$$L = \left\{a^i b^j c^k | i \neq j \wedge i \neq k \wedge j \neq k\right\}$$

Claim 0.1. *L ist nicht kontextfrei.*

Proof. Mit Hilfe des Ogden Lemma's.

$$w' = \underline{a^n} b^{n+n!} c^{n+2n!}$$

Alle a's sind markiert. Es existiert keine Zerlegung $w' = uvwxy$, sodass in vwx maximal n Buchstaben und in vx mindestens ein Buchstabe markiert sind und $\forall i \geq 0\ uv^iwx^iy \in L$.

Fall 1: v enthält mindestens ein a und mindestens einen weiteren anderen Buchstaben.
Für $i = 2$ ist das Wort uv^2wx^2y offensichtlich nicht in L, da es nicht von der Form $a^*b^*c^*$ ist.

Fall 2: x enthält mindestens zwei unterschiedliche Buchstaben.
Für $i = 2$ ist das Wort uv^2wx^2y offensichtlich nicht in L, da es nicht von der Form $a^*b^*c^*$ ist.

Fall 3: $v = a^r, x = a^s, r + s > 0$ und u, w, y beliebig.
Da $t = r + s \leq n$ muss t Teiler von $n!$ sein. Daraus folgt das $i = 1 + \frac{n!}{t}$ eine ganze Zahl ist.

$$v^ix^i = (a^r)^{1+\frac{n!}{t}} (a^s)^{1+\frac{n!}{t}} = a^{(r+s)(1+\frac{n!}{t})} = a^{t+n!}$$

$$uv^iwx^iy = a^{n+n!} b^{n+n!} c^{n+2n!} \notin L$$

Fall 4: $v = a^r, x = b^s, r > 0, s > 0$ und u, w, y beliebig.
Für $i = 1 + \frac{2n!}{r}$:

$$uv^iwx^iy = a^{n+2n!} b^{n+n!+s\frac{2n!}{r}} c^{n+2n!} \notin L$$

Fall 5: $v = a^r, x = c^s, r > 0, s > 0$ und u, w, y beliebig.
Für $i = 1 + \frac{n!}{r}$:

$$uv^iwx^iy = a^{n+n!} b^{n+n!} c^{n+2n!+s\frac{n!}{r}} \notin L$$

$\square$

Warum funktioniert das einfache Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen hier nicht?
$n = 6$
$w' = a^j b^k c^l, j + k + l \geq 6$, O.B.d.A. $j < k < l$

Fall 1: $k + 1 < l$
Für die Zerlegung $u = a^j b^k c^{l-1}, v = c, wxy = \epsilon$ gilt $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \geq 0$, da:

$$uv^i wx^i y = a^j b^k c^{l+i-1}$$

$$\begin{aligned} j < k &\implies j \neq k \\ k < l - 1 \leq l + i - 1 &\implies k \neq l + i - 1 \wedge j \neq l + i - 1 \end{aligned}$$

Fall 2: $k + 1 = l, j + 1 < k$
Für die Zerlegung $u = a^j b^k c^{l-2}, v = cc, wxy = \epsilon$ gilt $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \geq 0$, da:

$$uv^i wx^i y = a^j b^k c^{l+2i-2}$$

Für $i = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} l - 2 = k + 1 - 2 < k &\implies k \neq l - 2 \\ j < k - 1 = l - 2 &\implies j \neq l - 2 \wedge j \neq k \end{aligned}$$

Für $i > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} j < k &\implies j \neq k \\ k = l - 1 < l + 0 \leq l + 2i - 2 &\implies k \neq l + 2i - 2 \wedge j \neq l + 2i - 2 \end{aligned}$$

Fall 3: $k + 1 = l, j + 1 = k$
Für die Zerlegung $u = a^j b^k c^{l-3}, v = ccc, wxy = \epsilon$ ($l \geq 3$ da $n = 6$) gilt $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \geq 0$, da:

$$uv^i wx^i y = a^j b^k c^{l+3i-3}$$

Für $i = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} l - 3 = k + 1 - 3 = j + 2 - 3 < j &\implies j \neq l - 3 \\ j < k &\implies j \neq k \wedge k \neq l - 3 \end{aligned}$$

Für $i > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} j < k &\implies j \neq k \\ k = l - 1 < l + 0 \leq l + 3i - 3 &\implies k \neq l + 3i - 3 \wedge j \neq l + 3i - 3 \end{aligned}$$

Wie wir sehen gilt das Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen für L obwohl L nicht kontextfrei ist.