Bewohntheit in $\boldsymbol{\lambda 2}$

Florian Starke

October 10, 2015

Structure

luiuh

$\boldsymbol{\lambda}$2 Typen und Terme

asd

$\boldsymbol{\lambda}$2 Typen

$$\mathsf{T}_{\lambda 2} = a \mid t_1 \to t_2 \mid \forall \alpha . t$$

$\lambda 2$ Typen und Terme

asd

$\lambda 2$ Typen

$$\mathsf{T}_{\lambda 2} = a \mid t_1 \to t_2 \mid \forall \alpha . t$$

$\lambda 2$ Terme

$$\Lambda_{\mathsf{T}_{\lambda 2}} = x \mid M_1 M_2 \mid \lambda x : t . M \mid \Lambda \alpha . M \mid M\, t$$

Bewohntheitsproblem

asd

Gegeben ein $\boldsymbol{\lambda 2}$ Typ t.

Gibt es einen $\boldsymbol{\lambda 2}$ Term M sodass $\emptyset \vdash M : t$?

Bewohntheitsproblem

asd

Gegeben eine Basis Γ und ein $\boldsymbol{\lambda 2}$ Typ t.

Gibt es einen $\boldsymbol{\lambda 2}$ Term M sodass $\Gamma \vdash M : t$?

P-Formeln

asd

Eine prädikatenlogische Formel φ ist eine atomare Formel falls $\varphi = \textbf{false}$ oder $\varphi = P(a, b)$.

P-Formeln

asd

Eine prädikatenlogische Formel φ ist eine

atomare Formel falls $\varphi = \textbf{false}$ oder $\varphi = P(a, b)$.

universelle Formel falls $\varphi = \forall\vec{\alpha}(A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n)$ und für alle $\alpha \in \mathsf{FV}(A_n) \cap \mathsf{GV}(\varphi)$ existiert ein $i < n$ sodass $\alpha \in \mathsf{FV}(A_i)$.

P-Formeln

asd

Eine prädikatenlogische Formel φ ist eine

atomare Formel falls $\varphi = \mathbf{false}$ oder $\varphi = P(a, b)$.

universelle Formel falls $\varphi = \forall \vec{\alpha}(A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n)$ und für alle $\alpha \in \mathrm{FV}(A_n) \cap \mathrm{GV}(\varphi)$ existiert ein $i < n$ sodass $\alpha \in \mathrm{FV}(A_i)$.

existentielle Formel falls $\varphi = \forall \vec{\alpha}(A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_{n-1} \to \forall \beta(A_n \to \mathbf{false}) \to \mathbf{false})$ und für alle $\alpha \in (\mathrm{FV}(A_n) \cap \mathrm{GV}(\varphi)) \setminus \{\beta\}$ existiert ein $i < n$ sodass $\alpha \in \mathrm{FV}(A_i)$.

P-Formeln

asd

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$

P-Formeln

asd

$\forall \alpha P(\alpha, b)$	keine **P**-Formel
$\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$	

P-Formeln

asd

$\forall \alpha P(\alpha, b)$	keine **P**-Formel
$\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \to P(\alpha, b))$	**P**-Formel
$\forall \beta (P(\beta, a) \to \mathbf{false}) \to \mathbf{false}$	

P-Formeln

asd

$\forall \alpha P(\alpha, b)$	keine **P**-Formel
$\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \to P(\alpha, b))$	**P**-Formel
$\forall \beta (P(\beta, a) \to \mathbf{false}) \to \mathbf{false}$	**P**-Formel
$\forall \alpha (\forall \beta (P(\beta, \alpha) \to \mathbf{false}) \to \mathbf{false})$	

