

# Bewohntheit in $\lambda 2$

Florian Starke

October 15, 2015

# Struktur

$\lambda^2$

System **P**

Beweis

# Allgemein

## Typen und Terme

$\lambda x.x$

# Allgemein

## Typen und Terme

$\lambda x.x$

$\forall a.a \rightarrow a$

# Allgemein

## Typen und Terme

$\lambda x.x$

$a \rightarrow a$

# Allgemein

## Typen und Terme

$$\lambda x.x$$

$$a \rightarrow a$$

$$\forall b. a \rightarrow b \rightarrow a$$

# Allgemein

## Typen und Terme

$\lambda x.x$

$\lambda x.\lambda y.x$

$a \rightarrow a$

$\forall b.a \rightarrow b \rightarrow a$

# Allgemein

## Typen und Terme

$\lambda x : a. x$

$\lambda x. \lambda y. x$

$a \rightarrow a$

$\forall b. a \rightarrow b \rightarrow a$



# Allgemein

## Typen und Terme

$\Lambda a. \lambda x : a. x$

$\lambda x. \lambda y. x$

$\forall a. a \rightarrow a$

$\forall b. a \rightarrow b \rightarrow a$

# Allgemein

## Typen und Terme

$$\Lambda a. \lambda x : a. x$$

$$\Lambda b. \lambda x : a. \lambda y : b. x$$

$$\forall a. a \rightarrow a$$

$$\forall b. a \rightarrow b \rightarrow a$$

# $\lambda^2$

## Typen und Terme

$$a, \alpha \in \mathcal{V}_T; t_1, t_2, t \in T_{\lambda^2}$$

### $\lambda^2$ Typen

$$T_{\lambda^2} = a \mid t_1 \rightarrow t_2 \mid \forall \alpha. t$$

# $\lambda 2$

## Typen und Terme

$$a, \alpha \in \mathcal{V}_T; t_1, t_2, t \in T_{\lambda 2}; x \in \mathcal{V}_V; M_1, M_2, M \in \Lambda_{T_{\lambda 2}}$$

### $\lambda 2$ Typen

$$T_{\lambda 2} = a \mid t_1 \rightarrow t_2 \mid \forall \alpha. t$$

### $\lambda 2$ Terme

$$\Lambda_{T_{\lambda 2}} = x \mid M_1 M_2 \mid \lambda x : t. M \mid \Lambda \alpha. M \mid M t$$

(Axiom)  $\Gamma, x : t \vdash x : t$

( $\lambda$ -Introduction) 
$$\frac{\Gamma, x : t_1 \vdash M : t_2}{\Gamma \vdash \lambda x : t_1. M : t_1 \rightarrow t_2}$$

( $\lambda$ -Elimination) 
$$\frac{\Gamma \vdash M_1 : t_1 \rightarrow t_2 \quad \Gamma \vdash M_2 : t_1}{\Gamma \vdash M_1 M_2 : t_2}$$

( $\forall$ -Introduction) 
$$\frac{\Gamma \vdash M : t}{\Gamma \vdash \Lambda \alpha. M : \forall \alpha. t} \quad \alpha \notin \text{FV}(\Gamma)$$

( $\forall$ -Elimination) 
$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha. t}{\Gamma \vdash M t' : t [\alpha := t']}$$

Typprüfungsproblem

Typisierbarkeitsproblem

Bewohntheitsproblem

Typprüfungsproblem

Typisierbarkeitsproblem

**Bewohntheitsproblem**

# $\lambda 2$

## Bewohntheitsproblem **INHAB**

Gegeben eine Basis  $\Gamma$  und ein  $\lambda 2$  Typ  $t$ .

Gibt es einen  $\lambda 2$  Term  $M$  sodass  $\Gamma \vdash M : t$ ?



# System P

## Formeln

Eine prädikatenlogische Formel  $\varphi$  ist eine  
atomare Formel falls  $\varphi = \mathbf{false}$  oder  $\varphi = P(a, b)$ .

