为了求解归一化本征矢，我们有 $a|n\rangle = c|n-1\rangle$，首先利用 $\langle n|a^\dagger a|n\rangle = c^2$，$N = a^\dagger a \Rightarrow n = c^2$。

从而得到有：$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$，类似地 $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ 利用降算符，我们可以不停地降低本征矢中的 n，而由于对 n 的限制 $n = \langle n|N|n\rangle = \langle n|a^\dagger a|n\rangle \geq 0$。

从而这个递降必在 n=0 处停止。所以基态能量：$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$。从而：

$$|1\rangle = a^\dagger|0\rangle \qquad \Rightarrow |n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

$$|2\rangle = \left(\frac{a^\dagger}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle = \frac{a^{\dagger 2}}{\sqrt{2}}|0\rangle$$

$$|3\rangle = \left(\frac{a^\dagger}{\sqrt{3}}\right)|2\rangle = \left(\frac{a^{\dagger 3}}{\sqrt{3!}}\right)|0\rangle$$

下面我们研究在 $|n\rangle$ 这套基底下算符的矩阵元。由于

$$\begin{cases} \langle n'|a|n\rangle = \langle n'|\cdot\sqrt{n}\cdot|n-1\rangle = \sqrt{n}\,\delta_{n',n-1} \\ \langle n'|a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1} \end{cases}$$

从而

$$\begin{cases} \langle n'|x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n}\,\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1}\right) \\ \langle n'|p|n\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(-\sqrt{n}\,\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1}\right) \end{cases}$$

还可以计算它们在 $\langle x'|$ 基底下的表示。对基态：$a|0\rangle = 0$ 在 $|x'\rangle$ 表象下

$\langle x'|a|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\langle x'|\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)|0\rangle = 0$，利用动量算符在坐标表象的表示：$\langle x'|p|\alpha\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|\alpha\rangle$ 从而记 $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \Rightarrow \left(x' + x_0^2\frac{d}{dx'}\right)\langle x'|0\rangle = 0$

从而基态的坐标波函数：$\langle x'|0\rangle = \left(\frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{x_0}}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{x_0}\right)^2\right]$ 仍可以用升算符往上升。$\langle x'|n\rangle = \left(\frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{2^n n!}}\right)\left(\frac{1}{x_0^{n+1/2}}\right)\left(x' - x_0^2\frac{d}{dx'}\right)^n\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{x_0}\right)^2\right]$

下面先看一下谐振子的不确定关系：先看均值：利用 x, p 的矩阵表示可以知道对于任何一个态 $|n\rangle$ 都有 $\langle n|x|n\rangle = 0$，$\langle n|p|n\rangle = 0$。从而 x, p 值的均值都为0。

计算平方的均值。由于 $x^2 = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)(a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a)$，对基态而言，利用本征矢正交归一的特性我们可知只有 $\langle 0|aa^\dagger|0\rangle$ 给出非0，从而 $\langle x^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{1}{2}x_0^2$。(基态为高斯波包)

$\langle p^2\rangle = \frac{1}{2}\hbar m\omega$。从而可以发现谐振子振动和经典振子一样，动能势能各占一半（$\langle\frac{p^2}{2m}\rangle = \langle\frac{1}{2}m\omega^2x^2\rangle = \frac{\langle H\rangle}{2}$）。从而基态上恰有不确定关系取等：$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle = \frac{1}{4}\hbar^2$。

对于非基态：$\frac{\hbar}{2m\omega}\langle n|a^2 + a^{\dagger 2} + a^\dagger a + aa^\dagger|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle n|n-2\rangle + \langle n|n+2\rangle + n\langle n|n\rangle + (n+1)\langle n|n\rangle\right) = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)$

