#### Bewohntheit in $\lambda 2$

Florian Starke

October 10, 2015

### Structure

luiuh

 $\lambda 2$  Typen

$$\mathsf{T}_{\lambda 2} = \mathsf{a} \mid \mathsf{t}_1 \to \mathsf{t}_2 \mid \forall \alpha. \mathsf{t}$$

asd

$$\lambda 2$$
 Typen

$$\mathsf{T}_{\lambda 2} = \mathsf{a} \mid \mathsf{t}_1 \to \mathsf{t}_2 \mid \forall \alpha. \mathsf{t}$$

 $\lambda 2$  Terme

$$\Lambda_{\mathsf{T}_{\lambda_2}} = x \mid M_1 M_2 \mid \lambda x : t.M \mid \Lambda \alpha.M \mid M t$$

## Bewohntheitsproblem asd

Gegeben ein  $\lambda 2$  Typ t.

Gibt es einen  $\lambda 2$  Term M sodass  $\emptyset \vdash M : t$ ?

Gegeben eine Basis  $\Gamma$  und ein  $\lambda 2$  Typ t.

Gibt es einen  $\lambda 2$  Term M sodass  $\Gamma \vdash M : t$ ?

## **P**-Formeln

asd

Eine prädikatenlogische Formel  $\varphi$  ist eine atomare Formel falls  $\varphi = \text{false}$  oder  $\varphi = P(a, b)$ .

### P-Formeln

asd

Eine prädikatenlogische Formel  $\varphi$  ist eine atomare Formel falls  $\varphi = \mathbf{false}$  oder  $\varphi = P(a,b)$ . universelle Formel falls  $\varphi = \forall \vec{\alpha} (A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n)$  und für alle  $\alpha \in \mathsf{FV}(A_n) \cap \mathsf{GV}(\varphi)$  existiert ein i < n sodass  $\alpha \in \mathsf{FV}(A_i)$ .

```
Eine prädikatenlogische Formel \varphi ist eine
atomare Formel falls \varphi = false oder \varphi = P(a, b).
universelle Formel falls \varphi = \forall \vec{\alpha} (A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n) und für alle
                     \alpha \in FV(A_n) \cap GV(\varphi) existiert ein i < n sodass
                     \alpha \in FV(A_i).
existentielle Formel falls \varphi = \forall \vec{\alpha}(A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_{n-1} \to a_n)
                     \forall \beta (A_n \rightarrow \mathsf{false}) \rightarrow \mathsf{false}) \text{ und für alle}
                     \alpha \in (\mathsf{FV}(A_n) \cap \mathsf{GV}(\varphi)) \setminus \{\beta\} existiert ein i < n sodass
                     \alpha \in FV(A_i).
```

asd

 $\forall \alpha P(\alpha, b)$ 

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$
  
 $\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$ 

keine P-Formel

$$\forall \alpha P(\alpha, b)$$
  
 $\forall \alpha (Q(\alpha, \alpha) \rightarrow P(\alpha, b))$   
 $\forall \beta (P(\beta, a) \rightarrow \mathsf{false}) \rightarrow \mathsf{false}$ 

keine P-Formel P-Formel

$$\begin{split} &\forall \alpha P(\alpha,b) \\ &\forall \alpha (Q(\alpha,\alpha) \to P(\alpha,b)) \\ &\forall \beta (P(\beta,a) \to \mathsf{false}) \to \mathsf{false} \\ &\forall \alpha (\forall \beta (P(\beta,\alpha) \to \mathsf{false}) \to \mathsf{false}) \end{split}$$

keine P-Formel

**P**-Formel

P-Formel

$\forall \alpha P(\alpha, b)$	keine <b>P</b> -Forme
$orall lpha(\mathcal{Q}(lpha,lpha) o P(lpha,b))$	P-Formel
orall eta(P(eta,a)  o false)  o false	<b>P</b> -Formel
$\forall \alpha (\forall \beta (P(\beta, \frac{\alpha}{\alpha}) \rightarrow false) \rightarrow false)$	keine <b>P</b> -Forme

$$\begin{array}{ll} \text{(Axiom)} & \Gamma, A \vdash A \\ \\ \text{($\rightarrow$ -Introduction)} & \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \\ \\ \text{($\rightarrow$ -Elimination)} & \frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \\ \\ \text{($\forall$ -Introduction)} & \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \forall \alpha B} \qquad \alpha \notin \mathsf{FV}(\Gamma) \\ \\ \text{($\forall$ -Elimination)} & \frac{\Gamma \vdash \forall \alpha B}{\Gamma \vdash B \ [\alpha := b]} \qquad b \in \mathcal{V}_P \\ \end{array}$$

```
(Axiom)
                                             \Gamma, x: t \vdash x: t
                                              \frac{\Gamma, x : t_1 \vdash M : t_2}{\Gamma \vdash \lambda x : t_1 \cdot M : t_1 \to t_2}
(\lambda-Introduction)
                                              \Gamma \vdash M_1 : t_1 \rightarrow t_2 \quad \Gamma \vdash M_2 : t_1
(\lambda-Elimination)
                                                                  \overline{\Gamma \vdash M_1 M_2} : t_2
                                              \frac{\Gamma \vdash M : t}{\Gamma \vdash \Lambda \alpha . M : \forall \alpha . t}
(∀-Introduction)
                                                                                                                                 \alpha \notin \mathsf{FV}(\Gamma)
                                              \frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha.t}{\Gamma \vdash M t' : t \left[\alpha := t'\right]}
(∀-Elimination)
```

