泊松过程与排队论-作业

#SP

2-6 冗余系统的可靠性

首先给出一个暴力，但并不能做出最终答案的方法

由题意得，X_i 服从参数为 λ_i 的指数分布。因此，$\sum_{i=1}^{n} X_i$ 应当服从 Gamma 分布。记 $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$：

$$F_X(t)=1-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\mu_1 t)^i e^{-\mu_1 t}}{i!}$$

$$F_Y(t)=1-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(\mu_2 t)^i e^{-\mu_2 t}}{i!}$$

那么

$$P(\min(X,Y)<t)=1-P(X>t)P(Y>t)=1-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\mu_1 t)^i e^{-\mu_1 t}}{i!}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(\mu_2 t)^j e^{-\mu_2 t}}{j!}$$

为了方便叙述，记 $Z=\min(X,Y)$，那么显然有：

$$f_Z(t)=\frac{\mathrm{d}P(\min(X,Y)<t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_1\exp(\mu_1 t)(\mu_1 t)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(\mu_2 t)^j\exp(-\mu_2 t)}{j!}+\frac{\mu_2\exp(\mu_2 t)(\mu_2 t)^{m-1}}{(m-1)!}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\mu_1 t)^j\exp(-\mu_1 t)}{i!}$$

积分求解期望即可：

$$\mathrm{E}[Z]=\int_0^\infty tf_Z(t)dt$$

再给出答案上的思路

将 I 型零件和 II 型零件失效的过程建模成两类泊松过程。那么 I 类过程的强度为 μ_1，II 类过程的强度为 μ_2，两类过程的强度之和就是 $\mu_1+\mu_2$，取定条件：在第 N 次到达时机器损坏，那么这次损坏的时间期望为：

$$\mathrm{E}(t|n=N)=\frac{N}{\mu_1+\mu_2}$$

对 N 取期望，我们就知道了：

$$\mathrm{E}[N]=\frac{\mathrm{E}[N]}{\mu_1+\mu_2}$$

那么我们只需求出 $\mathrm{E}[N]$。注意到 N 只能取在 $[\min(m,n),m+n-1]$ 之间（对于左端点，这个机器的运气太差，以至于坏掉的都是 I 类型或者 II 类型的零件，结果一种零件完全没消耗，而另一种耗光了；对于右端点，这个机器的运气太好，以至于一种零件耗光了，另一种恰好剩下一个）。

那么，我们计算第 k 次到达时机器损坏的概率：这有两种可能：第一种，在前 $k-1$ 次到达中，n 个 I 类型零件已经坏了 $n-1$ 个，这次损坏的恰好又是 I 类型的零件；第二种，在前 $k-1$ 次到达中，m 个 II 类型零件已经坏了 $m-1$ 个，这次坏的恰好又是 II 类型。考虑到对于任意的一次到达，损坏的零件为 I 型的概率是 $\mu_1/(\mu_1+\mu_2)$，损坏的为 II 型的概率是 $\mu_2/(\mu_1+\mu_2)$，根据上面的语言叙述， $\mathrm{E}[N]$ 可以用如下的方程表达：

$$\mathrm{E}[N]=\sum_{k=\min(m,n)}^{m+n-1}k\left[C_{k-1}^{n-1}\left(\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\right)^n\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^{k-n}+C_{k-1}^{m-1}\left(\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\right)^{k-m}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^m\right]$$

这样我们就得到了答案的结果。

2-8 生成 Poisson 随机变量

注意到：

$$P(X_i < t) = P\left(-\frac{\ln U_i}{\lambda} < t\right) = P(U_i > \exp(-\lambda t)) = 1 - \exp(-\lambda t)$$

那么

$$f_X(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$$

命题得证。
由于指数分布和泊松分布之间的联系，我们考虑一个强度为 λ 的 Poisson 过程在 $[0,1]$ 这段时间上的到达数量，并用 X_i 代表第 $i-1$ 个到达和第 i 个到达之间的等待时间。那么，到达的次数 n 应当满足：

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \le 1 \le \sum_{i=1}^{n+1} X_i$$

将题目中 X_i 的定义代入并化简即可得到：

$$\prod_{i=1}^{n} U_i \ge e^{-\lambda} \ge \prod_{j=1}^{n+1} U_i$$

命题得证。

2-9 不均匀硬币

要想以 N_i 次掷硬币丢出 n_i 次第 i 个面，那么我们就需要在前 N_i-1 次掷硬币中丢出 n_i-1 次，在第 N_i 次恰好掷出第 i 个面。那么，N_i 的分布是负二项分布：

