

Modulbegleitende Aufgabe II

Shanshan Huang, Florian Starke

29. November 2015

Gegeben seien $N \in \mathbb{N}$, eine Zerlegung Δ_N des Intervalls $[-1, 1]$ durch die Stützstellen $-1 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N \leq 1$, und die Funktionen $f_R, f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_R(x) := \frac{1}{1 + 25x^2},$$

$$f_1(x) := (1 + \cos(\frac{3}{2}\pi x))^{2/3}.$$

1 Polynominterpolation

1.1 Gleichverteilte Stützstellen

Die $N+1$ Stützstellen sind äquidistant verteilt. Es folgt $x_i := -1 + 2i/N$ für $i = 0, \dots, N$.

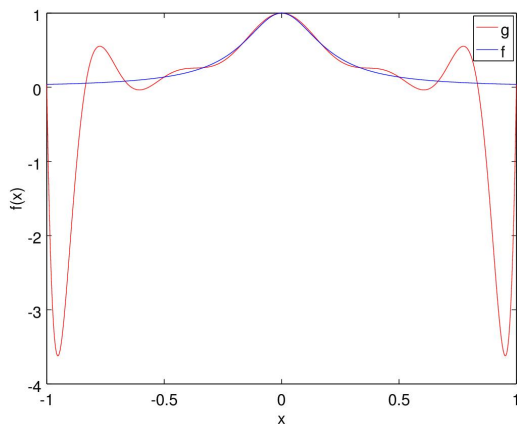


Abbildung 1

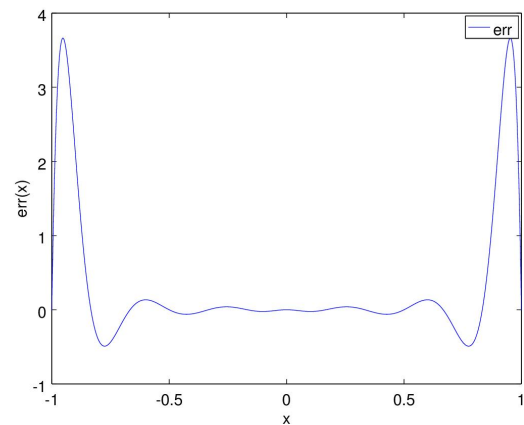


Abbildung 2

In Abbildung 1 ist f_R und das interpolierte Polynom g_{12} abgebildet. Wie erwartet ist bei einer Gleichverteilung der Stützstellen

1.2 Tschebyschow-Stützstellen

Als Stützstellen werden die Nullstellen des Tschebyschow-Polynoms T_{N+1} gewählt. Also definieren wir $x_i := \cos(\frac{2i+1}{2N+2}\pi)$ für $i = 0, \dots, N$.

