UNIVERSITET I BERGEN

BOKMÅL

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT121 - Lineær algebra

Mandag 30. mai 2011, kl. 09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, i samsvar med fakultetes regler.
Oppgavesettet er på 2 sider.
Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

1. Betrakt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ b \end{bmatrix}.$$

   (a) Finn den reduserte trappeformen til A.

   (b) For hvilke verdier av b har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ én, ingen eller uendelig mange løsninger? Regn ut den generelle løsningen når den eksisterer.

   (c) Finn Null(A) og Col(A) og angi en ortonormal basis for hver av dem. Hva er dimensjonen av Null(A) og rangen til A?

2. Er matrisene $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ inverterbare? Hvis ja, regn ut deres inverse.

3. Finn alle egenverdier og egenvektorene til B, C. Er matrisene diagonaliserbare? Forklar. Hvis ja, finn diagonaliseringen.

4. Betrakt matrisen

$$D_n = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

   Vis at $\det D_n = \alpha \det D_{n-1} - \beta^2 \det D_{n-2}$ for $n = 2, 3, \ldots$. Deretter, la $\alpha = -2$, $\beta = 1$. Regn ut determinanten til D_4 gitt at $\det D_0 = 1$, $\det D_1 = -2$.

Oppgave 2

La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ være en basis for vektorrommet V og betrakt undermengden $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$, der

$$\mathbf{c}_1 = \frac{1}{3}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3), \quad \mathbf{c}_2 = \frac{1}{3}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3), \quad \mathbf{c}_3 = \frac{1}{3}(2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3).$$

1. Forklar hvorfor $\mathcal{C}$ er basis for V.

2. Gi en definisjon av koordinater til en vektor mht en basis. Hva er koordinatene $[\,\cdot\,]_\mathcal{C}$ og $[\,\cdot\,]_\mathcal{B}$ til vektoren $\mathbf{x} = -\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_3$?

3. Finn de basisskifte matrisene $\mathcal{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ og $\mathcal{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$.

4. Betrakt mengden $\tilde{\mathcal{C}} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4\}$, der $\mathbf{c}_4 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_3$. Er $\tilde{\mathcal{C}}$ en basis for V? Forklar.

Oppgave 3

1. Tabellen nedenfor viser temperaturen i Celsius (C) for Bergen den 1. mai 2011. Temperaturen er målt ved forksjellige tidspunkter t:

t	0	4	8	12	16	20
y	5C	3C	7C	12C	8C	4C

   Finn verdiene a, b, c slik at funksjonen $y(t) = a + \frac{b}{4}t + \frac{c}{\sqrt{3}}\sin(\frac{\pi t}{12})$ tilpasses best av (minste kvadraters løsning).

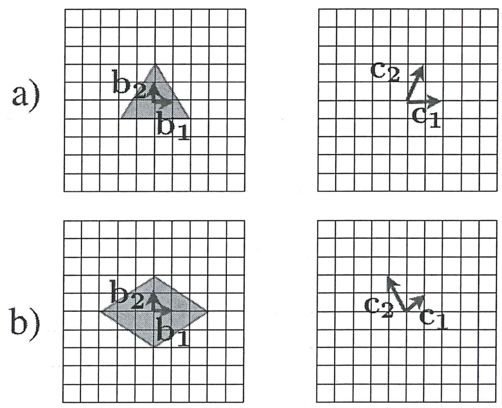
2. Betrakt undermengden $\mathcal{B} = \{1, t, \sin t\}$ av vektorrommet av reelle funksjoner og underrommet $V = \operatorname{Span}\mathcal{B}$. Hvorfor er $\mathcal{B} = \{1, t, \sin t\}$ en basis for V? Forklar.

3. Hva betyr det at en tranformasjon er *lineær*? La $D : V \to V$ være gitt ved dobbelderivering, der $D(f(t)) = f''(t)$. Vis at transformasjonen D er linær. Finn $[D]_\mathcal{B}$ relativt til basisen $\mathcal{B}$. Finnes det en basis som diagonaliserer transformasjonen?

Oppgave 4

1. Transformasjonene i a)-b), se bildet,[a] er definert slik at $T(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i$, for $i = 1, 2$. Skissér grafisk avbildningene av de geometriske figurene i a)-b). Finn transformasjonsmatrisene mht standard basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

2. Finn en symmetrisk matrise S slik at den kvadratiske formen $x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$ kan skrives om som $\mathbf{x}^T S\mathbf{x}$. Klassifisér formen. Finn en koordinateskifte slik at formen blir standard (dvs. uten kryssledd) i de nye koodinatene.



[a] Alle vektorene starter i origo og rutene har sider av lengde 1.

Antonella Zanna Munthe-Kaas **Hans Brodersen**