### Beweis Konstruktion

 $\text{CONS} \leq \text{INHAB}$ 

#### Beweis Konstruktion

#### **CONS** < **INHAB**

Zu einer gegeben P-Basis  $\Gamma$  konstruieren wir ein  $\lambda 2$ -Basis  $\overline{\Gamma}$  sodass

 $\Gamma \vdash \textit{false} \quad \textit{gdw.} \quad \textit{Es existiert ein } \lambda 2 \; \textit{Term M sodass} \; \overline{\Gamma} \vdash \textit{M} : \textit{false}$ 

#### **Beweis**

#### Konstruktion

For a **P**-formula A we define the code of A, denoted by  $\overline{A}$ , as follows. If A is an atomic formula then

$$\overline{A} = egin{cases} ext{false} & ext{if } A = ext{false} \ (lpha 
ightarrow p_1) 
ightarrow (eta 
ightarrow p_2) 
ightarrow p & ext{if } A = P(lpha, eta) \end{cases}$$

We will abbreviate  $(\alpha \to p_1) \to (\beta \to p_2) \to p$  to  $P_{\alpha\beta}$ . If A is a universal formula, it follows that there is an  $n \in \mathbb{N}$ , atomic formulas  $A_1, A_2, \ldots, A_n$ , and an  $\vec{\alpha} = \overline{\alpha}_1 \ldots \overline{\alpha}_m$  for some  $m \in \mathbb{N}$  and  $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_m \in \mathcal{V}_P$  such that  $A = \forall \vec{\alpha} (A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n)$ , then

$$\overline{A} = \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \to \overline{A_2} \to \cdots \to \overline{A_n})$$

If A is an existential formula, it follows that for some  $n \in \mathbb{N}^+$ , some atomic formulas  $A_1, \ldots, A_n$ , some  $\vec{\alpha} = \overline{\alpha}_1 \ldots \overline{\alpha}_m$  for some  $m \in \mathbb{N}$  and  $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_m \in \mathcal{V}_P$ , and some  $\beta \in \mathcal{V}_P$  it holds that  $A = \forall \vec{\alpha}(A_1 \to \cdots \to A_{n-1} \to \forall \beta((A_n) \to \mathsf{false}) \to \mathsf{false})$ , then

$$\overline{A} = \forall \vec{\alpha} (\overline{A_1} \to \cdots \to \forall \beta (\overline{A_n} \to \mathsf{false}) \to \mathsf{false})$$

For a P-basis  $\Gamma$  we define the code of  $\Gamma$ , denoted by  $\overline{\Gamma}$ , as

 $\Gamma \vdash false \Rightarrow Es \ existiert \ ein \ \lambda 2 \ Term \ M \ sodass \ \overline{\Gamma} \vdash M : false$ 

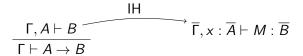
 $\Gamma \vdash \textit{false} \Rightarrow \textit{Es existiert ein } \lambda 2 \textit{ Term M sodass } \overline{\Gamma} \vdash \textit{M} : \textit{false}$ 

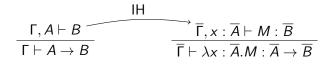
 $\Gamma \vdash A \implies Es \ existiert \ ein \ \lambda 2 \ Term \ M \ sodass \ \overline{\Gamma} \vdash M : \overline{A}$ 

 $\Gamma$ ,  $A \vdash A$ 

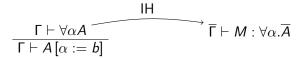
$$\Gamma, A \vdash A \xrightarrow{\mathsf{Konstruktion}} \overline{\Gamma}, x : \overline{A} \vdash x : \overline{A}$$

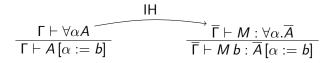
$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$





$$\frac{\Gamma \vdash \forall \alpha A}{\Gamma \vdash A \left[\alpha := b\right]}$$





 $\Gamma \vdash$  **false**  $\Leftarrow$  **Es** existiert ein  $\lambda 2$  **Term** M sodass  $\overline{\Gamma} \vdash M$ : **false** 

# Beweis asd

$$\Gamma \vdash \textit{false} \iff \textit{Es existiert ein } \lambda 2 \; \textit{Term M sodass } \overline{\Gamma} \vdash \textit{M} : \textit{false}$$

$$\overline{\Gamma} \vdash M : P_{st} \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma \vdash P(s,t)$$
 $\overline{\Gamma} \vdash M : false \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma \vdash false$ 

$$\frac{\overline{\Gamma} \vdash x : \forall \vec{\alpha} (P_{\alpha_{1}\beta_{1}}^{1} \to \cdots \to P_{\alpha_{n}\beta_{n}}^{n} \to P_{\alpha\beta})}{\overline{\Gamma} \vdash x\vec{t} : P_{s_{1}t_{1}}^{1} \to \cdots \to P_{s_{n}t_{n}}^{n} \to P_{st}} \qquad \overline{\Gamma} \vdash N_{1} : P_{s_{1}t_{1}}^{1}}$$

$$\vdots$$

$$\overline{\overline{\Gamma} \vdash x\vec{t}N_{1} \dots N_{n-1} : P_{s_{n}t_{n}}^{n} \to P_{st}} \qquad \overline{\Gamma} \vdash N_{n} : P_{s_{n}t_{n}}^{n}}$$

$$\overline{\Gamma} \vdash (x\vec{t}N_{1} \dots N_{n-1})N_{n} : P_{st}$$