# System **P**

## Formeln

Eine prädikatenlogische Formel  $\varphi$  ist eine

- atomare Formel** falls  $\varphi = \mathbf{false}$  oder  $\varphi = P(a, b)$ .
- universelle Formel** falls  $\varphi = \forall \vec{\alpha}(A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n)$  und für alle  $\alpha \in \text{FV}(A_n) \cap \text{GV}(\varphi)$  existiert ein  $i < n$  sodass  $\alpha \in \text{FV}(A_i)$ .

# System P

## Formeln

Eine prädikatenlogische Formel  $\varphi$  ist eine

**atomare Formel** falls  $\varphi = \mathbf{false}$  oder  $\varphi = P(a, b)$ .

**universelle Formel** falls  $\varphi = \forall \vec{\alpha}(A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n)$  und für alle  $\alpha \in \text{FV}(A_n) \cap \text{GV}(\varphi)$  existiert ein  $i < n$  sodass  $\alpha \in \text{FV}(A_i)$ .

**existentielle Formel** falls  $\varphi = \forall \vec{\alpha}(A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow \forall \beta(A_n \rightarrow \mathbf{false}) \rightarrow \mathbf{false})$  und für alle  $\alpha \in (\text{FV}(A_n) \cap \text{GV}(\varphi)) \setminus \{\beta\}$  existiert ein  $i < n$  sodass  $\alpha \in \text{FV}(A_i)$ .

# System P

## Formeln Beispiele

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$

# System **P**

## Formeln Beispiele

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$

$$\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$$

keine **P**-Formel

# System **P**

## Formeln Beispiele

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$

$$\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$$

$$\forall \beta (P(\beta, a) \rightarrow \mathbf{false}) \rightarrow \mathbf{false}$$

keine **P**-Formel

**P**-Formel

# System P

## Formeln Beispiele

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$

keine P-Formel

$$\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$$

P-Formel

$$\forall \beta (P(\beta, a) \rightarrow \text{false}) \rightarrow \text{false}$$

P-Formel

$$\forall \alpha (\forall \beta (P(\beta, \alpha) \rightarrow \text{false}) \rightarrow \text{false})$$

# System P

## Formeln Beispiele

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$

keine P-Formel

$$\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$$

P-Formel

$$\forall \beta (P(\beta, a) \rightarrow \text{false}) \rightarrow \text{false}$$

P-Formel

$$\forall \alpha (\forall \beta (P(\beta, \alpha) \rightarrow \text{false}) \rightarrow \text{false})$$

keine P-Formel



# System P

## Regeln

(Axiom)

$$\Gamma, A \vdash A$$

( $\rightarrow$ -Introduction)

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

( $\rightarrow$ -Elimination)

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

( $\forall$ -Introduction)

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \forall \alpha B}$$

$$\alpha \notin \text{FV}(\Gamma)$$

( $\forall$ -Elimination)

$$\frac{\Gamma \vdash \forall \alpha B}{\Gamma \vdash B[\alpha := b]}$$

$$b \in \mathcal{V}_P$$

# System **P**

Konsistenzproblem **CONS**

Gegeben eine Basis  $\Gamma$ .

Gilt  $\Gamma \vdash \mathbf{false}$  nicht?

# System **P**

## Konsistenzproblem **CONS**

Gegeben eine Basis  $\Gamma$ .

Gilt  $\Gamma \vdash \mathbf{false}$  nicht?

**CONS** ist unentscheidbar.

$$\text{CONS} \leq \text{INHAB}$$

### CONS $\leq$ INHAB

Zu einer gegebenen **P**-Basis  $\Gamma$  konstruieren wir ein  **$\lambda 2$** -Basis  $\bar{\Gamma}$  sodass

$\Gamma \vdash \mathbf{false}$  gdw. Es existiert ein  **$\lambda 2$**  Term  $M$ , sodass  $\bar{\Gamma} \vdash M : \mathbf{false}$ .

