

1 Analytische Lösung für vereinfachtes Rechenmodell

$$\begin{aligned}
 u_r &= C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1-v^2}{8E} \rho \omega^2 r^3 + (1+v) \frac{\alpha}{r} \int_a^r r' \Delta T dr' \\
 \sigma_r &= \frac{E}{1-v} C_1 - \frac{E}{(1+v)r^2} C_2 - \frac{3+v}{8} \rho \omega^2 r^2 + \frac{E\alpha}{r^2} \int_a^r r' \Delta T dr' \\
 \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-v} C_1 + \frac{E}{(1+v)r^2} C_2 - \frac{1+3v}{8} \rho \omega^2 r^2 + E\alpha \left(\Delta T - \frac{1}{r^2} \int_a^r r' \Delta T dr' \right)
 \end{aligned}$$

Aus $\omega = 0$ und $\Delta T = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
 u_r &= C_1 r + \frac{C_2}{r} \\
 \sigma_r &= \frac{E}{1-v} C_1 - \frac{E}{(1+v)r^2} C_2 \\
 \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-v} C_1 + \frac{E}{(1+v)r^2} C_2
 \end{aligned}$$

Gegeben sind $\sigma_r(r_1) = \sigma_1$ und $u_r(r_2) = 0$. Damit kann man C_1 und C_2 herleiten:

$$0 = C_1 r_2 + \frac{C_2}{r_2}$$

$$C_1 = -\frac{C_2}{r_2^2} \quad (1)$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-v} C_1 - \frac{E}{(1+v)r_1^2} C_2$$

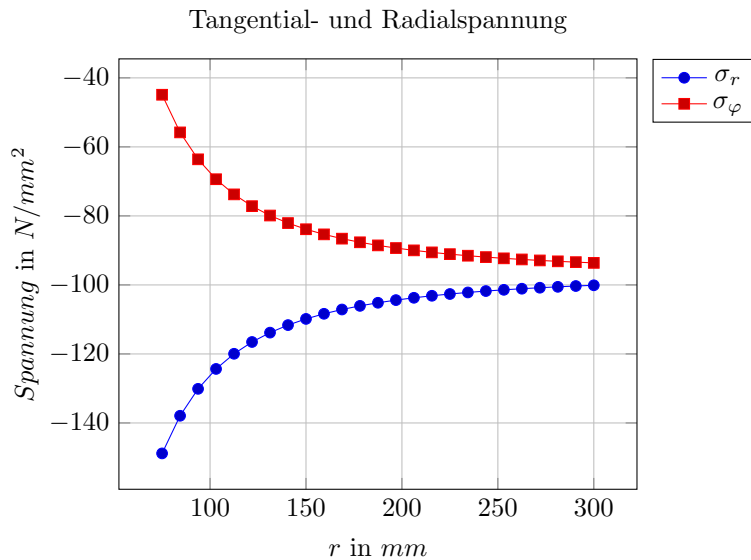
$$\sigma_1 = -\frac{E}{(1-v)r_2^2} C_2 - \frac{E}{(1+v)r_1^2} C_2$$

$$C_2 = -\frac{\sigma_1(1-v)(1+v)r_2^2 r_1^2}{E(1+v)r_1^2 + E(1-v)r_2^2} \quad (2)$$

Mit $\sigma_1 = -100 \text{ N/mm}^2$ und $u_r(r_2) = 0 \text{ mm}$ folgt:

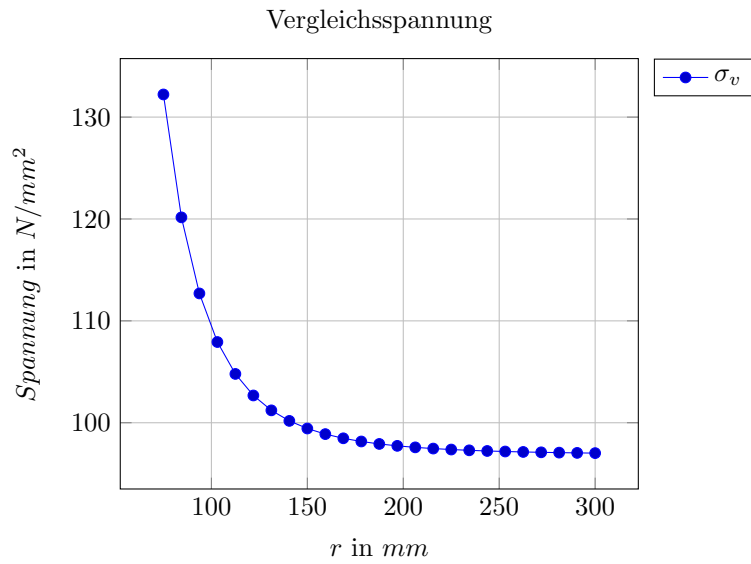
$$C_1 \approx -3,39 \cdot 10^{-4}$$

$$C_2 \approx 1,90 \text{ mm}^2$$

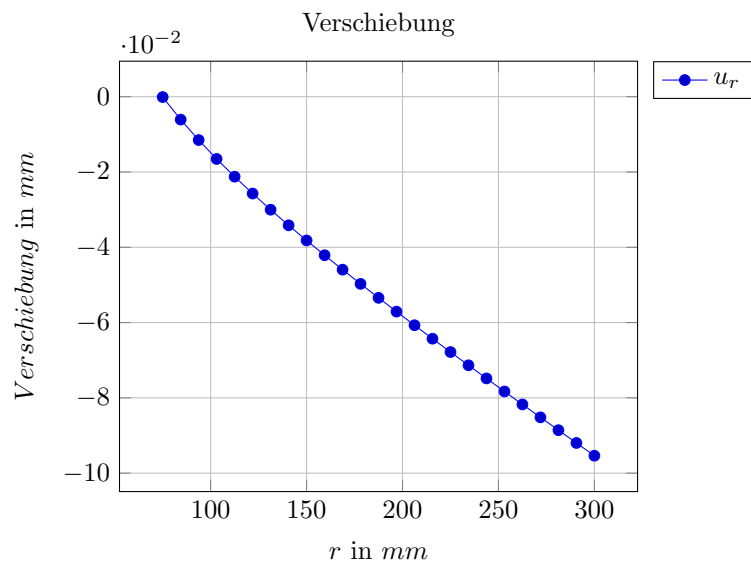


Vergleichsspannung

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r \sigma_\varphi}$$



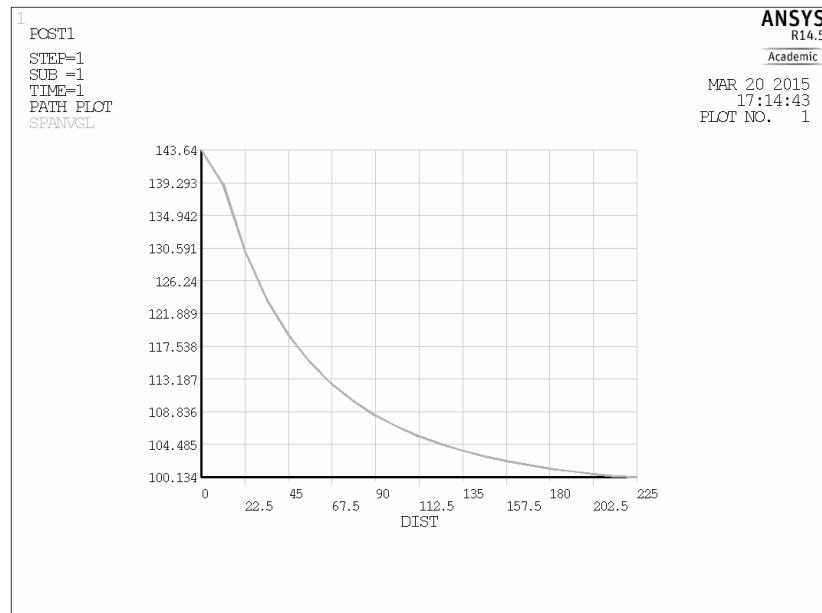
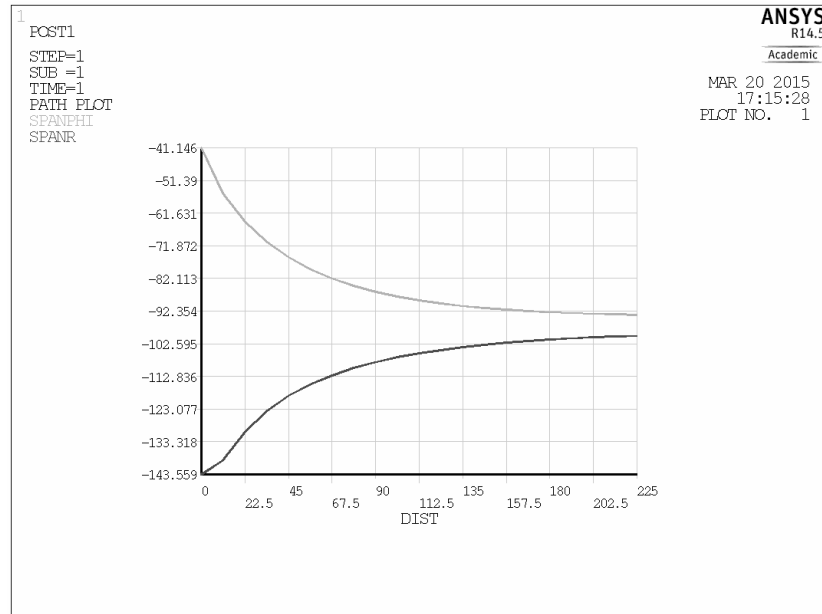
Größte Vergleichsspannung bei $r = 75 \text{ mm}$,
