Modulbegleitende Aufgabe II

Shanshan Huang, Florian Starke

4. Dezember 2015

Gegeben seien $N \in \mathbb{N}$, eine Zerlegung Δ_N des Intervalls $[-1, 1]$ durch die Stützstellen $-1 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_N \leq 1$, und die Funktionen $f_R, f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_R(x) := \frac{1}{1+25x^2},$$

$$f_1(x) := (1 + \cos(\frac{3}{2}\pi x))^{2/3}.$$

1 Polynominterpolation

1.1 Gleichverteilte Stützstellen

Die $N+1$ Stützstellen sind äquidistant verteilt. Es folgt $x_i := -1+2i/N$ für $i = 0, \ldots, N$.

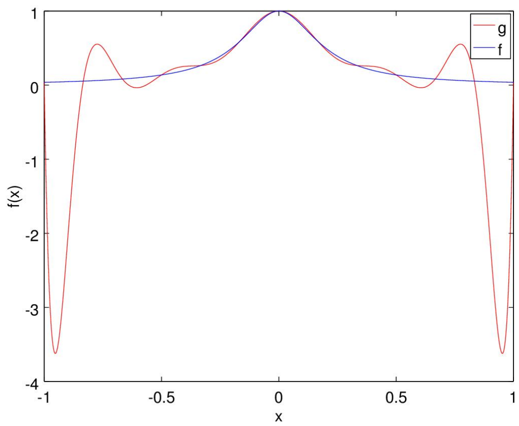

Abbildung 1

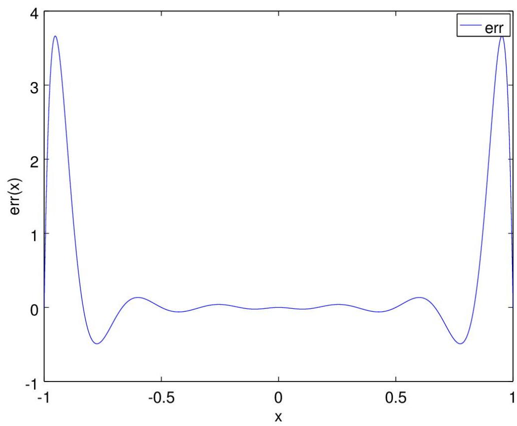

Abbildung 2

In Abbildung 1 ist f_R und das interpolierte Polynom g_{12} im Intervall I abgebildet. Wie erwartet ist bei einer Gleichverteilung der Stützstellen der Fehler am Rand sehr groß.

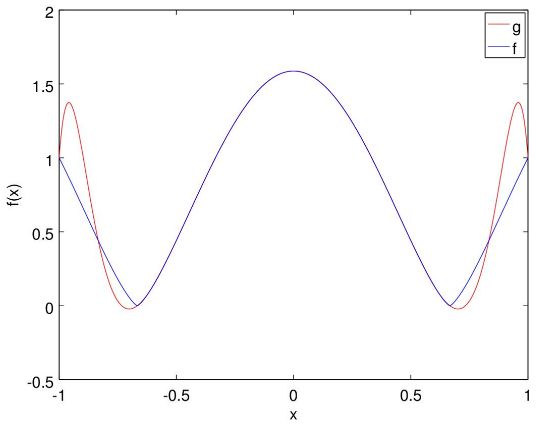

Abbildung 3

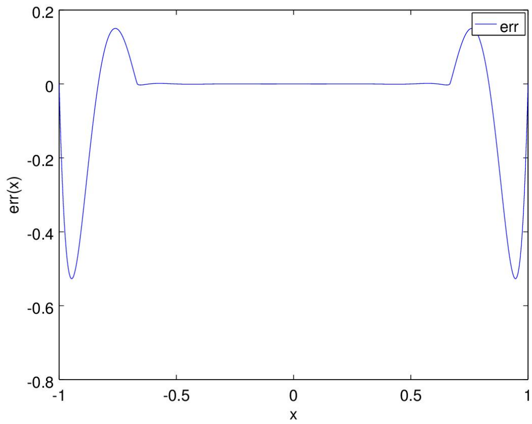

Abbildung 4

In den Abbildungen 3 und 4 sieht man die Funktion f_1 zusammen mit entsprechendem g_{12} bzw. F_{12}.

