Probabilidade

Métodos de Contagem

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metrópole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br

Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/

Tamanho do conjunto

Número de elementos dentro de um conjunto (cardinalidade);

Notação: | S | ou # S;

Moeda: |{ cara, coroa }| = 2   Dado: |{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 }| = 6

Conjunto vazio: | ∅ | = 0

| N | = | Z | = | P | = ∞   → Infinito contável

| R | = ∞   → Infinito não contável

Tamanho do conjunto em Python

Usar a função len().

```
print(len({ -1, 1 })) # 2
```

Quantos elementos tem no intervalo de inteiros de 1024 a 49151?

Tamanho do conjunto em intervalos de inteiros

$\{m, \ldots, n\}$ = { inteiros entre m e n inclusivo }

$|\{m, \ldots, n\}| = n - m + 1$

$\{3, \ldots, 5\} = \{3, 4, 5\}$

$|\{3, \ldots, 5\}| = 5 - 3 + 1 = 3$

Quantos números de 1 a 100 são múltiplos de 3?

Conjunto de múltiplos

$D3 = \{ 3, 6, 9, \ldots, 99 \}$

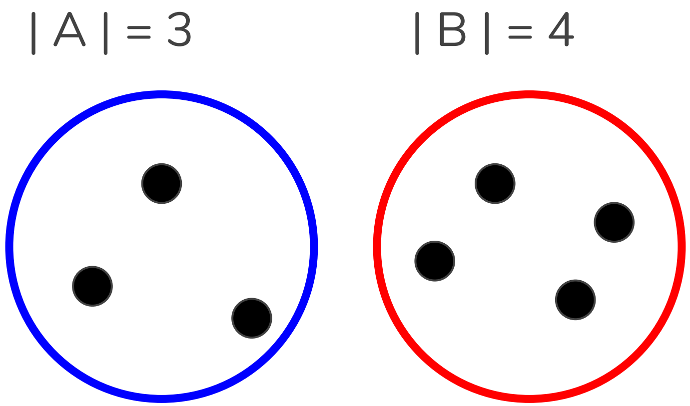
$D = \{ i \in Z : 1 \leq i \leq n : d \mid i \}$

$D3 = \{ 1 \leq i \leq 100 : 3 \mid i \} = \{ 3, 6, 9, \ldots, 99 \}$

$| D | = | \{ 1 \leq i \leq n : d \mid i \} | = \lfloor n / d \rfloor$

$| D3 | = | \{ 1 \leq i \leq 100 : 3 \mid i \} | = \lfloor 100 / 3 \rfloor =$
33

União disjunta

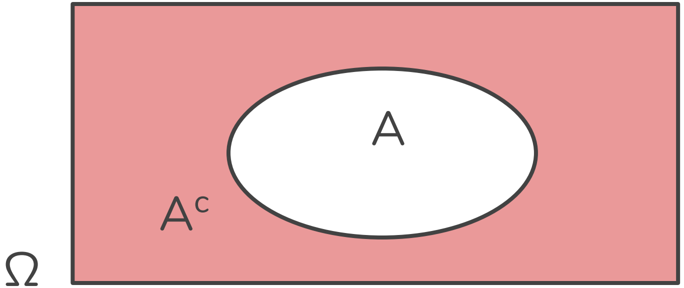


$|A \cup B| = |A| + |B| = 7$

Para conjuntos disjuntos, o tamanho da união é a soma dos tamanhos dos conjuntos.

Regra da soma

Complementos



A e A^c são disjuntos, então:

$| \Omega | = | A | + | A^c |$

$| A^c | = | \Omega | - | A |$ **Regra da subtração**

Complemento

Existem situações onde a regra da subtração é mais conveniente para o cálculo do tamanho do conjunto:

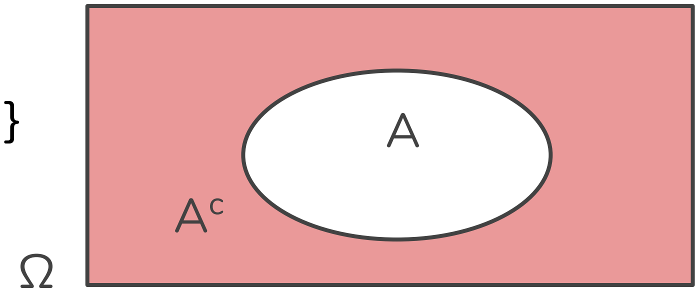
$A = \{ 1 \leq i \leq 100 : 3 \nmid i \} \longrightarrow \{ 1, 2, 4, 5, 7, ..., 100 \}$

$\Omega = \{ 1, ..., 100 \}$

$A^c = \{ 1 \leq i \leq 100 : 3 \mid i \} \rightarrow \{ 3, 6, 9, ..., 99 \}$

$| A^c | = \lfloor 100 / 3 \rfloor = 33$

$| A | = | \Omega | - | A^c | = 100 - 33 = 67$



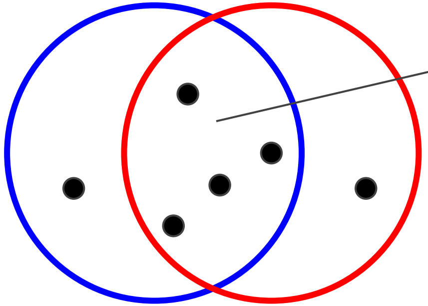
$$A = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 100\}$$
$$B = \{3, 6, 9, 12, \ldots 99\}$$
$$|A \cup B| = |A| + |B| ?$$

União no geral

Se A e B são disjuntos, $| A \cup B | = | A | + | B |$

Em geral: $| A \cup B | \neq | A | + | B |$

$| \{1\} \cup \{1\} | = |\{1\}| = 1 \neq |\{1\}| + |\{1\}| = 2$



A $| A | + | B |$ B

Elementos nesta área ($A \cap B$) são contados 2X

Princípio da Inclusão e Exclusão:

$| A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B |$

Múltiplos de 2 números

$D = \{ 1 \leq i \leq 100 : 3 \mid i \lor 2 \mid i \} = \{ 2, 3, 4, 6, 8, \ldots 100 \}$

$| D | = ?$

$A = \{ 1 \leq i \leq 100 : 2 \mid i \}$

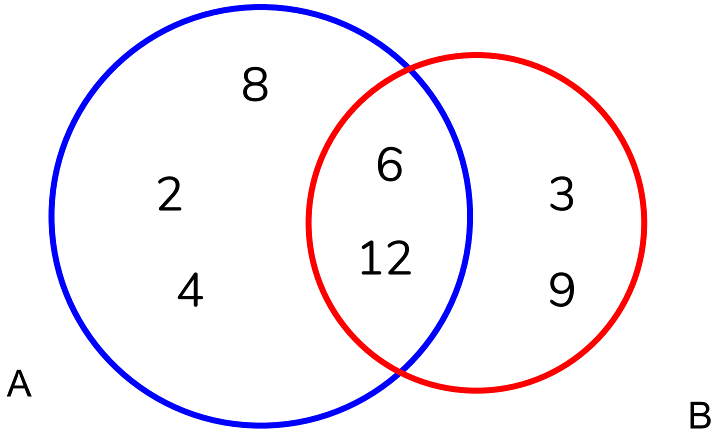
$B = \{ 1 \leq i \leq 100 : 3 \mid i \}$

$| A | = \lfloor 100 / 2 \rfloor = 50$

$| B | = \lfloor 100 / 3 \rfloor = 33$

$| A \cap B | = \{ 1 \leq i \leq 100 : 2 \mid i \land 3 \mid i \} = \{ 1 \leq i \leq 100 : 6 \mid i \}$

