#### Bewohntheit in $\lambda 2$

Florian Starke

October 15, 2015

#### Struktur

 $\lambda$ 2

System P

**Beweis** 

 $\lambda x.x$ 

$$\lambda x.x$$

$$\forall a.a \rightarrow a$$

$$\lambda x.x$$

$$a \rightarrow a$$

$$\lambda x.x$$
  $a \rightarrow a$   $\forall b.a \rightarrow b \rightarrow a$ 

$$\lambda x.x$$
  $a \rightarrow a$   $\lambda x.\lambda y.x$   $\forall b.a \rightarrow b \rightarrow a$ 

 $\lambda x: a.x$   $a \rightarrow a$   $\lambda x.\lambda y.x$   $\forall b.a \rightarrow b \rightarrow a$ 

 $egin{array}{lll} \Lambda a.\lambda x: a.x & \forall a.a 
ightarrow a \ \lambda x.\lambda y.x & \forall b.a 
ightarrow b 
ightarrow a \end{array}$ 

 $\Lambda a.\lambda x:a.x$ 

 $\Lambda b.\lambda x:a.\lambda y:b.x$ 

 $\forall a.a \rightarrow a$ 

 $\forall b.a 
ightarrow b 
ightarrow a$ 

$$a, \alpha \in \mathcal{V}_T$$
;  $t_1, t_2, t \in \mathsf{T}_{\lambda 2}$ 

 $\lambda 2$  Typen

$$\mathsf{T}_{\lambda 2} = \mathsf{a} \mid \mathsf{t}_1 \to \mathsf{t}_2 \mid \forall \alpha. \mathsf{t}$$

$$a, \alpha \in \mathcal{V}_T$$
;  $t_1, t_2, t \in \mathsf{T}_{\lambda 2}$ ;  $x \in \mathcal{V}_V$ ;  $M_1, M_2, M \in \mathsf{\Lambda}_{\mathsf{T}_{\lambda 2}}$ 

 $\lambda 2$  Typen

$$\mathsf{T}_{\lambda 2} = \mathsf{a} \mid \mathsf{t}_1 \to \mathsf{t}_2 \mid \forall \alpha. \mathsf{t}$$

 $\lambda 2$  Terme

$$\Lambda_{\mathsf{T}_{\lambda 2}} = x \mid M_1 M_2 \mid \lambda x : t.M \mid \Lambda \alpha.M \mid M t$$

$$\begin{array}{ll} \text{(Axiom)} & \Gamma, x:t\vdash x:t \\ \\ \text{($\lambda$-Introduction)} & \frac{\Gamma, x:t_1\vdash M:t_2}{\Gamma\vdash \lambda x:t_1.M:t_1\to t_2} \\ \\ \text{($\lambda$-Elimination)} & \frac{\Gamma\vdash M_1:t_1\to t_2\quad \Gamma\vdash M_2:t_1}{\Gamma\vdash M_1M_2:t_2} \\ \\ \text{($\forall$-Introduction)} & \frac{\Gamma\vdash M:t}{\Gamma\vdash \Lambda\alpha.M:\forall\alpha.t} \qquad \alpha\notin \mathsf{FV}(\Gamma) \\ \\ \text{($\forall$-Elimination)} & \frac{\Gamma\vdash M:\forall\alpha.t}{\Gamma\vdash M\,t':t\,[\alpha:=t']} \\ \end{array}$$

Typprüfungsproblem Typisierbarkeitsproblem Bewohntheitsproblem Typprüfungsproblem
Typisierbarkeitsproblem
Bewohntheitsproblem

Gegeben eine Basis  $\Gamma$  und ein  $\lambda 2$  Typ t.

Gibt es einen  $\lambda 2$  Term M sodass  $\Gamma \vdash M : t$ ?

### System **P**Formeln

Eine prädikatenlogische Formel  $\varphi$  ist eine atomare Formel falls  $\varphi = {\bf false}$  oder  $\varphi = P(a,b)$ .