# Beweis

## Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \mathbf{false} & \text{falls } A = \mathbf{false} \\ (\alpha \rightarrow p_1) \rightarrow (\beta \rightarrow p_2) \rightarrow p & \text{falls } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

# Beweis

## Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \mathbf{false} & \text{falls } A = \mathbf{false} \\ P_{\alpha\beta} & \text{falls } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

# Beweis

## Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \mathbf{false} & \text{falls } A = \mathbf{false} \\ P_{\alpha\beta} & \text{falls } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

universelle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \rightarrow \overline{A_2} \rightarrow \cdots \rightarrow \overline{A_n})$$



# Beweis

## Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \mathbf{false} & \text{falls } A = \mathbf{false} \\ P_{\alpha\beta} & \text{falls } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

universelle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \rightarrow \overline{A_2} \rightarrow \cdots \rightarrow \overline{A_n})$$

existentielle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \rightarrow \cdots \rightarrow \forall \beta (\overline{A_n} \rightarrow \mathbf{false}) \rightarrow \mathbf{false})$$

# Beweis

## Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \mathbf{false} & \text{falls } A = \mathbf{false} \\ P_{\alpha\beta} & \text{falls } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

universelle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \rightarrow \overline{A_2} \rightarrow \dots \rightarrow \overline{A_n})$$

existentielle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \rightarrow \dots \rightarrow \forall \beta (\overline{A_n} \rightarrow \mathbf{false}) \rightarrow \mathbf{false})$$

Basis:

$$\overline{\Gamma} := \{(x_A : \overline{A}) \mid A \in \Gamma\}$$

# Beweis

$\Rightarrow$ -Richtung

$\Gamma \vdash \mathbf{false} \Rightarrow$  Es existiert ein  $\lambda 2$  Term  $M$ , sodass  $\bar{\Gamma} \vdash M : \mathbf{false}$ .

# Beweis

$\Rightarrow$ -Richtung

$\Gamma \vdash \mathbf{false} \Rightarrow$  *Es existiert ein  $\lambda 2$  Term  $M$ , sodass  $\bar{\Gamma} \vdash M : \mathbf{false}$ .*

$\Gamma \vdash A \Rightarrow$  *Es existiert ein  $\lambda 2$  Term  $M$ , sodass  $\bar{\Gamma} \vdash M : \bar{A}$ .*

# Beweis

$\Rightarrow$ -Richtung

$$\Gamma, A \vdash A$$

# Beweis

$\Rightarrow$ -Richtung

$$\Gamma, A \vdash A \xrightarrow{\text{Konstruktion}} \bar{\Gamma}, x : \bar{A} \vdash x : \bar{A}$$

# Beweis

$\Rightarrow$ -Richtung

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

# Beweis

$\Rightarrow$ -Richtung

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \quad \text{IH} \rightarrow \bar{\Gamma}, x : \bar{A} \vdash M : \bar{B}$$



# Beweis

$\Rightarrow$ -Richtung

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \quad \text{IH} \quad \frac{\overline{\Gamma}, x : \overline{A} \vdash M : \overline{B}}{\overline{\Gamma} \vdash \lambda x : \overline{A}. M : \overline{A} \rightarrow \overline{B}}$$

# Beweis

$\Rightarrow$ -Richtung

$$\frac{\Gamma \vdash \forall \alpha A}{\Gamma \vdash A[\alpha := b]}$$

# Beweis

$\Rightarrow$ -Richtung

$$\frac{\Gamma \vdash \forall \alpha A}{\Gamma \vdash A[\alpha := b]} \xrightarrow{\text{IH}} \bar{\Gamma} \vdash M : \forall \alpha. \bar{A}$$

# Beweis

$\Rightarrow$ -Richtung

$$\frac{\Gamma \vdash \forall \alpha A}{\Gamma \vdash A[\alpha := b]} \xrightarrow{\text{IH}} \frac{\bar{\Gamma} \vdash M : \forall \alpha. \bar{A}}{\bar{\Gamma} \vdash M b : \bar{A}[\alpha := b]}$$

# Beweis

$\Leftarrow$ -Richtung

$\Gamma \vdash \mathbf{false} \Leftarrow$  Es existiert ein  $\lambda 2$  Term  $M$ , sodass  $\bar{\Gamma} \vdash M : \mathbf{false}$ .

