Bewohntheit in $\lambda 2$

Florian Starke

October 11, 2015

Structure

luiuh

 $\lambda 2$ Typen

$$\mathsf{T}_{\lambda 2} = \mathsf{a} \mid \mathsf{t}_1 \to \mathsf{t}_2 \mid \forall \alpha. \mathsf{t}$$

asd

$$\lambda 2$$
 Typen

$$\mathsf{T}_{\lambda 2} = \mathsf{a} \mid \mathsf{t}_1 \to \mathsf{t}_2 \mid \forall \alpha. \mathsf{t}$$

 $\lambda 2$ Terme

$$\Lambda_{\mathsf{T}_{\lambda_2}} = x \mid M_1 M_2 \mid \lambda x : t.M \mid \Lambda \alpha.M \mid M t$$

Bewohntheitsproblem asd

Gegeben ein $\lambda 2$ Typ t.

Gibt es einen $\lambda 2$ Term M sodass $\emptyset \vdash M : t$?

Gegeben eine Basis Γ und ein $\lambda 2$ Typ t.

Gibt es einen $\lambda 2$ Term M sodass $\Gamma \vdash M : t$?

P-Formeln

asd

Eine prädikatenlogische Formel φ ist eine atomare Formel falls $\varphi = \text{false}$ oder $\varphi = P(a, b)$.

P-Formeln

asd

Eine prädikatenlogische Formel φ ist eine atomare Formel falls $\varphi = \mathbf{false}$ oder $\varphi = P(a,b)$. universelle Formel falls $\varphi = \forall \vec{\alpha} (A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n)$ und für alle $\alpha \in \mathsf{FV}(A_n) \cap \mathsf{GV}(\varphi)$ existiert ein i < n sodass $\alpha \in \mathsf{FV}(A_i)$.

```
Eine prädikatenlogische Formel \varphi ist eine
atomare Formel falls \varphi = false oder \varphi = P(a, b).
universelle Formel falls \varphi = \forall \vec{\alpha} (A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n) und für alle
                     \alpha \in FV(A_n) \cap GV(\varphi) existiert ein i < n sodass
                     \alpha \in FV(A_i).
existentielle Formel falls \varphi = \forall \vec{\alpha}(A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_{n-1} \to a_n)
                     \forall \beta (A_n \rightarrow \mathsf{false}) \rightarrow \mathsf{false}) \text{ und für alle}
                     \alpha \in (\mathsf{FV}(A_n) \cap \mathsf{GV}(\varphi)) \setminus \{\beta\} existiert ein i < n sodass
                     \alpha \in FV(A_i).
```

asd

 $\forall \alpha P(\alpha, b)$

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$

 $\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$

keine P-Formel

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$

 $\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$
 $\forall \beta (P(\beta, a) \rightarrow \mathsf{false}) \rightarrow \mathsf{false}$

keine P-Formel P-Formel

$$\begin{split} &\forall \alpha P(\alpha,b) \\ &\forall \alpha (Q(\alpha,\alpha) \to P(\alpha,b)) \\ &\forall \beta (P(\beta,a) \to \mathsf{false}) \to \mathsf{false} \\ &\forall \alpha (\forall \beta (P(\beta,\alpha) \to \mathsf{false}) \to \mathsf{false}) \end{split}$$

keine P-Formel

P-Formel

P-Formel

$\forall \alpha P(\alpha, b)$	keine P -Forme
$orall lpha(\mathcal{Q}(lpha,lpha) o P(lpha,b))$	P-Formel
orall eta(P(eta,a) o false) o false	P -Formel
$\forall \alpha (\forall \beta (P(\beta, \frac{\alpha}{\alpha}) \rightarrow false) \rightarrow false)$	keine P -Forme

$$\begin{array}{ll} \text{(Axiom)} & \Gamma, A \vdash A \\ \\ \text{(\rightarrow -Introduction)} & \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \\ \\ \text{(\rightarrow -Elimination)} & \frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \\ \\ \text{(\forall -Introduction)} & \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \forall \alpha B} \qquad \alpha \notin \mathsf{FV}(\Gamma) \\ \\ \text{(\forall -Elimination)} & \frac{\Gamma \vdash \forall \alpha B}{\Gamma \vdash B \ [\alpha := b]} \qquad b \in \mathcal{V}_P \\ \end{array}$$

```
(Axiom)
                                             \Gamma, x: t \vdash x: t
                                              \frac{\Gamma, x : t_1 \vdash M : t_2}{\Gamma \vdash \lambda x : t_1 \cdot M : t_1 \to t_2}
(\lambda-Introduction)
                                              \Gamma \vdash M_1 : t_1 \rightarrow t_2 \quad \Gamma \vdash M_2 : t_1
(\lambda-Elimination)
                                                                  \overline{\Gamma \vdash M_1 M_2} : t_2
                                              \frac{\Gamma \vdash M : t}{\Gamma \vdash \Lambda \alpha . M : \forall \alpha . t}
(∀-Introduction)
                                                                                                                                 \alpha \notin \mathsf{FV}(\Gamma)
                                              \frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha.t}{\Gamma \vdash M t' : t \left[\alpha := t'\right]}
(∀-Elimination)
```

