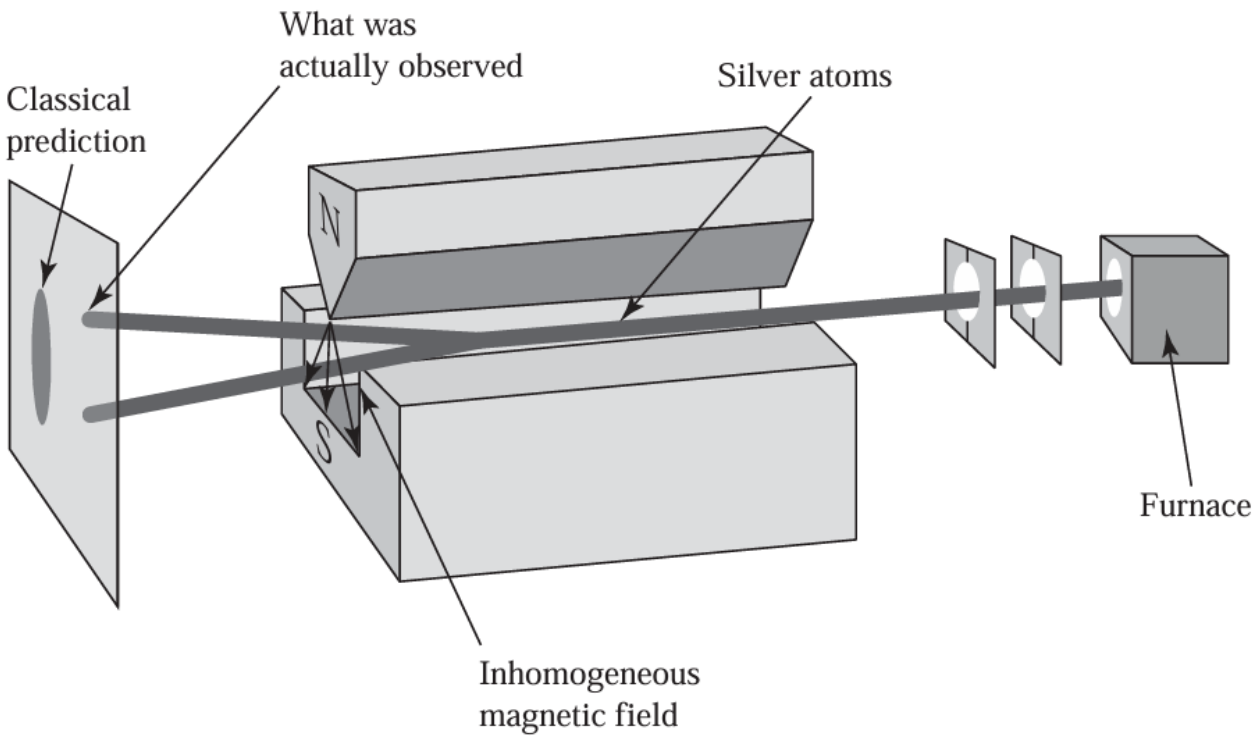
1：Stern-Gerlach实验

#Quantum_Mechanics

我们从一个在量子力学历史上具有重要地位的实验入手。

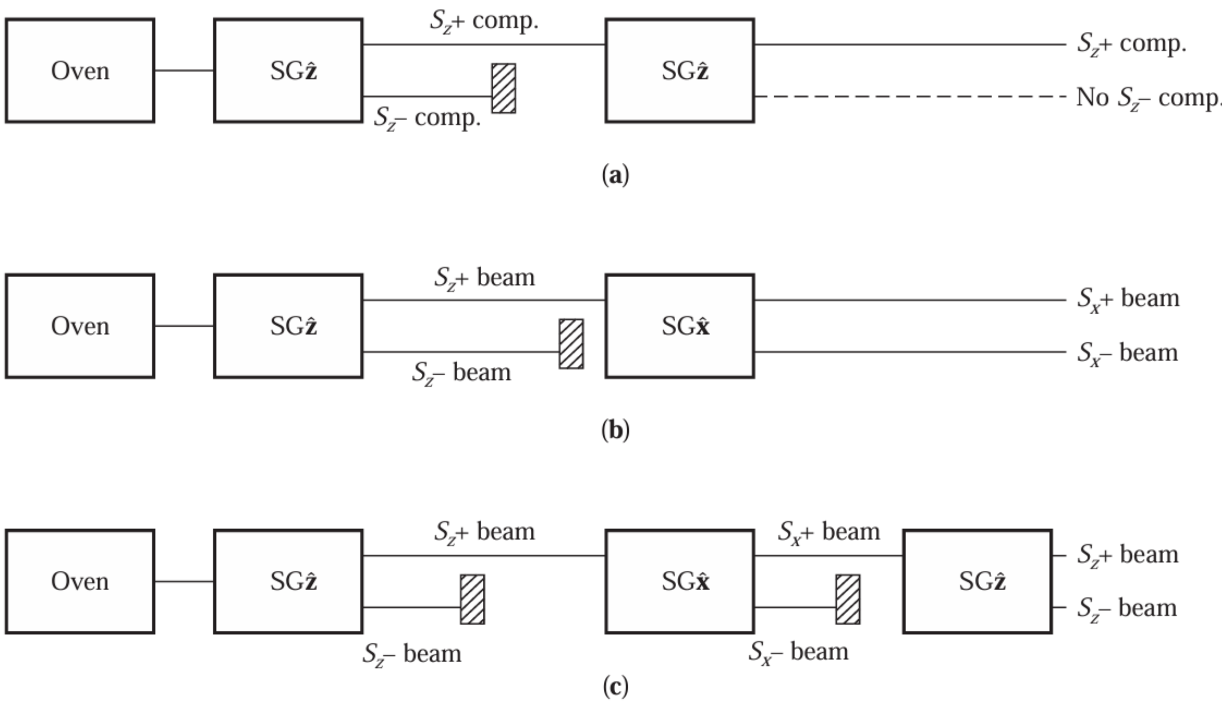


如图，一些银原子被加热，之后穿过一片不均匀的磁场。由于银原子电子分布的原因，其磁矩 μ 与自旋角动量 S 成正比：$\mu \propto S$。根据经典电动力学，这些银原子受到的作用力应该是：

$$F_z = \frac{\partial}{\partial_z}(\mu \cdot B) \approx \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

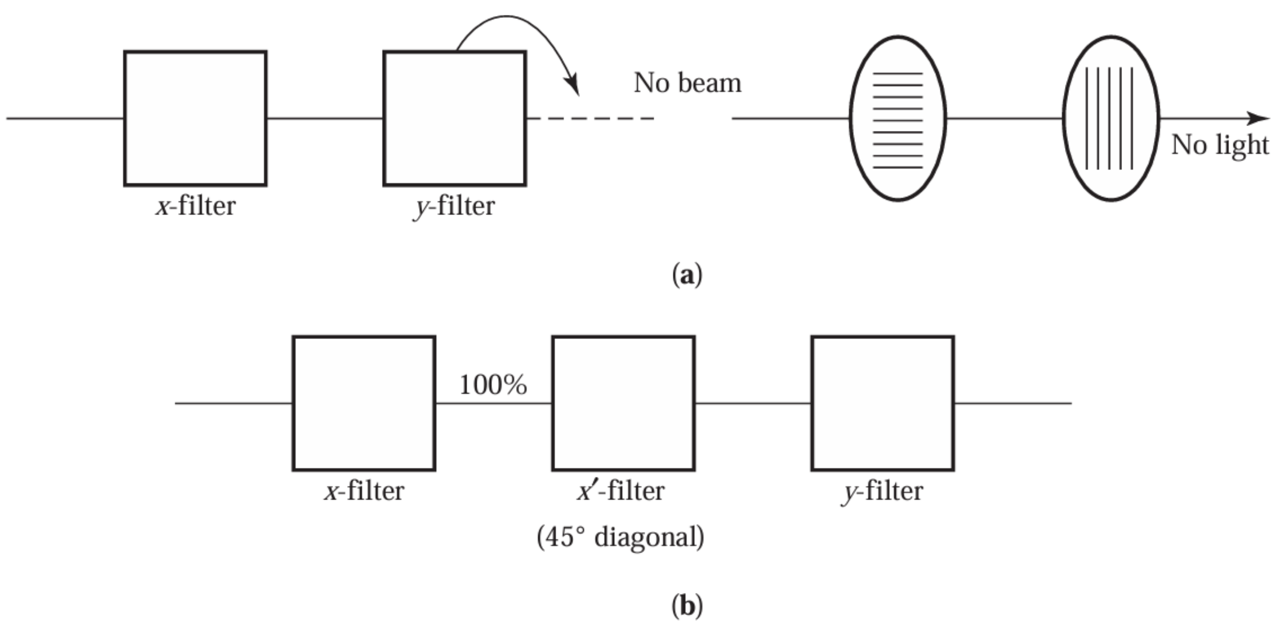
这里我们忽略了除了 z 方向之外的磁场分量。也就是说，粒子受到的力是完全正比于 μ_z 的。按照经典的理论，粒子的自旋显然应当是各向同性的，因此我们应该在接收屏上看到连续的条带。然而，在实验中，我们只能观测到两个点：$S_z = +\frac{\hbar}{2}$ 和 $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ ，由此我们发现：粒子的角动量似乎是量子化的。

