

Modulbegleitende Aufgabe II

Shanshan Huang, Florian Starke

30. November 2015

Gegeben seien $N \in \mathbb{N}$, eine Zerlegung Δ_N des Intervalls $[-1, 1]$ durch die Stützstellen $-1 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N \leq 1$, und die Funktionen $f_R, f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_R(x) := \frac{1}{1 + 25x^2},$$

$$f_1(x) := (1 + \cos(\frac{3}{2}\pi x))^{2/3}.$$

1 Polynominterpolation

1.1 Gleichverteilte Stützstellen

Die $N+1$ Stützstellen sind äquidistant verteilt. Es folgt $x_i := -1 + 2i/N$ für $i = 0, \dots, N$.

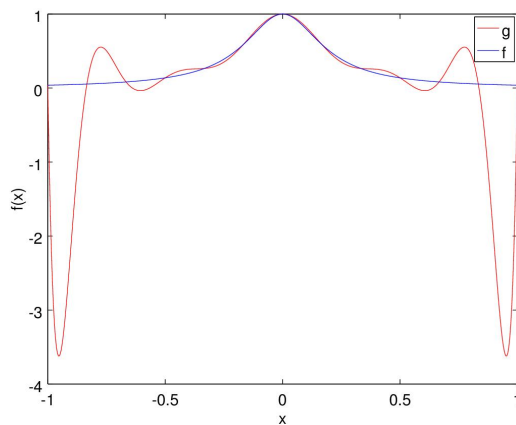


Abbildung 1

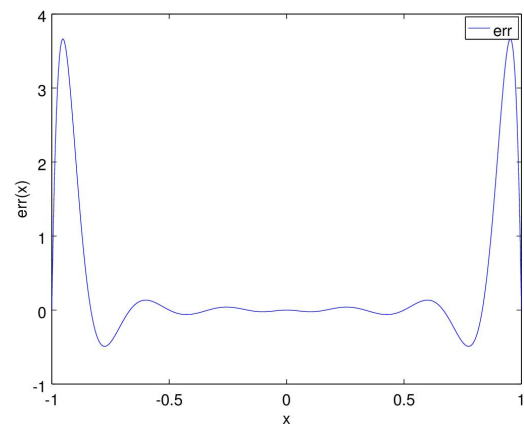


Abbildung 2

In Abbildung 1 ist f_R und das interpolierte Polynom g_{12} abgebildet. Wie erwartet ist bei einer Gleichverteilung der Stützstellen

Dasselbe für f_1 :

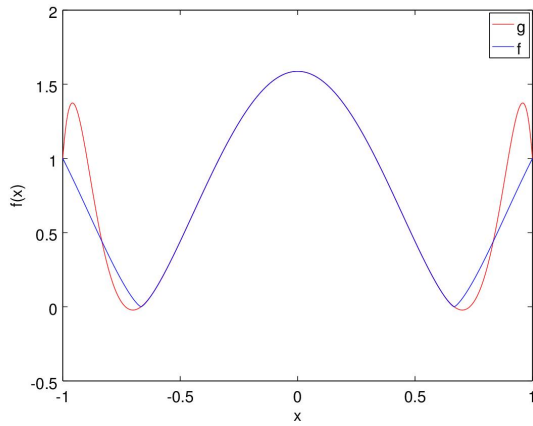


Abbildung 3

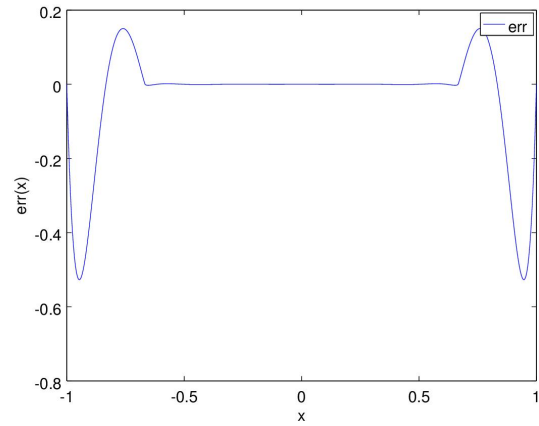


Abbildung 4

1.2 Tschebyschow-Stützstellen

Als Stützstellen werden die Nullstellen des Tschebyschow-Polynoms T_{N+1} gewählt. Also definieren wir $x_i := \cos(\frac{2i+1}{2N+2}\pi)$ für $i = 0, \dots, N$.