对于动量算符

$$\begin{cases} a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right) \\ a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - i\frac{p}{m\omega}\right) \end{cases} \Rightarrow 2i\cdot\frac{p}{m\omega}\cdot\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} = a - a^\dagger, \quad 2i\cdot p\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}} = a - a^\dagger \Rightarrow p = -\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,i\,(a - a^\dagger)$$

$$p^2 = -\frac{\hbar m\omega}{2}(a - a^\dagger)^2 = -\frac{\hbar m\omega}{2}(aa - aa^\dagger - a^\dagger a + a^\dagger a^\dagger)$$

$$\langle n|p^2|n\rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}\langle n|aa^\dagger + a^\dagger a|n\rangle = \frac{1}{2}\hbar m\omega(2n+1) \Rightarrow \langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle = \frac{1}{4}\hbar^2(2n+1)^2 = \hbar^2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$$

下面研究谐振子演化。在 Heisenberg 绘景下的演化方程为

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -m\omega^2 x \\ \frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \end{cases}$$

这是个耦合方程组，为了让它们解耦合，可研究升降算符演化。

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -i\omega a \\ \frac{da^\dagger}{dt} = i\omega a^\dagger \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(t) = a(0)\exp(-i\omega t) \\ a^\dagger(t) = a^\dagger(0)\exp(i\omega t) \end{cases}$$

从而

$$\begin{cases} x(t) = x(0)\cos(\omega t) + \frac{p(0)}{m\omega}\sin(\omega t) \\ p(t) = -m\omega x(0)\sin\omega t + p(0)\cos(\omega t) \end{cases}$$

(与经典一致)

还有一个办法得到演化方程，那就是直接算演化算符。$x(t) = \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right)x(0)\exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)$。需要个公式：我们看对易括号"嵌套"带来什么？

$$[G, A] = GA - AG$$

$$[G, [G, A]] = G[G, A] - [G, A]G = G^2A - GAG - GAG + AG^2 = G^2A + AG^2 - 2GAG$$

$[G,[G,[G,A]]] = G^3A + GAG^2 - 2G^2AG - G^2AG - AG^3 + 2GAG^2 = G^3A - 3G^2AG + 3GAG^2 - AG^3$.

再把展开逐项对齐看. $1\cdot A\cdot 1 = A$. $(1+i\lambda G)A(1-i\lambda G) = A - i\lambda AG + i\lambda GA - (i\lambda)^2 GAG$.

$(1+G+\frac{1}{2!}G^2)A(1-G+\frac{1}{2!}G^2) = (1 - AG + \frac{1}{2!}AG^2 + GA - GAG + \frac{1}{2!}GAG^2 + \frac{1}{2!}G^2A - \frac{1}{2!}G^2AG + \frac{1}{(2!)^2}G^2AG^2)$.

甚: $1 - AG + GA$. 关: $\frac{1}{2!}(G^2A + AG^2 - 2GAG)$. 所以越往后看开的项越来越多会越联越复杂. 这即所谓 Baker–Hausdorff Lemma

直接利用它有: $\exp(\frac{iHt}{\hbar})x(0)\exp(-\frac{iHt}{\hbar}) = x(0) + (\frac{it}{\hbar})[H,x(0)] + \frac{1}{2!}(\frac{i^2t^2}{\hbar^2})[H,[H,x(0)]] + \cdots$

利用 $[H,x(0)] = -\frac{i\hbar}{m}p(0)$, 和 $[H,p(0)] = i\hbar m\omega^2 x(0)$. 可以直到"递归"地求出每个对易子. 从而可以验证 $\exp(\frac{iHt}{\hbar})x(0)\exp(-\frac{iHt}{\hbar}) = x(0)\cos(\omega t) + \frac{p(0)}{m\omega}\sin\omega t$.

根据我们之前的讨论. $\langle n|x|n\rangle = \langle n|p|n\rangle = 0$. 所以虽然 $x(t)$, $p(t)$ 在"振荡", 但我们看不到期望值振荡. (因为本征态是"定态"上面的值不演化).