$| A \cap B | = \lfloor 100 / 6 \rfloor = 16$



$| D | = | A | + | B | - | A \cap B | = 67$

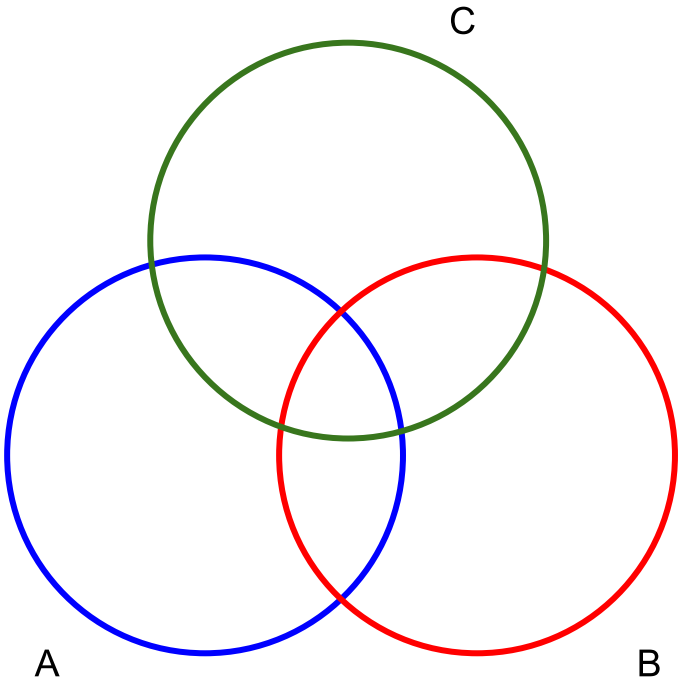
Múltiplos conjuntos

Dois conjuntos:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Três conjuntos:

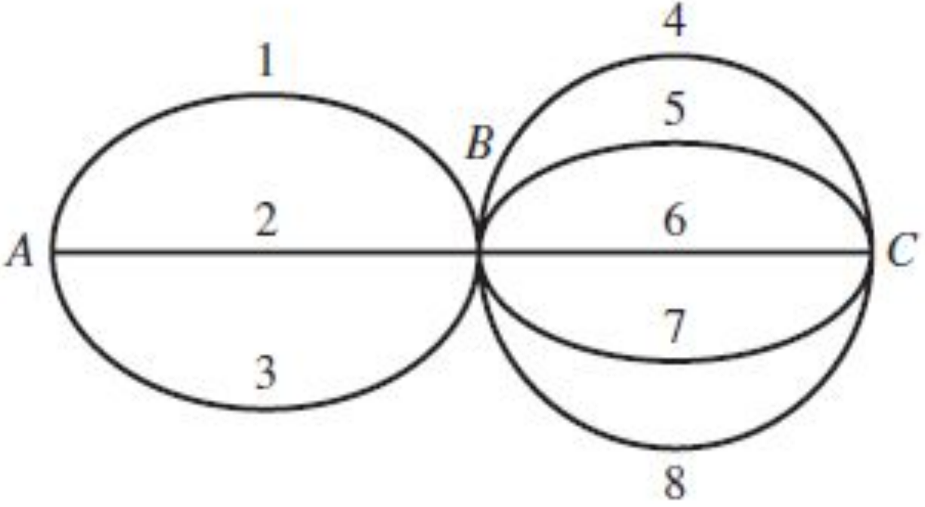
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_t| = \sum_{i=1}^{t} (-1)^{i-1} N_t$$

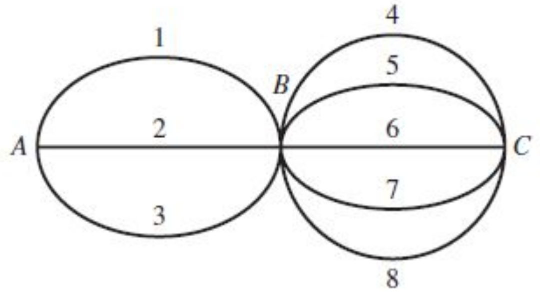
Nt denota a soma de todas as interseções de tamanho t

Quantas rotas possíveis de A para C?



