UNIVERSITET I BERGEN

BOKMÅL

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Løsningsforslag eksamen MAT121 - Lineær algebra V2011

Med forbehold om skrivefeil.

Oppgave 1

1. *Betrakt*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ b \end{bmatrix}.$$

(a) *Finn den reduserte trappeformen til A.*

(b) *For hvilke verdier av b har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ én, ingen eller uendelig mange løsninger? Regn ut den generelle løsningen når den eksisterer.*

Ser på (a) og (b) samtidig. Regner ut den redusert trappeformen av den augmentert matrise $[A|\mathbf{b}]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 7 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -3 & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & b+6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+8 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+8 \end{array}\right]$$

Kolonnene 1 og 2 er pivot kolonner, x_3, x_4 er frie variabler. Systemet har løsning hvis og bare hvis det er ingen rekke av type $[0 \cdots 0|k]$ der $k \neq 0$. For at den gitte systemet skal ha løsning, vi må kreve at $b = -8$. Det er ingen tillfell der systemet har kun én løsning på grunn av at det finns frie parametre. Oppsummert: i) $b = -8$: uendelig mange løsninger. ii) $b \neq 8$: ingen løsning.

Finner den generelle løsning nå $b = -8$: ved baklengs substitusjon: $x_2 = -1 + x_3 - 1/2x_4$, $x_1 = 8 - 3x_3 - 3x_4$. Dette gir:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Løsningen er en kombinasjon av en spesielle løsning ($[8, -1, 0, 0]^T$) og 2 løsninger til den homogene systemet.

(c) *Finn Null(A) og Col(A) og angi en ortonormal basis for hver av dem. Hva er dimensjonen av Null(A) og rangen til A?*

Fra forrige beregninger, vi har

$$\mathrm{Null}(A) = \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

dermed $\mathrm{Null}(A)$ har dimensjon 2.

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

siden de første to kolonner er pivot kolonnene. Dermed rangen til A er også 2.

Ortogonaler basiser finnes med Gram-Schmidt: gitt $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1, \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1.$$

Deretter kan vi normalisere vektorene $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ (ortonormal basis)

For $\mathrm{Null}(A)$ dette gir $\mathbf{v}_2 = [-15/22, -14/11, -17/22, 1]^T$ slik at

$$\mathrm{Null}(A) = \mathrm{Span}\{\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\begin{bmatrix} -15/22 \\ -14/11 \\ -17/22 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

For $\mathrm{Col}(A)$ dette gir $\mathbf{v}_2 = [1, 0, 1]^T$ slik at

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

2. *Er matrisene* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *og* $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *inverterbare? Hvis ja, regn ut deres inverse.*

Vi ser med en gang at B ikke er inverterbar. Det er fordi de første to kolonnene er like. Ellers kan man vise f.eks. ved å regne ut determinanten.

Matrisen C er inverterbar fordi $\det C = 1$ (produkt av diagonalelementene, siden C er triangulær). Regner ut inversen:

$$[C|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I|C^{-1}].$$

3. *Finn alle egenverdier og egenvektorene til B, C. Er matrisene diagonaliserbare? Forklar. Hvis ja, finn diagonaliseringen.*

   Man kan si med en gang at B er diagonaliserbar (siden den er symmetrisk). Med litt mer erfaring, kan man også se med en gang at C er ikke diagonaliserbar. Men vi skal vise det ved å eksplisitt regne ut egenverdiene og egenvektorene.

   Matrise B: $0 = \det(B - \lambda I) = (-1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = (-1-\lambda)((1-\lambda-1)(1-\lambda+1)) = (-1-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda)$ gir egenverdier $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$. Egenvektorer: for $\lambda_1 = -1$: løser for $(B - \lambda_1 I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Rekkereduserer:

$$B + I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Kolonnene 1 og 2 er pivot kolonner, den tredje tilsvarer en fri parameter (x_3). $x_1 = x_2 = 0$. Generelle løsning:

$$\mathbf{x} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   For $\lambda = 0$:

$$B + 0 \cdot I = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Kolonnene 1 og 3 er pivot kolonner, den andre tilsvarer en fri parameter (x_2). $x_3 = 0$, $x_1 = -x_2$. Generelle løsning:

$$\mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   For $\lambda = 2$:

$$B - 2 \cdot I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Kolonnene 1 og 3 er pivot kolonner, den andre tilsvarer en fri parameter (x_2). $x_3 = 0$, $x_1 = x_2$. Generelle løsning:

$$\mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Diagonalisering:

$$B = PDP^{-1}, \qquad P = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (NB. B er også ortogonalt diagonaliserbar, $B = \tilde{P} D \tilde{P}^T$, men da må vektorene $\mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ normaliseres...).