### System **P**Formeln

Eine prädikatenlogische Formel  $\varphi$  ist eine atomare Formel falls  $\varphi = \mathbf{false}$  oder  $\varphi = P(a,b)$ . universelle Formel falls  $\varphi = \forall \vec{\alpha} (A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n)$  und für alle  $\alpha \in \mathsf{FV}(A_n) \cap \mathsf{GV}(\varphi)$  existiert ein i < n sodass  $\alpha \in \mathsf{FV}(A_i)$ .

### System **P**Formeln

```
Eine prädikatenlogische Formel \varphi ist eine
atomare Formel falls \varphi = false oder \varphi = P(a, b).
universelle Formel falls \varphi = \forall \vec{\alpha} (A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n) und für alle
                     \alpha \in FV(A_n) \cap GV(\varphi) existiert ein i < n sodass
                     \alpha \in FV(A_i).
existentielle Formel falls \varphi = \forall \vec{\alpha}(A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_{n-1} \to a_n)
                     \forall \beta (A_n \rightarrow \mathsf{false}) \rightarrow \mathsf{false}) \text{ und für alle}
                     \alpha \in (\mathsf{FV}(A_n) \cap \mathsf{GV}(\varphi)) \setminus \{\beta\} existiert ein i < n sodass
                     \alpha \in FV(A_i).
```

 $\forall \alpha P(\alpha, b)$ 

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$
  
 $\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$ 

keine P-Formel

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$
  
 $\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$   
 $\forall \beta (P(\beta, a) \rightarrow \mathsf{false}) \rightarrow \mathsf{false}$ 

keine P-Formel P-Formel

$$\begin{split} &\forall \alpha P(\alpha,b) \\ &\forall \alpha (Q(\alpha,\alpha) \to P(\alpha,b)) \\ &\forall \beta (P(\beta,a) \to \mathsf{false}) \to \mathsf{false} \\ &\forall \alpha (\forall \beta (P(\beta,\alpha) \to \mathsf{false}) \to \mathsf{false}) \end{split}$$

keine P-Formel

**P**-Formel

P-Formel

$$\begin{array}{ll} \forall \alpha P(\alpha,b) & \text{keine P-Formel} \\ \forall \alpha (Q(\alpha,\alpha) \rightarrow P(\alpha,b)) & \text{P-Formel} \\ \forall \beta (P(\beta,a) \rightarrow \text{false}) \rightarrow \text{false} & \text{P-Formel} \\ \forall \alpha (\forall \beta (P(\beta,\alpha) \rightarrow \text{false}) \rightarrow \text{false}) & \text{keine P-Formel} \end{array}$$

#### System **P**

Regeln

$$\begin{array}{ll} \text{(Axiom)} & \Gamma, A \vdash A \\ \\ \text{($\rightarrow$ -Introduction)} & \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \\ \\ \text{($\rightarrow$ -Elimination)} & \frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \\ \\ \text{($\forall$ -Introduction)} & \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \forall \alpha B} \qquad \alpha \notin \mathsf{FV}(\Gamma) \\ \\ \text{($\forall$ -Elimination)} & \frac{\Gamma \vdash \forall \alpha B}{\Gamma \vdash B \, [\alpha := b]} \qquad b \in \mathcal{V}_P \\ \end{array}$$

### System **P**Konsistenzproblem **CONS**

Gegeben eine Basis  $\Gamma$ .

Gilt  $\Gamma \vdash$  false nicht?

### System **P**Konsistenzproblem **CONS**

Gegeben eine Basis  $\Gamma$ .

Gilt  $\Gamma \vdash$  false nicht?

