第 20 卷第 6 期　　吉安师专学报 (自然科学)　　Vol. 20 No. 6
1999 年 12 月　　Journal of Ji'an Teachers' College (Natural Science)　　Dec. 1999

逆序数的若干性质及应用

刘洁玉

(吉安师专数学系 吉安 343009)

摘　要　给出了逆序数的若干性质以及这些性质在行列式中的一些应用.

关键词　逆序数　性质　行列式　应用

关于 n 级排列、逆序、n 级排列的逆序数 行列式等有关概念请见文[1].依照文[1],我们用 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 表示 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数, $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 历遍 1, 2, …, n 的所有全排列求和,偶尔也用 $\sum\limits_{\binom{12\cdots n}{j_1 j_2 \cdots j_n}}$ 表示同样的意思.本文首次给出了关于逆序数的几个性质(引理1至引理4及其推论).这些性质在证明行列式的性质时起着关键的作用,尤其是利用这些性质对行列式的展开定理给出了全新的证明.

引理1　$\tau(j_1 \cdots j_{i-1} k\, j_{i+1} \cdots j_n) = \tau(j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n) + (2s + k - i)$,这里 $1 \le k \le n$, $s = \sum\limits_{m=1}^{i-1} \tau(j_m k)$.

证明　易知有 $\tau(j_1 \cdots j_{i-1} k\, j_{i+1} \cdots j_n) = \tau(j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n) + \sum\limits_{m=1}^{i-1} \tau(j_m k) + \sum\limits_{\lambda=i+1}^{n} \tau(k j_\lambda) =$

$$\tau(j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n) + s + \sum_{\lambda=i+1}^{n} \tau(k\, j_\lambda). \tag{1}$$

1, 2, …, n 中共有 $k-1$ 个比 k 小的数,而在排列 $j_1 \cdots j_{i-1} k\, j_{i+1} \cdots j_n$ 中已有 $i-1-s$ 个比 k 小的数在 k 前面,由此可知

$$\sum_{\lambda=i+1}^{n} \tau(k\, j_\lambda) = (k-1) - (i-1-s) = s + k - i,$$

代入(1)即得所欲证之等式.

引理2　若 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 经 s 次对换变成排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$,则 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 与 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) + s$ 有相同的奇偶性.

换言之,

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} = (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) + s}.$$

证明　由于对换改变排列的奇偶性,欲证之结论甚明.

推论

$$(-1)^{\tau(i_1 \cdots i_r \cdots i_n)} = (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_{r-1} i_{r+1} \cdots i_n i_r) + (n-r)} = (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_{r-1} i_{r+1} \cdots i_n) + (i_r + r)}.$$

证明　第一个等式是引理2的直接结果,利用引理1可知 $(-1)^{\tau(i_1 \cdots i_{r-1} i_{r+1} \cdots i_n i_r)} = (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_{r-1} i_{r+1} \cdots i_n) + (i_r - n)}$,于是

$$(-1)^{\tau(i_1 i_r \cdots i_n)} = (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_{r-1} i_{r+1} \cdots i_n) + (i_r - n) + (n-r)} = (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_{r-1} i_{r+1} \cdots i_n) + (i_r + r)}.$$

引理3　设 $i_1 \cdots i_{n-r} l_1 l_2 \cdots l_r$ 是 1, 2, …, n 的一个排列,其中 $l_1 < l_2 \cdots < l_r$,又设 $j_1 j_2 \cdots j_r$ 是 $l_1, l_2, \cdots, l_r$ 的任一排列,则

$$\tau(i_1 \cdots i_{n-r} j_1 j_2 \cdots j_r) = \tau(i_1 \cdots i_{n-r} l_1 l_2 \cdots l_r) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_r). \tag{2}$$

