Modulbegleitende Aufgabe II

Shanshan Huang, Florian Starke

3. Dezember 2015

Gegeben seien $N \in \mathbb{N}$, eine Zerlegung Δ_N des Intervalls $[-1, 1]$ durch die Stützstellen $-1 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_N \leq 1$, und die Funktionen $f_R, f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_R(x) := \frac{1}{1+25x^2},$$

$$f_1(x) := (1 + \cos(\frac{3}{2}\pi x))^{2/3}.$$

1 Polynominterpolation

1.1 Gleichverteilte Stützstellen

Die $N+1$ Stützstellen sind äquidistant verteilt. Es folgt $x_i := -1+2i/N$ für $i = 0, \ldots, N$.

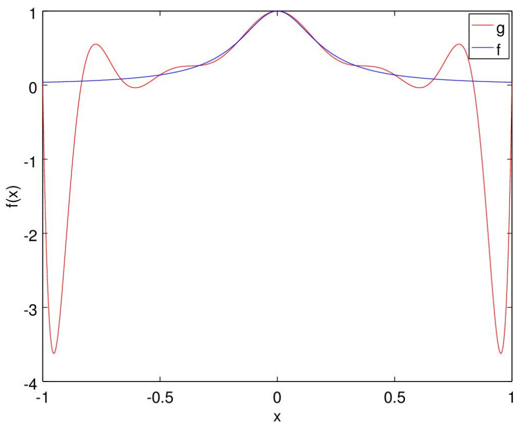

Abbildung 1

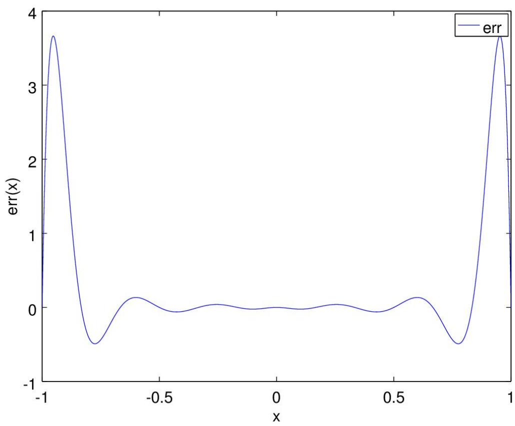

Abbildung 2

In Abbildung 1 ist f_R und das interpolierte Polynom g_{12} im Intervall I abgebildet. Wie erwartet ist bei einer Gleichverteilung der Stützstellen der Fehler am Rand sehr groß.

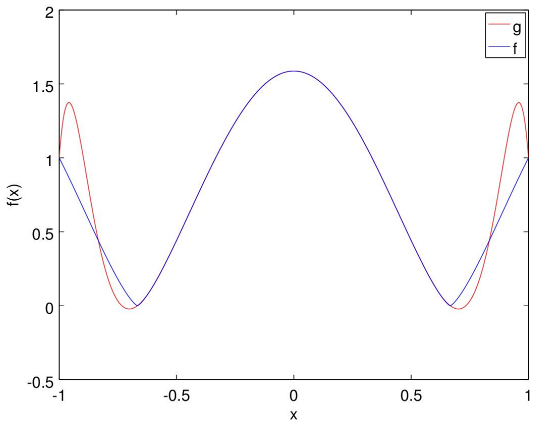

Abbildung 3

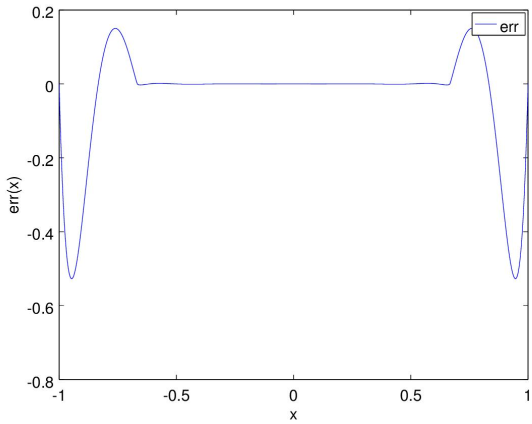

Abbildung 4

In den Abbildungen 3 und 4 sieht man die Funktion f_1 zusammen mit entsprechendem g_{12} bzw. F_{12}.

Begründung des Fehlerverhaltens:

Wenn wir mehr Stützstellen hinzufügen, kann es sein ,dass die Polynomfunktion im Allgemeinen die zu interpolierenden Funktion nicht besser approximiert. Da der Interpolationsfehler wie folgt abgeschätzt werden kann.

$$\|f(x) - g_N(x)\| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!} \|\omega\|$$

Je höher der Grad ist, desto größer ist der Fehler, da bei der Runge Funktion die Ableitungen sehr groß werden. Der Fehler ist an den Intervallgrenzen am größten, da hier $|\omega|$ maximal ist.