Regra da multiplicação

Possíveis rotas: (1,4), (1,5), (1,6), ..., (3,8)



Produto cartesiano

rAB = { 1 ,2, 3 }

rBC = { 4 ,5, 6, 7, 8 }

	4	5	6	7	8
1	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
2	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8
3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8

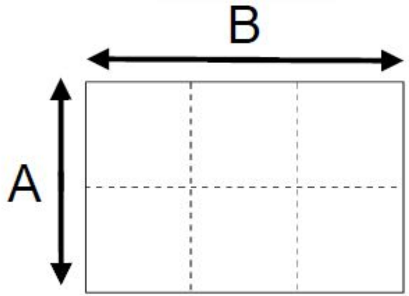
rAB X rBC = { (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8)
(2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8)
(3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8) }

| rAB X rBC |= |A| X |B|

Regra de multiplicação para três conjuntos

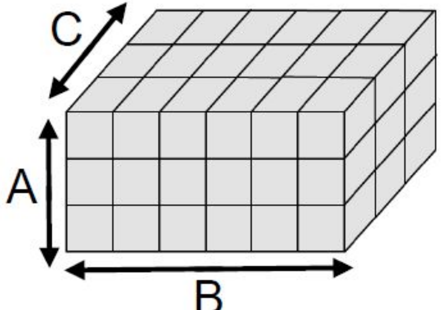
$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B \}$

$|A \times B| = |A| \times |B|$



$A \times B \times C = \{ (a,b,c) \mid a \in A, b \in B, c \in C \}$

$|A \times B \times C| = |A| \times |B| \times |C|$



“Potência cartesiana” de um conjunto

Produto cartesiano de um conjunto com ela mesma.

$A^2 = A \times A$ → quadrado cartesiano

$A^n = A \times A \times \ldots \times A$ → n-ésima potência cartesiana

$| A^n | = |A \times A \times \ldots \times A| = |A| \times |A| \times \ldots \times |A| = |A|^n$

Aplicações teóricas e práticas.

Potência em conjunto de binário

$\{ 0 ,1 \}$

$\{ 0, 1 \}^n = \{$ string binário de tamanho n$\} = \{$ string de n-bit $\}$

n	Conjunto	String
1	$\{0,1\}^1$	0, 1
2	$\{0,1\}^2$	00, 01, 10, 11
3	$\{0,1\}^3$	000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111
…	…	…
n	$\{0,1\}^n$	0 … 0, …, 1 … 1

$| \{0, 1\}^n | = | \{0, 1\}|^n = 2^n$

Subconjuntos

Potência cartesiana de S é a coleção de todos os subconjuntos de S.

$\mathbb{P}(\{ a, b \}) = \{ \{ \}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\} \}$

$| \mathbb{P}(S) | = ?$

$\mathbb{P}(S)$ possui uma correspondência com $\{ 0, 1 \}^{|S|}$.

Subconjuntos

Correspondência entre $\mathbb{P}(S)$ e $\{0, 1\}^{|S|}$:

$\mathbb{P}(\{a,b\})$ e $\{0, 1\}^2$.

$|\mathbb{P}(S)| = |\{0, 1\}^{|S|}| = 2^{|S|}$

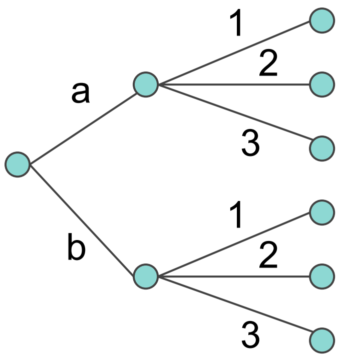
Tamanho do conjunto de partes é a potência de base 2 elevado ao tamanho do conjunto.

$\mathbb{P}(\{a,b\})$	a	b	$\{0, 1\}^2$
{}	X	X	00
{a}	O	X	10
{b}	X	O	01
{a,b}	O	O	11