下面我们直接讨论 Schrodinger Eq. 用 Sch. 表象, 波函数 $\psi(x',t) = \langle x'|\alpha,t_0;t\rangle$ 哈密顿量 $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$. 把 Sch. 方程修改成关于 $\psi(x',t)$ 的 PDE.

利用 p 在坐标表象下. $\langle x'|\frac{p^2}{2m}|\alpha,t_0;t\rangle = -(\frac{\hbar^2}{2m})\nabla'^2\langle x'|\alpha,t_0;t\rangle$. 从而 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x',t) = -(\frac{\hbar^2}{2m})\nabla'^2\psi(x',t) + V(x')\psi(x',t)$.

所谓"定态Sch方程". 即不依赖于时间的能量本征态满足的 Sch 方程. 前面我们说过. 此时所有力学量的期望都不会演化, 只有波函数的"相位"变化. 于是代入

$\langle x'|\alpha,t_0;t\rangle = \langle x'|a'\rangle\exp(-\frac{i}{\hbar}E_{a'}t)$. 将它代入 Sch 方程: $-(\frac{\hbar^2}{2m})\nabla'^2\langle x'|a'\rangle + V(x')\langle x'|a'\rangle = E_{a'}\langle x'|a'\rangle$. 它不含t. $\langle x'|a'\rangle$ 就是能量的本征函数. 记 $u_E(x') = \langle x'|a'\rangle$.

要解这样的方程. 我们要有边界条件. 常见的是粒子被束缚在一个区域中. $E < \lim_{|x'|\to\infty} V(x')$. 或者 $|x|\to+\infty$ 有 $u_E(x)\to 0$.

仿照我们有波恩概率诠释. 我们看 Sch方程是如何与概率流联系的. 由 $\rho(x,t) = \|\psi(x',t)\|^2$. 我们希望有形如 $\partial_t\rho + \nabla\cdot j = 0$ 的方程.

$\partial_t\rho = \partial_t\|\psi\|^2 = \partial_t\psi^*\cdot\psi + \psi^*\partial_t\psi$. 代入 Sch 方程. 并利用 $\psi^*\nabla^2\psi = \nabla(\psi^*\nabla\psi) - \nabla\psi^*\nabla\psi$. 立刻有. $j = -(\frac{i\hbar}{2m})(\psi^*\nabla\psi - (\nabla\psi^*)\psi) = (\frac{\hbar}{m})\mathrm{Im}(\psi^*\nabla\psi)$.

我们也期待概率流与p相关. $-(\frac{i\hbar}{2m})\int \langle\alpha,t_0;t|x\rangle\nabla\langle x|\alpha,t_0;t\rangle - \nabla\langle\alpha,t_0;t|x\rangle\langle x|\alpha,t_0;t\rangle\,dx$

$$= (\frac{i\hbar}{2m})\int\langle\alpha,t_0;t|x\rangle\frac{1}{i\hbar}\langle x|p|\alpha,t_0;t\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\alpha,t_0;t|p|x\rangle\langle x|\alpha,t_0;t\rangle\,dx$$

$$= \frac{1}{2m}(\langle\alpha|p|\alpha\rangle + \langle\alpha|p|\alpha\rangle) = \frac{\langle p\rangle}{m}.$$

我们可将波函数中"概率密度"和"相位"分开来写, $\psi(x,t) = \sqrt{\rho(x,t)}\exp(\frac{i}{\hbar}S(x,t))$. $\Rightarrow \psi^*\nabla\psi = \sqrt\rho\nabla(\sqrt\rho) + (\frac{i}{\hbar})\rho\nabla S$. $j = \frac{1}{m}(\rho\nabla S)$.

所以与概率流密切相关的是相位的梯度. 作为最简单例子. 我们考虑与自由经典粒子对应的、处在 $|p\rangle$ 态上的粒子. 由 $\langle x|\hat p|p\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|p\rangle = p\langle x|p\rangle$ 可知.