1.2 Tschebyschow-Stützstellen

Als Stützstellen werden die Nullstellen des Tschebyschow-Polynoms T_{N+1} gewählt. Also definieren wir $x_i := \cos(\frac{2i+1}{2N+2}\pi)$ für $i = 0, \ldots, N$.

Die Runge Funktion und g_{12}:

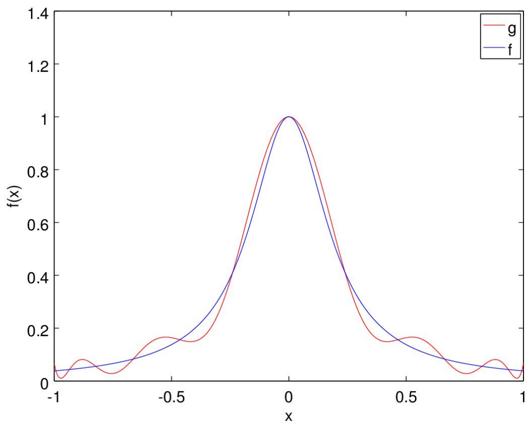

Abbildung 5

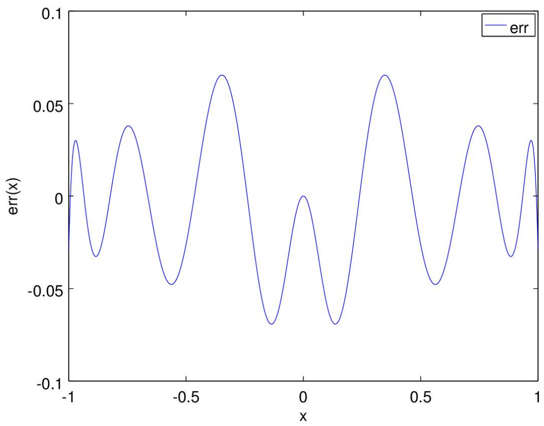

Abbildung 6

Wie erwartet ist der Fehler an den Intervallgrenzen wesentlich geringer als bei äquidistanten Stützstellen.

Die Funktion f_1:

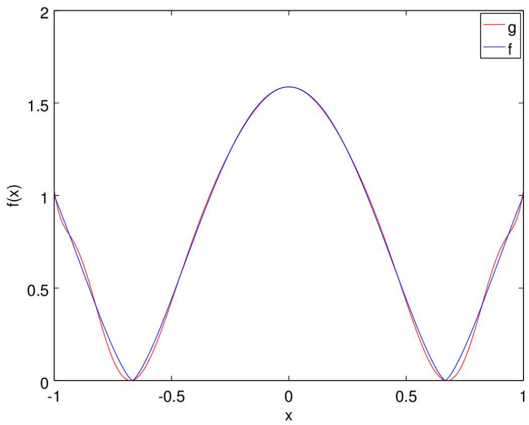

Abbildung 7

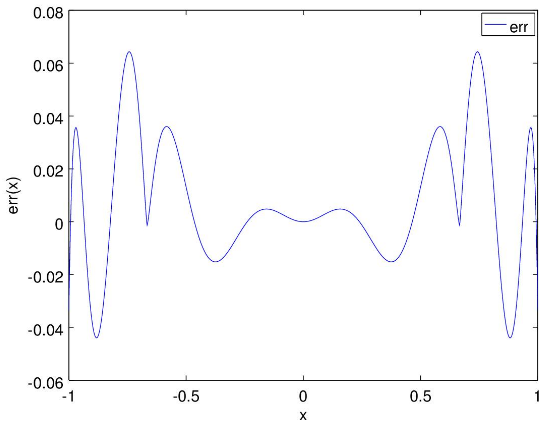

Abbildung 8

Begründung des Fehlerverhaltens:

Bei Tschebyschow Stützstellen ist ω am Rand kleiner, dafür aber in der Intervallmittel größer, als bei äquidistanten Stützstellen. Dementsprechend auch der Fehler.

2 Spline-Interpolation

Ziel ist es jetzt nicht mehr die Funktion durch ein Polynom zu interpolieren sondern nur noch durch eine stückweise polynomielle Funktion (Spline). In diesem Fall geht es um Splines vom Grad 3 mit Glattheit 1. Wir kennen nicht nur die Funktion sondern auch die erste Ableitung der Funktion.

Sei s die gesuchte Spline Funktion mit $s_k := s|_{[x_k, x_{k+1}]}$.

