Bewohntheit in $\lambda 2$

Florian Starke

October 11, 2015

Struktur

$\boldsymbol{\lambda 2}$

System **P**

Beweis

$\lambda 2$ Typen

$$\mathsf{T}_{\lambda 2} = a \mid t_1 \to t_2 \mid \forall \alpha . t$$

$\boldsymbol{\lambda}$2 Typen

$$\mathsf{T}_{\lambda 2} = a \mid t_1 \to t_2 \mid \forall \alpha . t$$

$\boldsymbol{\lambda}$2 Terme

$$\Lambda_{\mathsf{T}_{\lambda 2}} = x \mid M_1 M_2 \mid \lambda x : t . M \mid \Lambda \alpha . M \mid M\, t$$

$\lambda 2$

Regeln

(Axiom)	$\Gamma, x : t \vdash x : t$	
(λ-Introduction)	$\dfrac{\Gamma, x : t_1 \vdash M : t_2}{\Gamma \vdash \lambda x : t_1 . M : t_1 \to t_2}$	
(λ-Elimination)	$\dfrac{\Gamma \vdash M_1 : t_1 \to t_2 \quad \Gamma \vdash M_2 : t_1}{\Gamma \vdash M_1 M_2 : t_2}$	
($\forall$-Introduction)	$\dfrac{\Gamma \vdash M : t}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha . M : \forall\alpha . t}$	$\alpha \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$
($\forall$-Elimination)	$\dfrac{\Gamma \vdash M : \forall\alpha . t}{\Gamma \vdash M\, t' : t\,[\alpha := t']}$	

Gegeben ein $\boldsymbol{\lambda 2}$ Typ t.

Gibt es einen $\boldsymbol{\lambda 2}$ Term M sodass $\emptyset \vdash M : t$?

$\lambda 2$

Bewohntheitsproblem **INHAB**

Gegeben eine Basis Γ und ein $\boldsymbol{\lambda 2}$ Typ t.

Gibt es einen $\boldsymbol{\lambda 2}$ Term M sodass $\Gamma \vdash M : t$?

System **P**

Formeln

Eine prädikatenlogische Formel φ ist eine

atomare Formel falls $\varphi = \textbf{false}$ oder $\varphi = P(a, b)$.

Eine prädikatenlogische Formel φ ist eine

atomare Formel falls $\varphi = \textbf{false}$ oder $\varphi = P(a, b)$.

universelle Formel falls $\varphi = \forall\vec{\alpha}(A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n)$ und für alle $\alpha \in \mathsf{FV}(A_n) \cap \mathsf{GV}(\varphi)$ existiert ein $i < n$ sodass $\alpha \in \mathsf{FV}(A_i)$.

System P

Formeln

Eine prädikatenlogische Formel φ ist eine

atomare Formel falls $\varphi = \textbf{false}$ oder $\varphi = P(a, b)$.

universelle Formel falls $\varphi = \forall\vec{\alpha}(A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n)$ und für alle $\alpha \in \mathrm{FV}(A_n) \cap \mathrm{GV}(\varphi)$ existiert ein $i < n$ sodass $\alpha \in \mathrm{FV}(A_i)$.

existentielle Formel falls $\varphi = \forall\vec{\alpha}(A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_{n-1} \to \forall\beta(A_n \to \textbf{false}) \to \textbf{false})$ und für alle $\alpha \in (\mathrm{FV}(A_n) \cap \mathrm{GV}(\varphi)) \setminus \{\beta\}$ existiert ein $i < n$ sodass $\alpha \in \mathrm{FV}(A_i)$.

System **P**

Formeln Beispiele

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$

System **P**

Formeln Beispiele

$\forall \alpha P(\alpha, b)$ keine **P**-Formel

$\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$

System **P**

Formeln Beispiele

$\forall \alpha P(\alpha, b)$	keine **P**-Formel
$\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$	**P**-Formel
$\forall \beta (P(\beta, a) \rightarrow \textbf{false}) \rightarrow \textbf{false}$	

System **P**

Formeln Beispiele

$\forall \alpha P(\alpha, b)$	keine **P**-Formel
$\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \to P(\alpha, b))$	**P**-Formel
$\forall \beta (P(\beta, a) \to \textbf{false}) \to \textbf{false}$	**P**-Formel
$\forall \alpha (\forall \beta (P(\beta, \alpha) \to \textbf{false}) \to \textbf{false})$	

System **P**

Formeln Beispiele

$\forall \alpha P(\alpha, b)$	keine **P**-Formel
$\forall \alpha(Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$	**P**-Formel
$\forall \beta(P(\beta, a) \rightarrow \textbf{false}) \rightarrow \textbf{false}$	**P**-Formel
$\forall \alpha(\forall \beta(P(\beta, \alpha) \rightarrow \textbf{false}) \rightarrow \textbf{false})$	keine **P**-Formel

