

**Bachelorarbeit**

**Topological Entropy of  
Formal Languages**

**Florian Starke**

October 5, 2017

Technische Universität Dresden  
Fakultät Mathematik  
Institut für Geometrie

Betreuender Hochschullehrer: Prof. Dr. Andreas Thom



## Contents

1	Martingale Technique	2
---	----------------------	---

# 1 Martingale Technique

**Definition 1.** A *martingale* is a family  $(f_i, \mathcal{F}_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$  such that

- $f_i$  is integrable for all  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,
- $f_i$  is  $\mathcal{F}_i$  measurable for all  $i \in \{0, \dots, n\}$ , and
- $f_i = \mathbb{E}[f_{i+1} | \mathcal{F}_i]$  for all  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .

**Lemma 2.**

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x) - \mathbb{E}(f)| \geq c\}) \leq 2 \exp\left(-\frac{c^2}{4 \sum_{i=1}^n \|d_i\|_\infty^2}\right)$$

$$\mu(\{|f - \mathbb{E}(f)| \geq c\}) \leq 2 \exp\left(-\frac{c^2}{4 \sum_{i=1}^n \|d_i\|_\infty^2}\right)$$

**Theorem 3.** If an mm-space  $(X, d, \mu)$  has length  $l$ , then the concentration function of  $X$  satisfies

$$\alpha_X(\varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{16l^2}\right).$$

**Theorem 4.** Let  $G$  be a compact group with a bi-invariant metric  $d$ , and let

$$\{e\} = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$$

be a chain of subgroups. Denote the diameter of  $G_i / G_{i-1}$  with respect to the factor metric by  $a_i$ . Then the concentration function of the mm-space  $(G, d, \mu)$ , where  $\mu$  is the normalized Haar measure, satisfies

$$\alpha_X(\varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{16 \sum_{i=1}^n a_i^2}\right).$$

**Theorem 5.** The normalized counting measure on the groups  $\mathrm{SL}_{2^n}(q)$  concentrates with respect to the rank-metric, i.e. for all  $r > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{\mathrm{SL}_{2^n}}(r) = 0.$$

## ERKLÄRUNG

Hiermit erkläre ich, dass ich die am heutigen Tag eingereichte Diplomarbeit zum Thema “Topological Entropy of Formal Languages” selbstständig erarbeitet, verfasst und Zitate kenntlich gemacht habe. Andere als die angegebenen Hilfsmittel wurden von mir nicht benutzt.

Datum

Unterschrift