

# Modulbegleitende Aufgabe II

Shanshan Huang, Florian Starke

29. November 2015

Gegeben seien  $N \in \mathbb{N}$ , eine Zerlegung  $\Delta_N$  des Intervalls  $[-1, 1]$  durch die Stützstellen  $-1 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N \leq 1$ , und die Funktionen  $f_R, f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f_R(x) := \frac{1}{1 + 25x^2},$$

$$f_1(x) := (1 + \cos(\frac{3}{2}\pi x))^{2/3}.$$

## 1 Polynominterpolation

### 1.1 Gleichverteilte Stützstellen

Die  $N+1$  Stützstellen sind äquidistant verteilt. Es folgt  $x_i := -1 + 2i/N$  für  $i = 0, \dots, N$ .

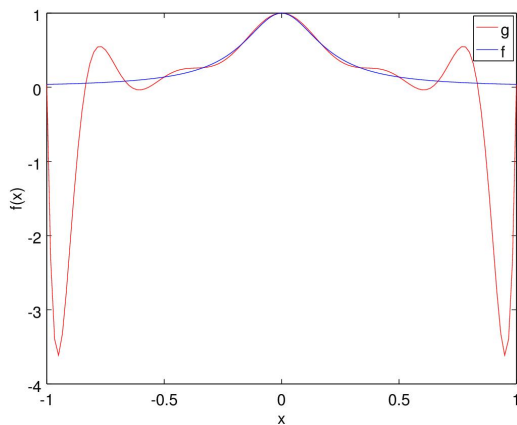


Abbildung 1

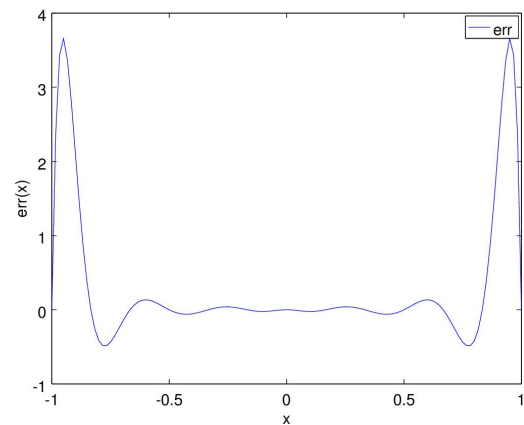


Abbildung 2

In Abbildung 1 ist  $f_R$  und das interpolierte Polynom  $g_{12}$  abgebildet. Wie erwartet ist bei einer Gleichverteilung der Stützstellen ....

## 1.2 Tschebyschow-Stützstellen

Als Stützstellen werden die Nullstellen des Tschebyschow-Polynoms  $T_{N+1}$  gewählt. Also definieren wir  $x_i := \cos(\frac{2k-1}{2N+2}\pi)$  für  $i = 0, \dots, N$ .