$\psi(x,t) \propto \exp(\frac{ipx}{\hbar} - \frac{iEt}{\hbar})$. 从而有 $\nabla S = p$.

之前说过 Schrodinger 方程是从 HJB 方程和物质波等价人智慧上猜得的. 所以现在我们将其退回经典情形 $(\hbar\to 0)$. 将波函数代入有.

$-(\frac{\hbar^2}{2m})[\cancel{\nabla^2\sqrt\rho} + (\frac{2i}{\hbar})\cancel{(\nabla\sqrt\rho)}(\nabla S) - (\frac{1}{\hbar^2})\sqrt\rho|\nabla S|^2 + (\frac{i}{\hbar})\cancel{\sqrt\rho\nabla^2 S}] + \sqrt\rho V = i\hbar[\cancel{\frac{\partial\sqrt\rho}{\partial t}} + (\frac{i}{\hbar})\sqrt\rho\frac{\partial S}{\partial t}] \Rightarrow \frac{1}{2m}\|\nabla S\|^2 + V(x) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$ 这回到了经典的HJ方程.

在经典$V(x)$不含时情形下，$S(x,t)$是可分离变量的，$S(x,t)=W(x)-Et$。 此外，在经典力学中我们有 $p=\nabla S=\nabla W$。

下面，我们看一下 sch 方程的几个基本求解。

① Free Particle. $\nabla^2 u_E(x)=-\frac{2mE}{\hbar^2}u_E(x)$. 定义波数 $k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2=\frac{2mE}{\hbar^2}=\frac{p^2}{\hbar^2}$. 这个方程可用分离变量法。令 $u_E(\vec{x})=u_x(x)u_y(y)u_z(z)$.

从而 $\left(\frac{1}{u_x}\frac{d^2u_x}{dx^2}+k_x^2\right)+(\ )+(\ )=0$. 由于三个方向上完全相同，可猜三个括号内全为0，从而很容易猜得 $u_E(\vec{x})=C\exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})$.

怎么搞出来？可以想象"盒装世界"，即粒子被装在边长为L的立方体盒中，再令 $L\to+\infty$。对于盒中粒子，我们要求粒子可以出现在盒子的边缘上，从而使用周期边条 $u_x(x+L)=u_x(x)$.

从而有 $k_x=\frac{2\pi}{L}\cdot n_x$, $k_y=\frac{2\pi}{L}\cdot n_y$, $k_z=\frac{2\pi}{L}\cdot n_z$. 加上归一化系数，$u_E(x)=\frac{1}{L^{3/2}}\exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})$. 我们知道 $u_E(x)$是一个动量本征波函数，它对应 $\vec{p}=\hbar\vec{k}$.

对于自由粒子，p 与 E 的选择对易，从而它也是 E 的本征波函。对应的能量 $E=\frac{p^2}{2m}=\frac{\hbar^2|k|^2}{2m}=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2(n_x^2+n_y^2+n_z^2)$.

考虑 $E\sim E+dE$ 中有多少态。考虑 $\vec{k}$ space 中，有 $|\vec{k}|=\frac{2\pi}{L}$ 半径的球壳，对于离原点较远的位置有 $dN=4\pi n^2 d|n|$, $dE=2\hbar^2|k|\cdot d|k|/2m$.

计算可知 $\frac{dN}{dE}=\frac{m^{3/2}E^{1/2}L^3}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}$。而且这样可以得出正确的概率流密度。由 $\psi(x,t)=\frac{1}{L^{3/2}}\exp\left(\frac{i\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}-\frac{iEt}{\hbar}\right)$，可推出 $\vec{j}(\vec{x},t)=\frac{\hbar\vec{k}}{m}\frac{1}{L^3}$

对于谐振子的解法，后面再做介绍。下面补充一下传播子的格林函数描述。考虑 $K(x'',t;x',t_0)=\langle x''|\exp(-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0))|x'\rangle$. 它描述了波函数如何从$x'$走到$x''$的

当我们要考虑从空间一块区域开始传播的波函数，只需使用叠加原理。有一类形如 $\mathcal{L}\phi(\vec{r})=\rho(\vec{r})$ 的PDE，用于描述源 $\rho(\vec{r})$ 激发的场 $\phi(\vec{r})$.