System P

Regeln

(Axiom)	$\Gamma, A \vdash A$	
($\rightarrow$ -Introduction)	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$	
($\rightarrow$ -Elimination)	$\dfrac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	
($\forall$-Introduction)	$\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \forall \alpha B}$	$\alpha \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$
($\forall$-Elimination)	$\dfrac{\Gamma \vdash \forall \alpha B}{\Gamma \vdash B\,[\alpha := b]}$	$b \in \mathcal{V}_P$

Gegeben eine Basis Γ.

$$\text{Gilt } \Gamma \vdash \textbf{false} \text{ nicht?}$$

Beweis

Konstruktion

$$\mathsf{CONS} \leq \mathsf{INHAB}$$

CONS $\leq$ INHAB

Zu einer gegeben $\mathbf{P}$-Basis Γ konstruieren wir ein $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{2}$-Basis $\overline{\Gamma}$ sodass

$\Gamma \vdash$ ***false*** *gdw.* *Es existiert ein* $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{2}$ *Term* M *sodass* $\overline{\Gamma} \vdash M :$ ***false***

Beweis

Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \mathbf{false} & \text{if } A = \mathbf{false} \\ (\alpha \to p_1) \to (\beta \to p_2) \to p & \text{if } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

Beweis

Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \textbf{false} & \text{if } A = \textbf{false} \\ P_{\alpha\beta} & \text{if } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

Beweis

Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \textbf{false} & \text{if } A = \textbf{false} \\ P_{\alpha\beta} & \text{if } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

universelle Formel:

$$\overline{A} := \forall\vec{\alpha}(\overline{A_1} \to \overline{A_2} \to \cdots \to \overline{A_n})$$

Beweis

Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \mathbf{false} & \text{if } A = \mathbf{false} \\ P_{\alpha\beta} & \text{if } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

universelle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha}(\overline{A_1} \to \overline{A_2} \to \cdots \to \overline{A_n})$$

existentielle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha}(\overline{A_1} \to \cdots \to \forall \beta(\overline{A_n} \to \mathbf{false}) \to \mathbf{false})$$

Beweis

Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \textbf{false} & \text{if } A = \textbf{false} \\ P_{\alpha\beta} & \text{if } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

universelle Formel:

$$\overline{A} := \forall\vec{\alpha}(\overline{A_1} \to \overline{A_2} \to \cdots \to \overline{A_n})$$

existentielle Formel:

$$\overline{A} := \forall\vec{\alpha}(\overline{A_1} \to \cdots \to \forall\beta(\overline{A_n} \to \textbf{false}) \to \textbf{false})$$

Basis:

$$\overline{\Gamma} := \{(x_A : \overline{A}) \mid A \in \Gamma\}$$

Beweis

⇒-Richtung

$$\Gamma \vdash \boldsymbol{false} \quad \Rightarrow \quad \textit{Es existiert ein } \boldsymbol{\lambda 2} \textit{ Term } M \textit{ sodass } \overline{\Gamma} \vdash M : \boldsymbol{false}$$

Beweis

⇒-Richtung

$$\Gamma \vdash \boldsymbol{false} \quad \Rightarrow \quad \textit{Es existiert ein } \boldsymbol{\lambda 2} \textit{ Term } M \textit{ sodass } \overline{\Gamma} \vdash M : \boldsymbol{false}$$

$$\Gamma \vdash A \quad \Rightarrow \quad \textit{Es existiert ein } \boldsymbol{\lambda 2} \textit{ Term } M \textit{ sodass } \overline{\Gamma} \vdash M : \overline{A}$$

Beweis

$\Rightarrow$-Richtung

$$\Gamma, A \vdash A$$

Beweis

$\Rightarrow$-Richtung

$$\Gamma, A \vdash A \xrightarrow{\text{Konstruktion}} \overline{\Gamma}, x : \overline{A} \vdash x : \overline{A}$$

Beweis

$\Rightarrow$-Richtung

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Beweis

$\Rightarrow$-Richtung

$$
\begin{tikzcd}
\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \arrow[r, bend left, "\text{IH}"] & \overline{\Gamma}, x : \overline{A} \vdash M : \overline{B}
\end{tikzcd}
$$

Beweis

$\Rightarrow$-Richtung

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \qquad \xrightarrow{\text{IH}} \qquad \frac{\overline{\Gamma}, x : \overline{A} \vdash M : \overline{B}}{\overline{\Gamma} \vdash \lambda x : \overline{A}.M : \overline{A} \to \overline{B}}$$