Matrise C: den har egenverdi $\lambda = 1$ med algebraisk multiplisitet 3 (matrisen er triangulær og vi kan lese egenverdiene på diagonalen). Egenvektorer: Ser på $(C - 1 \cdot I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Rekkereduserer $C - I$:

$$C - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Den er allrede rekkeredusert: kolonne 2 er pivot kolonne, mens kolonnene 1 og 3 er assosiert til frie variabler (dvs at det er kun 2 lin. uavhengige egenvektorer). Den generelle løsningen er x_1, x_3 frie, $x_2 = 0$, i vektor form:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{Null}(C - I) = \mathrm{Span}\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_3}\}.$$

Siden det er ikke nok egenvektorene, C er ikke diagonaliserbar.

4. *Betrakt matrisen*

$$D_n = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Vis at $\det D_n = \alpha \det D_{n-1} - \beta^2 \det D_{n-2}$ *for* $n = 2, 3, \dots$. *Deretter, la* $\alpha = -2$, $\beta = 1$. *Regn ut determinanten til* D_4 *gitt at* $\det D_0 = 1$, $\det D_1 = -2$.

Fra definisjonen: $\det D_n = (-1)^{1+1}\alpha \det(D_n)_{1,1} + (-1)^{1+2}\beta \det(D_n)_{1,2}$ der $A_{i,j}$ er matrisen fra A der rekke i og kolonne j er fjernet. Vi ser at lett at $(D_n)_{1,1} = D_{n-1}$. I tillegg,

$$\det(D_n)_{1,2} = \det \left[\begin{array}{c|c} \beta & \beta \;\; 0 \cdots 0 \\ \hline \mathbf{0} & D_{n-2} \end{array} \right] = \beta \det D_{n-2}$$

(følger ved å ekspanderer mht 1. kolonne). Tilsammen, $\det D_n = \alpha \det D_{n-1} - \beta^2 \det D_{n-2}$.

For $\alpha = -2, \beta = 1$, dette gir $\det D_2 = -2 \det D_1 - \det D_0 = 4 - 1 = 3$, $\det D_3 = -2 \det D_2 - \det D_1 = -6 + 2 = -4$ og $\det D_4 = -2 \det D_3 - \det D_2 = 8 - 3 = 5$.

Oppgave 2

La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b_3}\}$ *være en basis for vektorrommet* V *og betrakt undermengden* $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$, *der*

$$\mathbf{c}_1 = \frac{1}{3}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3), \quad \mathbf{c}_2 = \frac{1}{3}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b_2} - \mathbf{b}_3), \quad \mathbf{c}_3 = \frac{1}{3}(2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3).$$

1. *Forklar hvorfor* $\mathcal{C}$ *er basis for* V.

   En basis for et vektorrom består av en undermengde av vektorer som i) spenner rommet, ii) er lin. uavhengige. Siden $\mathcal{C}$ består av 3 vektorer ($\dim V = 3$), det er nok å vise at ii) stemmer. Vi ser for skalarer c_1, c_2, c_3 slik at $c_1\mathbf{c_1} + c_2\mathbf{c_2} + c_3\mathbf{c_3} = \mathbf{0}$. Dette gir

$$(\frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + \frac{2}{3}c_3)\mathbf{b}_1 + (\frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 - \frac{1}{3}c_3)\mathbf{b_2} + (\frac{2}{3}c_1 - \frac{1}{3}c_2 + \frac{1}{3}c_3)\mathbf{b}_3 = \mathbf{0}.$$

Siden $\mathcal{B}$ *er* en basis, koeffisientene til den lineær komb. ovenfor er alle lik null. Dette gir systemet

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Her kan man gå videre på forskjellige måter. En måte er å vise at matrisen er ikke singulær og dermed systemet har kun den trivielle løsning. En annen måte er f.eks. å rekkeredusere. Ellers ser man med en gang at c_3 må være null (trekk rekke 2 fra rekke 1), og at c_1 må også være null (legg til rekke 2 og 3). Dermed også $c_2 = 0$. Siden $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, vektorene er lin. uavh. og er en basis for V.

