

# Modulbegleitende Aufgabe II

Shanshan Huang, Florian Starke

4. Dezember 2015

Gegeben seien  $N \in \mathbb{N}$ , eine Zerlegung  $\Delta_N$  des Intervalls  $[-1, 1]$  durch die Stützstellen  $-1 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N \leq 1$ , und die Funktionen  $f_R, f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f_R(x) := \frac{1}{1 + 25x^2},$$

$$f_1(x) := (1 + \cos(\frac{3}{2}\pi x))^{2/3}.$$

## 1 Polynominterpolation

### 1.1 Gleichverteilte Stützstellen

Die  $N+1$  Stützstellen sind äquidistant verteilt. Es folgt  $x_i := -1 + 2i/N$  für  $i = 0, \dots, N$ .

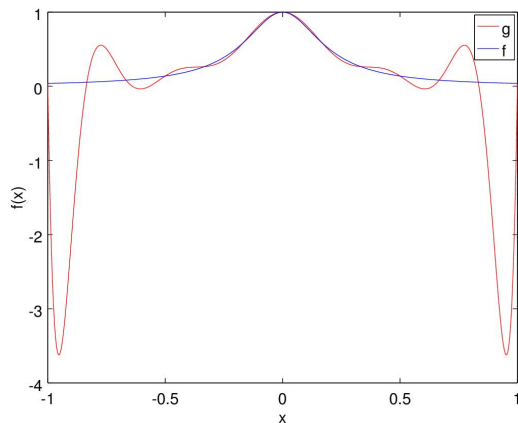


Abbildung 1

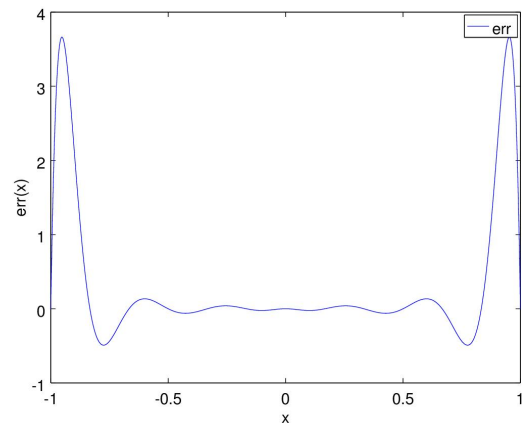


Abbildung 2

In Abbildung 1 ist  $f_R$  und das interpolierte Polynom  $g_{12}$  im Intervall  $I$  abgebildet. Wie erwartet ist bei einer Gleichverteilung der Stützstellen der Fehler am Rand sehr groß.

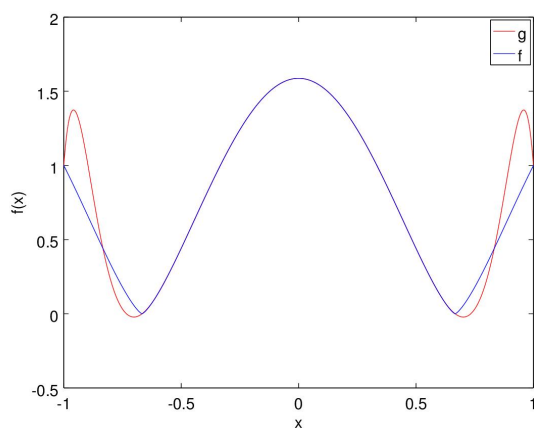


Abbildung 3

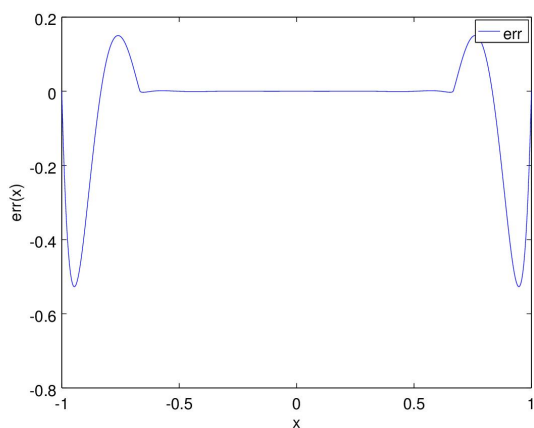


Abbildung 4

In den Abbildungen 3 und 4 sieht man die Funktion  $f_1$  zusammen mit entsprechendem  $g_{12}$  bzw.  $F_{12}$ .