证明　计算 $\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)$ 可以这样进行:令

收稿日期: 1999-06-29

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.n

$$\sigma_{k_i}=\sum_{j=1}^{i-1}\tau(k_jk_i),\ i=1,2,\cdots,n$$

显然
$$\tau(k_1k_2\cdots k_n)=\sigma_{k_n}+\sigma_{k_{n-1}}\cdots+\sigma_{k_2}+\sigma_{k_1},$$
(实际上$\sigma_{k_1}=0$).现在令
$$\tau(i_1\cdots i_{n-r}j_1j_2\cdots j_r)=\sigma_{j_r}+\cdots+\sigma_{j_1}+\sigma_{i_{n-r}}+\cdots+\sigma_{i_1},$$
$$\tau(i_1\cdots i_{n-r}l_1l_2\cdots l_r)=\sigma_{l_r}+\cdots+\sigma_{l_1}+\sigma'_{i_{n-r}}+\cdots+\sigma'_{i_1},$$
$$\tau(j_1j_2\cdots j_r)=\sigma'_{j_r}+\cdots+\sigma'_{j_1}.$$
那么有
$$\sigma_{i_\lambda}=\sigma'_{i_\lambda},\quad \lambda=1,2,\cdots,n-r$$
又由于$j_1j_2\cdots j_r$是$l_1,l_2,\cdots,l_r$的排列,且$l_1<l_2<\cdots<l_r$,因此另一方面又有
$$\sigma_{j_r}+\cdots+\sigma_{j_1}=(\sigma_{l_r}+\cdots+\sigma_{l_1})+(\sigma'_{j_r}+\cdots+\sigma'_{j_1}),$$
于是
$$\tau(i_1\cdots i_{n-r}j_1j_2\cdots j_r)=\tau(i_1\cdots i_{n-r}l_1l_2\cdots l_r)+\tau(j_1j_2\cdots j_r).$$

引理 4　$\tau(i_1\cdots i_{n-r}l_1l_2\cdots l_r)=\tau(i_1\cdots i_{n-r})+rn-\dfrac{r(r-1)}{2}-\sum\limits_{i=1}^{r}l_i$,这里 $l_1<l_2<\cdots<l_r$.

证明　按引理3的证明中统计逆序数的方法,易知有
$$\tau(i_1\cdots i_{n-r}l_1l_2\cdots l_r)=\tau(i_1\cdots i_{n-r})+(n-l_r)+(n-1-l_{r-1})+\cdots+[n-(r-1)-l_1]=$$
$$\tau(i_1\cdots i_{n-r})+rn-\frac{r(r-1)}{2}-\sum_{i=1}^{r}l_i.$$

行列式展开定理及许多性质的证明往往要借助 文字说明,若能变文字说明为数式 推演,可免许多咬文嚼字之苦.上述逆序数的性质,正好能起这种作用.今举例说明其应用.

例1　证明行列式按一行展开 的展开公式:$|a_{ij}|_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$,　　(3)

其中
$$A_{ik}=(-1)^{i+k}\begin{vmatrix} a_{11}\cdots & a_{1k-1}a_{1k+1}\cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i-11}\cdots & a_{i-1k-1}a_{i-1k+1}\cdots & a_{i-1n}\\ a_{i+11}\cdots & a_{i+1k-1}a_{i+1k+1}\cdots & a_{i+1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}\cdots & a_{nk-1}a_{nk+1}\cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$
是元素a_{ik}的代数余子式.

证明　依n级行列式定义
$$|a_{ij}|_n=\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{i-1j_{i-1}}a_{ij_i}a_{i+1j_{i+1}}\cdots a_{nj_n}=$$
$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\cdot\sum_{j_1\cdots j_{i-1}kj_{i+1}\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_{i-1}kj_{i+1}\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{i-1j_{i-1}}a_{i+1j_{i+1}}\cdots a_{nj_n}\right)=$$
$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\cdot\sum_{j_1\cdots j_{i-1}kj_{i+1}\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_{i-1}j_{i+1}\cdots j_n)+(2i+k-i)}a_{1j_1}\cdots a_{i-1j_{i-1}}a_{i+1j_{i+1}}\cdots a_{nj_n}\right)=$$
$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(-1)^{k-i}\sum_{j_1\cdots j_{i-1}kj_{i+1}\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_{i-1}j_{i+1}\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{i-1j_{i-1}}a_{i+1j_{i+1}}\cdots a_{nj_n}=$$
$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(-1)^{i-k}\sum_{j_1\cdots j_{i-1}j_{i+1}\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_{i-1}j_{i+1}\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{i-1j_{i-1}}a_{i+1j_{i+1}}\cdots a_{nj_n}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.n

由于$j_1\cdots j_{i-1}j_{i+1}\cdots j_n$是$1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n$的排列,由行列式的定义知

$$M_{ik}=\sum_{j_1\cdots j_{i-1}j_{i+1}\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_{i-1}j_{i+1}\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{i-1j_{i-1}}a_{i+1j_{i+1}}\cdots a_{nj_n}=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1k-1} & a_{1k+1}\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11}\cdots a_{i-1k-1} & a_{i-1k+1}\cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11}\cdots a_{i+1k-1} & a_{i+1k+1}\cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nk-1} & a_{nk+1}\cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

我们称M_{ik}为元素a_{ik}的余子式,并称$A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}$为元素a_{ik}的代数余子式.