# Beweis

←-Richtung

$\Gamma \vdash \mathbf{false} \Leftarrow$  *Es existiert ein  $\lambda 2$  Term  $M$ , sodass  $\bar{\Gamma} \vdash M : \mathbf{false}$ .*

$$\begin{array}{ll} \bar{\Gamma} \vdash M : P_{st} & \Rightarrow \quad \Gamma \vdash P(s, t) \\ \bar{\Gamma} \vdash M : \mathbf{false} & \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \mathbf{false} \end{array}$$

# Beweis

←-Richtung

$$\bar{\Gamma} \vdash M : P_{st} \Rightarrow \Gamma \vdash P(s, t)$$

$$M = x$$

$$M = M_1 M_2$$

$$M = \lambda x : t. M'$$

$$M = \Lambda \gamma. M'$$

$$M = M' t'$$

# Beweis

←-Richtung

$$\bar{\Gamma} \vdash M : P_{st} \Rightarrow \Gamma \vdash P(s, t)$$

$$M = x$$

$$\boxed{M = M_1 M_2}$$

$$M = \lambda x : t. M'$$

$$M = \Lambda \gamma. M'$$

$$M = M' t'$$



# Beweis

←-Richtung

$$M = M_1 M_2$$

# Beweis

←-Richtung

$$M = M_1 M_2$$

Alle wohlgetypten  $\lambda 2$  Terme sind stark normalisierend.

# Beweis

←-Richtung

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

# Beweis

←-Richtung

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

$$A = \forall \vec{\alpha} (P^1(\alpha_1, \beta_1) \rightarrow \dots \rightarrow P^n(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow P(\alpha, \beta))$$

# Beweis

←-Richtung

$$M = x_A \bar{t}_1 \dots \bar{t}_m N_1 \dots N_{n-1} M_2$$

$$A = \forall \vec{\alpha} (P^1(\alpha_1, \beta_1) \rightarrow \dots \rightarrow P^n(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow P(\alpha, \beta))$$

# Beweis

←-Richtung

$$M = x_A \vec{t} N_1 \dots N_{n-1} N_n$$

$$A = \forall \vec{\alpha} (P^1(\alpha_1, \beta_1) \rightarrow \dots \rightarrow P^n(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow P(\alpha, \beta))$$

# Beweis

←-Richtung

$$\frac{\overline{\Gamma} \vdash x_A : \forall \vec{\alpha} (P_{\alpha_1 \beta_1}^1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{\alpha_n \beta_n}^n \rightarrow P_{\alpha \beta})}{\overline{\Gamma} \vdash x_A \vec{t} : P_{s_1 t_1}^1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{s_n t_n}^n \rightarrow P_{st}} \quad \overline{\Gamma} \vdash N_1 : P_{s_1 t_1}^1$$
$$\vdots$$
$$\frac{\overline{\Gamma} \vdash x_A \vec{t} N_1 \dots N_{n-1} : P_{s_n t_n}^n \rightarrow P_{st} \quad \overline{\Gamma} \vdash N_n : P_{s_n t_n}^n}{\overline{\Gamma} \vdash (x_A \vec{t} N_1 \dots N_{n-1}) N_n : P_{st}}$$