Begründung des Fehlerverhaltens:

Wenn wir mehr Stützstellen hinzufügen, kann es sein ,dass die Polynomfunktion im Allgemeinen die zu interpolierenden Funktion nicht besser approximiert. Da der Interpolationsfehler wie folgt abgeschätzt werden kann.

$$\|f(x) - g_N(x)\| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!}\|\omega\|$$

Je höher der Grad ist, desto größer ist der Fehler, da bei der Runge Funktion die Ableitungen sehr groß werden. Der Fehler ist an den Intervallgrenzen am größten, da hier $|\omega|$ maximal ist.

1.2 Tschebyschow-Stützstellen

Als Stützstellen werden die Nullstellen des Tschebyschow-Polynoms T_{N+1} gewählt. Also definieren wir $x_i := \cos(\frac{2i+1}{2N+2}\pi)$ für $i = 0, \ldots, N$.

Die Runge Funktion und g_{12}:

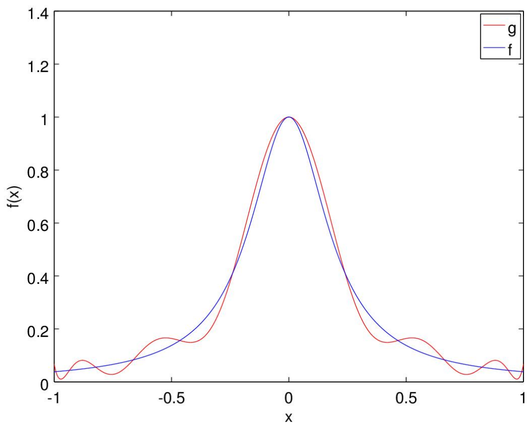

Abbildung 5

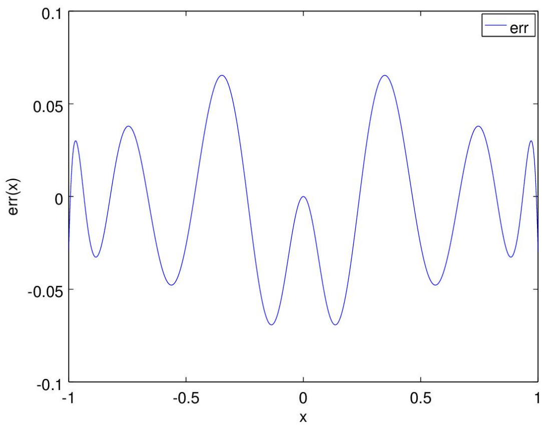

Abbildung 6

Wie erwartet ist der Fehler an den Intervallgrenzen wesentlich geringer als bei äquidistanten Stützstellen.

Die Funktion f_1:

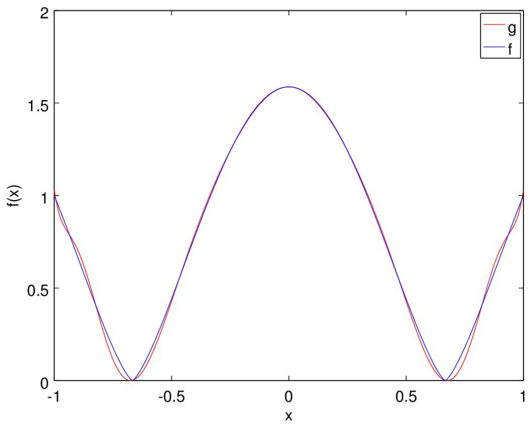

Abbildung 7

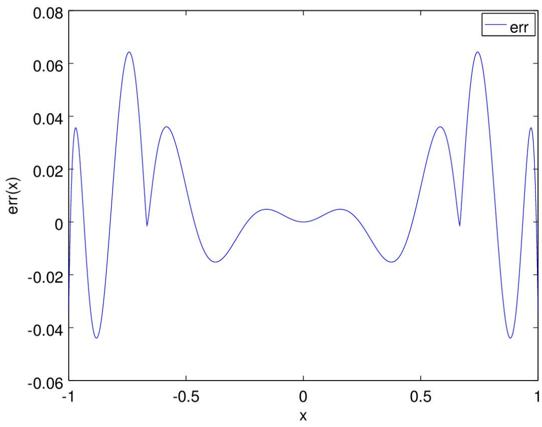

Abbildung 8

Begründung des Fehlerverhaltens:

Bei Tschebyschow Stützstellen ist ω am Rand kleiner, dafür aber in der Intervallmittel größer, als bei äquidistanten Stützstellen. Dementsprechend auch der Fehler.

2 Spline-Interpolation

Ziel ist es jetzt nicht mehr die Funktion f durch ein Polynom zu interpolieren sondern nur noch durch eine stückweise polynomielle Funktion (Spline). In diesem Fall geht es um Splines vom Grad 3 mit Glattheit 1. Wir kennen sowohl die Funktion als auch die erste Ableitung der Funktion.

Sei s die gesuchte Spline Funktion. Dann ist $s_k := s|_{[x_k,x_{k+1}]}$ (für $k = 0, \dots, N-1$) ein Polynom dritten Grades mit $s_k = a_k(x-x_k)^3 + b_k(x-x_k)^2 + c_k(x-x_k) + d_k$. Wobei die Koeffizienten aus den gegebenen Funktions- und Ableitungswerten wie folgt berechnet werden können.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{-2}{h_k^3} \cdot (f(x_{k+1}) - f(x_k)) + \frac{1}{h_k^2} \cdot (f'(x_k) + f'(x_{k+1})) \\ b_k &= \frac{3}{h_k^2} \cdot (f(x_{k+1}) - f(x_k)) - \frac{1}{h_k} \cdot (2f'(x_k) + f'(x_{k+1})) \\ c_k &= f'(x_k) \\ d_k &= f(x_k) \end{aligned}$$

Mit $h_k := x_{k+1} - x_k$. Für Herleitung siehe Vorlesung.

Die erste Ableitung der Runge Funktion ist:

$$f_R'(x) = \frac{-50x}{(25x^2+1)^2}$$

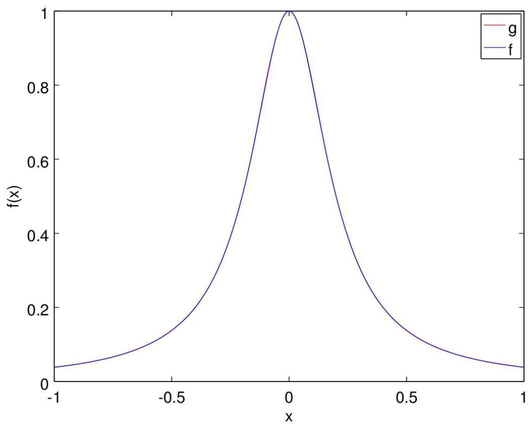

Abbildung 9

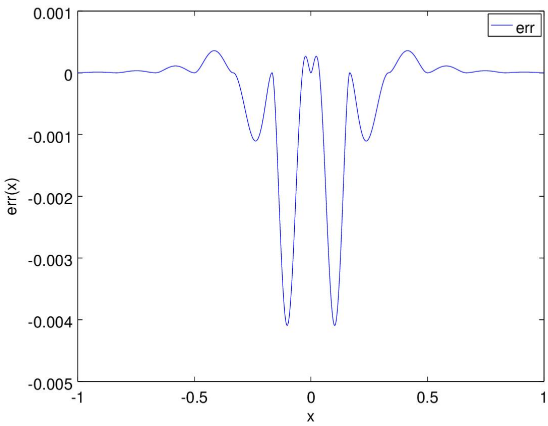

Abbildung 10

Wie man sieht ist die Spline Interpolation wesentlich genauer als die Polynominterpolation.

Fehler für $N_1 = 2$, $N_2 = 4$, und $N_3 = 8$.