2. *Gi en definisjon av koordinater til en vektor mht en basis. Hva er koordinatene* $[\,\cdot\,]_\mathcal{C}$ *og* $[\,\cdot\,]_\mathcal{B}$ *til vektoren* $\mathbf{x} = -\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_3$*?*

   Gitt $\mathcal{B}$ en basis for V, vi har $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ der $\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + v_3\mathbf{b}_3$ (alle vektorer i V kan uttrykkes entydig som lineær kombinasjon av basis-vektorene). Dermed, vi ser med en gang at $[\mathbf{x}]_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. I tillegg, $\mathbf{x} = -\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_3 = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3$, dermed $[\mathbf{x}]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

3. *Finn de basisskifte matrisene* $\mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ *og* $\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$*.*

   Basisskife matrisen $\mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ er definert som den matrise slik at

$$[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[\mathbf{v}]_\mathcal{C}$$

og $\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathcal{P}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$. Siden

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + v_3\mathbf{b}_3$$

og koordinateskifte er lineært (den er definert av en matrise), vi har

$$[\mathbf{v}]_\mathcal{C} = v_1[\mathbf{b}_1]_\mathcal{C} + v_2[\mathbf{b}_2]_\mathcal{C} + v_3[\mathbf{b}_3]_\mathcal{C} = [[\mathbf{b}_1]_\mathcal{C}, [\mathbf{b}_2]_\mathcal{C}, [\mathbf{b}_3]_\mathcal{C}][\mathbf{v}]_\mathcal{B} = \mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$$

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "{[\cdot]_\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "{[\cdot]_\mathcal{C}}"] & \\ \mathbb{R}^3 \arrow[rr, shift left, "\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}"] & & \mathbb{R}^3 \arrow[ll, shift left, "\mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}"] \end{tikzcd}$$

som gir

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [[\mathbf{b}_1]_\mathcal{C}, [\mathbf{b}_2]_\mathcal{C}, [\mathbf{b}_3]_\mathcal{C}].$$

Akkurat på samme fremgangsmåte,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = [[\mathbf{c}_1]_\mathcal{B}, [\mathbf{c}_2]_\mathcal{B}, [\mathbf{c}_3]_\mathcal{B}].$$

Det siste er lettere å finne fordi $\mathbf{c}_i$'ene er allrede gitt i funskjon av $\mathbf{b}_i$'ene:

$$[\mathbf{c}_1]_\mathcal{B} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{c}_2]_\mathcal{B} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{c}_3]_\mathcal{B} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(merk: det er det samme matrisen som vi fant når vi studerte lin. uavhengihet!) Den andre matrisen finner vi ved å invertere $\mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$:

$$[\mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}|I] \sim [I|\mathcal{P}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}].$$

Man får:

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} & I\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

som gir

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. *Betrakt mengden* $\tilde{\mathcal{C}} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4\}$, *der* $\mathbf{c}_4 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_3$. *Er* $\tilde{\mathcal{C}}$ *en basis for* V*? Forklar.*

   Nei, siden vektorene er lineært avhengige ($\mathbf{c}_4$ er en lineær kombinasjon av de andre tre vektorer).

Oppgave 3

1. *Tabellen nedenfor viser temperaturen i Celsius (C) for Bergen den 1. mai 2011. Temperaturen er målt ved forksjellige tidspunkter* t*:*

t	*0*	*4*	*8*	*12*	*16*	*20*
y	*5C*	*3C*	*7C*	*12C*	*8C*	*4C*

   Finn verdiene a, b, c *slik at funksjonen* $y(t) = a + \frac{b}{4}t + \frac{c}{\sqrt{3}}\sin(\frac{\pi t}{12})$ *tilpasses best av dataene (minste kvadraters løsning).*

   Vi har en ligning for hver t. Dette gir det overdeterminert systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1/2 \\ 1 & 5 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \\ 12 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

   ($A\mathbf{x} = \mathbf{b}$). Vi ser på de *normale ligninger* $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$, som gir

$$A^TA = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 0 \\ 15 & 55 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 39 \\ 105 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   Rekkereduksjon av $[A^TA, A^T\mathbf{b}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 15 & 0 & 39 \\ 15 & 55 & -3 & 105 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 13 \\ 0 & -35 & 6 & -15 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 13 \\ 0 & -35 & 6 & -15 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{array}\right]$$

   Vi løser baklengs:

$$c = \frac{10}{17} \qquad b = \frac{9}{17}, \qquad a = \frac{88}{17}.$$

   (det er alltid lurt å sjekke at verdiene tilfredstiller systemet!).