# Beweis

←-Richtung

$$\frac{\frac{\frac{\bar{\Gamma} \vdash x_A : \forall \vec{\alpha} (P_{\alpha_1 \beta_1}^1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{\alpha_n \beta_n}^n \rightarrow P_{\alpha \beta})}{\bar{\Gamma} \vdash x_A \vec{t} : P_{s_1 t_1}^1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{s_n t_n}^n \rightarrow P_{st}} \quad \bar{\Gamma} \vdash N_1 : P_{s_1 t_1}^1}{\vdots} \quad \text{Konstruktion} \quad \text{IH}}{\frac{\bar{\Gamma} \vdash x_A \vec{t} N_1 \dots N_{n-1} : P_{s_n t_n}^n \rightarrow P_{st} \quad \bar{\Gamma} \vdash N_n : P_{s_n t_n}^n}{\bar{\Gamma} \vdash (x_A \vec{t} N_1 \dots N_{n-1}) N_n : P_{st}}} \quad \text{IH}$$



# Beweis

←-Richtung

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash \forall \vec{\alpha} (P^1(\alpha_1, \beta_1) \rightarrow \cdots \rightarrow P^n(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow P(\alpha, \beta)) \\ \Gamma \vdash P^1(s_1, t_1) \xleftarrow{IH} \\ \Gamma \vdash P^n(s_n, t_n) \xleftarrow{IH} \end{array} \xleftarrow{\text{Konstruktion}}$$

# Beweis

←-Richtung

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash \forall \vec{\alpha} (P^1(\alpha_1, \beta_1) \rightarrow \cdots \rightarrow P^n(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow P(\alpha, \beta))}{\Gamma \vdash P^1(s_1, t_1) \rightarrow \cdots \rightarrow P^n(s_n, t_n) \rightarrow P(s, t)} \quad \Gamma \vdash P^1(s_1, t_1) \xleftarrow{IH}}{\vdots} \quad \Gamma \vdash P^n(s_n, t_n) \xleftarrow{IH}}{\Gamma \vdash P(s, t)}$$

*Konstruktion*

# Beweis

←-Richtung

$$\bar{\Gamma} \vdash M : \mathbf{false} \Rightarrow \Gamma \vdash \mathbf{false}$$

$$M = x$$

$$M = M_1 M_2$$

$$M = \lambda x : t. M'$$

$$M = \Lambda \gamma. M'$$

$$M = M' t'$$

# Beweis

←-Richtung

$$\bar{\Gamma} \vdash M : \mathbf{false} \Rightarrow \Gamma \vdash \mathbf{false}$$

$$M = x$$

$$\boxed{M = M_1 M_2}$$

$$M = \lambda x : t. M'$$

$$M = \Lambda \gamma. M'$$

$$M = M' t'$$

# Beweis

←-Richtung

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

# Beweis

←-Richtung

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

$$A = \forall \vec{\alpha} (P^1(\alpha_1, \beta_1) \rightarrow \dots \rightarrow P^n(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow \mathbf{false})$$

$$A = \forall \vec{\alpha} (P^1(\alpha_1, \beta_1) \rightarrow \dots \rightarrow \forall \beta (P^n(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow \mathbf{false}) \rightarrow \mathbf{false})$$

# Beweis

## Konklusion

$\Gamma \vdash \textit{false}$  gdw. Es existiert ein  $\lambda 2$  Term  $M$ , sodass  $\bar{\Gamma} \vdash M : \textit{false}$ .

# Beweis

## Konklusion

$\Gamma \vdash \textit{false}$  gdw. Es existiert ein  $\lambda 2$  Term  $M$ , sodass  $\bar{\Gamma} \vdash M : \textit{false}$ .

$\text{CONS} \leq \text{INHAB}$



$\Gamma \vdash \textit{false}$  gdw. Es existiert ein  $\lambda 2$  Term  $M$ , sodass  $\bar{\Gamma} \vdash M : \textit{false}$ .

**CONS  $\leq$  INHAB**

**INHAB** ist unentscheidbar.

# Literatur

- [1] H.P. Barendregt, Lambda calculi with types, Handbook of Logic in Computer Science, Volume II, 1993.
- [2] P. Urzyczyn, Inhabitation in Typed Lambda-Calculi (A Syntactic Approach), Typed Lambda Calculi and Applications, 1997.