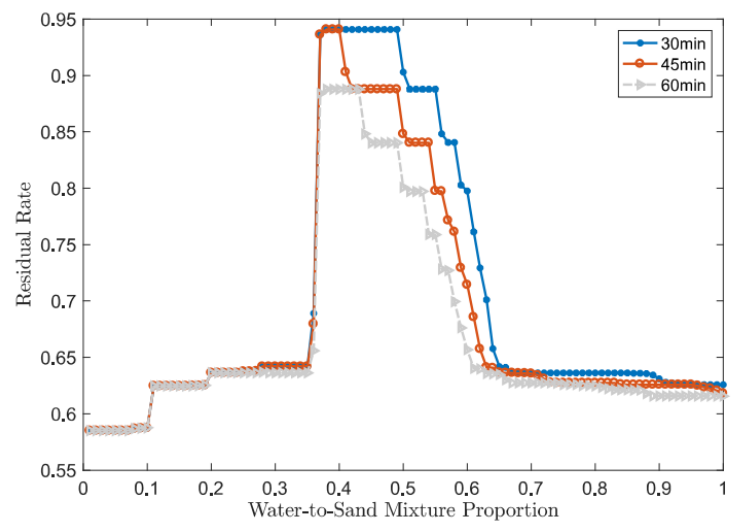
一些其他的文章可能会把沙堡堆成不同的初始形状，并进行对比。但是本文使用了一个迭代算法来寻找最优的形状

- 随机生成一个沙堡
- 进行一段时间的海水侵蚀模拟
- 生成一个和第一步中一样大的，但是横截面积和第二步结尾时沙堡一样的沙堡
- 转第二步，直到新生成的沙堡达到稳定为止

这样，就如同“物竞天择，适者生存”一样，最有利于沙堡留存的特征被保留下来。



## 水沙比例：直接暴力搜索即可



对于有降雨的情况，只要重复上述步骤即可。