P-Formeln

asd

$\forall \alpha P(\alpha, b)$	keine **P**-Formel
$\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \to P(\alpha, b))$	**P**-Formel
$\forall \beta (P(\beta, a) \to \mathbf{false}) \to \mathbf{false}$	**P**-Formel
$\forall \alpha (\forall \beta (P(\beta, \alpha) \to \mathbf{false}) \to \mathbf{false})$	keine **P**-Formel

asd

asd

(Axiom)	$\Gamma, A \vdash A$	
($\rightarrow$ -Introduction)	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$	
($\rightarrow$ -Elimination)	$\dfrac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	
($\forall$-Introduction)	$\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \forall \alpha B}$	$\alpha \notin \mathsf{FV}(\Gamma)$
($\forall$-Elimination)	$\dfrac{\Gamma \vdash \forall \alpha B}{\Gamma \vdash B\,[\alpha := b]}$	$b \in \mathcal{V}_P$

asd

asd

(Axiom)	$\Gamma, x : t \vdash x : t$	
(λ-Introduction)	$\dfrac{\Gamma, x : t_1 \vdash M : t_2}{\Gamma \vdash \lambda x : t_1 . M : t_1 \to t_2}$	
(λ-Elimination)	$\dfrac{\Gamma \vdash M_1 : t_1 \to t_2 \quad \Gamma \vdash M_2 : t_1}{\Gamma \vdash M_1 M_2 : t_2}$	
($\forall$-Introduction)	$\dfrac{\Gamma \vdash M : t}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha . M : \forall\alpha . t}$	$\alpha \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$
($\forall$-Elimination)	$\dfrac{\Gamma \vdash M : \forall\alpha . t}{\Gamma \vdash M\, t' : t\,[\alpha := t']}$	

Beweis

Konstruktion

$$\mathsf{CONS} \leq \mathsf{INHAB}$$

Beweis

Konstruktion

$$\mathsf{CONS} \leq \mathsf{INHAB}$$

Zu einer gegeben $\mathbf{P}$-Basis Γ konstruieren wir ein $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{2}$-Basis $\overline{\Gamma}$ sodass

$\Gamma \vdash \boldsymbol{false}$ *gdw.* *Es existiert ein* $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{2}$ *Term* M *sodass* $\overline{\Gamma} \vdash M : \boldsymbol{false}$

Beweis

Konstruktion

For a **P**-formula A we define the code of A, denoted by $\overline{A}$, as follows. If A is an atomic formula then

$$\overline{A} = \begin{cases} \mathbf{false} & \text{if } A = \mathbf{false} \\ (\alpha \to p_1) \to (\beta \to p_2) \to p & \text{if } A = P(\alpha, \beta) \end{cases}$$

We will abbreviate $(\alpha \to p_1) \to (\beta \to p_2) \to p$ to $P_{\alpha\beta}$.
If A is a universal formula, it follows that there is an $n \in \mathbb{N}$, atomic formulas $A_1, A_2, \ldots, A_n$, and an $\vec{\alpha} = \overline{\alpha}_1 \ldots \overline{\alpha}_m$ for some $m \in \mathbb{N}$ and $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_m \in \mathcal{V}_P$ such that $A = \forall\vec{\alpha}(A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n)$, then

$$\overline{A} = \forall\vec{\alpha}(\overline{A_1} \to \overline{A_2} \to \cdots \to \overline{A_n})$$

If A is an existential formula, it follows that for some $n \in \mathbb{N}^+$, some atomic formulas $A_1, \ldots, A_n$, some $\vec{\alpha} = \overline{\alpha}_1 \ldots \overline{\alpha}_m$ for some $m \in \mathbb{N}$ and $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_m \in \mathcal{V}_P$, and some $\beta \in \mathcal{V}_P$ it holds that
$A = \forall\vec{\alpha}(A_1 \to \cdots \to A_{n-1} \to \forall\beta((A_n) \to \mathbf{false}) \to \mathbf{false})$, then

$$\overline{A} = \forall\vec{\alpha}(\overline{A_1} \to \cdots \to \forall\beta(\overline{A_n} \to \mathbf{false}) \to \mathbf{false})$$

For a **P**-basis Γ we define the code of Γ, denoted by $\overline{\Gamma}$, as

Beweis

asd

$$\Gamma \vdash \textbf{\textit{false}} \quad \Rightarrow \quad \textit{Es existiert ein } \boldsymbol{\lambda 2} \textit{ Term } M \textit{ sodass } \overline{\Gamma} \vdash M : \textbf{\textit{false}}$$

