

Bewohntheit in $\lambda 2$

Florian Starke

October 23, 2015

Struktur

$\lambda 2$

System **P**

Beweis

Allgemein

Typen und Terme

$\lambda x.x$

Allgemein

Typen und Terme

$$\lambda x.x$$

$$\forall a.a \rightarrow a$$

Allgemein

Typen und Terme

$\lambda x.x$

$a \rightarrow a$

Allgemein

Typen und Terme

$$\lambda x.x$$

$$a \rightarrow a$$

$$\forall b. a \rightarrow b \rightarrow a$$

Allgemein

Typen und Terme

$\lambda x.x$

$a \rightarrow a$

$\lambda x.\lambda y.x$

$\forall b.a \rightarrow b \rightarrow a$

Allgemein

Typen und Terme

$\lambda x : a. x$

$a \rightarrow a$

$\lambda x. \lambda y. x$

$\forall b. a \rightarrow b \rightarrow a$

Allgemein

Typen und Terme

$$\Lambda a. \lambda x : a. x$$

$$\forall a. a \rightarrow a$$

$$\lambda x. \lambda y. x$$

$$\forall b. a \rightarrow b \rightarrow a$$

Allgemein

Typen und Terme

$$\Lambda a. \lambda x : a. x$$

$$\forall a. a \rightarrow a$$

$$\Lambda b. \lambda x : a. \lambda y : b. x$$

$$\forall b. a \rightarrow b \rightarrow a$$

λ^2

Typen und Terme

$$a, \alpha \in \mathcal{V}_T; t_1, t_2, t \in T_{\lambda^2}$$

λ^2 Typen

$$T_{\lambda^2} = a \mid t_1 \rightarrow t_2 \mid \forall \alpha. t$$

$\lambda 2$

Typen und Terme

$$a, \alpha \in \mathcal{V}_T; t_1, t_2, t \in T_{\lambda 2}; x \in \mathcal{V}_V; M_1, M_2, M \in \Lambda_{T_{\lambda 2}}$$

$\lambda 2$ Typen

$$T_{\lambda 2} = a \mid t_1 \rightarrow t_2 \mid \forall \alpha. t$$

$\lambda 2$ Terme

$$\Lambda_{T_{\lambda 2}} = x \mid M_1 M_2 \mid \lambda x : t. M \mid \Lambda \alpha. M \mid M t$$

(Axiom) $\Gamma, x : t \vdash x : t$

(λ -Introduction)
$$\frac{\Gamma, x : t_1 \vdash M : t_2}{\Gamma \vdash \lambda x : t_1. M : t_1 \rightarrow t_2}$$

(λ -Elimination)
$$\frac{\Gamma \vdash M_1 : t_1 \rightarrow t_2 \quad \Gamma \vdash M_2 : t_1}{\Gamma \vdash M_1 M_2 : t_2}$$

(\forall -Introduction)
$$\frac{\Gamma \vdash M : t}{\Gamma \vdash \Lambda \alpha. M : \forall \alpha. t} \quad \alpha \notin \text{FV}(\Gamma)$$

(\forall -Elimination)
$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha. t}{\Gamma \vdash M t' : t [\alpha := t']}$$

$\lambda 2$

Probleme

Typprüfungsproblem

Γ, M, t gegeben, $\Gamma \vdash M : t$?

Typisierbarkeitsproblem

Γ, M gegeben, existiert t , mit $\Gamma \vdash M : t$?

Bewohntheitsproblem

Γ, t gegeben, existiert M mit $\Gamma \vdash M : t$?

Typprüfungsproblem

Γ, M, t gegeben, $\Gamma \vdash M : t$?

Typisierbarkeitsproblem

Γ, M gegeben, existiert t , mit $\Gamma \vdash M : t$?

Bewohntheitsproblem

Γ, t gegeben, existiert M mit $\Gamma \vdash M : t$?

System P

Formeln

Eine prädikatenlogische Formel φ ist eine
atomare Formel falls $\varphi = \mathbf{false}$ oder $\varphi = P(a, b)$.