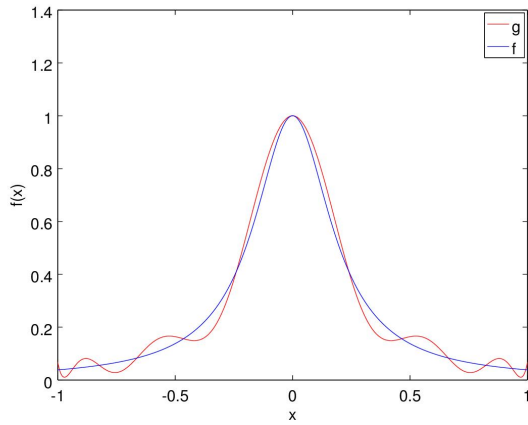


Abbildung 3

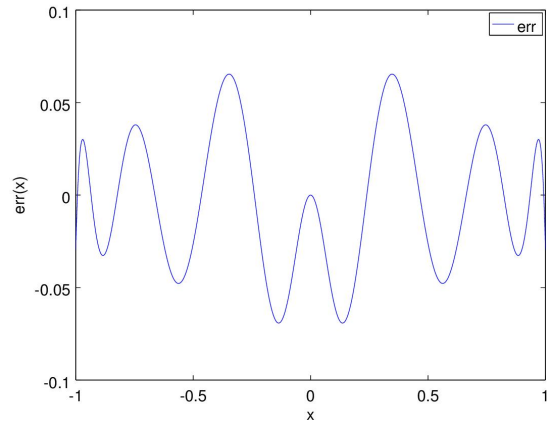


Abbildung 4

2 Spline-Interpolation

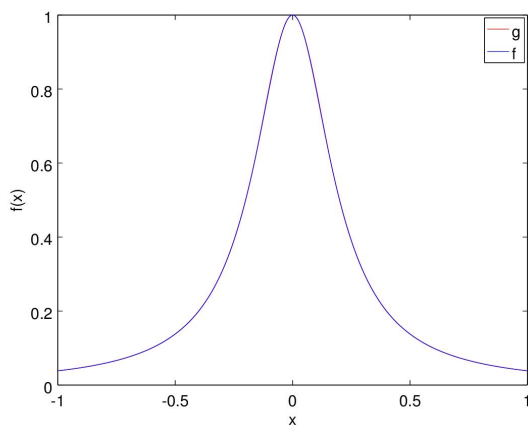


Abbildung 5

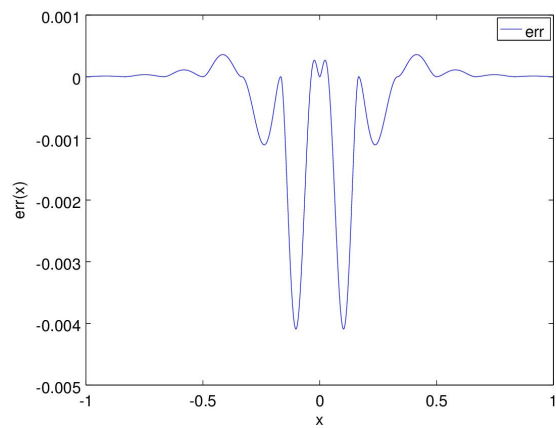


Abbildung 6

Fehler für $N_1 = 2$, $N_2 = 4$, und $N_3 = 8$.

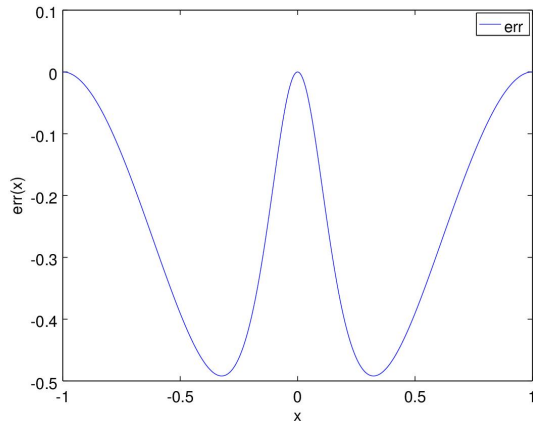


Abbildung 7: N_1

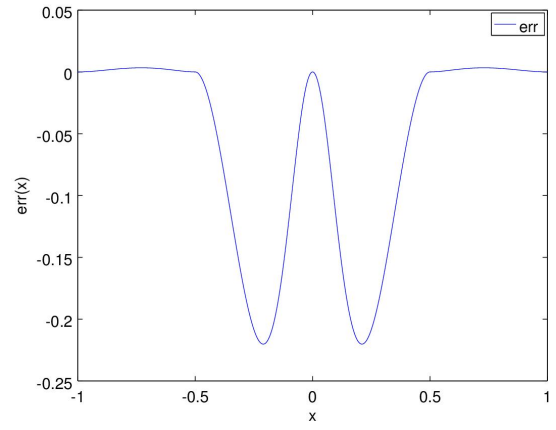


Abbildung 8: N_2

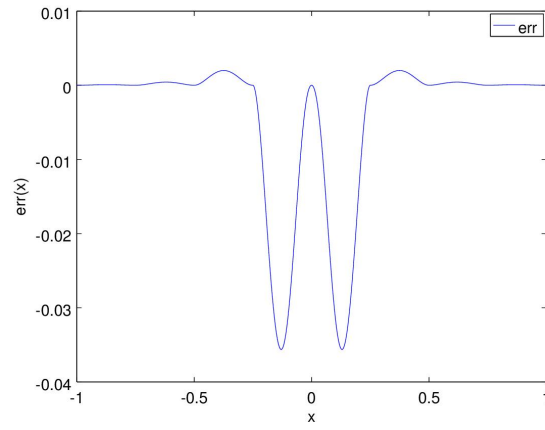


Abbildung 9: N_3

k	$E(h_{N_k})$	$\text{EOC}(h_{N_k}, h_{N_{k+1}})$
1	4.8928×10^{-1}	1.1572
2	2.1938×10^{-1}	2.6272
3	3.5509×10^{-2}	4.3901
4	1.6935×10^{-3}	2.1237
5	3.8860×10^{-4}	3.5334
6	3.3560×10^{-5}	3.8869
7	2.2686×10^{-6}	3.9719
8	1.4917×10^{-7}	3.9930
9	9.0802×10^{-9}	3.9982
10	5.6820×10^{-10}	3.9996
11	3.5523×10^{-11}	3.9999
12	2.2204×10^{-12}	—