我们称 Green Function $G(\vec{r},\vec{r}')$ 是点源激发的场，$\mathcal{L}G(r,r')=\delta(r-r')$. 由PDE的线性性质，总有 $\phi(\vec{r})=\int\rho(\vec{r}')\cdot G(\vec{r},\vec{r}')\cdot d\vec{r}'$.

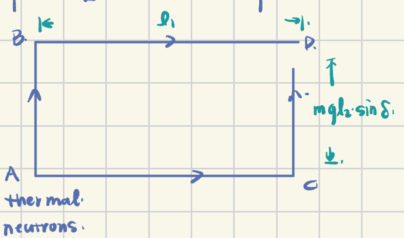
比如 Poisson 方程的 Green Function 是 $G(r,r')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}$. 显然，传播子是 schr 方程的格林函数，$\left[-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla''^2+V(x'')-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right]K(x'',t;x',t_0)=-i\hbar\,\delta(x''-x')\,\delta(t-t_0)$.

这里，初始波函数 $\delta(t-t_0)\,\delta(x''-x')$ 可看作时空点源，而 K 为激发的场。有相当多问题可解析。e.g. Free Particle，谐振子，可直接算。

下面我们看规范变换的影响。对于标量势，规范变换的效果是显然的。取 $V(x)\to V(x)+V_0$，则 $|\alpha,t_0;t\rangle\to\exp\left[-\frac{i}{\hbar}V_0(t-t_0)\right]|\alpha,t_0;t\rangle$.

势能本身没有意义，但势能差是重要的。有一个以重力导致的干涉，我们知道，在经典力学里面所有自由下落粒子"齐步走"，mg, m 消去，从而我们将其理解为几何理论。

而在 $\left[-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla^2+m\phi_{grav}\right]\psi=i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$ 我们会发现，在此方程中，所以 m 的影响没有被完全消去。Ehrenfest 方程告诉我们，看平均值看不出 m 的影响：$\frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle=-g\hat{z}$.



BD 边上的中子有更高的重力势能，从而其相位"旋转"地更快。可以估计，$\phi_{ABD}-\phi_{ACD}\sim-\frac{m_n^2 g\,l_1 l_2\,\lambda\sin\delta}{\hbar^2}$

λ 为两路上平均波长。

下面看些不怎么 trivial 的电磁学效果. 考虑有外场 $(\phi, \vec{A})$. $\vec{E} = -\nabla\phi$. $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$. $\vec{p}$ 为粒子正则动量. 则相应的 Hamiltonian: $H = \frac{1}{2m}\left(p - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\phi$.

正则量子化的时候, $H = \frac{1}{2m}\left[\vec{p}^2 - \left(\frac{e}{c}\right)(\vec{p}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{p}) + \left(\frac{e}{c}\right)^2\vec{A}^2\right] + e\phi$. 先看 Heisenberg Picture. 研究均值演化.

$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[x_i, H] = \frac{1}{i\hbar}\cdot i\hbar\cdot\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m}(p_i - eA_i/c)$. 将 $\Pi = m\frac{dx_i}{dt}$ 称作机械动量. 我们有: $\vec{\Pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$.

机械动量的各分量并非对易. $[\Pi_i, \Pi_j] = [p_i - \frac{e}{c}A_i,\ p_j - \frac{e}{c}A_j] = -\frac{e}{c}\left([A_i, p_j] + [p_i, A_j]\right) = -\frac{e}{c}\left(i\hbar\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - i\hbar\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)$.