System P

Formeln

Eine prädikatenlogische Formel φ ist eine

- atomare Formel** falls $\varphi = \mathbf{false}$ oder $\varphi = P(a, b)$.
- universelle Formel** falls $\varphi = \forall \vec{\alpha}(A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n)$ und für alle $\alpha \in \text{FV}(A_n) \cap \text{GV}(\varphi)$ existiert ein $i < n$, sodass $\alpha \in \text{FV}(A_i)$.

System P

Formeln

Eine prädikatenlogische Formel φ ist eine

atomare Formel falls $\varphi = \mathbf{false}$ oder $\varphi = P(a, b)$.

universelle Formel falls $\varphi = \forall \vec{\alpha}(A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n)$ und für alle $\alpha \in \text{FV}(A_n) \cap \text{GV}(\varphi)$ existiert ein $i < n$, sodass $\alpha \in \text{FV}(A_i)$.

existenzielle Formel falls $\varphi = \forall \vec{\alpha}(A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow \forall \beta(A_n \rightarrow \mathbf{false}) \rightarrow \mathbf{false})$ und für alle $\alpha \in (\text{FV}(A_n) \cap \text{GV}(\varphi)) \setminus \{\beta\}$ existiert ein $i < n$, sodass $\alpha \in \text{FV}(A_i)$.

System P

Formeln Beispiele

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$

System **P**

Formeln Beispiele

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$

$$\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$$

keine **P**-Formel

System **P**

Formeln Beispiele

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$

keine **P**-Formel

$$\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$$

P-Formel

$$\forall \beta (P(\beta, a) \rightarrow \mathbf{false}) \rightarrow \mathbf{false}$$

System P

Formeln Beispiele

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$

keine P-Formel

$$\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$$

P-Formel

$$\forall \beta (P(\beta, a) \rightarrow \text{false}) \rightarrow \text{false}$$

P-Formel

$$\forall \alpha (\forall \beta (P(\beta, \alpha) \rightarrow \text{false}) \rightarrow \text{false})$$

System P

Formeln Beispiele

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$

keine P-Formel

$$\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$$

P-Formel

$$\forall \beta (P(\beta, a) \rightarrow \text{false}) \rightarrow \text{false}$$

P-Formel

$$\forall \alpha (\forall \beta (P(\beta, \alpha) \rightarrow \text{false}) \rightarrow \text{false})$$

keine P-Formel

System P

Regeln

(Axiom)

$$\Gamma, A \vdash A$$

(\rightarrow -Introduction)

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

(\rightarrow -Elimination)

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

(\forall -Introduction)

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \forall \alpha B}$$

$$\alpha \notin \text{FV}(\Gamma)$$

(\forall -Elimination)

$$\frac{\Gamma \vdash \forall \alpha B}{\Gamma \vdash B[\alpha := b]}$$

$$b \in \mathcal{V}_P$$

System **P**

Konsistenzproblem **CONS**

Gegeben eine Basis Γ .

Gilt $\Gamma \vdash \mathbf{false}$ nicht?

System **P**

Konsistenzproblem **CONS**

Gegeben eine Basis Γ .

Gilt $\Gamma \vdash \mathbf{false}$ nicht?

CONS ist unentscheidbar.

$$\text{CONS} \leq \text{INHAB}$$

$\text{CONS} \leq \text{INHAB}$

Zu einer gegebenen **P**-Basis Γ konstruieren wir ein $\lambda 2$ -Basis $\bar{\Gamma}$,
sodass

$\Gamma \vdash \textit{false}$ *gdw.* *Es existiert ein $\lambda 2$ Term M , sodass $\bar{\Gamma} \vdash M : \textit{false}$.*

Beweis

Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \mathbf{false} & \text{falls } A = \mathbf{false} \\ (\alpha \rightarrow \eta_1) \rightarrow (\beta \rightarrow \eta_2) \rightarrow p & \text{falls } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

