Metrische Räume

Metrischer Raum: Sei X eine Menge. Eine Metrik auf X ist eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty]$ mit

1. $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$
2. $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
3. $\forall x \in X : d(x, x) = 0$
4. $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

Das Paar (X, d) ist ein metrischer Raum.

Cauchy-Folge: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X heißt Cauchy-Folge

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

offen,abgeschlossen: Sei (X, d) ein metrischer Raum.
$U \subseteq X$ heißt offen

$$\Leftrightarrow \forall x \in U : \exists s > 0 : B(x, s) \subseteq U.$$

$A \subseteq X$ heißt abgeschlossen

$$\Leftrightarrow X \setminus A \text{ offen.}$$

Satz: Sei (X, d) ein metrischer Raum. $A \subseteq X$ abgeschlossen

$$\Leftrightarrow \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } A : a_n \to a \text{ in } X \Rightarrow x \in A$$

$\square$

vollständig: Sei (X, d) ein metrischer Raum. X heißt vollständig

$$\Leftrightarrow \text{jede Cauchy-Folge in } X \text{ konvergiert.}$$

Stetigkeit

Stetigkeit: Seien (X, d) und (Y, e) metrische Räume, $f : X \to Y$, $a \in X$. Dann is f stetig in a

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X : d(a, x) < \delta \Rightarrow e(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : f(B_X(a, \delta)) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon).$$

Satz:Zwischenwertsatz Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\forall A \in \mathbb{R} : f(a) < A < f(b) \text{ oder } f(b) < A < f(a) \Rightarrow \exists x \in [a, b] : f(x) = A$$

$\square$