f_R :

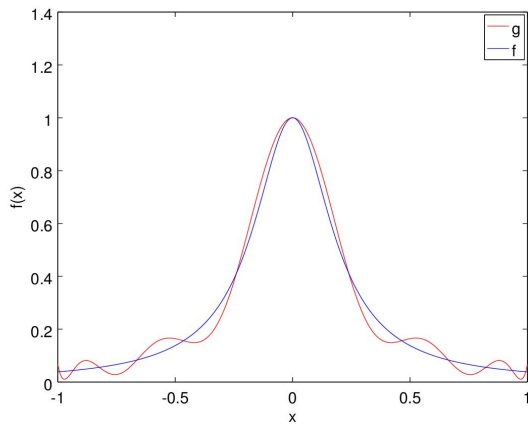


Abbildung 5

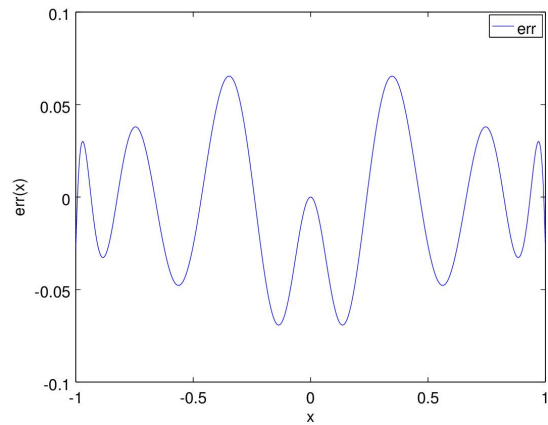


Abbildung 6

Vivamus vehicula leo a justo. Quisque nec augue. Morbi mauris wisi, aliquet vitae, dignissim eget, sollicitudin molestie, ligula. In dictum enim sit amet risus. Curabitur vitae velit eu diam rhoncus hendrerit. Vivamus ut elit. Praesent mattis ipsum quis turpis. Curabitur rhoncus neque eu dui. Etiam vitae magna. Nam ullamcorper. Praesent interdum bibendum magna. Quisque auctor aliquam dolor. Morbi eu lorem et est porttitor fermentum. Nunc egestas arcu at tortor varius viverra. Fusce eu nulla ut nulla interdum consectetur. Vestibulum gravida. Morbi mattis libero sed est.

f_1 :

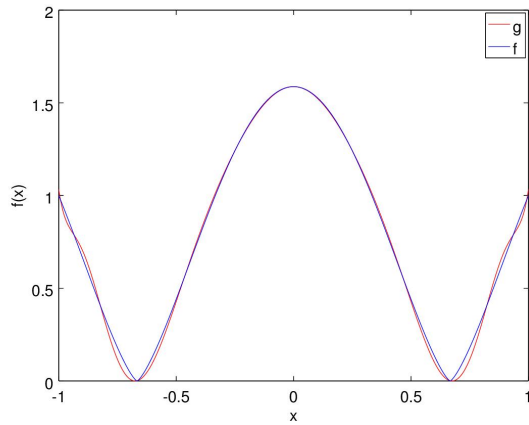


Abbildung 7

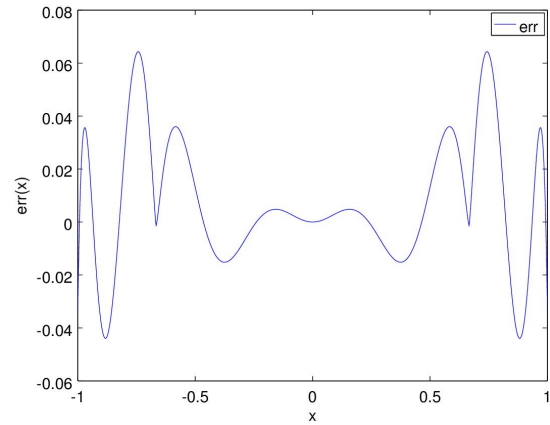


Abbildung 8

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetur odio sem sed wisi.