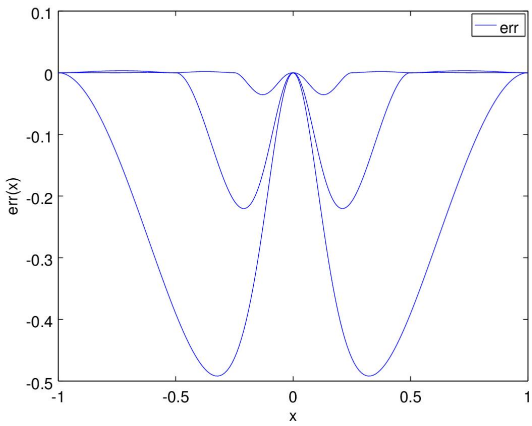

Abbildung 11

k	$E(h_{N_k})$	$\mathrm{EOC}(h_{N_k}, h_{N_{k+1}})$
1	4.8928×10^{-1}	1.1572
2	2.1938×10^{-1}	2.6272
3	3.5509×10^{-2}	4.3901
4	1.6935×10^{-3}	2.1237
5	3.8860×10^{-4}	3.5334
6	3.3560×10^{-5}	3.8869
7	2.2686×10^{-6}	3.9719
8	1.4917×10^{-7}	3.9930
9	9.0802×10^{-9}	3.9982
10	5.6820×10^{-10}	3.9996
11	3.5523×10^{-11}	3.9999
12	2.2204×10^{-12}	–

Nochmal Spline-Interpolation für f_1:
Fehler für $N_1 = 2$, $N_2 = 4$, und $N_3 = 8$.

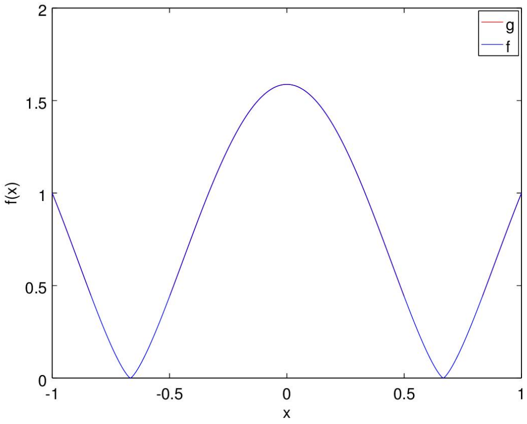

Abbildung 12

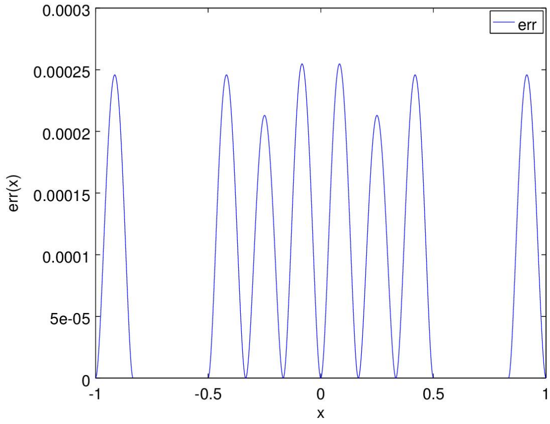

Abbildung 13

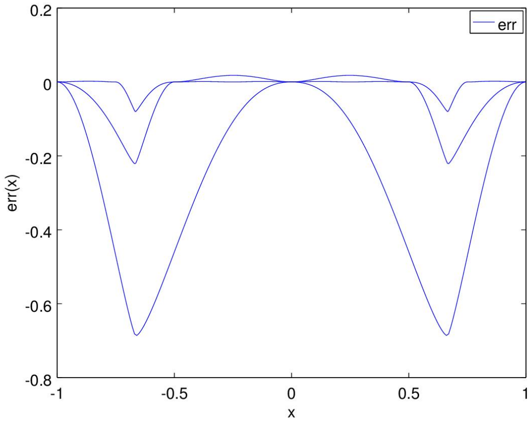

Abbildung 14