$$P(N_i = k) = C_{k-1}^{n_i-1} p_i^{n_i} (1-p_i)^{k-n_i}$$

这些 N_i 显然不是互相独立的。假设你掷出硬币的第 1 面的次数很多，那么 N_1 就很小，相应地，$N_i (i \ne 1)$ 就要增大。因此 N_i 不独立，且两两之间有负的协方差。
我们将掷出第 i 面的概率记为 p_i，将掷出第 i 面的事件称为第 i 类事件。那么，第 i 类事件的到达过程就是在从一个强度为 1 的泊松过程上以 p_i 的概率采样，那么采样得到的就是强度为 p_i 的泊松过程。T_i 可以看作是第 i 类事件到达 n_i 次所需的时间总和。那么它显然服从参数为 n_i 和 p_i 的 Gamma 分布：

$$f_{T_i}(t) = \frac{\lambda \exp(-p_i t)(p_i t)^{n_i-1}}{(n_i-1)!}$$

根据本书中的命题 2.3.2，在这种情况下，掷出次数的随机变量是独立的 Poisson 变量，因此这些 T_i 也应当是独立的。
Gamma 分布的期望是已知的，这里问的应该是 $\mathrm{E}[T]$ 的表达式

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[T] &= \int_0^\infty P(T_i > t) dt \\ &= \int_0^\infty (\prod_{i=1}^{r} \int_t^\infty \frac{\lambda \exp(-p_i t)(p_i t)^{n_i-1}}{(n_i-1)!}) \end{aligned}$$

由于 $\mathrm{E}[T] = \mathrm{E}[N\mathrm{E}[X]] = \mathrm{E}[N]$，因此：

$$\mathrm{E}[N] = \mathrm{E}[T]$$

2-17 次序统计量

按照题目 (a)中的叙述，$i-1$ 个变量小于 x 的概率为 $(F(x))^{i-1}$，$n-i$ 个变量大于 x 的概率为 $(\bar{F}(x))^{n-i}$ ，那么我们可以证得 $X_{(i)}$ 的密度函数为：

$$f_{X_{(i)}} = \frac{n!}{(i-1)!(n-1)!}(F(x))^{i-1}(\bar{F}(x))^{n-i}f(x)$$

在 $X_{(i)} < x$ 时，说明第 i 个最小者已经小于 x，那么可以有 i 个，$i+1$ 个，$i+2$ 个，......，n 个小于 x 。那么：

$$P(X_{(i)} < x) = \sum_{k=i}^{n} C_k^n (F(x))^k (1-F(x))^{n-k}$$

我们将 X_i 的分布取为 $[0,1]$ 上的均匀分布，那么利用 (a)和 (b)中的结果，得到：

$$\int_0^y \frac{n!}{(i-1)!(n-1)!} x^{i-1}(1-x)^{n-i}dx = \sum_{k=i}^{n} C_k^n y^k (1-y)^{n-k}$$

如果 $S_i < N(t)$，也就是说，第 i 个事件是在 t 时刻前发生的。那么，$S_1, S_2 \cdots, S_n$ 与 $[0,t]$ 上均匀分布的 n 个随机变量的 n 个次序统计统计量有相同的分布。那么到达时间的分布：

$$f_{S_i}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}(\frac{x}{t})^{i-1}(\frac{1-x}{t})^{n-i}\frac{1}{t}dx$$

到达时间的期望为

$$\mathrm{E}(S_i) = \int_0^t x f_{S_i}(x)$$

实际上可以不需要真的计算这个积分，我们可以直观地求解 在长度为 t 的时间区间内随机放入 n 个事件，这些事件将区间均匀分成了 $n+1$ 段，那么其中第 i 个事件发生的时间的期望应该是：

$$\mathrm{E}[S_i|N(t)=n] = \frac{t}{n+1}i \quad (i \le n)$$

由于 Poisson 过程是有无记忆性的，那么在 t 之后，两个事件到来的时间间隔期望也是 $t/(n+1)$ ，因此

$$\mathrm{E}[S_i|N(t)=n] = t + \frac{i-n}{n+1}t$$

这一问不确定做的对不对，因为按理说 (e)应该可以用上 (d)的结论，但是我没有用上
这似乎说明带有 t 的更新区间比其他的区间更长，可能与课本 72 页的定理不谋而合？

2-24 追逐

这题是直接看的答案

由于车辆进入公路是一个 Poisson 过程，我们从这个 Poisson 过程上采样：考虑一个以速度 v 在时刻 t 进入公路的车辆 A，如果一辆在时刻 s 以速度 X 进入的车辆 B 与 A 相遇，那么“B 进入公路”这一事件就被计数一次；如果 B 与 A 没有相遇，那么“B 进入公路”这一事件就不被计数。也就是说，以 G 记旅行时间的分布，那么一个发生在时刻 s 的事件被计数的概率为：

$$p(s) = \begin{cases} \bar{G}(t+t_v-s) & s<t \\ G(t+t_v-s) & t<s<t+t_v \\ 0 \quad others \end{cases}$$

因此，总共的计数次数的期望为：

$$\lambda\int_0^t \bar{G}(t+t_v-s)ds + \lambda\int_t^{t+v} G(t+t_v-s)ds = \lambda\int_0^{t_v} G(y)dy + \lambda\int_{t_v}^{t+t_v}\bar{G}(y)dy$$