2 Spline-Interpolation

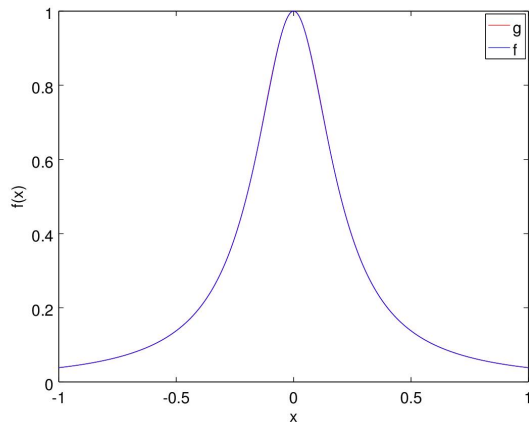


Abbildung 9

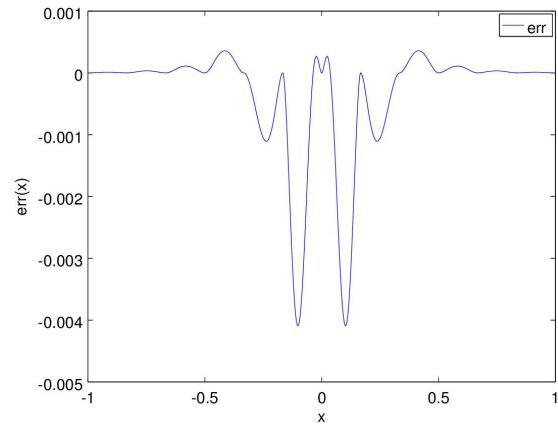


Abbildung 10

Fehler für $N_1 = 2$, $N_2 = 4$, und $N_3 = 8$.

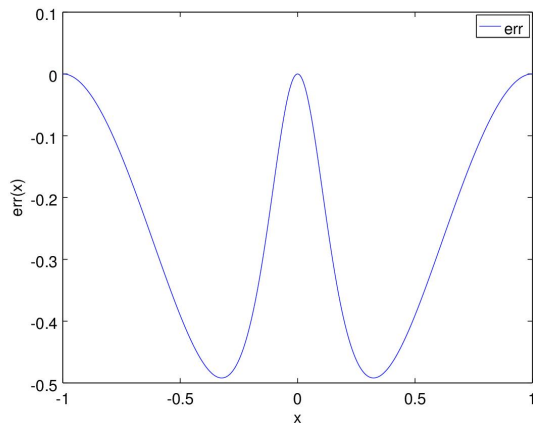


Abbildung 11: N_1

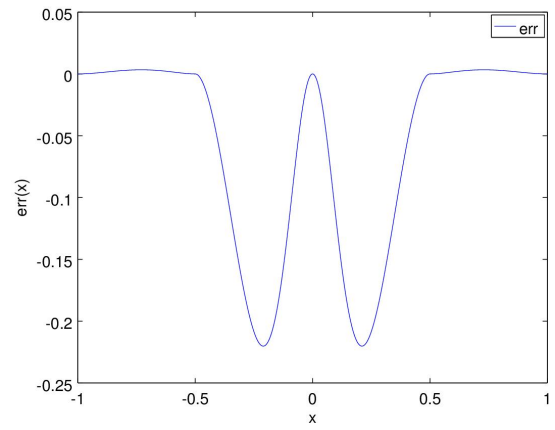


Abbildung 12: N_2

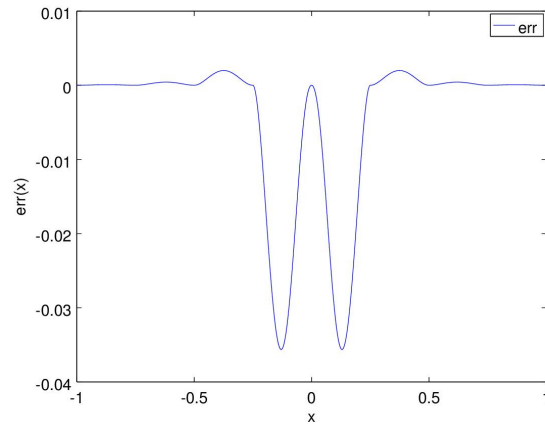


Abbildung 13: N_3

k	$E(h_{N_k})$	$\text{EOC}(h_{N_k}, h_{N_{k+1}})$
1	4.8928×10^{-1}	1.1572
2	2.1938×10^{-1}	2.6272
3	3.5509×10^{-2}	4.3901
4	1.6935×10^{-3}	2.1237
5	3.8860×10^{-4}	3.5334
6	3.3560×10^{-5}	3.8869
7	2.2686×10^{-6}	3.9719
8	1.4917×10^{-7}	3.9930
9	9.0802×10^{-9}	3.9982
10	5.6820×10^{-10}	3.9996
11	3.5523×10^{-11}	3.9999
12	2.2204×10^{-12}	—