**CONS** ist unentscheidbar.

#### Beweis Konstruktion

 $\text{CONS} \leq \text{INHAB}$ 

#### Beweis Konstruktion

#### **CONS < INHAB**

Zu einer gegebenen P-Basis  $\Gamma$  konstruieren wir ein  $\lambda 2$ -Basis  $\overline{\Gamma}$  sodass

 $\Gamma \vdash \textit{false} \quad \textit{gdw}. \quad \textit{Es existiert ein } \lambda 2 \; \textit{Term M, sodass } \overline{\Gamma} \vdash \textit{M} : \textit{false}.$ 

#### Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := \begin{cases} \mathsf{false} & \mathsf{falls} \ A = \mathsf{false} \\ (\alpha \to p_1) \to (\beta \to p_2) \to p & \mathsf{falls} \ A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

#### Konstruktion

#### atomare Formel:

$$\overline{A} := egin{cases} \mathsf{false} & \mathsf{falls} \ A = \mathsf{false} \ P_{lphaeta} & \mathsf{falls} \ A = P(lpha, eta) \end{cases}$$

#### Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := egin{cases} extsf{false} & extsf{false} & extsf{false} \ P_{lphaeta} & extsf{falls} \ A = P(lpha, eta) \end{cases}$$

universelle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \to \overline{A_2} \to \cdots \to \overline{A_n})$$

#### Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := egin{cases} ext{false} & ext{falls } A = ext{false} \ P_{lphaeta} & ext{falls } A = P(lpha, eta) \end{cases}$$

universelle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \to \overline{A_2} \to \cdots \to \overline{A_n})$$

existentielle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \to \cdots \to \forall \beta (\overline{A_n} \to \mathsf{false}) \to \mathsf{false})$$

#### Konstruktion

atomare Formel:

$$\overline{A} := egin{cases} ext{false} & ext{falls } A = ext{false} \ P_{lphaeta} & ext{falls } A = P(lpha, eta) \end{cases}$$

universelle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \to \overline{A_2} \to \cdots \to \overline{A_n})$$

existentielle Formel:

$$\overline{A} := \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \to \cdots \to \forall \beta (\overline{A_n} \to \mathsf{false}) \to \mathsf{false})$$

Basis:

$$\overline{\Gamma} := \{ (x_A : \overline{A}) \mid A \in \Gamma \}$$

#### Beweis ⇒-Richtung

 $\Gamma \vdash \textit{false} \Rightarrow \textit{Es existiert ein } \lambda 2 \textit{ Term M, sodass } \overline{\Gamma} \vdash \textit{M} : \textit{false}.$ 

#### Beweis ⇒-Richtung

 $\Gamma \vdash \mathbf{false} \Rightarrow \mathsf{Es} \ \mathsf{existiert} \ \mathsf{ein} \ \boldsymbol{\lambda 2} \ \mathsf{Term} \ \mathsf{M}, \ \mathsf{sodass} \ \overline{\Gamma} \vdash \mathsf{M} : \mathbf{false}.$ 

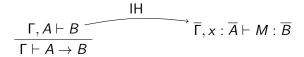
 $\Gamma \vdash A \implies Es \text{ existiert ein } \lambda 2 \text{ Term } M, \text{ sodass } \overline{\Gamma} \vdash M : \overline{A}.$ 

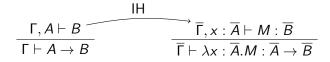
 $\Rightarrow$ -Richtung

 $\Gamma$ ,  $A \vdash A$ 

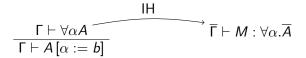
$$\Gamma, A \vdash A \xrightarrow{\mathsf{Konstruktion}} \overline{\Gamma}, x : \overline{A} \vdash x : \overline{A}$$

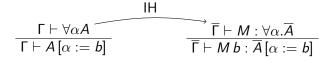
$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$





$$\frac{\Gamma \vdash \forall \alpha A}{\Gamma \vdash A \left[\alpha := b\right]}$$





 $\Gamma \vdash \textit{false} \ \Leftarrow \ \textit{Es existiert ein } \lambda 2 \ \textit{Term M, sodass } \overline{\Gamma} \vdash \textit{M} : \textit{false}.$ 