Beweis

asd

$$\Gamma \vdash \textbf{\textit{false}} \quad \Rightarrow \quad \textit{Es existiert ein } \boldsymbol{\lambda 2} \textit{ Term } M \textit{ sodass } \overline{\Gamma} \vdash M : \textbf{\textit{false}}$$

$$\Gamma \vdash A \quad \Rightarrow \quad \textit{Es existiert ein } \boldsymbol{\lambda 2} \textit{ Term } M \textit{ sodass } \overline{\Gamma} \vdash M : \overline{A}$$

Beweis

asd

$$\Gamma, A \vdash A$$

Beweis

asd

$$\Gamma, A \vdash A \xrightarrow{\text{Konstruktion}} \overline{\Gamma}, x : \overline{A} \vdash x : \overline{A}$$

Beweis

asd

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Beweis

asd

$$\begin{tikzcd} \dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \arrow[r, bend left, "\mathrm{IH}"] & \overline{\Gamma}, x : \overline{A} \vdash M : \overline{B} \end{tikzcd}$$

Beweis

asd

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \quad \xrightarrow{\text{IH}} \quad \frac{\overline{\Gamma}, x : \overline{A} \vdash M : \overline{B}}{\overline{\Gamma} \vdash \lambda x : \overline{A}.M : \overline{A} \to \overline{B}}$$

Beweis

asd

$$\frac{\Gamma \vdash \forall \alpha A}{\Gamma \vdash A\,[\alpha := b]}$$

Beweis

asd

$$\frac{\Gamma \vdash \forall\alpha A}{\Gamma \vdash A\,[\alpha := b]} \qquad \xrightarrow{\quad \mathrm{IH} \quad} \qquad \overline{\Gamma} \vdash M : \forall\alpha.\overline{A}$$

Beweis

asd

$$\frac{\Gamma \vdash \forall \alpha A}{\Gamma \vdash A\,[\alpha := b]} \quad \xrightarrow{\text{IH}} \quad \frac{\overline{\Gamma} \vdash M : \forall \alpha . \overline{A}}{\overline{\Gamma} \vdash M\, b : \overline{A}\,[\alpha := b]}$$

Beweis

asd

$$\Gamma \vdash \boldsymbol{false} \quad \Leftarrow \quad \textit{Es existiert ein } \boldsymbol{\lambda 2} \textit{ Term } M \textit{ sodass } \overline{\Gamma} \vdash M : \boldsymbol{false}$$

Beweis

asd

$$\Gamma \vdash \boldsymbol{false} \quad \Leftarrow \quad \textit{Es existiert ein } \boldsymbol{\lambda 2} \textit{ Term } M \textit{ sodass } \overline{\Gamma} \vdash M : \boldsymbol{false}$$

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Gamma} \vdash M : P_{st} & \Rightarrow & \Gamma \vdash P(s,t) \\ \overline{\Gamma} \vdash M : \boldsymbol{false} & \Rightarrow & \Gamma \vdash \boldsymbol{false} \end{array}$$

asd

asd

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma} \vdash x : \forall\vec{\alpha}(P^1_{\alpha_1\beta_1} \to \cdots \to P^n_{\alpha_n\beta_n} \to P_{\alpha\beta})}{\overline{\Gamma} \vdash x\vec{t} : P^1_{s_1t_1} \to \cdots \to P^n_{s_nt_n} \to P_{st}} \qquad \overline{\Gamma} \vdash N_1 : P^1_{s_1t_1}}{\vdots}}{\overline{\Gamma} \vdash x\vec{t}N_1 \ldots N_{n-1} : P^n_{s_nt_n} \to P_{st}} \qquad \overline{\Gamma} \vdash N_n : P^n_{s_nt_n}}{\overline{\Gamma} \vdash (x\vec{t}N_1 \ldots N_{n-1})N_n : P_{st}}$$