同时, 注意到 $B_k = \varepsilon_{kij}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}$. $\varepsilon^{ijk}B_k = \varepsilon^{ijk}\varepsilon_{kab}\frac{\partial A_a}{\partial x_b} = \varepsilon^{kij}\varepsilon_{kab}\frac{\partial A_a}{\partial x_b} = \delta^i_a\delta^j_b\frac{\partial A_a}{\partial x_b} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$... $= \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$ 从而我们有. $[\Pi_i, \Pi_j] = \left(\frac{i\hbar e}{c}\right)\varepsilon_{ijk}B_k$.

考虑机械动量 Π 的演化. 先将 Hamiltonian 写成: $H = \frac{\Pi^2}{2m} + e\phi$.

$\frac{d\Pi_i}{dt} = [\Pi_i, H] = [\Pi_i, \frac{\Pi_j\Pi_j}{2m}] + [\Pi_i, \frac{\Pi_k\Pi_k}{2m}] + [\Pi_i, e\phi]$. 其中 $i, j, k = 1, 2, 3$ 为三个不同下标.

① $= \frac{\Pi_j}{2m}[\Pi_i, \Pi_j] + [\Pi_i, \Pi_j]\frac{\Pi_j}{2m}$

$= \varepsilon_{ijk}\frac{\Pi_j}{2m}B_k + \varepsilon_{ijk}\frac{1}{2m}B_k\Pi_j$

② $= \frac{\Pi_k}{2m}[\Pi_i, \Pi_k] + [\Pi_i, \Pi_k]\frac{\Pi_k}{2m}$

$= \varepsilon_{ikj}\frac{\Pi_k}{2m}B_j + \varepsilon_{ikj}B_j\frac{\Pi_k}{2m}$

③ $= [p_i, e\phi] - [\frac{e}{c}A, e\phi]$

$= [p_i, e\phi] = -i\hbar e\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$

取一个具体的 $i = 1$. 则 ① $= \varepsilon_{123}\frac{1}{2m}\Pi_2B_3 + \varepsilon_{123}\frac{1}{2m}B_3\Pi_2 + \varepsilon_{132}\frac{1}{2m}\Pi_3B_2 + \varepsilon_{132}\frac{1}{2m}B_2\Pi_3$.

② $= \varepsilon_{132}\frac{1}{2m}\Pi_3B_2 + \varepsilon_{132}\frac{1}{2m}B_2\Pi_3 + \varepsilon_{123}\frac{1}{2m}\Pi_2B_3 + \varepsilon_{123}\frac{1}{2m}B_3\Pi_2$.

$\varepsilon_{1jk}\Pi_jB_k = \varepsilon_{123}\Pi_2B_3 + \varepsilon_{132}\Pi_3B_2$.

$\varepsilon_{1jk}B_j\Pi_k = \varepsilon_{123}B_2\Pi_3 + \varepsilon_{132}B_3\Pi_2 = -(\varepsilon_{132}B_2\Pi_3 + \varepsilon_{123}B_3\Pi_2)$.

经如此对 $\left(\frac{d\Pi}{dt}\right)_1$ 的展开, 可以发现, $m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\Pi}{dt} = e\left[E + \frac{1}{2c}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\times B - \vec{B}\times\frac{d\vec{x}}{dt}\right)\right]$. 后面这个东西就是量子化的 Lorentz Force.

下面看波函数: $\langle x'|\left[p - \frac{e}{c}A(x)\right]^2|\alpha, t_0; t\rangle$

$= \left[-i\hbar\nabla' - \frac{e}{c}A(x')\right]\langle x'|\,p - \frac{e}{c}A(x)\,|\alpha, t_0; t\rangle$

$= \left[-i\hbar\nabla' - \frac{e}{c}A(x')\right][\quad]\langle\quad\rangle$. 从而给出 Schr 方程. 实际上可以看作把梯度换一换. $\nabla' \to \nabla' - \left(\frac{ie}{\hbar c}\right)\vec{A}$.