Begründung des Fehlerverhaltens:

Wenn wir mehr Stützstellen hinzufügen, kann es sein, dass die Polynomfunktion im Allgemeinen die zu interpolierenden Funktion nicht besser approximiert. Da der Interpolationsfehler wie folgt abgeschätzt werden kann.

$$\|f(x) - g_N(x)\| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!} \|\omega\|$$

Je höher der Grad ist, desto größer ist der Fehler, da bei der Runge Funktion die Ableitungen sehr groß werden. Der Fehler ist an den Intervallgrenzen am größten, da hier  $|\omega|$  maximal ist.

## 1.2 Tschebyschow-Stützstellen

Als Stützstellen werden die Nullstellen des Tschebyschow-Polynoms  $T_{N+1}$  gewählt. Also definieren wir  $x_i := \cos(\frac{2i+1}{2N+2}\pi)$  für  $i = 0, \dots, N$ .

Die Runge Funktion und  $g_{12}$ :

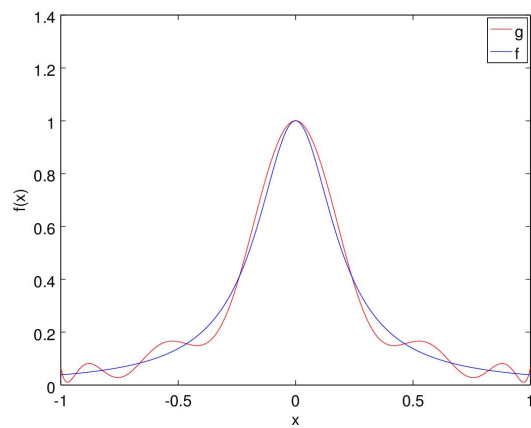


Abbildung 5

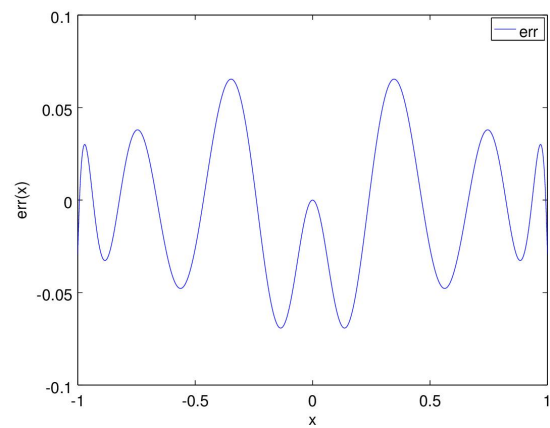


Abbildung 6

Wie erwartet ist der Fehler an den Intervallgrenzen wesentlich geringer als bei äquidistanten Stützstellen.

Die Funktion  $f_1$ :

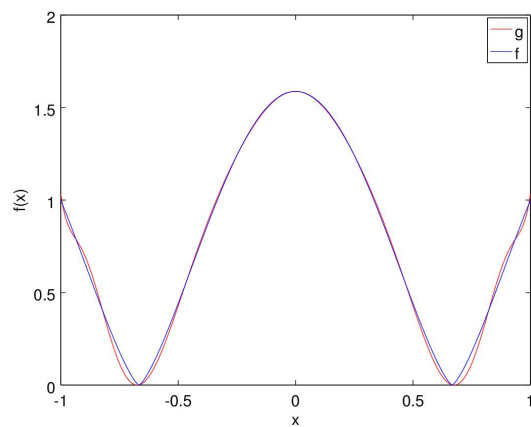


Abbildung 7

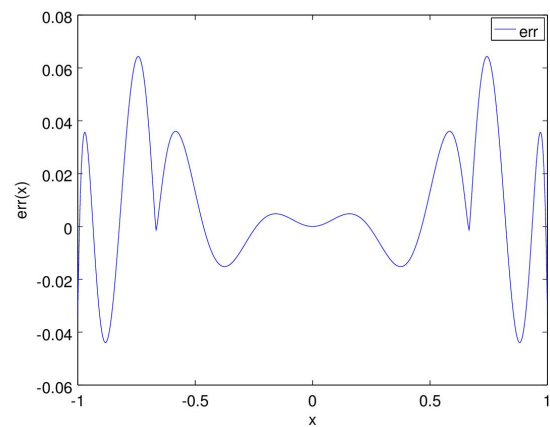


Abbildung 8

Begründung des Fehlerverhaltens:

Bei Tschebyschow Stützstellen ist  $\omega$  am Rand kleiner, dafür aber in der Intervallmitte größer, als bei äquidistanten Stützstellen. Dementsprechend auch der Fehler.