Die erste Ableitung der Runge Funktion ist:

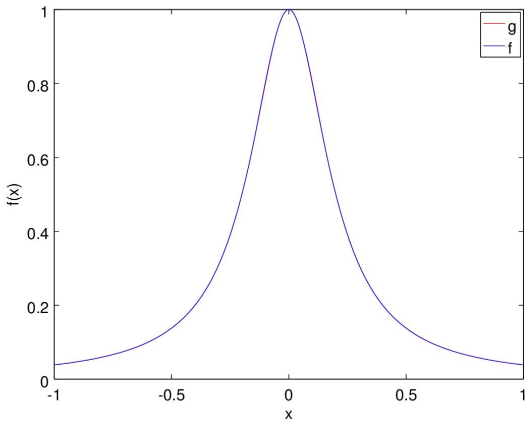

Abbildung 9

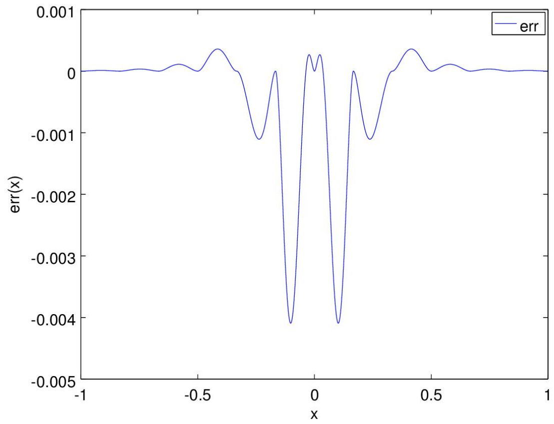

Abbildung 10

Fehler für $N_1 = 2$, $N_2 = 4$, und $N_3 = 8$.

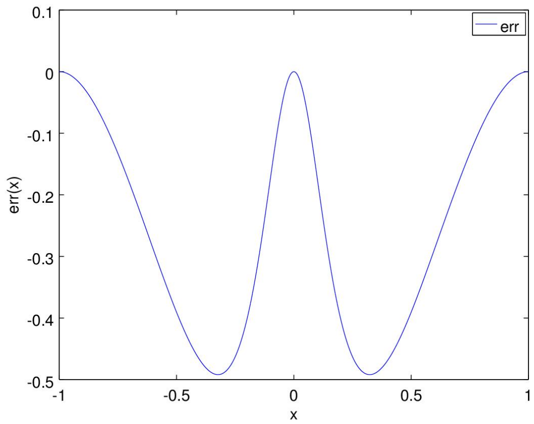

Abbildung 11: N_1

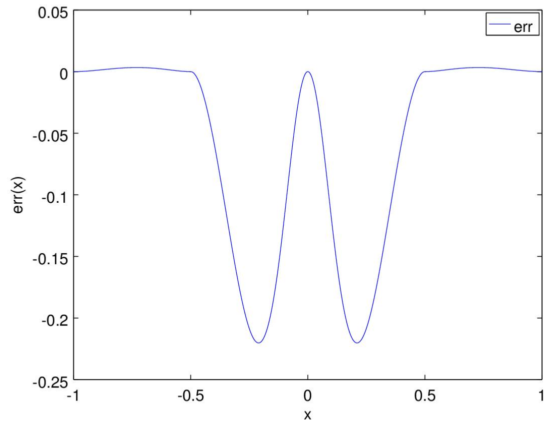

Abbildung 12: N_2

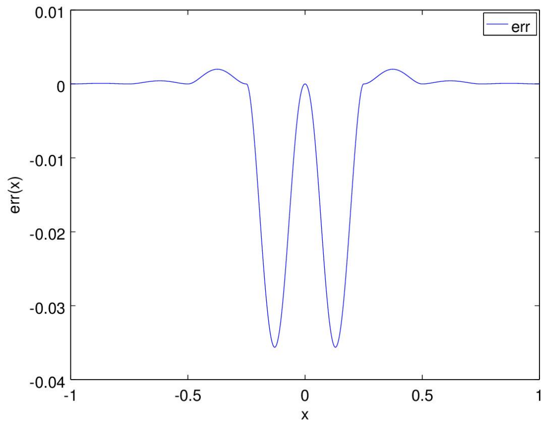

Abbildung 13: N_3

k	$E(h_{N_k})$	$\text{EOC}(h_{N_k}, h_{N_{k+1}})$
1	4.8928×10^{-1}	1.1572
2	2.1938×10^{-1}	2.6272
3	3.5509×10^{-2}	4.3901
4	1.6935×10^{-3}	2.1237
5	3.8860×10^{-4}	3.5334
6	3.3560×10^{-5}	3.8869
7	2.2686×10^{-6}	3.9719
8	1.4917×10^{-7}	3.9930
9	9.0802×10^{-9}	3.9982
10	5.6820×10^{-10}	3.9996
11	3.5523×10^{-11}	3.9999
12	2.2204×10^{-12}	–

Nochmal Spline-Interpolation für f_1:
Fehler für $N_1 = 2$, $N_2 = 4$, und $N_3 = 8$.