Beweis Konstruktion

 $\text{CONS} \leq \text{INHAB}$

Beweis Konstruktion

CONS < INHAB

Zu einer gegeben P-Basis Γ konstruieren wir ein $\lambda 2$ -Basis $\overline{\Gamma}$ sodass

 $\Gamma \vdash \textit{false} \quad \textit{gdw.} \quad \textit{Es existiert ein } \lambda 2 \; \textit{Term M sodass} \; \overline{\Gamma} \vdash \textit{M} : \textit{false}$

Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \mathsf{false} & \text{if } A = \mathsf{false} \\ (\alpha \to p_1) \to (\beta \to p_2) \to p & \text{if } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \text{false} & \text{if } A = \text{false} \\ P_{\alpha\beta} & \text{if } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \text{false} & \text{if } A = \text{false} \\ P_{\alpha\beta} & \text{if } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

universelle Formel:

$$\overline{A}:=\forall \vec{\alpha}(\overline{A_1} \to \overline{A_2} \to \cdots \to \overline{A_n})$$

Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \text{false} & \text{if } A = \text{false} \\ P_{\alpha\beta} & \text{if } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

universelle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \to \overline{A_2} \to \cdots \to \overline{A_n})$$

existentielle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \to \cdots \to \forall \beta (\overline{A_n} \to \mathsf{false}) \to \mathsf{false})$$

Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \text{false} & \text{if } A = \text{false} \\ P_{\alpha\beta} & \text{if } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

universelle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \to \overline{A_2} \to \cdots \to \overline{A_n})$$

existentielle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \to \cdots \to \forall \beta (\overline{A_n} \to \mathsf{false}) \to \mathsf{false})$$

Basis:

$$\overline{\Gamma} := \{ (x_A : \overline{A}) \mid A \in \Gamma \}$$

 $\Gamma \vdash false \Rightarrow Es \ existiert \ ein \ \lambda 2 \ Term \ M \ sodass \ \overline{\Gamma} \vdash M : false$

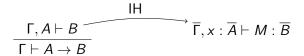
 $\Gamma \vdash \mathbf{false} \Rightarrow \mathsf{Es} \ \mathsf{existiert} \ \mathsf{ein} \ \boldsymbol{\lambda 2} \ \mathsf{Term} \ \mathsf{M} \ \mathsf{sodass} \ \overline{\Gamma} \vdash \mathsf{M} : \mathbf{false}$

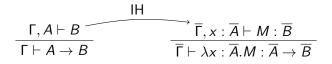
 $\Gamma \vdash A \implies Es \ existiert \ ein \ \lambda 2 \ Term \ M \ sodass \ \overline{\Gamma} \vdash M : \overline{A}$

 Γ , $A \vdash A$

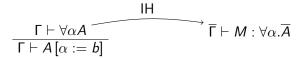
$$\Gamma, A \vdash A \xrightarrow{\mathsf{Konstruktion}} \overline{\Gamma}, x : \overline{A} \vdash x : \overline{A}$$

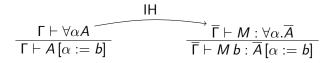
$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$





$$\frac{\Gamma \vdash \forall \alpha A}{\Gamma \vdash A \left[\alpha := b\right]}$$





 $\Gamma \vdash$ **false** \Leftarrow **Es** existiert ein $\lambda 2$ **Term** M sodass $\overline{\Gamma} \vdash M$: **false**

Beweis asd

$$\Gamma \vdash \textit{false} \iff \textit{Es existiert ein } \lambda 2 \; \textit{Term M sodass } \overline{\Gamma} \vdash \textit{M} : \textit{false}$$

$$\overline{\Gamma} \vdash M : P_{st} \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma \vdash P(s,t)$$
 $\overline{\Gamma} \vdash M : false \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma \vdash false$

$$\overline{\Gamma} \vdash M : P_{st} \Rightarrow \Gamma \vdash P(s, t)$$

$$M = x$$

$$M = M_1 M_2$$

$$M = \lambda x : t.M'$$

$$M = \Lambda \gamma.M'$$

$$M = M' t'$$

$$\overline{\Gamma} \vdash M : P_{st} \Rightarrow \Gamma \vdash P(s, t)$$

$$M = x$$

$$M = M_1 M_2$$

$$M = \lambda x : t.M'$$

$$M = \Lambda \gamma.M'$$

$$M = M' t'$$

$$M=M_1M_2$$

$$M=M_1M_2$$

Alle wohlgetypten $\lambda 2$ Terme sind stark normalisierend.

