Bewohntheit in $\lambda 2$

Florian Starke

October 9, 2015

Structure

luiuh

$\boldsymbol{\lambda}$2 Typen und Terme

asd

$\boldsymbol{\lambda}$2 Typen

$$\mathsf{T}_{\lambda 2} = a \mid t_1 \rightarrow t_2 \mid \forall \alpha . t$$

$\boldsymbol{\lambda}$2 Typen und Terme

asd

$\boldsymbol{\lambda}$2 Typen

$$\mathrm{T}_{\lambda 2} = a \mid t_1 \rightarrow t_2 \mid \forall \alpha . t$$

$\boldsymbol{\lambda}$2 Terme

$$\Lambda_{\mathrm{T}_{\lambda 2}} = x \mid M_1 M_2 \mid \lambda x : t . M \mid \Lambda \alpha . M \mid M\, t$$

Bewohntheitsproblem

asd

Gegeben ein $\boldsymbol{\lambda 2}$ Typ t.

Gibt es einen $\boldsymbol{\lambda 2}$ Term M sodass $\emptyset \vdash M : t$?

Bewohntheitsproblem

asd

Gegeben eine Basis Γ und ein $\boldsymbol{\lambda 2}$ Typ t.

$$\text{Gibt es einen } \boldsymbol{\lambda 2} \text{ Term } M \text{ sodass } \Gamma \vdash M : t?$$

$\mathbf{P}$-Formeln

asd

Eine prädikatenlogische Formel φ ist eine
atomare Formel falls $\varphi = \textbf{false}$ oder $\varphi = P(a, b)$.

P-Formeln
asd

Eine prädikatenlogische Formel φ ist eine

atomare Formel falls $\varphi = \mathbf{false}$ oder $\varphi = P(a, b)$.

universelle Formel falls $\varphi = \forall\vec{\alpha}(A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n)$ und für alle $\alpha \in \mathsf{FV}(A_n) \cap \mathsf{GV}(\varphi)$ existiert ein $i < n$ sodass $\alpha \in \mathsf{FV}(A_i)$.

$\mathbf{P}$-Formeln

asd

Eine prädikatenlogische Formel φ ist eine

atomare Formel falls $\varphi = \textbf{false}$ oder $\varphi = P(a, b)$.

universelle Formel falls $\varphi = \forall\vec{\alpha}(A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n)$ und für alle $\alpha \in \mathsf{FV}(A_n) \cap \mathsf{GV}(\varphi)$ existiert ein $i < n$ sodass $\alpha \in \mathsf{FV}(A_i)$.

existentielle Formel falls $\varphi = \forall\vec{\alpha}(A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_{n-1} \to \forall\beta(A_n \to \textbf{false}) \to \textbf{false})$ und für alle $\alpha \in (\mathsf{FV}(A_n) \cap \mathsf{GV}(\varphi)) \setminus \{\beta\}$ existiert ein $i < n$ sodass $\alpha \in \mathsf{FV}(A_i)$.

P-Formeln

asd

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$

P-Formeln

asd

$\forall \alpha P(\color{red}{\alpha}, b)$	keine **P**-Formel
$\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$	

P-Formeln

asd

$\forall\alpha P(\alpha, b)$	keine **P**-Formel
$\forall\alpha(Q(\alpha,\alpha) \to P(\alpha, b))$	**P**-Formel
$\forall\beta(P(\beta, a) \to \mathbf{false}) \to \mathbf{false}$	

P-Formeln

asd

$\forall \alpha P(\alpha, b)$	keine **P**-Formel
$\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \to P(\alpha, b))$	**P**-Formel
$\forall \beta (P(\beta, a) \to \textbf{false}) \to \textbf{false}$	**P**-Formel
$\forall \alpha (\forall \beta (P(\beta, \alpha) \to \textbf{false}) \to \textbf{false})$	

$\mathbf{P}$-Formeln

asd

$\forall \alpha P(\alpha, b)$	keine $\mathbf{P}$-Formel
$\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \to P(\alpha, b))$	$\mathbf{P}$-Formel
$\forall \beta (P(\beta, a) \to \textbf{false}) \to \textbf{false}$	$\mathbf{P}$-Formel
$\forall \alpha (\forall \beta (P(\beta, \alpha) \to \textbf{false}) \to \textbf{false})$	keine $\mathbf{P}$-Formel

asd

asd

(Axiom)	$\Gamma, A \vdash A$	
($\to$ -Introduction)	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$	
($\to$ -Elimination)	$\dfrac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	
($\forall$-Introduction)	$\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \forall \alpha B}$	$\alpha \notin \mathsf{FV}(\Gamma)$
($\forall$-Elimination)	$\dfrac{\Gamma \vdash \forall \alpha B}{\Gamma \vdash B\,[\alpha := b]}$	$b \in \mathcal{V}_P$

asd

asd

(Axiom)	$\Gamma, x : t \vdash x : t$
(λ-Introduction)	$\dfrac{\Gamma, x : t_1 \vdash M : t_2}{\Gamma \vdash \lambda x : t_1 . M : t_1 \to t_2}$
(λ-Elimination)	$\dfrac{\Gamma \vdash M_1 : t_1 \to t_2 \quad \Gamma \vdash M_2 : t_1}{\Gamma \vdash M_1 M_2 : t_2}$
($\forall$-Introduction)	$\dfrac{\Gamma \vdash M : t}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha . M : \forall\alpha . t} \qquad \alpha \notin \mathsf{FV}(\Gamma)$
($\forall$-Elimination)	$\dfrac{\Gamma \vdash M : \forall\alpha . t}{\Gamma \vdash M\, t' : t\,[\alpha := t']}$

asd

asd

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\overline{\Gamma} \vdash x : \forall \vec{\alpha}(P^1_{\alpha_1\beta_1} \to \cdots \to P^n_{\alpha_n\beta_n} \to P_{\alpha\beta})}
            {\overline{\Gamma} \vdash x\vec{t} : P^1_{s_1t_1} \to \cdots \to P^n_{s_nt_n} \to P_{st}}
      \qquad
      \overline{\Gamma} \vdash N_1 : P^1_{s_1t_1}
    }{\vdots}
  }{\overline{\Gamma} \vdash x\vec{t}N_1 \ldots N_{n-1} : P^n_{s_nt_n} \to P_{st}}
  \qquad
  \overline{\Gamma} \vdash N_n : P^n_{s_nt_n}
}{\overline{\Gamma} \vdash (x\vec{t}N_1 \ldots N_{n-1})N_n : P_{st}}
$$