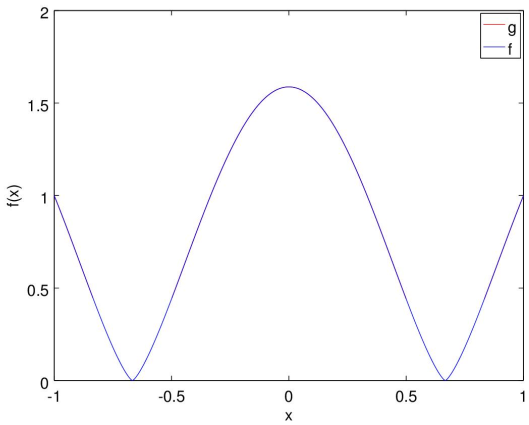

Abbildung 14

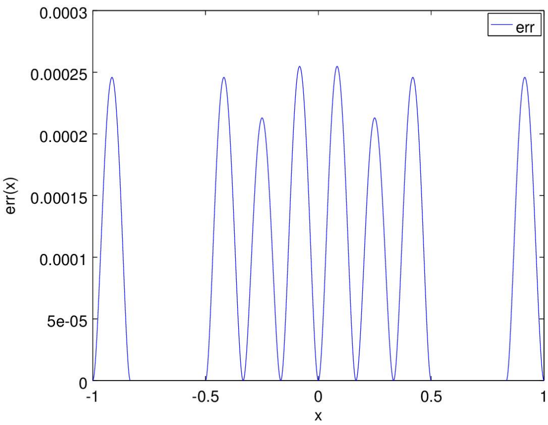

Abbildung 15

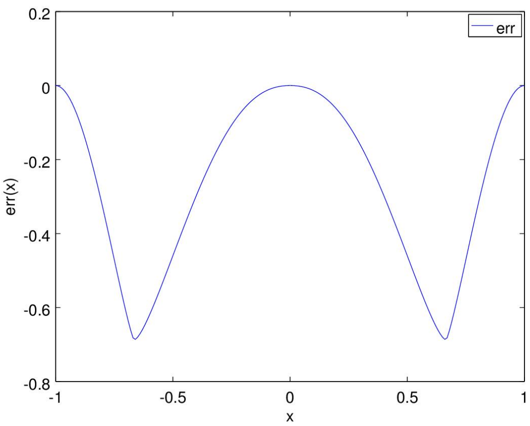

Abbildung 16: N_1

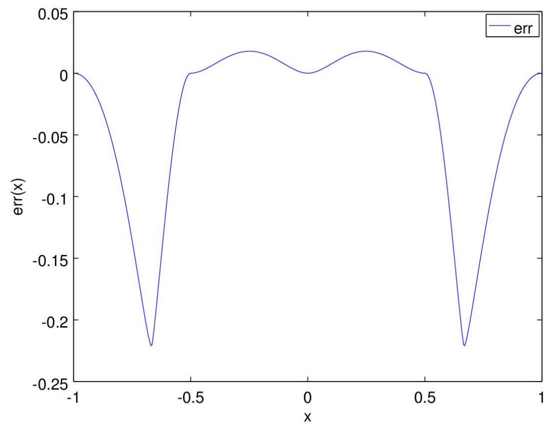

Abbildung 17: N_2

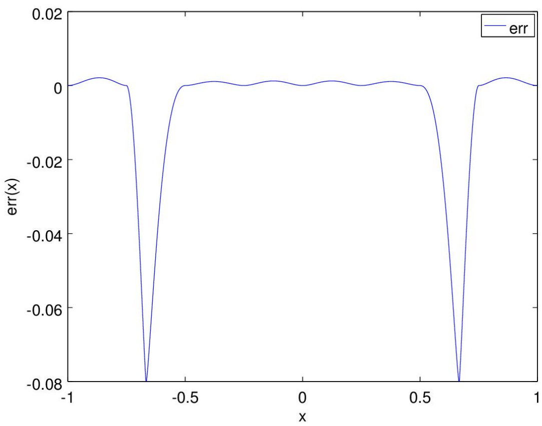

Abbildung 18: N_3