 $\sigma_r(75 \text{ mm}) \approx -148.82 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_\varphi(75 \text{ mm}) \approx -44.89 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_v(75 \text{ mm}) \approx 132,22 \text{ N/mm}^2$.



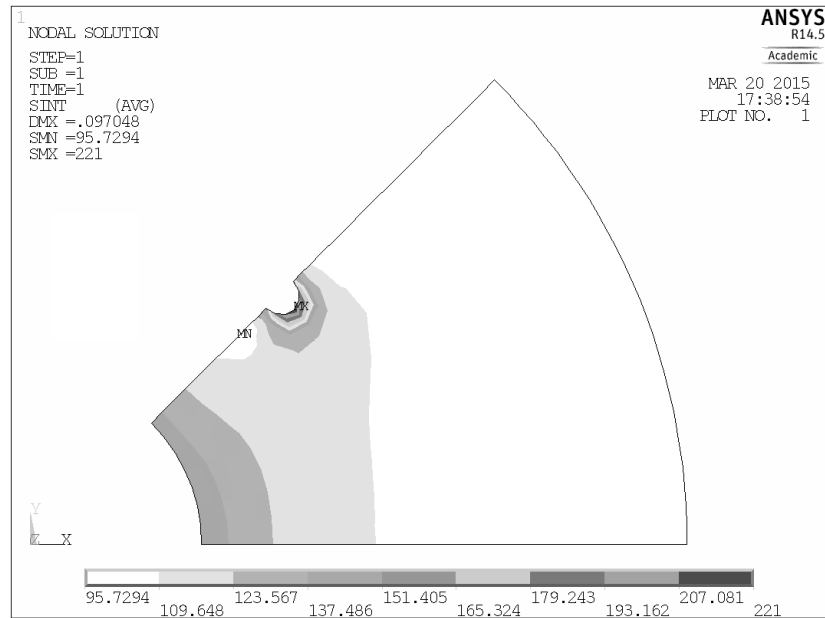
Betragsmäßig maximale Verschiebung bei $r = 300 \text{ mm}$, $|u_r(300 \text{ mm})| \approx 0,095 \text{ mm}$.

