Probabilidade

Introdução

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metrópole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br

Probabilidade

O que é probabilidades?

Uma forma de representar numericamente as chances de um determinado evento acontecer.

História

Conceito de probabilidade e incerteza é tão antiga quanto o início das civilizações.

Jogos de azar - 3500 AC, praticados por povos antigos (Egito, Suméria, Assíria, Grécia e Roma Antiga);

- Uso de ossos, precursor dos dados atuais;
- Dados cúbicos, parecidas com as atuais encontradas em tumbas que datam de 2500 AC;
- Parte importante do desenvolvimento da teoria de probabilidade.

História

Acredita-se que a base teórica da probabilidade foi fundamentada pelos matemáticos franceses **Blaise Pascal** e **Pierre Fermat**;

- Resolução do problema de partição das apostas em jogos de azar quando o jogo é interrompido antes;

Blaise Pascal
(1623-1662)

Pierre Fermat
(1601-1665)

História

Ao longo dos anos, várias sugestões foram elaboradas para definir de forma científica a probabilidade.

- Frequentista;
- Clássica;
- Subjetiva;

Definições de probabilidade

- Frequentista;
- Clássica;
- Subjetiva;

Em uma jogada de moeda, qual a probabilidade de ser cara?

Definição frequentista

Definição: A probabilidade de um evento é a frequência relativa com que aquele resultado pode ser obtido se o processo for repetido um grande número de vezes sobre condições similares.

```
import numpy as np

n = 100
sum = 0;
for i in range(n):
    sum += np.random.randint(2)
print(sum/n)
```

Críticas a definição frequentista

Definição: frequência relativa com que aquele resultado pode ser obtido se o processo for repetido um grande número de vezes sobre condições similares.

- "**Um grande número**" de jogadas → não há indicação do que pode ser considerado grande o bastante.
- "**Condições similares**" → a forma como a moeda é jogada não deve ser idêntica, pois isso resultará sempre no mesmo resultado.
- Aplica-se apenas a problemas que é possível, a princípio, realizar um número grande de repetições.

Definição clássica

Definição: Baseado no conceito de “resultados igualmente prováveis”.

Em uma jogada de moeda → dois possíveis resultados:

- Cara;
- Coroa.

Se considerarmos que:

- eles devem ter a mesma probabilidade de ocorrer;
- a soma das probabilidades é igual a 1;

Então, a probabilidade tanto de dar cara ou coroa é de ½.

De forma geral, se o número de resultados é n, então a probabilidade de cada resultado é 1/n.

Críticas a definição clássica

Definição: Baseado no conceito de “resultados igualmente prováveis”.

Esta definição pode ser bem aplicada em moedas e dados justos, e em baralho bem embaralhado.

Não fornece um método sistemático de calcular probabilidades caso as chances não forem os mesmos para cada resultado (exemplo: a probabilidade de uma pessoa casar daqui a 2 anos).

Definição subjetiva

Definição: A probabilidade de um resultado é atribuído a uma pessoa segundo suas crenças e informações sobre o processo;

Considere uma moeda que é jogada novamente.

- Uma pessoa que não tem informações especiais, a princípio, atribuiria que a probabilidade de dar cara é ½.
- Mas a pessoa que está jogando, pode sentir que as chances de tirar cara é maior que o de coroa. Então ela pode atribuir que a probabilidade de dar cara é um valor entre ½ e 1.

Críticas a definição subjetiva

Subjetiva: Uma outra pessoa que tenha outras crenças e outras informações podem atribuir diferentes probabilidades a um mesmo processo;

Se você tem inúmeros resultados possíveis, é preciso atribuir subjetivamente as probabilidades de cada um dos resultados;

Independente das definições...

- **Frequentista;**
- **Clássica;**
- **Subjetiva;**

Cada uma destas definições receberam críticas relevantes;

A verdadeira definição de probabilidade está envolvida em várias discussões filosóficas.

A teoria matemática de probabilidade não depende das controvérsias entre as diferentes definições.

Calculando probabilidades...

P(cara em uma moeda) = ½

P(face 1 do dado) = ⅙

P(Às no baralho) = 4/52

P(vermelho em uma urna) = (n vermelho)/ (n bolas)

Calculando probabilidades...