Beweis

Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \mathbf{false} & \text{falls } A = \mathbf{false} \\ P_{\alpha\beta} & \text{falls } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

Beweis

Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \mathbf{false} & \text{falls } A = \mathbf{false} \\ P_{\alpha\beta} & \text{falls } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

universelle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \rightarrow \overline{A_2} \rightarrow \cdots \rightarrow \overline{A_n})$$

Beweis

Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \mathbf{false} & \text{falls } A = \mathbf{false} \\ P_{\alpha\beta} & \text{falls } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

universelle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \rightarrow \overline{A_2} \rightarrow \dots \rightarrow \overline{A_n})$$

existenzielle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \rightarrow \dots \rightarrow \forall \beta (\overline{A_n} \rightarrow \mathbf{false}) \rightarrow \mathbf{false})$$

Beweis

Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \mathbf{false} & \text{falls } A = \mathbf{false} \\ P_{\alpha\beta} & \text{falls } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

universelle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \rightarrow \overline{A_2} \rightarrow \dots \rightarrow \overline{A_n})$$

existenzielle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \rightarrow \dots \rightarrow \forall \beta (\overline{A_n} \rightarrow \mathbf{false}) \rightarrow \mathbf{false})$$

Basis:

$$\overline{\Gamma} := \{(\alpha_A : \overline{A}) \mid A \in \Gamma\}$$

Beweis

\Rightarrow -Richtung

$\Gamma \vdash \mathbf{false} \Rightarrow$ Es existiert ein $\lambda 2$ Term M , sodass $\bar{\Gamma} \vdash M : \mathbf{false}$.

Beweis

\Rightarrow -Richtung

$\Gamma \vdash \mathbf{false} \Rightarrow$ *Es existiert ein $\lambda 2$ Term M , sodass $\bar{\Gamma} \vdash M : \mathbf{false}$.*

$\Gamma \vdash A \Rightarrow$ *Es existiert ein $\lambda 2$ Term M , sodass $\bar{\Gamma} \vdash M : \bar{A}$.*

Beweis

\Rightarrow -Richtung

Axiom

$$\Gamma, A \vdash A$$

Beweis

\Rightarrow -Richtung

Axiom

$$\Gamma, A \vdash A \xrightarrow{\text{Konstruktion}} \bar{\Gamma}, x : \bar{A} \vdash x : \bar{A}$$

Beweis

\Rightarrow -Richtung

\rightarrow -Introduction

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

Beweis

\Rightarrow -Richtung

\rightarrow -Introduction

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \quad \text{IH} \rightarrow \bar{\Gamma}, x : \bar{A} \vdash M : \bar{B}$$

Beweis

\Rightarrow -Richtung

\rightarrow -Introduction

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \quad \text{IH} \quad \frac{\overline{\Gamma}, x : \overline{A} \vdash M : \overline{B}}{\overline{\Gamma} \vdash \lambda x : \overline{A}. M : \overline{A} \rightarrow \overline{B}}$$

Beweis

\Rightarrow -Richtung

\forall -Elimination

$$\frac{\Gamma \vdash \forall \alpha A}{\Gamma \vdash A[\alpha := b]}$$

Beweis

\Rightarrow -Richtung

\forall -Elimination

$$\frac{\Gamma \vdash \forall \alpha A}{\Gamma \vdash A[\alpha := b]} \xrightarrow{\text{IH}} \bar{\Gamma} \vdash M : \forall \alpha. \bar{A}$$

Beweis

\Rightarrow -Richtung

\forall -Elimination

$$\frac{\Gamma \vdash \forall \alpha A}{\Gamma \vdash A[\alpha := b]} \xrightarrow{\text{IH}} \frac{\bar{\Gamma} \vdash M : \forall \alpha. \bar{A}}{\bar{\Gamma} \vdash M b : \bar{A}[\alpha := b]}$$

Beweis

\Leftarrow -Richtung

$\Gamma \vdash \mathbf{false} \Leftarrow$ Es existiert ein $\lambda 2$ Term M , sodass $\bar{\Gamma} \vdash M : \mathbf{false}$.