Árvores

Produto cartesiano como árvores

Árvore



$2 \times 3 = 6$

Sequência

{a, 1}
{a, 2}
{a, 3}
{b, 1}
{b, 2}
{b, 3}

Produto cartesiano

$\{a, b\} \times \{1, 2, 3\}$

$|\{a, b\} \times \{1, 2, 3\}| = 2 \times 3 = 6$

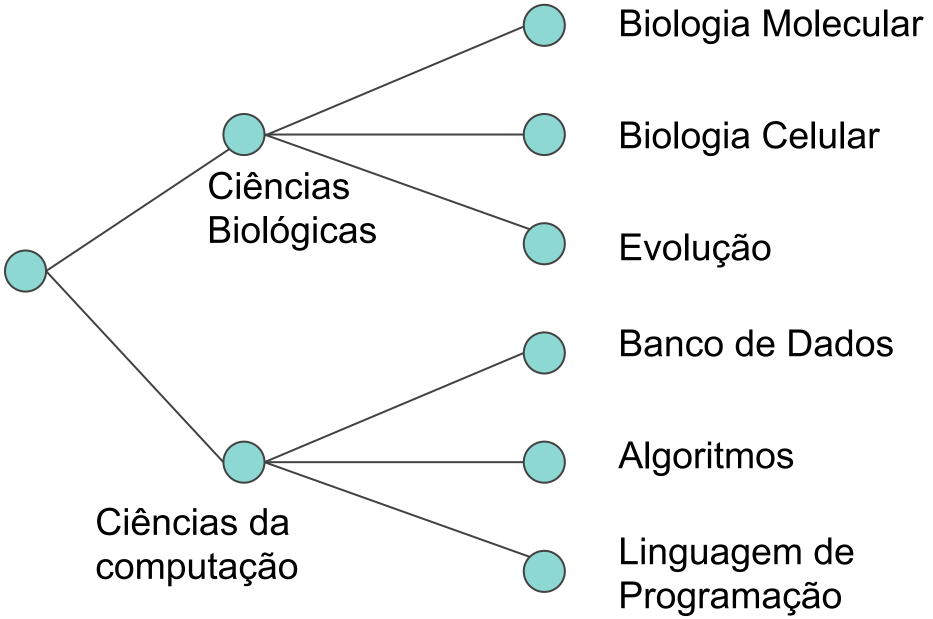
Usado apenas quando, em todos os níveis, os nós possuem o mesmo grau.

Uso da árvore de forma generalizada

Criação de um novo curso (Bioinformática) envolvendo dois departamentos.

Se cada uma der 3 disciplinas, Quantas disciplinas terá no total?

Esta estrutura de árvore **não** é um produto cartesiano!



É possível aplicar a regra da multiplicação → em todos os níveis, os nós possuem o mesmo grau.

Por quê utilizar árvores?

Uma árvore pode representar qualquer conjunto de sequência, não só produto cartesiano;

Um método sistemático de contagem;

Úteis para modelar fenômenos randômicos;

Melhor de n

Nos esportes, times e atletas disputam entre si para saber quem é o melhor.

Como jogar uma partida é relativamente randômico → Partidas de melhor de n

Tênis: $n = 3$ ou 5 sets

Playoffs do NBA: $n = 7$ jogos

Objetivo: vencer a maioria dos jogos.

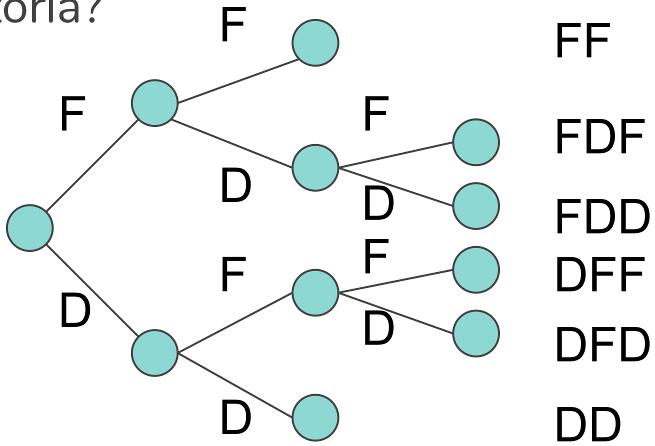
Uma vez que um time ou atleta vence mais que $n/2$ → Parar a partida

Sequências de vitória

Suponha uma disputa de Tênis entre Federer e Djokovic.