对上式求导，并且考虑到在 $t\to\infty$ 时，$\bar{G}(t+t_v)\to 0$ ，得到：

$$G(t_v) - 0 + \bar{G}(t+t_v) - \bar{G}(t_v) = 0 \Rightarrow G(t_v) = \bar{G}(t_v) \Rightarrow G(t_v) = \frac{1}{2}$$

从而证得了原命题。本题非常巧妙，重点还是利用“相遇”这一事件平稳增量、独立增量的特性，将其建模为 Poisson 过程。

2-32 非时齐 Poisson 过程

没做完，不会

我们直接证明一个加强的结论：到达时间的有序集合 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 与 n 个具有 $F(x)$ 分布的变量的次序统计量有相同的分布。仿照定理 2.3.1 的证明过程，我们找到 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1} = t$，并且找到足够小的 h_i，使得 $t_i + h_i < t_{i+1}$，那么：

$$
\begin{aligned}
&P(t_i \le S_i \le t_i + h_i, i = 1, 2, \cdots, n | N(t) = n) \\
&\quad = \frac{\prod_i \lambda(t_i) h_i \exp(-\lambda(t_i) h_i) \cdot \exp(-(m(t) - \sum_i \lambda(t_i) h_i))}{\exp(-m(t))(m(t))^n / n!} \\
&\quad = \frac{n! \prod_i \lambda(t_i)}{(m(t))^n} \prod_i h_i
\end{aligned}
$$

那么，到达时间的联合分布为：

$$
f(t_1, t_2, \cdots, t_n) = n! \frac{\prod_i \lambda(t_i)}{(m(t))^n}
$$

而次序统计量的联合密度为：

$$
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = n! \prod_i f(x_i) = n! \frac{\prod_i \lambda(x_i)}{(m(t))^n}
$$

那么，到达时间的联合概率密度和具有 $F(x)$ 分布的次序统计量的联合概率密度相同。

由于这里不确定它说的“在分布 F 的时间内无法工作”到底是不是指上一问中的分布 F，为了避免混淆，我们将工人无法工作的时间的分布先记为 G。 对于一名在 S_i 时刻受伤的工人来说，在 t 时刻仍然受伤的概率为 $1 - G(t - S_i)$。取条件于在 $[0, t]$ 中工人受伤的人数 N，那么：

$$
\mathrm{E}[X(t) | N = n] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} 1 - G(t - S_i)\right] = n - n\mathrm{E}[G(t - S_i)]
$$

再对 N 取期望：

- 但是这个 $E[G(t - S_i)]$ 消不去啊，尽管我们在 (a)问中已经知道了 S_i 的分布

2-41 条件 Possion 过程

没有独立增量的原因是，根据本书 2.6 节的介绍，我们只要知道一段时间内发生的事件数目，我们就可以推断出 Λ 的分布，从而 Λ 的分布又可以影响其他时间段上发生的事件数目。因此，两个时间段上发生的事件数目是不是互相独立的。因此，Poisson 分布没有独立增量。在给定的条件 $N(t) = n, S_i = s_i$ 时：

$$
P(\Lambda = \lambda | N(t) = n, S_i = s_i) = \frac{P(\Lambda = \lambda, N(t) = n, S_i = s_i)}{P(N(t) = n, S_i = s_i)}
$$

其中：

$$
P(\Lambda = \lambda, N(t) = n, S_i = s_i) = \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^n}{n!} \frac{n!}{t^n} dG(\lambda)
$$

$$
P(N(t) = n, S_i = s_i) = \int_0^\infty \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^n}{n!} \frac{n!}{t^n} dG(\lambda)
$$

那么：

$$P(\Lambda=\lambda|N(t)=n,S_i=s_i)=\frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^n dG(\lambda)}{\int_0^\infty \exp(-\lambda t)(\lambda t)^n dG(\lambda)}$$

因此，Λ 的条件分布只与 n 有关。我们也就说它只通过 $N(t)=n$ 依赖于历史。
在 $N(t)=n$ 的条件下，下一次到达间隔的概率密度为：

$$f(S_{n+1}-S_n=t_0|N(t)=n)=\frac{\int_0^\infty \lambda\exp(-\lambda t_0)(\lambda t)^n\exp(-\lambda t)dG(\lambda)}{\int_0^\infty(\lambda t)^n\exp(-\lambda t)dG(\lambda)}dt_0$$

$$P(N(h)\geq 1)=1-P(N(h)=0)=1-\int_0^\infty \exp(-\lambda h)dG(\lambda)$$

因此，设这里的积分和极限符号可以交换：

$$\lim_{h\to 0}\frac{P(N(h)\geq 1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\int_0^\infty \exp(-\lambda h)dG(\lambda)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_0^\infty 1-\exp(-\lambda h)dG(\lambda)}{h}=\int_0^\infty \lambda dG(\lambda)$$

它们是同分布的。但是由 (a)中论述可知，它们不是独立的。