Beweis

←-Richtung

$\Gamma \vdash \mathbf{false} \Leftarrow$ *Es existiert ein $\lambda 2$ Term M , sodass $\bar{\Gamma} \vdash M : \mathbf{false}$.*

$$\begin{array}{ll} \bar{\Gamma} \vdash M : P_{st} & \Rightarrow \quad \Gamma \vdash P(s, t) \\ \bar{\Gamma} \vdash M : \mathbf{false} & \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \mathbf{false} \end{array}$$

Beweis

←-Richtung

$$\bar{\Gamma} \vdash M : P_{st} \Rightarrow \Gamma \vdash P(s, t)$$

$$M = x$$

$$M = M_1 M_2$$

$$M = \lambda x : t. M'$$

$$M = \Lambda \gamma. M'$$

$$M = M' t'$$

Beweis

←-Richtung

$$\bar{\Gamma} \vdash M : P_{st} \Rightarrow \Gamma \vdash P(s, t)$$

$$M = x$$

$$\boxed{M = M_1 M_2}$$

$$M = \lambda x : t. M'$$

$$M = \Lambda \gamma. M'$$

$$M = M' t'$$

Beweis

←-Richtung

$$M = M_1 M_2$$

Beweis

←-Richtung

$$M = M_1 M_2$$

Alle wohlgetypten $\lambda 2$ Terme sind stark normalisierend.

Beweis

←-Richtung

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

Beweis

←-Richtung

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

$$A = \forall \vec{\alpha} (P^1(\alpha_1, \beta_1) \rightarrow \dots \rightarrow P^n(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow P(\alpha, \beta))$$

Beweis

←-Richtung

$$M = x_A \bar{t}_1 \dots \bar{t}_m N_1 \dots N_{n-1} M_2$$

$$A = \forall \vec{\alpha} (P^1(\alpha_1, \beta_1) \rightarrow \dots \rightarrow P^n(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow P(\alpha, \beta))$$

Beweis

←-Richtung

$$M = x_A \vec{t} N_1 \dots N_{n-1} N_n$$

$$A = \forall \vec{\alpha} (P^1(\alpha_1, \beta_1) \rightarrow \dots \rightarrow P^n(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow P(\alpha, \beta))$$

Beweis

←-Richtung

$$\frac{\bar{\Gamma} \vdash x_A \vec{t} N_1 \dots N_{n-1} : P_{s_n t_n}^n \rightarrow P_{st} \quad \bar{\Gamma} \vdash N_n : P_{s_n t_n}^n}{\bar{\Gamma} \vdash (x_A \vec{t} N_1 \dots N_{n-1}) N_n : P_{st}}$$

Beweis

←-Richtung

$$\frac{\overline{\Gamma} \vdash x_A : \forall \vec{\alpha} (P_{\alpha_1 \beta_1}^1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{\alpha_n \beta_n}^n \rightarrow P_{\alpha \beta})}{\overline{\Gamma} \vdash x_A \vec{t} : P_{s_1 t_1}^1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{s_n t_n}^n \rightarrow P_{st}} \quad \overline{\Gamma} \vdash N_1 : P_{s_1 t_1}^1$$
$$\vdots$$
$$\frac{\overline{\Gamma} \vdash x_A \vec{t} N_1 \dots N_{n-1} : P_{s_n t_n}^n \rightarrow P_{st} \quad \overline{\Gamma} \vdash N_n : P_{s_n t_n}^n}{\overline{\Gamma} \vdash (x_A \vec{t} N_1 \dots N_{n-1}) N_n : P_{st}}$$