←-Richtung

 $\Gamma \vdash \textit{false} \ \Leftarrow \ \textit{Es existiert ein } \lambda 2 \ \textit{Term M, sodass } \overline{\Gamma} \vdash \textit{M} : \textit{false}.$ 

$$\overline{\Gamma} \vdash M : P_{st}$$

$$\Rightarrow$$

$$\Gamma \vdash P(s,t)$$

$$\overline{\Gamma} \vdash M : \textit{false}$$

$$\Rightarrow$$

$$\Gamma \vdash \textit{false}$$

$$\overline{\Gamma} \vdash M : P_{st} \Rightarrow \Gamma \vdash P(s, t)$$

$$M = x$$

$$M = M_1 M_2$$

$$M = \lambda x : t.M'$$

$$M = \Lambda \gamma.M'$$

$$M = M' t'$$

$$\overline{\Gamma} \vdash M : P_{st} \Rightarrow \Gamma \vdash P(s, t)$$

$$M = x$$

$$M = M_1 M_2$$

$$M = \lambda x : t.M'$$

$$M = \Lambda \gamma.M'$$

$$M = M' t'$$

 $\Leftarrow$ -Richtung

$$M=M_1M_2$$

$$M=M_1M_2$$

Alle wohlgetypten  $\lambda 2$  Terme sind stark normalisierend.

 $\Leftarrow$ -Richtung

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

$$A = \forall \vec{\alpha} (P^{1}(\alpha_{1}, \beta_{1}) \to \cdots \to P^{n}(\alpha_{n}, \beta_{n}) \to P(\alpha, \beta))$$

$$M = x_A \overline{t}_1 \dots \overline{t}_m N_1 \dots N_{n-1} M_2$$

$$A = \forall \vec{\alpha}(P^{1}(\alpha_{1}, \beta_{1}) \to \cdots \to P^{n}(\alpha_{n}, \beta_{n}) \to P(\alpha, \beta))$$

$$M = x_A \vec{t} N_1 \dots N_{n-1} N_n$$

$$A = \forall \vec{\alpha} (P^{1}(\alpha_{1}, \beta_{1}) \to \cdots \to P^{n}(\alpha_{n}, \beta_{n}) \to P(\alpha, \beta))$$

$$\frac{\overline{\Gamma} \vdash x_{A} : \forall \vec{\alpha} (P_{\alpha_{1}\beta_{1}}^{1} \to \cdots \to P_{\alpha_{n}\beta_{n}}^{n} \to P_{\alpha\beta})}{\overline{\Gamma} \vdash x_{A}\vec{t} : P_{s_{1}t_{1}}^{1} \to \cdots \to P_{s_{n}t_{n}}^{n} \to P_{st}} \quad \overline{\Gamma} \vdash N_{1} : P_{s_{1}t_{1}}^{1}}$$

$$\vdots$$

$$\overline{\overline{\Gamma} \vdash x_{A}\vec{t}N_{1} \dots N_{n-1} : P_{s_{n}t_{n}}^{n} \to P_{st}} \quad \overline{\Gamma} \vdash N_{n} : P_{s_{n}t_{n}}^{n}$$

$$\overline{\Gamma} \vdash (x_{A}\vec{t}N_{1} \dots N_{n-1})N_{n} : P_{st}$$

←-Richtung

# $\frac{\overline{\Gamma} \vdash x_{A} : \forall \vec{\alpha} (P_{\alpha_{1}\beta_{1}}^{1} \to \cdots \to P_{\alpha_{n}\beta_{n}}^{n} \to P_{\alpha\beta})}{\overline{\Gamma} \vdash x_{A}\vec{t} : P_{s_{1}t_{1}}^{1} \to \cdots \to P_{s_{n}t_{n}}^{n} \to P_{st}} \qquad \overline{\Gamma} \vdash N_{1} : P_{s_{1}t_{1}}^{1}}$ $\vdots$ $\overline{\Gamma} \vdash x_{A}\vec{t} N_{1} \dots N_{n-1} : P_{s_{n}t_{n}}^{n} \to P_{st}} \qquad \overline{\Gamma} \vdash N_{n} : P_{s_{n}t_{n}}^{n}$ $\overline{\Gamma} \vdash (x_{A}\vec{t} N_{1} \dots N_{n-1}) N_{n} : P_{st}$