2 ANSYS-Lösung

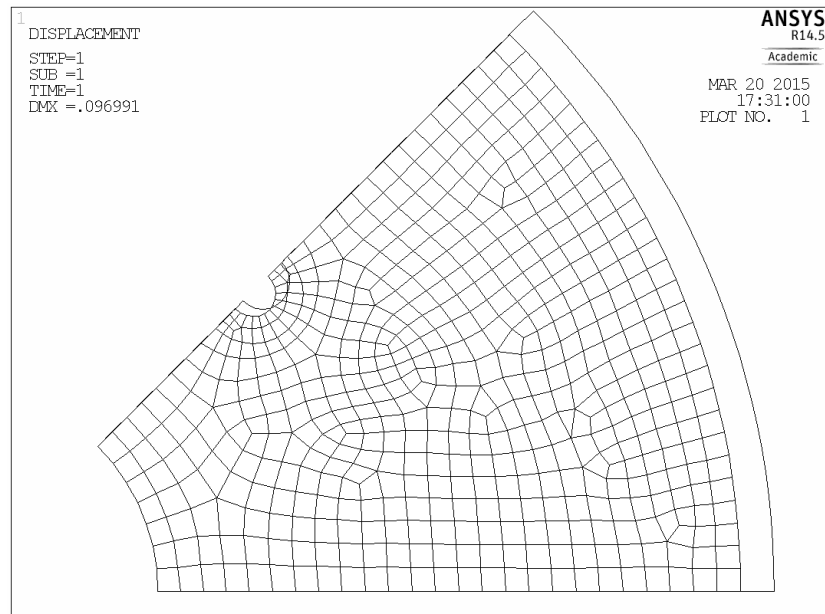
Tangential- und Radialspannung nach ANSYS-Lösung.



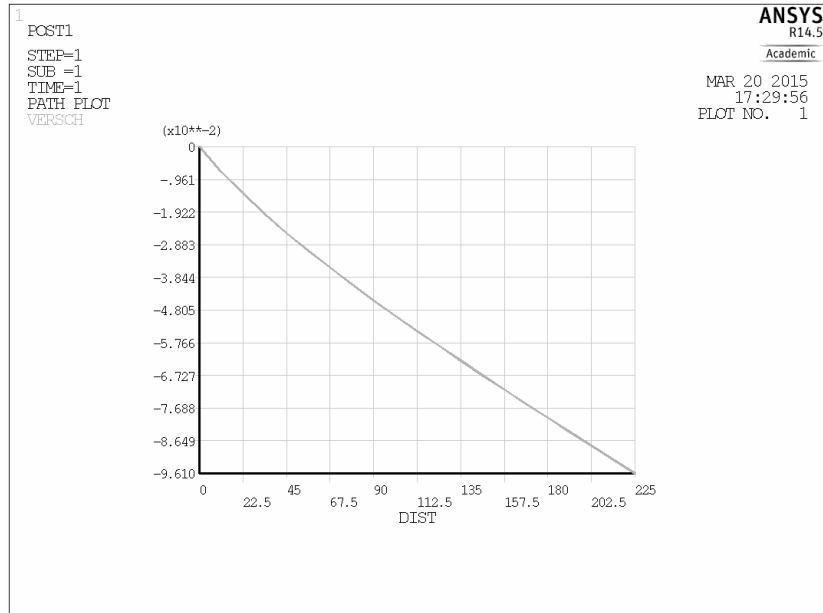
Maximale Vergleichsspannung im ungestörten Scheibenbereich bei $r = 75 \text{ mm}$, $\sigma_v(75 \text{ mm}) \approx 143,64 \text{ N/mm}^2$.



Größte Vergleichsspannung am Lochrand mit $\sigma_v = 221 \text{ N/mm}^2$.



Die Verschiebung ist bei $r = 300 \text{ mm}$ und $\varphi = \pi/4$ mit $0,097 \text{ mm}$ betragsmäßig maximal.



3 Gegenüberstellung

Gegenüberstellung beider Lösungen im ungestörten Scheibenbereich.

	Analytische Lösung	ANSYS-Lösung
$\max u_r $	$0,095 \text{ mm}$	$0,096 \text{ mm}$
$\max \sigma_v$	$132,22 \text{ N/mm}^2$	$143,64 \text{ N/mm}^2$