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

$$A = \forall \vec{\alpha} (P^1(\alpha_1, \beta_1) \to \cdots \to P^n(\alpha_n, \beta_n) \to P(\alpha, \beta))$$

$$M = x_A \overline{t}_1 \dots \overline{t}_m N_1 \dots N_{n-1} M_2$$

$$A = \forall \vec{\alpha} (P^1(\alpha_1, \beta_1) \to \cdots \to P^n(\alpha_n, \beta_n) \to P(\alpha, \beta))$$

$$M = x_A \vec{t} N_1 \dots N_{n-1} N_n$$

$$A = \forall \vec{\alpha} (P^1(\alpha_1, \beta_1) \to \cdots \to P^n(\alpha_n, \beta_n) \to P(\alpha, \beta))$$

$$\frac{\overline{\Gamma} \vdash x_{A} : \forall \vec{\alpha} (P_{\alpha_{1}\beta_{1}}^{1} \to \cdots \to P_{\alpha_{n}\beta_{n}}^{n} \to P_{\alpha\beta})}{\overline{\Gamma} \vdash x_{A}\vec{t} : P_{s_{1}t_{1}}^{1} \to \cdots \to P_{s_{n}t_{n}}^{n} \to P_{st}} \qquad \overline{\Gamma} \vdash N_{1} : P_{s_{1}t_{1}}^{1}}$$

$$\vdots$$

$$\overline{\Gamma} \vdash x_{A}\vec{t} N_{1} \dots N_{n-1} : P_{s_{n}t_{n}}^{n} \to P_{st}} \qquad \overline{\Gamma} \vdash N_{n} : P_{s_{n}t_{n}}^{n}$$

$$\overline{\Gamma} \vdash (x_{A}\vec{t} N_{1} \dots N_{n-1}) N_{n} : P_{st}$$

$\frac{\overline{\Gamma} \vdash x_{A} : \forall \vec{\alpha} (P_{\alpha_{1}\beta_{1}}^{1} \to \cdots \to P_{\alpha_{n}\beta_{n}}^{n} \to P_{\alpha\beta})}{\overline{\Gamma} \vdash x_{A}\vec{t} : P_{s_{1}t_{1}}^{1} \to \cdots \to P_{s_{n}t_{n}}^{n} \to P_{st}} \qquad \overline{\Gamma} \vdash N_{1} : P_{s_{1}t_{1}}^{1}}$ \vdots $\overline{\Gamma} \vdash x_{A}\vec{t} N_{1} \dots N_{n-1} : P_{s_{n}t_{n}}^{n} \to P_{st}} \qquad \overline{\Gamma} \vdash N_{n} : P_{s_{n}t_{n}}^{n}$ $\overline{\Gamma} \vdash (x_{A}\vec{t} N_{1} \dots N_{n-1}) N_{n} : P_{st}$ $\frac{H}{\Gamma} \vdash (x_{A}\vec{t} N_{1} \dots N_{n-1}) N_{n} : P_{st}$

Konstruktion

$$\Gamma \vdash \forall \vec{\alpha}(P^1(\alpha_1, \beta_1) \to \cdots \to P^n(\alpha_n, \beta_n) \to P(\alpha, \beta))$$

$$\Gamma \vdash P^1(s_1, t_1) \xrightarrow{IH}$$

$$\Gamma \vdash P^n(s_n, t_n)$$

asd

$\overline{\Gamma} \vdash M : \mathit{false} \Rightarrow \Gamma \vdash \mathit{false}$

$$M = x$$

$$M = M_1 M_2$$

$$M = \lambda x : t.M'$$

$$M = \Lambda \gamma.M'$$

$$M = M' t'$$

$$\overline{\Gamma} \vdash M : \mathit{false} \Rightarrow \Gamma \vdash \mathit{false}$$

$$M = x$$

$$M = M_1 M_2$$

$$M = \lambda x : t.M'$$

$$M = \Lambda \gamma.M'$$

$$M = M' t'$$

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

$$\begin{split} & A = \forall \vec{\alpha}(P^1(\alpha_1,\beta_1) \to \cdots \to P^n(\alpha_n,\beta_n) \to \mathsf{false}) \\ & A = \forall \vec{\alpha}(P^1(\alpha_1,\beta_1) \to \cdots \to \forall \beta(P^n(\alpha_n,\beta_n) \to \mathsf{false}) \to \mathsf{false}) \end{split}$$

Beweis Konstruktion

 $\Gamma \vdash \textit{false} \quad \textit{gdw.} \quad \textit{Es existiert ein } \lambda 2 \; \textit{Term M sodass} \; \overline{\Gamma} \vdash \textit{M} : \textit{false}$

Beweis Konstruktion

 $\Gamma \vdash \textit{false} \quad \textit{gdw}. \quad \textit{Es existiert ein } \lambda 2 \; \textit{Term M sodass} \; \overline{\Gamma} \vdash \textit{M} : \textit{false}$

 $\text{CONS} \leq \text{INHAB}$

Beweis Konstruktion

 $\Gamma \vdash \textit{false} \quad \textit{gdw.} \quad \textit{Es existiert ein } \lambda 2 \ \textit{Term M sodass} \ \overline{\Gamma} \vdash \textit{M} : \textit{false}$

CONS ≤ **INHAB**

INHAB ist unentscheidbar.