# Konstruktion

$$\Gamma \vdash \forall \vec{\alpha}(P^1(\alpha_1, \beta_1) \to \cdots \to P^n(\alpha_n, \beta_n) \to P(\alpha, \beta))$$

$$\Gamma \vdash P^1(s_1, t_1) \xrightarrow{IH}$$

$$\Gamma \vdash P^n(s_n, t_n)$$

# $\frac{\Gamma \vdash \forall \vec{\alpha}(P^{1}(\alpha_{1}, \beta_{1}) \rightarrow \cdots \rightarrow P^{n}(\alpha_{n}, \beta_{n}) \rightarrow P(\alpha, \beta))}{\Gamma \vdash P^{1}(s_{1}, t_{1}) \rightarrow \cdots \rightarrow P^{n}(s_{n}, t_{n}) \rightarrow P(s, t)} \frac{IH}{\Gamma \vdash P^{n}(s_{n}, t_{n}) \rightarrow P(a, b)} \frac{IH}{\Gamma \vdash P^{n}(s_{n}, t_{n})}$

 $\Leftarrow$ -Richtung

$$\overline{\Gamma} \vdash M : \mathit{false} \Rightarrow \Gamma \vdash \mathit{false}$$

M = x  $M = M_1 M_2$   $M = \lambda x : t.M'$   $M = \Lambda \gamma.M'$  M = M' t'

$$\overline{\Gamma} \vdash M : \mathit{false} \Rightarrow \Gamma \vdash \mathit{false}$$

$$M = x$$

$$M = M_1 M_2$$

$$M = \lambda x : t.M'$$

$$M = \Lambda \gamma.M'$$

$$M = M' t'$$

 $\Leftarrow$ -Richtung

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

**⇐-Richtung** 

$$M = x_A m_1 \dots m_k M_2$$

$$\begin{split} & A = \forall \vec{\alpha}(P^1(\alpha_1,\beta_1) \to \cdots \to P^n(\alpha_n,\beta_n) \to \mathsf{false}) \\ & A = \forall \vec{\alpha}(P^1(\alpha_1,\beta_1) \to \cdots \to \forall \beta(P^n(\alpha_n,\beta_n) \to \mathsf{false}) \to \mathsf{false}) \end{split}$$

# Beweis Konklusion

 $\Gamma \vdash \textit{false} \quad \textit{gdw}. \quad \textit{Es existiert ein } \lambda 2 \; \textit{Term M, sodass } \overline{\Gamma} \vdash \textit{M} : \textit{false}.$ 

# Beweis Konklusion

 $\Gamma \vdash \textit{false} \quad \textit{gdw.} \quad \textit{Es existiert ein } \lambda 2 \; \textit{Term M, sodass} \; \overline{\Gamma} \vdash \textit{M} : \textit{false}.$ 

**CONS** ≤ **INHAB** 

## Beweis Konklusion

 $\Gamma \vdash \textit{false} \quad \textit{gdw}. \quad \textit{Es existiert ein } \pmb{\lambda 2} \; \textit{Term M, sodass} \; \overline{\Gamma} \vdash \textit{M} : \textit{false}.$ 

**CONS** ≤ **INHAB** 

INHAB ist unentscheidbar.

#### Literatur

- [1] H.P. Barendregt, Lambda calculi with types, Handbook of Logic in Computer Science, Volume II, 1993.
- [2] P. Urzyczyn, Inhabitation in Typed Lambda-Calculi (A Syntactic Approach), Typed Lambda Calculi and Applications, 1997.