可以验证一下: Schr 的 PF: $\vec{j} = \left(\frac{\hbar}{m}\right)\mathrm{Im}(\psi^*\nabla'\psi)$.

$= \left(\frac{\hbar}{m}\right)\mathrm{Im}\left[\psi^*\left(\nabla' - \frac{ie}{\hbar c}A\right)\psi\right] = \left(\frac{\hbar}{m}\right)\mathrm{Im}(\psi^*\nabla'\psi) - \left(\frac{e}{mc}\right)A\,\psi^*\psi$.

Let. $\psi = \sqrt{\rho}\cdot\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right)$. $\Rightarrow j = \left(\frac{\rho}{m}\right)\left(\nabla S - \frac{eA}{c}\right)$. 在之前的情形. $\int d^3x\,\vec{j} = \frac{\langle p\rangle}{m}$. 现在 $\int d^3x\,\vec{j} = \frac{\langle\Pi\rangle}{m}$.

下面考虑对 E. B 做规范变换: $\phi \to \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$. $A \to A + \nabla\Lambda$. $E = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$. $B = \nabla\times A$.

在经典物理中. 显然不会存在不同的规范下有不同运动, 所以机械动量是 gauge-invariant 的. 但根据 Hamilton Eq. 正则动量并不是. 量子是否有这个性质呢?

从$|\alpha\rangle$以后略去$\tilde{A}$时的态 $|\tilde{\alpha}\rangle$为变换后的态。我们希望证明 $\langle\alpha|x|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|x|\tilde{\alpha}\rangle$ $\langle\alpha|\,p-\frac{e}{c}A\,|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\,p-\frac{e}{c}\tilde{A}\,|\tilde{\alpha}\rangle$.

用一个算符 g 代表这个变化 $|\tilde{\alpha}\rangle = g|\alpha\rangle$. 由于$\langle\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\alpha|\alpha\rangle = 1$. 所以$g$必为幺正. 可猜 $g=\exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\Lambda(x)\right)$. 由于$g(x)$与$x$对易 所以$g^{\dagger}xg = x$ 自然满足.

检查 $\exp(-\frac{ie}{\hbar c}\Lambda)\,p\,\exp(\frac{ie}{\hbar c}\Lambda) = \exp(-\frac{ie}{\hbar c}\Lambda)[p,\exp(\frac{ie}{\hbar c}\Lambda)]+p$

$= -i\hbar\,\exp(-\frac{ie}{\hbar c}\Lambda)\,i\hbar\,\nabla\left[\exp(\frac{ie}{\hbar c}\Lambda)\right]+p = p+\frac{e}{c}\nabla\Lambda$ 从而g确实是我们想要的. 我们还必须验证 $|\tilde{\alpha}\rangle = g|\alpha\rangle$ 满足新的Schr方程.

对比 $\left[\frac{(p-eA/c)^2}{2m}+e\phi\right]|\alpha,t_0;t\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha,t_0;t\rangle$. 实际上我们只需证明 $\exp(-\frac{ie\Lambda}{\hbar c})\,(p-\frac{eA}{c}-\frac{e\nabla\Lambda}{c})^2\exp(\frac{ie\Lambda}{\hbar c}) = (p-\frac{eA}{c})^2$ (?)

$\left[\frac{(p-eA/c-e\nabla\Lambda/c)^2}{2m}+e\phi\right]|\widetilde{\alpha,t_0;t}\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\widetilde{\alpha,t_0;t}\rangle$

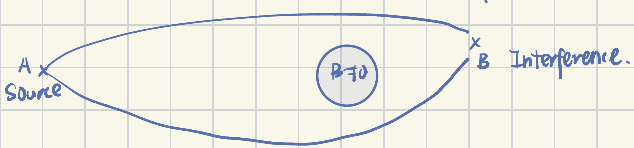
从而会说 在规范变换后 ρ 没有变 而 $S\to S+\frac{e\Lambda}{c}$. 事实的是此时 概率流 $j=(\frac{\rho}{m})(\nabla S-\frac{eA}{c})$ 没有变化. 这恰恰对应机械动量的规范不变性.