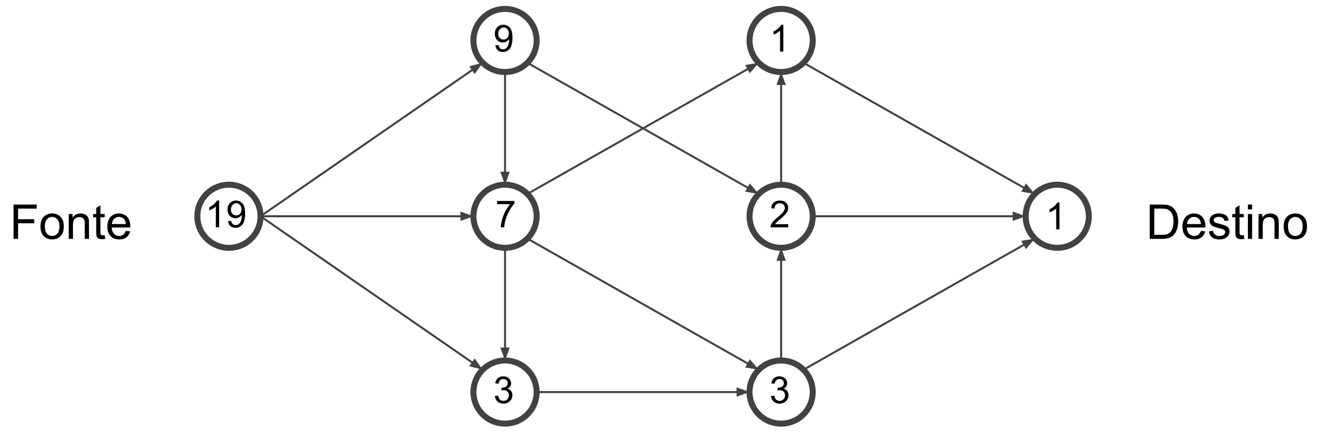
A disputa é interrompida quando um deles vencem duas partidas.

Qual o número de sequências de vitória?



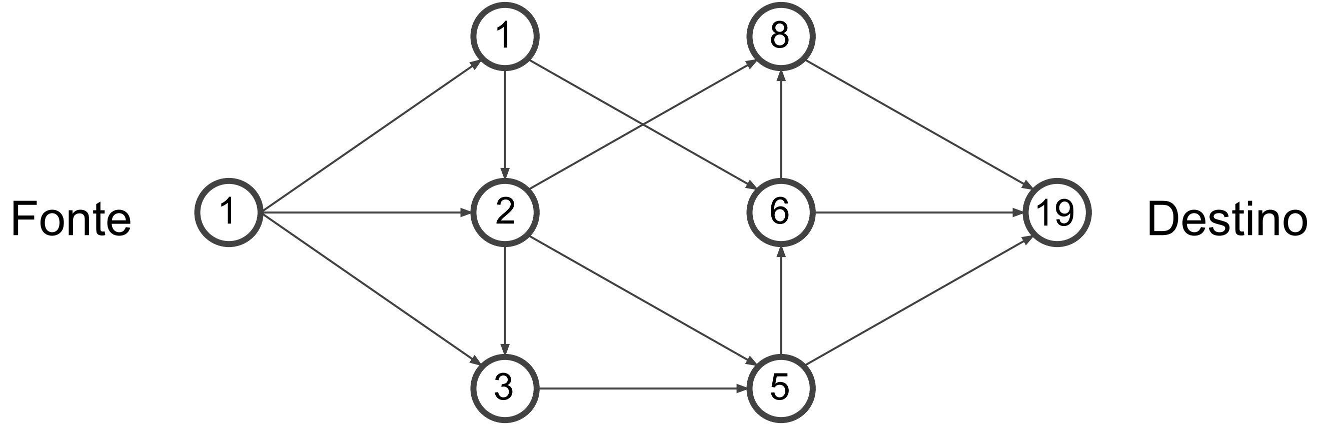
Caminhos da fonte até o destino

Generalização da contagem de caminhos para um grafo acíclico :



Caminhos da fonte até o destino

Generalização da contagem de caminhos para um grafo acíclico :



Revisão

- Tamanho dos conjuntos
  - Número de elementos em um intervalo de inteiros;
  - Número de elementos divisíveis por um número;
- Regra da soma
- Regra da subtração
- Regra da multiplicação
- Potência cartesiana
- Árvores

Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/