Beweis

←-Richtung

$$\begin{array}{c}
 \text{Konstruktion} \\
 \hline
 \frac{\bar{\Gamma} \vdash x_A : \forall \vec{\alpha} (P_{\alpha_1 \beta_1}^1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{\alpha_n \beta_n}^n \rightarrow P_{\alpha \beta})}{\bar{\Gamma} \vdash x_A \vec{t} : P_{s_1 t_1}^1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{s_n t_n}^n \rightarrow P_{st}} \quad \text{IH} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \vdots \end{array} \\
 \hline
 \frac{\bar{\Gamma} \vdash x_A \vec{t} N_1 \dots N_{n-1} : P_{s_n t_n}^n \rightarrow P_{st} \quad \bar{\Gamma} \vdash N_1 : P_{s_1 t_1}^1}{\bar{\Gamma} \vdash (x_A \vec{t} N_1 \dots N_{n-1}) N_n : P_{st}} \quad \text{IH}
 \end{array}$$

Beweis

⇐-Richtung

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash \forall \vec{\alpha} (P^1(\alpha_1, \beta_1) \rightarrow \dots \rightarrow P^n(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow P(\alpha, \beta)) \\ \Gamma \vdash P^1(s_1, t_1) \xleftarrow{IH} \\ \Gamma \vdash P^n(s_n, t_n) \xleftarrow{IH} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Konstruktion} \\ \xleftarrow{\hspace{1cm}} \end{array}$$

Beweis

←-Richtung

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash \forall \vec{\alpha} (P^1(\alpha_1, \beta_1) \rightarrow \cdots \rightarrow P^n(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow P(\alpha, \beta))}{\Gamma \vdash P^1(s_1, t_1) \rightarrow \cdots \rightarrow P^n(s_n, t_n) \rightarrow P(s, t)} \quad \Gamma \vdash P^1(s_1, t_1) \xleftarrow{IH}}{\vdots} \quad \Gamma \vdash P^n(s_n, t_n) \xleftarrow{IH}}{\Gamma \vdash P(s, t)}$$

Konstruktion

Beweis

←-Richtung

$$\bar{\Gamma} \vdash M : \mathbf{false} \Rightarrow \Gamma \vdash \mathbf{false}$$

$$M = x$$

$$M = M_1 M_2$$

$$M = \lambda x : t. M'$$

$$M = \Lambda \gamma. M'$$

$$M = M' t'$$

Beweis

←-Richtung

$$\bar{\Gamma} \vdash M : \mathbf{false} \Rightarrow \Gamma \vdash \mathbf{false}$$

$$M = x$$

$$\boxed{M = M_1 M_2}$$

$$M = \lambda x : t. M'$$

$$M = \Lambda \gamma. M'$$

$$M = M' t'$$

Beweis

←-Richtung

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

Beweis

←-Richtung

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

$$A = \forall \vec{\alpha} (P^1(\alpha_1, \beta_1) \rightarrow \dots \rightarrow P^n(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow \mathbf{false})$$

$$A = \forall \vec{\alpha} (P^1(\alpha_1, \beta_1) \rightarrow \dots \rightarrow \forall \beta (P^n(\alpha_n, \beta_n) \rightarrow \mathbf{false}) \rightarrow \mathbf{false})$$

Beweis

Konklusion

$\Gamma \vdash \textit{false}$ gdw. Es existiert ein $\lambda 2$ Term M , sodass $\bar{\Gamma} \vdash M : \textit{false}$.

$\Gamma \vdash \textit{false}$ gdw. Es existiert ein $\lambda 2$ Term M , sodass $\bar{\Gamma} \vdash M : \textit{false}$.

$\text{CONS} \leq \text{INHAB}$

$\Gamma \vdash \textit{false}$ gdw. Es existiert ein $\lambda 2$ Term M , sodass $\bar{\Gamma} \vdash M : \textit{false}$.

CONS \leq INHAB

INHAB ist unentscheidbar.

- [1] H.P. Barendregt, Lambda calculi with types, Handbook of Logic in Computer Science, Volume II, 1993.
- [2] P. Urzyczyn, Inhabitation in typed lambda-calculi (A Syntactic Approach), Typed Lambda Calculi and Applications, Lecture Notes in Computer Science 1210 (1997) pp. 373-389.