⚠ 此处仍请注意: $j=\frac{\rho}{m}\nabla S$ 是从单粒子Schr方程推出来的. 所以现在Schr方程要了之后的形式会变化.

稍微解释一下 Gauge Transformation 的含义: 当在 x 处测量 $F(x)$. $F(x+dx) = F(x)+\vec{\nabla}F\cdot\vec{dx}$.

若我们同时做一个尺度变换 可将所有点的度量值同时放大. 令 $1|_{at\ x}\to(1+\Sigma(x)\cdot dx)|_{at\ x+dx}$. 则 $F(x+dx)|_{rescaled} = F(x)+[(\nabla+\Sigma)F]\cdot dx$. 这有点像 $\nabla\to\nabla-(\frac{ie}{\hbar c})A$.

Aharonov–Bohm Effect (AB效应): 在没有磁场的区域内 磁矢势也可引起可被测到的效应.



使用路径积分解决这个问题. L的变化 $\frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2\to\frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2+\frac{e}{c}\frac{dx}{dt}\cdot\vec{A}$.

从而 $S(n,n-1)\to S(n,n-1)+\frac{e}{c}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(\frac{d\vec{x}}{dt})\cdot\vec{A}\,dt = \frac{e}{c}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\vec{A}\cdot d\vec{s}$.

那么全部乘起来以后多了 $\exp(\frac{ie}{\hbar c}\int_{x_1}^{x_N}\vec{A}\cdot d\vec{s})$.

可以将经过圆柱上方的路径与经过下方的路径配对然后加起来. 从而有 $\left[(\frac{e}{\hbar c})\int_{x_1}^{x_N}\vec{A}\cdot ds\right]_{above}-\left[(\frac{e}{\hbar c})\int_{x_1}^{x_N}\vec{A}\cdot d\vec{s}\right]_{below} = (\frac{e}{\hbar c})\oint\vec{A}\cdot d\vec{s} = (\frac{e}{\hbar c})\phi_B$.

最后讨论单极子. 众所周知单极子没有. 假如有. 那么Maxwell方程改成 $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 4\pi\rho_M$. 静磁场为 $B = (\frac{e_M}{r^2})\hat{r}$. 与这样的场对应的矢势可以为 $A = \left(\frac{e_M(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\right)\hat{\phi}$.

但是旋度场一定无散. 所以这了矢势有问题: 它在$\theta=\pi$处奇点. 若你写成分段函数. $A^{(I)} = \left(\frac{e_M(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\right)\hat{\phi}$ $(\theta<\pi-\varepsilon)$. 除π附近 ε角小锥以外部可用 在二者重叠区域 $A^{(II)}-A^{(I)} = -(\frac{2e_M}{r\sin\theta})\hat{\phi}$.

$A^{(II)} = -\left(\frac{e_M(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}\right)\hat{\phi}$ $(\theta>\varepsilon)$. 除0附近 ε角小锥外部可用 $\Rightarrow\Lambda = -2e_M\phi$.

从而 态矢要做相应规范变换. $\psi^{(II)} = \exp\left(\frac{-2ie\,e_M\phi}{\hbar c}\right)\psi^{(I)}$. 我们要求 $\psi^{(I)}$与$\psi^{(II)}$是单值的. $\psi^{(II)}$为单值之条件为 $\frac{2ee_M}{\hbar c} = \pm N$. 从而最小磁荷 $e_{M,min} = \frac{\hbar c}{2|e|}\sim\frac{137}{2}|e|$