2. *Betrakt undermengden $\mathcal{B} = \{1, t, \sin t\}$ av vektorrommet av reelle funksjoner og underrommet $V = \operatorname{Span} \mathcal{B}$. Hvorfor er $\mathcal{B} = \{1, t, \sin t\}$ en basis for V? Forklar.*

   Siden V er allerede spent av $\mathcal{B}$, det er nok å sjekke at funksjonene er lin. uavh. Vi studere $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot t + c_3 \cdot \sin t = 0$ (som funskjon av t). Siden uttrykket må gjelde for alle t, det er nok å sjekke for noen verdier, f.eks. $t = 0, t = \pi/4, t = \pi/2$. Dette gir:

$$\begin{aligned} t = 0: &\quad 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 = 0 \\ t = \pi/4: &\quad 1 \cdot c_1 + \pi/4 \cdot c_2 + \sqrt{2}/2 \cdot c_3 = 0 \\ t = \pi/2: &\quad 1 \cdot c_1 + \pi/2 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 = 0 \end{aligned}$$

   som er ekvivalent til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \pi/4 & \pi/2 \\ 1 & \pi/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Siden matrisen er ikke-singulær (determinanter er $\frac{\pi}{4}(1-\pi) \neq 0$) systemet har kun den trivielle løsning $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, dermed funksjonene *er* lin. uavhengige og en basis for V.

3. *Hva betyr det at en tranformasjon er* lineær*? La $D : V \to V$ være gitt ved dobbelderivering, der $D(f(t)) = f''(t)$. Vis at transformasjonen D er linær. Finn $[D]_{\mathcal{B}}$ relativt til basisen $\mathcal{B}$. Finnes det en basis som diagonaliserer transformasjonen?*

   En transformasjon $T : U \to W$ mellom to vektorrom er lineær om $T(\alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2) = \alpha T(\mathbf{u}_1) + \beta T(\mathbf{u}_2)$ for alle skalare α, β og alle vektorer $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ i U. En ekvivalent definisjon er at $T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$ samtidig som $T(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}) = T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2)$, for alle skalare α og vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in V$.

   Vi tar en vilkårlig $f \in V$, dvs $f(t) = a + bt + c \sin t$. Vi ser at $D(f) = f''(t) = -c \sin t$. For en vilkålig α, αf er funksjonen $\alpha a + \alpha bt + \alpha c \sin t$, dermed $D(\alpha f) = -\alpha c \sin t = \alpha D(f)$. I tillegg, $(f_1 + f_2)(t) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)t + (c_1 + c_2) \sin t$, dermed $D(f_1 + f_2) = -(c_1 + c_2) \sin t = -c_1 \sin t - c_2 \sin t = D(f_1) + D(t_2)$. Aksiomene om lineæritet er tilfrestilt av D, dermed er D en lineær transformasjon.

   Matrisen $[D]_{\mathcal{B}}$ er definert som den matrisen slik at

$$[D(f)]_{\mathcal{B}} = [D]_{\mathcal{B}} [f]_{\mathcal{B}}.$$

   For $f(t) = a + bt + c \sin t$, vi har $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ og $[D(f)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c \end{bmatrix}$, så det er lett å se at $[D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Se diagrammet nedenfor.

$$\begin{tikzcd}
f(t) = a + bt + c \sin t & V \arrow[r, "D"] \arrow[d, "{[\cdot]_{\mathcal{B}}}"] & V \arrow[d, "{[\cdot]_{\mathcal{B}}}"] & D(f) = -c \sin t \\
{[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}} & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\text{mult. med } {[D]_{\mathcal{B}}}"] & \mathbb{R}^3 & {[D(f)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c \end{bmatrix}}
\end{tikzcd}$$

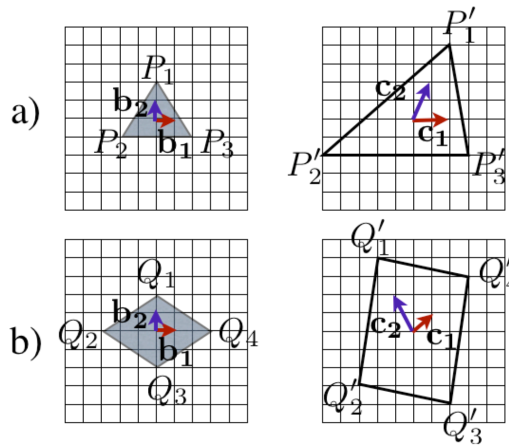
Man kommer til det samme resultatet om man bruker $[D]_{\mathcal{B}} = [[D(1)]_{\mathcal{B}}, [D(t)]_{\mathcal{B}}, [D(\sin t)]_{\mathcal{B}}]$, siden $D(1) = 1'' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot \sin t$, $D(t) = t'' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot \sin t$ og $D(\sin t) = \sin t'' = -\sin t = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t - 1 \cdot \sin t$.

