Chapter 23： 内在的构造

#DifferentialGeometry

在欧几里得平面内的平行移动有一种很简单的方法：保持 $w_{\|}$ 和直线 L 的夹角不变。于是，我们推测：要将曲面 S 的切向量 w 以速度 v 沿着测地线 G 平行移动，只需要使得它沿着 G 移动时，保持 $w_{\|}$ 和 v 的夹角不变即可。利用第 22 集中我们观察到的结果可以验证这一点。
现在我们考虑沿着一般曲线的平行移动：在欧氏平面上，我们可以使用一系列短的直线段近似曲线 K，最后令每一段直线段的长度都趋于 0. 在曲面上，我们当然也可以这样做：使用一系列首尾相接的测地线段 $\{G_i\}$ 组成 $K^\star$ 来逼近 K，最后沿着 G_i 移动 w，保持 $w_{//}$ 与 G_i 的夹角不变。最后，使得每一段测地线段的长度都趋近于 0，使得 $K^\star$ 变成 K。

我们现在想要定义一种“内蕴”的曲面上切向量的变化率。设一个质点以速度 $v(t)$ 在曲面 S 上的一条曲线 K 上移动，位置为 $p(t)$，切向量为 $w(t)$。若在很短的时间 ϵ 内，点 p 移动到点 $q=p(t+\epsilon)$，那么它的变化率是：

$$\epsilon\nabla_v w = w(q) - w(p)$$

但是，$w(q)$ 在 T_q 内，而 w_p 在 T_p 内。因此，它们的差既不在 T_q 内也不在 T_p 内。因此这个差不是 S 的内蕴对象。我们使用 $w_{\|}(q\to p)$ 代表将 $w(q)$ 平行移动到 p 处时的值，那么，我们显然可以定义一种“内蕴”的导数：

$$D_v(w) = \frac{w_{\|}(q\to p) - w(p)}{\epsilon}$$

$D_v(w)$ 必然在 T_p 内。这种“内蕴”导数还有一个名字：协变导数。下图展示了沿着测地线计算协变导数的情景：

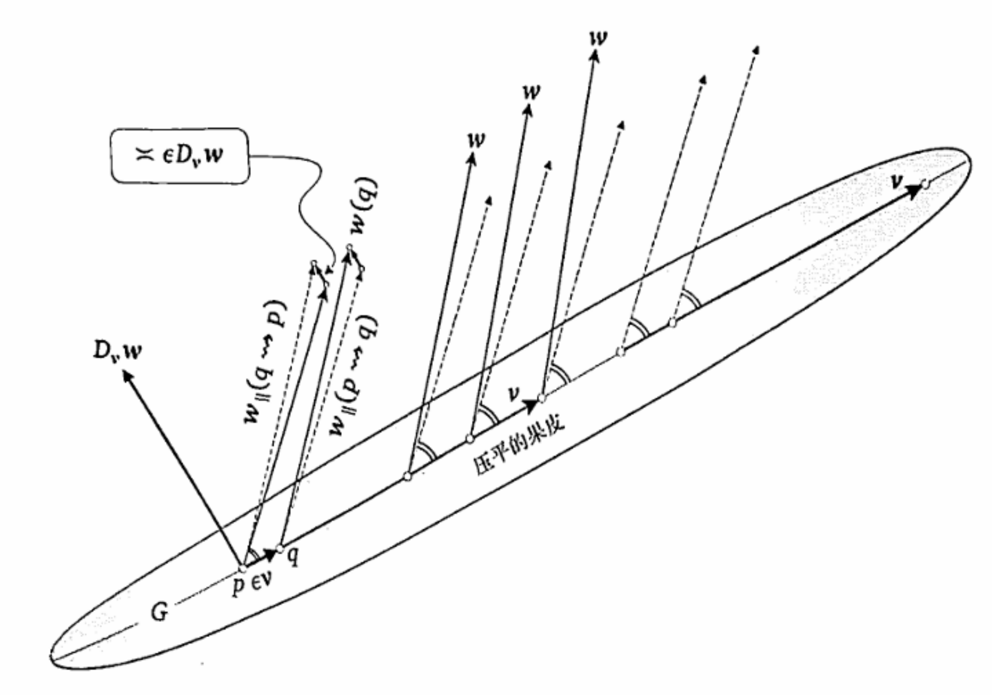

图 23-3 内蕴（即“协变”）导数 $D_v w$，用来测量 w 沿 v 的内蕴变化率. 如果 v 是测地线 G 的速度，那么它就很容易被想象出来，因为此时 G 周围的果皮就会变平成一条直线，$w_\parallel$ 在平面内的平行移动变为普通欧几里得平面内的平行移动

显然，如果一个向量沿着曲线 K 平行移动，那么它沿着移动方向的协变导数为 0.

我们介绍一种看待协变导数的外在方法。在上一集中，我们说：看待平行移动的方法可以是“一边移动，一边向切平面投影”，换言之，协变导数只关注向量在切平面投影内的变化率：

$$D_v(w) = \mathcal{P}[\nabla_v w] = \nabla_v(w) - [n \cdot \nabla_v(w)]n = \nabla_v(w) - [w \cdot S(v)]n$$

根据这个式子，我们还可以改写之前写出的曲率：

$$\nabla_v v = \kappa = \kappa_g + \kappa_n = D_v(v) + (n \cdot \nabla_v(v))n$$

因此，测地曲率就是速度沿着自身方向的协变导数，显然，测地线的测地曲率为 0。

此外，容易证明：令 $w_\parallel$ 为向量 w 沿着轨迹的平行移动，而 $\theta_\parallel$ 为 $w_\parallel$ 与 v 的夹角，那么测地曲率还是 $w_\parallel$ 与 v 之间夹角的变化率。