我们接下来看一系列的 S-G 实验。



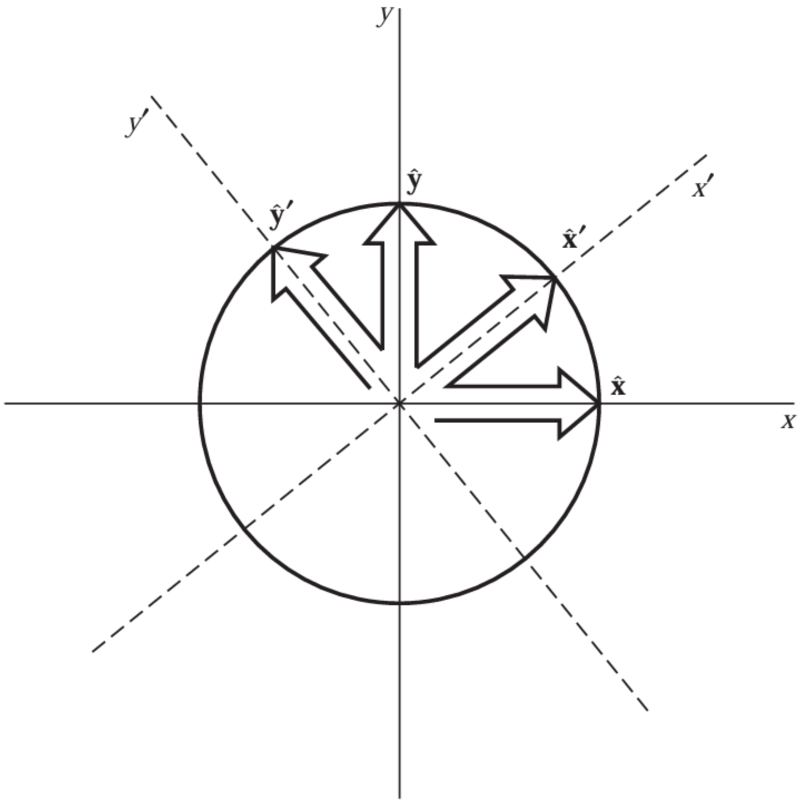
在图 a)中一切正常，但是图 b) 和图 c) 中是难以解释的。一个粒子能同时拥有 S_{z^+} 和 S_{x^+} 的自旋吗？为什么将粒子通过一个 x 方向的装置之后，本来消失的 $z-$ 方向的自旋竟然重新出现？这个例子通常用来解释在量子力学中我们不能同时决定 S_x 和 S_z，这是因为第二次对于 $x+$ 方向自旋的粒子的筛选完全摧毁了第一次筛选中关于 S_z 的信息。

我们第一次见到这种奇怪的现象，自然地, 我们希望为它找一个经典对应。



如图 a)，我们在一个 x 方向的起偏器后放置一个 y 方向的检偏器，此时，检偏器中看不到任何的光。但是如果我们按照图 b)，在中间插入一个 x' 检偏器，它的检偏方向与 x 轴夹角为 45 度，此时，我们就能在 y 检偏器之后看到光线了。如果我们将这个情景

与 S-G 实验中的情景做个对应，那么具有自旋 S_z 的原子对应于向着 x, y 方向偏振的光，而具有自旋 S_x 的原子则对应于向着 x', y' 方向偏振的光。



从图中可以看出，对于向 x 方向偏振的光：

$$E_0 \hat{x}' \cos(kz - \omega t) = E_0 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \cos(kz - \omega t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \cos(kz - \omega t) \right]$$

对于 y 方向偏振的也类似。因此，从 x 方向的起偏器中出来的光是 x' 和 y' 方向偏振光的线性组合，x' 方向的检偏器取出了其中 x' 方向的分量，这个分量又是 x 和 y 方向偏振光的组合，最终 y 方向的分量被 y 方向检偏器分离出来。

我们如何把这一套东西套用在 S-G 实验上？银原子的自旋状态是不是也能使用二维空间中的一个矢量表示？我们设想真的有一个这样的抽象的矢量空间，并且假设 S_{z^+} 和 S_{z^-} 对应的矢量就是这个矢量空间的基底，我们将这两个矢量使用 $|S_z; +\rangle$ 和 $|S_z; -\rangle$ 表示。根据与上面偏振实验的类比，我们会得到：

$$|S_x; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; -\rangle$$

$$|S_x; -\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z; -\rangle$$

但是有一个接踵而至的问题：我们如何表示 y 方向的偏振？根据对称性，我们令有 S_z 自旋的粒子射向 x 方向，并通过 y 方向的实验装置，结果应该类似于 S_z 自旋的粒子

射向 y 方向，但是通过 x 方向的装置，那么 $|S_y;+/-\rangle$ 应该也是 $|S_z;+/-\rangle$ 的线性组合，但是我们已经用完了所有可用的线性组合，怎么办呢？我们可以再做一个类比：x 方向的线偏光通过一个 $\frac{1}{4}$ 波片，会得到圆偏振光，圆偏振光通过 x 方向检偏器后也可以得到 x 方向的线偏振光。我们这样表示一个圆偏振光：

$$E = E_0\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}\cos\left(kz-\omega t\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y}\cos(kz-\omega t+\frac{\pi}{2})\right]$$

或者我们可以利用欧拉公式，将电场表示成复数形式，真实的电场只是其实部：

$$\epsilon = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}\exp\left(i\left(kz-\omega t\right)\right)+\frac{i}{\sqrt{2}}\hat{y}\exp(i(kz-\omega t))\right]$$

从而，我们可以将具有 S_y 方向自旋的粒子类比为左旋或右旋的偏振光：

$$|S_y;+/-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z;+\rangle +/- \frac{i}{\sqrt{2}}|S_z;-\rangle$$

因此，我们之前提到的二维矢量空间是一个复矢量空间。