## 2 Spline-Interpolation

Ziel ist es jetzt nicht mehr die Funktion  $f$  durch ein Polynom zu interpolieren sondern nur noch durch eine stückweise polynomielle Funktion (Spline). In diesem Fall geht es um Splines vom Grad 3 mit Glattheit 1. Wir kennen sowohl die Funktion als auch die erste Ableitung der Funktion.

Sei  $s$  die gesuchte Spline Funktion. Dann ist  $s_k := s|_{[x_k, x_{k+1}]}$  (für  $k = 0, \dots, N-1$ ) ein Polynom dritten Grades mit  $s_k = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k$ . Wobei die Koeffizienten aus den gegebenen Funktions- und Ableitungswerten wie folgt berechnet werden können.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{-2}{h_k^3} \cdot (f(x_{k+1}) - f(x_k)) + \frac{1}{h_k^2} \cdot (f'(x_k) + f'(x_{k+1})) \\ b_k &= \frac{3}{h_k^2} \cdot (f(x_{k+1}) - f(x_k)) - \frac{1}{h_k} \cdot (2f'(x_k) + f'(x_{k+1})) \\ c_k &= f'(x_k) \\ d_k &= f(x_k) \end{aligned}$$

Mit  $h_k := x_{k+1} - x_k$ . Für Herleitung siehe Vorlesung.

Die erste Ableitung der Runge Funktion ist:

$$f'_R(x) = \frac{-50x}{(25x^2 + 1)^2}$$

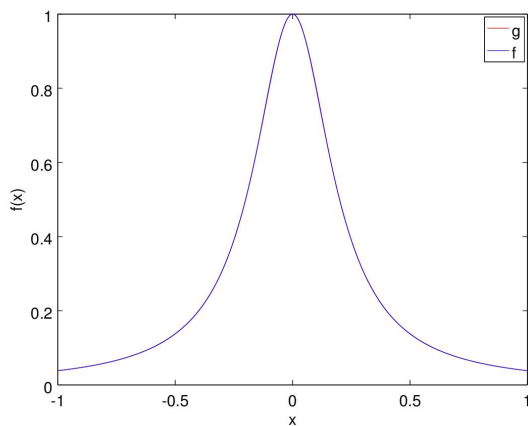


Abbildung 9

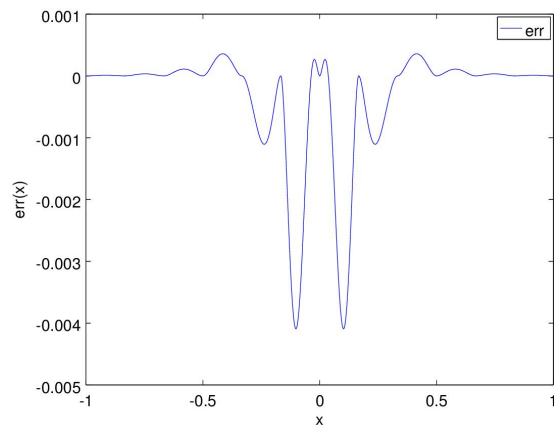


Abbildung 10

Wie man sieht ist die Spline Interpolation wesentlich genauer als die Polynominterpolation.

Fehler für  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = 4$ , und  $N_3 = 8$ .

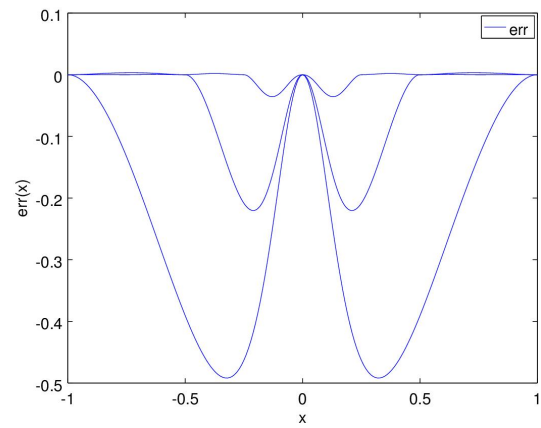


Abbildung 11

$k$	$E(h_{N_k})$	$\text{EOC}(h_{N_k}, h_{N_{k+1}})$
1	$4,8928 \times 10^{-1}$	1,1572
2	$2,1938 \times 10^{-1}$	2,6272
3	$3,5509 \times 10^{-2}$	4,3901
4	$1,6935 \times 10^{-3}$	2,1237
5	$3,8860 \times 10^{-4}$	3,5334
6	$3,3560 \times 10^{-5}$	3,8869
7	$2,2686 \times 10^{-6}$	3,9719
8	$1,4458 \times 10^{-7}$	3,9930
9	$9,0802 \times 10^{-9}$	3,9982
10	$5,6820 \times 10^{-10}$	3,9996
11	$3,5523 \times 10^{-11}$	3,9999
12	$2,2204 \times 10^{-12}$	—