例2 n级行列式$\left|a_{ij}\right|_n$中,项$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$的符号为 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

证明 设$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$是由项$a_{1j'_1}a_{2j'_2}\cdots a_{nj'_n}$运用乘法交换律经$s$次因子换位得到的.这意味着排列

$$1\,2\cdots n\xrightarrow{s\text{次对换}}i_1i_2\cdots i_n,\quad j'_1j'_2\cdots j'_n\xrightarrow{s\text{次对换}}j_1j_2\cdots j_n.$$

于是项$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$应该具有项$a_{1j'_1}a_{2j'_2}\cdots a_{nj'_n}$的符号:

$$(-1)^{\tau(j'_1j'_2\cdots j'_n)}=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j'_1j'_2\cdots j'_n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+s+\tau(j_1j_2\cdots j_n)+s}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$$

例3 行列式中若两行(列)元素相同,则行列式的值为零.

证明 只就行的情形证明.设行列式$d=\left|a_{ij}\right|_n$中有$a_{ij}=a_{kj}$ ($j=1,2,\cdots,n$),不妨设$i<k$,由行列式的定义,

$$d=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{nj_n},$$

从而 $$d-\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{nj_n}=0,$$

于是 $$d+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)+1}\cdot a_{1j_1}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{nj_n}=0,$$

即 $$d+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}=0,$$

亦即 $d+d=0$,故 $d=0$.

例4 互换行列式的两行(列),行列式的值变号.

证明 只就行的情形证明设互换了行列式$d=\left|a_{ij}\right|_n$中的i,k两行($i<k$),新行列式记为$d'=\left|a'_{ij}\right|_n$,

于是 $a'_{lj}=a_{lj}$ ($l\neq i,k,j=1,2,\cdots n$), $a'_{ij}=a_{kj}$ ($j=1,2,\cdots n$), $a'_{kj}=a_{ij}$ ($j=1,2,\cdots n$)

由行列式定义

$$\begin{aligned}d'=&\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\cdot a'_{1j_1}\cdots a'_{ij_i}\cdots a'_{kj_k}\cdots a'_{nj_n}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{nj_n}=\\ &\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)+1}\cdot a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}=\\ &-\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}\cdot a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n}=-d.\end{aligned}$$

现在我们来证明行列式更一般的Laplace展开定理.

例5 我们以$a\begin{pmatrix}i_1i_2\cdots i_r\\ l_1l_2\cdots l_r\end{pmatrix}$表示行列式$d=\left|a_{ij}\right|_n$中的$r$级子式:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1l_1}a_{i_1l_2}\cdots a_{i_1l_r} \\ a_{i_2l_1}a_{i_2l_2}\cdots a_{i_2l_r} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{i_rl_1}a_{i_rl_2}\cdots a_{i_rl_r}\end{vmatrix}\tag{4}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.n

这里 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n$，$1\le l_1<l_2<\cdots<l_r\le n$．同时以 $A\begin{pmatrix} i_{r+1}i_{r+2}\cdots i_n \\ l_{r+1}l_{r+2}\cdots l_n \end{pmatrix}$ 表示 $a\begin{pmatrix} i_1i_2\cdots i_r \\ l_1l_2\cdots l_r \end{pmatrix}$ 的代数余子式，它是行列式 d 中除去（4）中的元素后，余下的元素不改变位置 关系作成的行列式，并带有符号因子 $(-1)^{\sum\limits_{\lambda=1}^{r} i_\lambda+\sum\limits_{\lambda=1}^{r} l_\lambda}$．因此 $i_1i_2\cdots i_ri_{r+1}\cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，且适合 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n$；$1\le i_{r+1}<i_{r+2}<\cdots<i_n\le n$；$l_1l_2\cdots l_rl_{r+1}\cdots l_n$ 也是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，且适合 $1\le l_1<l_2<\cdots<l_r$，$1\le l_{r+1}<l_{r+2}<\cdots<l_n\le n$．作了上述规定后，我们可以证明以下 Laplace 展开式：

$$d=\left|a_{ij}\right|_n=\sum_{1\le l_1<\cdots<l_r\le n} a\begin{pmatrix} i_1\cdots i_r \\ l_1\cdots l_r \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{r+1}\cdots i_n \\ l_{r+1}\cdots l_n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

证明

$$d=\left|a_{ij}\right|_n=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}\begin{vmatrix} a_{i_11}a_{i_12}\cdots a_{i_1n} \\ a_{i_21}a_{i_22}\cdots a_{i_2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{i_n1}a_{i_n2}\cdots a_{i_nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}=$$

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}\cdot(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}=$$

$$\sum_{1\le l_1<l_2<\cdots<l_r\le n}\ \sum_{\binom{l_1\cdots l_r}{j_1\cdots j_r}}\ \sum_{\binom{l_{r+1}\cdots l_n}{j_{r+1}\cdots j_n}}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}\cdot(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{6}$$