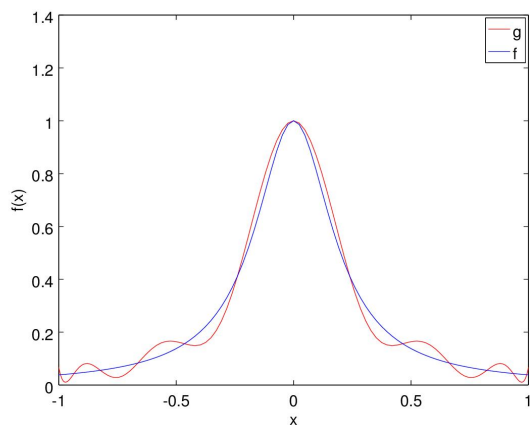


Abbildung 3

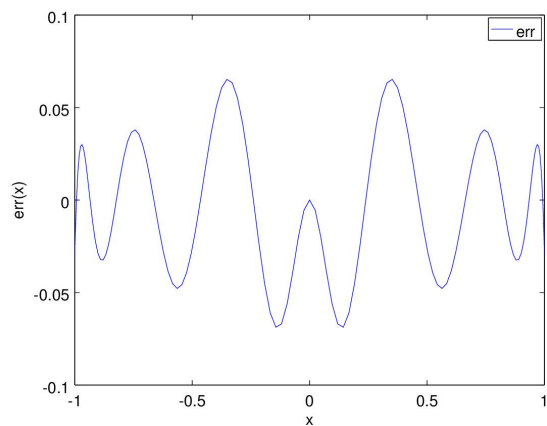


Abbildung 4

## 2 Spline-Interpolation

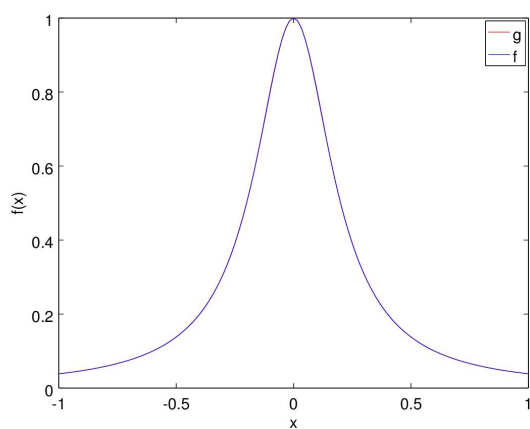


Abbildung 5

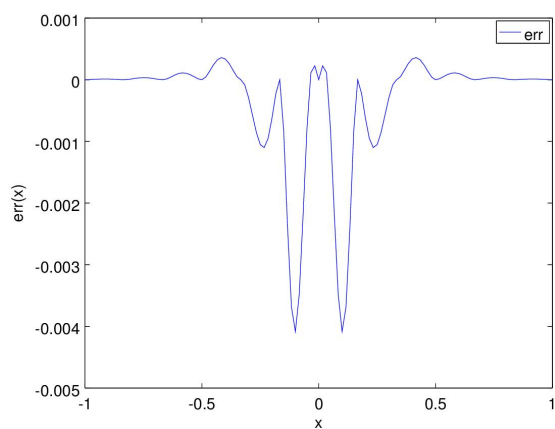


Abbildung 6

Fehler für  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = 4$ , und  $N_3 = 8$ .

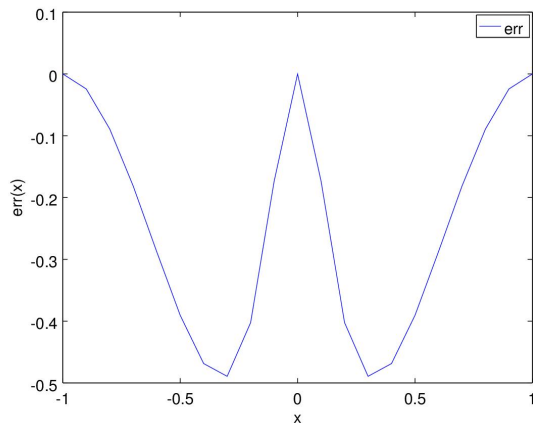


Abbildung 7:  $N_1$

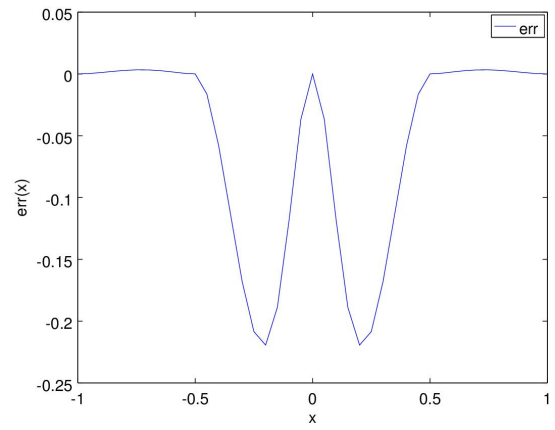


Abbildung 8:  $N_2$

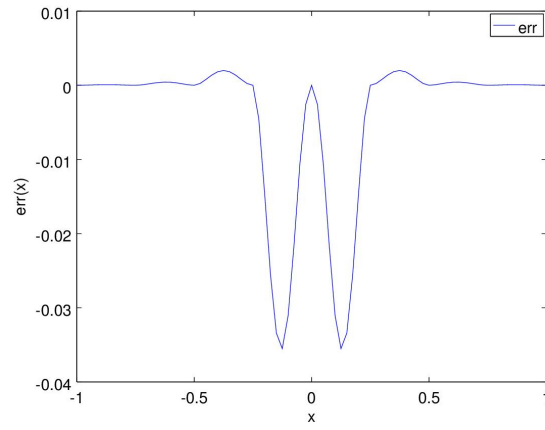


Abbildung 9:  $N_3$

| $k$ | $E(h_{N_k})$             | $\text{EOC}(h_{N_k}, h_{N_{k+1}})$ |
|-----|--------------------------|------------------------------------|
| 1   | $4.8928 \times 10^{-1}$  | 1.1572                             |
| 2   | $2.1938 \times 10^{-1}$  | 2.6272                             |
| 3   | $3.5509 \times 10^{-2}$  | 4.3901                             |
| 4   | $1.6935 \times 10^{-3}$  | 2.1237                             |
| 5   | $3.8860 \times 10^{-4}$  | 3.5334                             |
| 6   | $3.3560 \times 10^{-5}$  | 3.8869                             |
| 7   | $2.2686 \times 10^{-6}$  | 3.9719                             |
| 8   | $1.4917 \times 10^{-7}$  | 3.9930                             |
| 9   | $9.0802 \times 10^{-9}$  | 3.9982                             |
| 10  | $5.6820 \times 10^{-10}$ | 3.9996                             |
| 11  | $3.5523 \times 10^{-11}$ | 3.9999                             |
| 12  | $2.2204 \times 10^{-12}$ | —                                  |