Nochmal Spline-Interpolation für f_1 :

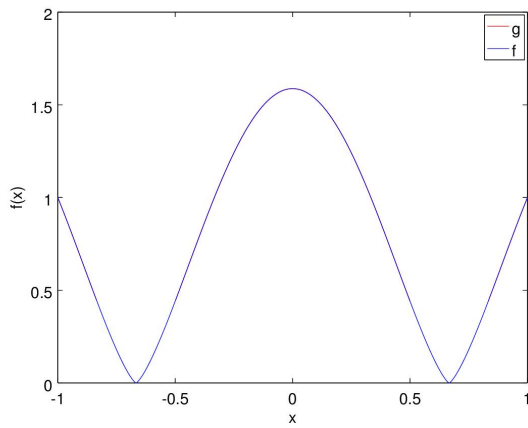


Abbildung 14

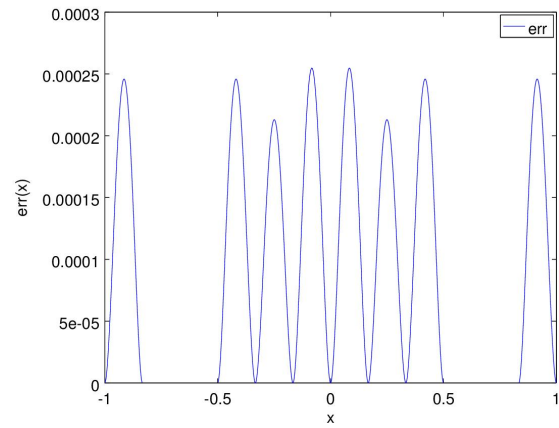


Abbildung 15

Fehler für $N_1 = 2$, $N_2 = 4$, und $N_3 = 8$.

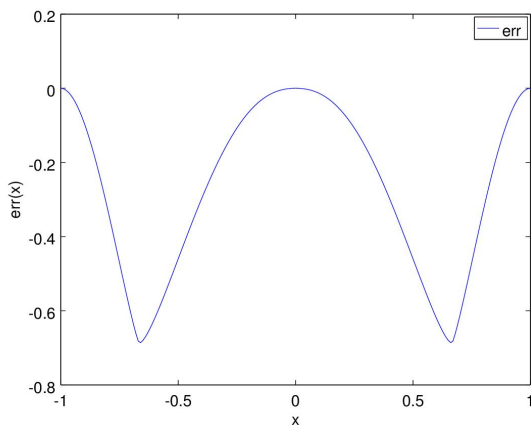


Abbildung 16: N_1

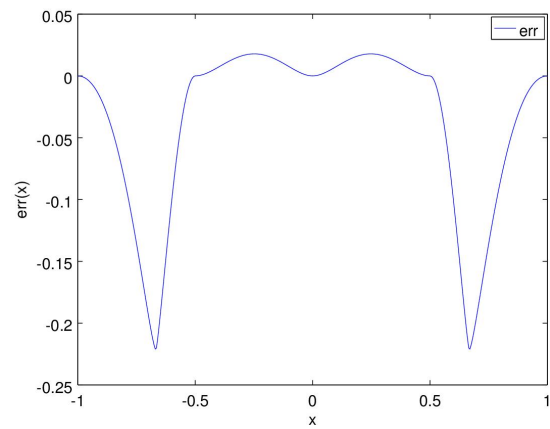


Abbildung 17: N_2

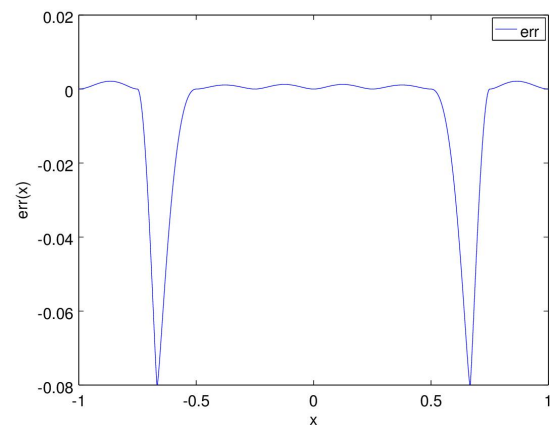


Abbildung 18: N_3