电动力学PART 2

#ElectroDynamics

电磁场的能量

我们接触到的第一条守恒定律是电荷守恒(也称为连续性方程):

$$rac{\partial
ho}{\partial t} = -
abla \cdot J$$

注意,我们推出麦克斯韦方程组的时候也使用了这条守恒律。因此这不是一个孤立的假设,而是电动力学的基本规律之一。

在之前,我们已经学习过电磁场的能量密度:

$$u=rac{1}{2}igg(\epsilon_0 E^2+rac{1}{\mu_0}B^2igg)$$

现在我们的问题是: 我们有电荷 q, 在外场 E, B 下以速度 v 运动了一段时间 dt, 问外场对它做的功是多少? 显然:

$$F \cdot dl = q(E + v \times B) \cdot vdt = qE \cdot vdt$$

现在我们考虑一个体积 V 内的电荷:

$$rac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \int_V qE \cdot v d au = \int_V (E \cdot J) d au$$

这是外场在 dt 时间内对区域 V 内的电荷做的功,或者说,是外界"送进"这个区域内的能量。我们希望这个结果中只包含 E,B,那么我们使用 Maxwell 方程消去 J:

$$E \cdot J = rac{1}{\mu_0} E \cdot (
abla imes B) - \epsilon_0 E \cdot rac{\partial E}{\partial t}$$

改写其中的一项:

$$E \cdot (
abla imes B) = -B \cdot rac{\partial B}{\partial t} - E \cdot (
abla imes B)$$

并且凑一下全微分,上面的式子就会变成:

$$rac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V rac{1}{2}igg(\epsilon_0 E^2 + rac{1}{\mu_0}B^2igg)d au - rac{1}{\mu_0}\oint_S (E imes B)\cdot da$$

这个式子被称为坡印廷定理。它的物理意义是:单位时间内对体积 V 内电荷做的功,等于体积 V 内电磁场能量的减少,减去从体积 V 内流出的能量。因此,我们可以给出单位时间内、单位面积上被电磁场携带的能量(能流密度矢量):

$$S = \frac{1}{\mu_0} (E \times B)$$

对于我们所关心的区域中没有电荷的情况,坡印廷定理可以退化。我们也可以写出它的另一种写法:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot S$$

这是能量的连续性方程。

电磁场的动量

如果将两个运动的电荷限制在轨道上,一个在 x 轴上运动,而另一个在 y 轴上运动,我们会发现二者之间的作用力并不是等大反向的。这违反了牛顿第三定律(或者说,动量守恒)吗?这是因为电磁场也有动量。只有将电磁场的动量和粒子的动量加在一起,我们才能得到系统(守恒的)总动量。

为了研究这一点,我们计算体积 V 中电荷在外场 E, B 下所受的力:

$$F=\int_V (
ho E + J imes B) d au$$

考虑作用在单位体积上的力,同样,我们希望将 ρ 和 J 消去。于是我们有:

$$f = \epsilon_0 (
abla \cdot E) E + \left(rac{1}{\mu_0}
abla imes B - \epsilon_0 rac{\partial E}{\partial t}
ight) imes B$$

利用偏导数的运算规则和麦克斯韦方程组,上式中的一部分可以被改写为:

$$rac{\partial E}{\partial t} imes B = rac{\partial}{\partial t} (E imes B) + E imes (
abla imes E)$$

那么:

$$f = \epsilon_0[(
abla \cdot E)E - E imes (
abla imes E)] - rac{1}{\mu_0}[B imes (
abla imes B)] - \epsilon_0 rac{\partial}{\partial t}(E imes B)$$

利用运算规则:

$$abla(E^2) = 2(E\cdot
abla)E + 2E imes(
abla imes E)$$

处理 $E \times (\nabla \times E)$ 和 $B \times (\nabla \times B)$,并且向式子里面添加一个等于 0 的项 $(\nabla \cdot B)B$,上式就变成:

$$f = \epsilon_0[(
abla \cdot E)E + (E \cdot
abla)E] + rac{1}{\mu_0}[(
abla \cdot B)B + (B \cdot
abla)B] - rac{1}{2}
abla \left(\epsilon_0 E^2 + rac{1}{\mu_0}B^2
ight) - \epsilon_0 rac{\partial}{\partial t}(E^2 + E^2)B + E^2 +$$

这个式子太繁杂,我们使用麦克斯韦应力张量来简化书写,令:

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left(E_i E_j - rac{1}{2} \delta_{ij} E^2
ight) + rac{1}{\mu_0} igg(B_i B_j - rac{1}{2} \delta_{ij} B^2 igg)$$

上式可以被简化写为:

$$f =
abla \cdot T - \epsilon_0 \mu_0 rac{\partial S}{\partial t}$$

因此,作用在体积 V 内的力总共就是:

$$F = \oint_S T \cdot da - \epsilon_0 \mu_0 rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V S d au$$

对于静电场、静磁场的情况,第二项为0.

我们知道,牛顿定律实际上说的是 $F=rac{\mathrm{d}p_{mech}}{\mathrm{d}t}$,那么上面的式子可以写成:

$$rac{\mathrm{d}p_{mech}}{\mathrm{d}t} = \oint_S T \cdot da - \epsilon_0 \mu_0 rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V S d au$$

式子右边的第二项是储存在场中的动量,也就是说,场的动量密度是:

$$g=\mu_0\epsilon_0 S$$

而单位时间内被运出区域 V 的动量就是第一项。如果区域 V 内的机械动量 p_{mech} 不变,我们就得到了动量的连续性方程:

$$\frac{\partial g}{\partial t} =
abla \cdot T$$

此外, 我们自然地得到角动量密度:

$$l=r imes g=\epsilon_0[r imes(E imes B)]$$