Beweis

⇒-Richtung

$$\frac{\Gamma \vdash \forall \alpha A}{\Gamma \vdash A\,[\alpha := b]}$$

Beweis

$\Rightarrow$-Richtung

$$
\begin{tikzcd}
\dfrac{\Gamma \vdash \forall \alpha A}{\Gamma \vdash A[\alpha := b]} \arrow[rr, bend left, "\mathsf{IH}"] & & \overline{\Gamma} \vdash M : \forall \alpha . \overline{A}
\end{tikzcd}
$$

Beweis

$\Rightarrow$-Richtung

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\dfrac{\Gamma \vdash \forall\alpha A}{\Gamma \vdash A[\alpha := b]} \arrow[r, bend left, "\mathrm{IH}"] & \dfrac{\overline{\Gamma} \vdash M : \forall\alpha.\overline{A}}{\overline{\Gamma} \vdash M\, b : \overline{A}[\alpha := b]}
\end{tikzcd}
$$

Beweis

$\Leftarrow$-Richtung

$$\Gamma \vdash \textit{\textbf{false}} \quad \Leftarrow \quad \textit{Es existiert ein } \boldsymbol{\lambda 2} \textit{ Term } M \textit{ sodass } \overline{\Gamma} \vdash M : \textit{\textbf{false}}$$

Beweis

⇐-Richtung

$$\Gamma \vdash \boldsymbol{false} \quad \Leftarrow \quad \textit{Es existiert ein } \boldsymbol{\lambda 2} \textit{ Term } M \textit{ sodass } \overline{\Gamma} \vdash M : \boldsymbol{false}$$

$$\begin{array}{rcl} \overline{\Gamma} \vdash M : P_{st} & \Rightarrow & \Gamma \vdash P(s,t) \\ \overline{\Gamma} \vdash M : \boldsymbol{false} & \Rightarrow & \Gamma \vdash \boldsymbol{false} \end{array}$$

Beweis

$\Leftarrow$-Richtung

$$\overline{\Gamma} \vdash M : P_{st} \Rightarrow \Gamma \vdash P(s,t)$$

$$M = x$$

$$M = M_1 M_2$$

$$M = \lambda x : t.M'$$

$$M = \Lambda\gamma.M'$$

$$M = M'\, t'$$

Beweis

$\Leftarrow$-Richtung

$$\overline{\Gamma} \vdash M : P_{st} \Rightarrow \Gamma \vdash P(s,t)$$

$$M = x$$

$$\boxed{M = M_1 M_2}$$

$$M = \lambda x : t.M'$$

$$M = \Lambda\gamma.M'$$

$$M = M'\,t'$$

Beweis

$\Leftarrow$-Richtung

$$M = M_1 M_2$$

Beweis

$\Leftarrow$-Richtung

$$M = M_1 M_2$$

Alle wohlgetypten $\boldsymbol{\lambda 2}$ Terme sind stark normalisierend.

Beweis

$\Leftarrow$-Richtung

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

Beweis

$\Leftarrow$-Richtung

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

$$A = \forall \vec{\alpha}(P^1(\alpha_1, \beta_1) \to \dots \to P^n(\alpha_n, \beta_n) \to P(\alpha, \beta))$$

Beweis

$\Leftarrow$-Richtung

$$M = x_A \bar{t}_1 \dots \bar{t}_m N_1 \dots N_{n-1} M_2$$

$$A = \forall \vec{\alpha}(P^1(\alpha_1, \beta_1) \to \dots \to P^n(\alpha_n, \beta_n) \to P(\alpha, \beta))$$

Beweis

$\Leftarrow$-Richtung

$$M = x_A \vec{t} N_1 \dots N_{n-1} N_n$$

$$A = \forall \vec{\alpha} (P^1(\alpha_1, \beta_1) \to \cdots \to P^n(\alpha_n, \beta_n) \to P(\alpha, \beta))$$

Beweis

$\Leftarrow$-Richtung

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma} \vdash x_A : \forall\vec{\alpha}(P^1_{\alpha_1\beta_1} \to \cdots \to P^n_{\alpha_n\beta_n} \to P_{\alpha\beta})}{\overline{\Gamma} \vdash x_A\vec{t} : P^1_{s_1t_1} \to \cdots \to P^n_{s_nt_n} \to P_{st}} \qquad \overline{\Gamma} \vdash N_1 : P^1_{s_1t_1}}{\vdots}}{\overline{\Gamma} \vdash x_A\vec{t}N_1 \ldots N_{n-1} : P^n_{s_nt_n} \to P_{st}} \qquad \overline{\Gamma} \vdash N_n : P^n_{s_nt_n}}{\overline{\Gamma} \vdash (x_A\vec{t}N_1 \ldots N_{n-1})N_n : P_{st}}$$