Die erste Ableitung für  $f_1$  ist:

$$f_1'(x) = -\frac{\pi \sin(\frac{3\pi}{2}x)}{(\cos(\frac{3\pi}{2}x) + 1)^{1/3}}$$

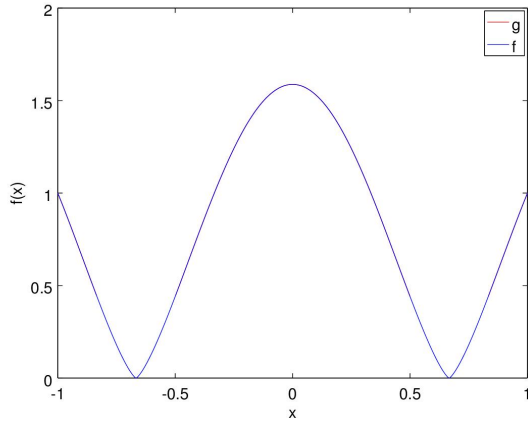


Abbildung 12

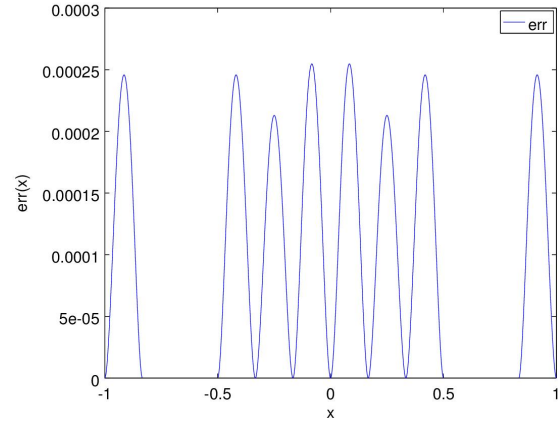


Abbildung 13

Fehler für  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = 4$ , und  $N_3 = 8$ .

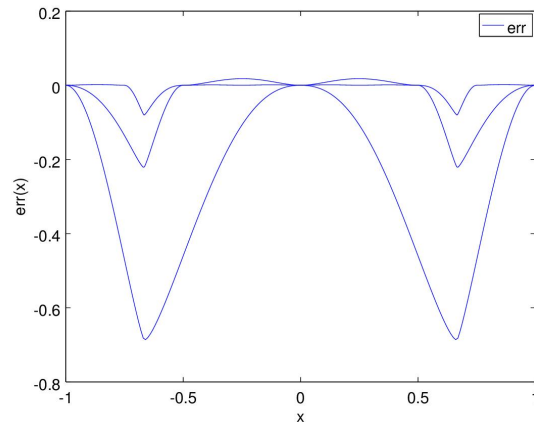


Abbildung 14

$k$	$E(h_{N_k})$	$\text{EOC}(h_{N_k}, h_{N_{k+1}})$
1	$6,2057 \times 10^{-1}$	1,6644
2	$1,9577 \times 10^{-1}$	1,4686
3	$7,0736 \times 10^{-2}$	1,3727
4	$2,7316 \times 10^{-2}$	1,3436
5	$1,0764 \times 10^{-2}$	1,3359
6	$4,2640 \times 10^{-3}$	1,3340
7	$1,6914 \times 10^{-3}$	1,3335
8	$6,7116 \times 10^{-4}$	1,3334
9	$2,6634 \times 10^{-4}$	1,3333
10	$1,0570 \times 10^{-4}$	1,3333
11	$4,1946 \times 10^{-5}$	1,3333
12	$1,6646 \times 10^{-5}$	—

Von den Tabellen sieht man, dass der Fehler sich bei der Runge Funktion schneller verkleinert als bei  $f_1$ . Entsprechend ist auch die experimentelle Konvergenzordnung (EOC) bei der Runge Funktion größer als bei  $f_1$ .