由引理 4 有

$$\tau(i_1\cdots i_ri_{r+1}\cdots i_n)=\tau(i_1\cdots i_r)+(n-r)n-\frac{(n-r)(n-r-1)}{2}-\sum_{\lambda=1}^{n-r}i_{r+\lambda}=(n-r)n-\frac{(n-r)(n-r-1)}{2}-\sum_{\lambda=1}^{n-r}i_{r+\lambda}, \tag{7}$$

由引理 3 及引理 4 知 $\tau(j_1\cdots j_rj_{r+1}\cdots j_n)=\tau(j_1\cdots j_rl_{r+1}\cdots l_n)+\tau(j_{r+1}\cdots j_n)=$

$$\tau(j_1\cdots j_r)+(n-r)n-\frac{(n-r)(n-r-1)}{2}-\sum_{\lambda=1}^{n-r}l_{r+\lambda}+\tau(j_{r+1}\cdots j_n) \tag{8}$$

由（7）（8）可算得

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}\cdot(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(j_1\cdots j_r)-\sum\limits_{\lambda=1}^{n-r}i_{r+\lambda}-\sum\limits_{\lambda=1}^{n-r}l_{r+\lambda}+\tau(j_{r+1}\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(j_1\cdots j_r)+\sum\limits_{\lambda=1}^{r}i_\lambda+\sum\limits_{\lambda=1}^{r}l_\lambda+\tau(j_{r+1}\cdots j_n)}.$$

将所得结果代入（6）式：

$$(6)=\sum_{1\le l_1<\cdots<l_r\le n}\ \sum_{\binom{l_1\cdots l_r}{j_1\cdots j_r}}\ \sum_{\binom{l_{r+1}\cdots l_n}{j_{r+1}\cdots j_n}}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_r)+\sum\limits_{\lambda=1}^{r}i_\lambda+\sum\limits_{\lambda=1}^{r}l_\lambda+\tau(j_{r+1}\cdots j_n)}\cdot a_{i_1j_1}\cdots a_{i_rj_r}a_{i_{r+1}j_{r+1}}\cdots a_{i_nl_n}=$$

$$\sum_{1\le l_1<\cdots<l_r\le n}\left[\sum_{\binom{l_1\cdots l_r}{j_1\cdots j_r}}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_r)}a_{i_1j_1}\cdots a_{i_rj_r}\right](-1)^{\sum\limits_{\lambda=1}^{r}i_\lambda+\sum\limits_{\lambda=1}^{r}l_\lambda}\sum_{\binom{l_{r+1}\cdots l_n}{j_{r+1}\cdots j_n}}(-1)^{\tau(j_{r+1}\cdots j_n)}a_{i_{r+1}j_{r+1}}\cdots a_{i_nj_n}=$$

$$\sum_{1\le l_1<\cdots<l_r\le n} a\begin{pmatrix} i_1\cdots i_r \\ l_1\cdots l_r \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{r+1}\cdots i_n \\ l_{r+1}\cdots l_n \end{pmatrix},$$

其中
$$a\begin{pmatrix} i_1\cdots i_r \\ l_1\cdots l_r \end{pmatrix}=\sum_{\binom{l_1\cdots l_r}{j_1\cdots j_r}}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_r)}a_{i_1j_1}\cdots a_{i_rj_r},$$

而
$$A\begin{pmatrix} i_{r+1}\cdots i_n \\ l_{r+1}\cdots l_n \end{pmatrix}=(-1)^{\sum\limits_{\lambda=1}^{r}i_\lambda+\sum\limits_{\lambda=1}^{r}l_\lambda}\sum_{\binom{l_{r+1}\cdots l_n}{j_{r+1}\cdots j_n}}(-1)^{\tau(j_{r+1}\cdots j_n)}a_{i_{r+1}j_{r+1}}\cdots a_{i_nl_n}$$

正是 $a\begin{pmatrix} i_1\cdots i_r \\ l_1\cdots l_r \end{pmatrix}$ 的代数余子式．

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.n

参考文献

1 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组.高等代数.北京:高等教育出版社, 1988. 52~63
2 许以超.代数学引论.上海:上海科学技术出版社,1966.119

Some Properties and Applications on Inverse Number

Liu Jieyu
(Department of Mathematics, Ji'an Teachers College, Ji'an 343009)

Abstract This paper gives some properties of the inverse number ,and gives its some applications.

Key words inverse number, property, determinant, application.

（上接第21页）

A Property of An Enclosed Metall Shell in Electrostatic balance

Zhou Jingou
(Department of Physics, Ji'an Teachers College, Ji'an 343009)

Abstract This paper discussed a property a application of enclosed metall shell.

Key words electrostatic balance, inducced charge, enclosed metall shell.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.n