Beweis

$\Leftarrow$-Richtung

Konstruktion

IH

IH

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma} \vdash x_A : \forall\vec{\alpha}(P^1_{\alpha_1\beta_1} \to \cdots \to P^n_{\alpha_n\beta_n} \to P_{\alpha\beta})}{\overline{\Gamma} \vdash x_A\vec{t} : P^1_{s_1t_1} \to \cdots \to P^n_{s_nt_n} \to P_{st}} \qquad \overline{\Gamma} \vdash N_1 : P^1_{s_1t_1}}{\vdots}}{\overline{\Gamma} \vdash x_A\vec{t}N_1 \ldots N_{n-1} : P^n_{s_nt_n} \to P_{st}} \qquad \overline{\Gamma} \vdash N_n : P^n_{s_nt_n}}{\overline{\Gamma} \vdash (x_A\vec{t}N_1 \ldots N_{n-1})N_n : P_{st}}$$

Beweis

$\Leftarrow$-Richtung

$$\Gamma \vdash \forall\vec{\alpha}(P^1(\alpha_1, \beta_1) \to \cdots \to P^n(\alpha_n, \beta_n) \to P(\alpha, \beta)) \xleftarrow{\mathit{Konstruktion}}$$

$$\Gamma \vdash P^1(s_1, t_1) \xleftarrow{\mathit{IH}}$$

$$\Gamma \vdash P^n(s_n, t_n) \xleftarrow{\mathit{IH}}$$

Beweis

⇐-Richtung

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \Gamma \vdash \forall\vec{\alpha}(P^1(\alpha_1,\beta_1) \to \cdots \to P^n(\alpha_n,\beta_n) \to P(\alpha,\beta)) \xleftarrow{\textit{Konstruktion}}
      }{
        \Gamma \vdash P^1(s_1,t_1) \to \cdots \to P^n(s_n,t_n) \to P(s,t)
      }
      \qquad
      \Gamma \vdash P^1(s_1,t_1) \xleftarrow{\textit{IH}}
    }{
      \vdots
    }
  }{
    \Gamma \vdash P^n(s_n,t_n) \to P(a,b)
  }
  \qquad
  \Gamma \vdash P^n(s_n,t_n) \xleftarrow{\textit{IH}}
}{
  \Gamma \vdash P(s,t)
}
$$

Beweis

$\Leftarrow$-Richtung

$$\overline{\Gamma} \vdash M : \boldsymbol{false} \Rightarrow \Gamma \vdash \boldsymbol{false}$$

$$M = x$$

$$M = M_1 M_2$$

$$M = \lambda x : t.M'$$

$$M = \Lambda\gamma.M'$$

$$M = M'\, t'$$

Beweis

$\Leftarrow$-Richtung

$$\overline{\Gamma} \vdash M : \boldsymbol{false} \Rightarrow \Gamma \vdash \boldsymbol{false}$$

$$M = x$$

$$\boxed{M = M_1 M_2}$$

$$M = \lambda x : t.M'$$

$$M = \Lambda\gamma.M'$$

$$M = M'\, t'$$

Beweis

$\Leftarrow$-Richtung

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

Beweis

$\Leftarrow$-Richtung

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

$$A = \forall\vec{\alpha}(P^1(\alpha_1, \beta_1) \to \cdots \to P^n(\alpha_n, \beta_n) \to \textbf{false})$$

$$A = \forall\vec{\alpha}(P^1(\alpha_1, \beta_1) \to \cdots \to \forall\beta(P^n(\alpha_n, \beta_n) \to \textbf{false}) \to \textbf{false})$$

Beweis

Konklusion

$\Gamma \vdash \textbf{\textit{false}}$ *gdw.* *Es existiert ein* $\boldsymbol{\lambda 2}$ *Term* M *sodass* $\overline{\Gamma} \vdash M : \textbf{\textit{false}}$

Beweis

Konklusion

$$\Gamma \vdash \boldsymbol{false} \quad gdw. \quad Es\ existiert\ ein\ \boldsymbol{\lambda 2}\ Term\ M\ sodass\ \overline{\Gamma} \vdash M : \boldsymbol{false}$$

$$\textbf{CONS} \leq \textbf{INHAB}$$

Beweis

Konklusion

$\Gamma \vdash \textbf{\textit{false}}$ *gdw. Es existiert ein* $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{2}$ *Term* M *sodass* $\overline{\Gamma} \vdash M : \textbf{\textit{false}}$

CONS $\leq$ **INHAB**

INHAB ist unentscheidbar.