Matrisen er alrede diagonalt, dermed den gitte basisen diagonaliserer transformasjonen.

Oppgave 4

1. *Transformasjonene i a)-b), se bildet, er definert slik at $T(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i$, for $i = 1, 2$. Skissér grafisk avbildningene av de geometriske figurene i a)-b). Finn transformasjonsmatrisene mht standard basis $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$.*

   Lineære transformasjoner avbilder linjer til linjer (og segmenter til segmenter). Dermed det er nok til å see på avbildningene av vektorene som peker på hjørnene i hvert figur (navngitt fra toppen mot klokka).

   a) 3 hjørner, $P_1 = (0, 2)$, $P_2 = (-2, -1)$, $P_3 = (2, -1)$, som tilsvarer vektorene $\mathbf{x}_1 = 0\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$, $\mathbf{x}_2 = -2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, $\mathbf{x}_3 = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$.

   Siden transformasjonen er lineær, en vilkårlig vektor $\mathbf{x} = a\mathbf{b}_1 + b\mathbf{b_2}$ blir avbildet til

   $$T(\mathbf{x}) = T(a\mathbf{b}_1 + b\mathbf{b}_2) = aT(\mathbf{b}_1) + bT(\mathbf{b}_2) = a\mathbf{c}_1 + b\mathbf{c_2}.$$

   Dette gir: $T(\mathbf{x_1}) = 0\mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2$, $T(\mathbf{x}_2) = -2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$, $T(\mathbf{x}_3) = 2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$. Punktene P_i er avbildet til P_i', $i = 1, 2, 3$, se bildet, kolonnen til høyre.

   b) 4 hjørner, $Q_1 = (0, 2)$, $Q_2 = (-2, 0)$, $Q_3 = (0, -2)$, $Q_4 = (2, 0)$ som tilsvarer vektorene $\mathbf{x}_1 = 0\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$, $\mathbf{x}_2 = -2\mathbf{b}_1 + 0\mathbf{b}_2$, $\mathbf{x}_3 = 0\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2$, $\mathbf{x}_4 = 2\mathbf{b}_1 + 0\mathbf{b}_2$. Dette gir: $T(\mathbf{x}_1) = 0\mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2$, $T(\mathbf{x}_2) = -2\mathbf{c}_1 + 0\mathbf{c}_2$, $T(\mathbf{x}_3) = 0\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2$, $T(\mathbf{x}_4) = 2\mathbf{c}_1 + 0\mathbf{c}_2$. Punktene Q_i er avbildet til Q_i', $i = 1, 2, 3, 4$.

   Transformasjonsmatrisene:

   $$T = [T(\mathbf{b}_1)\ T(\mathbf{b}_2)] = [\mathbf{c_1}\ \mathbf{c_2}],$$

   som gir

   $$T_{a)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad T_{b)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. *Finn en symmetrisk matrise S slik at den kvadratiske formen $x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$ kan skrives om som $\mathbf{x}^T S\mathbf{x}$. Klassifisér formen. Finn en koordinateskifte slik at formen blir standard (dvs. uten kryssledd) i de nye koodinatene.*

   Siden S er symmetrisk ($s_{2,1} = s_{1,2}$) og $\mathbf{x}^T S\mathbf{x} = s_{1,1}x_1^2 + 2s_{1,2}x_1x_2 + s_{2,2}x_2^2$, vi ser med en gang at $s_{1,1} = 1$, $s_{1,2} = -2$, $s_{2,2} = 1$. Dette gir matrisen

   $$S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

For å klassifisere formen, vi må se på egenverdiene. Den karakteristisk polynomet er $\det(S - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$. Dette gir egenverdier $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Siden egenverdiene har motsatt fortegn, er formen *ubestemt*, dvs den kan ta både positive og negative verdier.

Egenvektorer: $\lambda = -1$. Dette gir $x_1 + x_2 = 0$ og egenvektor $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, -1]^T$.

For $\lambda = 3$: her er det nok å finne en egenvektor ortonormal til $\mathbf{v}_1$, da kan vi ta $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 1]^T$.

Variablerskiftet er $\mathbf{z} = P^T\mathbf{x}$, der $P = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}]$ (rotasjon av $\pi/4$ med klokka). I de nye variablene, formen blir $-z_1^2 + 3z_2^2$.

Antonella Zanna Munthe-Kaas