P(10 caras em 20 jogadas de moeda)

P(soma maior que 6 em 3 dados)

P(comprar 1 Às comprando 4 cartas)

P(três vermelhos pegando três bolas na urna)

P(Evento) = número de resultados satisfatório/
número de possíveis resultados

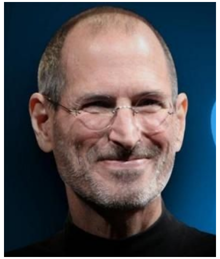
Teoria dos conjuntos + Métodos de contagem

Teoria de conjuntos

Elementos

Base que forma os conjunto

Pode ser qualquer coisa:

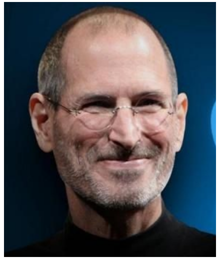


- Elementos estruturados: letras, palavras, documentos, páginas na web;
- Elementos numéricos;

Conjunto

Coleção de elementos distintos

Para definir um conjunto:

{    }

Representações de um conjunto

Explícita

- Moeda → { cara, coroa }
- Bits → { 0, 1 }
- Dado → { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

Implícita

- Dígito → { 0, 1, ... , 9}
- Letras → { a, b, ... , z}

Descritiva

- { palavras com 4 letras} = { amor, sede, gato, ... }

Conjuntos comuns

Z Inteiros → { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }

N Naturais → { 0, 1, 2, ... }

P Positivos → { 1, 2, 3, ... }

Q Racionais → { razão de inteiros m/n, n ≠ 0 }

R Reais → { números racionais e irracionais }

Conveção:

- Conjunto - MAIÚSCULA
- Elementos - minúscula

Relação de pertinência

Se um elemento x está em um conjunto A, x é um membro ou pertence a A, denotamos **x ∈ A**.

- Exemplo: $0 \in \{0,1\}$ $1 \in \{0,1\}$ $\pi \in R$

De forma equivalente, A contém x, e denotamos **A ∋ x**.

- Exemplo: $\{0,1\} \ni 0$ $\{0,1\} \ni 1$ $R \ni \pi$

Relação de pertinência

De modo inverso...

Se um elemento x **não** está em um conjunto A, x **não** é um membro ou **não** pertence a A, denotamos **$x \notin A$**.

- Exemplo: $2 \notin \{0,1\}$ $\pi \notin Q$

De forma equivalente, A **não** contém x, e denotamos **$A \not\ni x$**.

- Exemplo: $\{0,1\} \not\ni 2$ $Q \not\ni \pi$

Características do conjunto

- A ordem não importa
  - { 0 , 1 } = { 1, 0 }
- Repetição não importa
  - { 0 , 1 } = { 0, 1, 1, 1, 1 }

E se a ordem importar?

- Tuplas ordenadas (0,1) ≠ (1,0)

E se a repetição importar?

- Multiconjunto

Conjuntos especiais

Conjunto vazio → não contém elementos

- $\emptyset$ ou { }
- $\forall x, x \notin \emptyset$ $\qquad \forall$ → qualquer

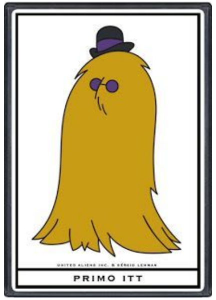
Conjunto universo → contém todos os possíveis elementos

- Ω
- $\forall x, x \in \Omega$

Conjuntos especiais

Conjunto universo → nos permite considerar apenas elementos relevantes.

- Ω = {números inteiros e primos}:
  - 2, 3, 5, 7, ...
  - E não...



Conjuntos especiais

Ω depende da aplicação

- Temperatura → Ω = R
- Texto → Ω = { palavras }

∅ é único em qualquer situação → conjunto sem elementos.

Conjunto dentro de conjunto

Especificando um conjunto dentro de um universo, ou qualquer outro conjunto:

$\{ x \in A \mid \ldots \}$ = { elementos x em A tal que ... } = $\{ x \in A : \ldots \}$

- $N = \{ x \in Z \mid x \geq 0 \}$
- $P = \{ x \in Z \mid x > 0 \}$

Conjunto dentro de conjunto

Útil para descrever **soluções de equações**:

- $\{ x \in R \mid x^2 \geq 0 \} = R$
- $\{ x \in R \mid x^2 = 1 \} = \{ -1, 1 \}$
- $\{ x \in R \mid x^2 = 0 \} = \{ 0 \}$
- $\{ x \in R \mid x^2 = -1 \} = \varnothing$
- $\{ x \in C \mid x^2 = -1 \} = \{ -i, i \}$

As soluções dependem do conjunto que você está restringindo.

Conjunto dentro de conjunto

Útil para descrever **intervalos de inteiros**:

- $\{ m, \dots, n \} = \{ i \in Z \mid m \leq i \leq n \}$ → inteiros de "m" a "n", inclusivo;
- $\{ 3, \dots, 5 \} = \{ i \in Z \mid 3 \leq i \leq 5 \} = \{ 3, 4, 5 \}$
- $\{ 3, \dots, 4 \} = \{ i \in Z \mid 3 \leq i \leq 5 \} = \{ 3, 4 \}$
- $\{ 3, \dots, 3 \} = \{ i \in Z \mid 3 \leq i \leq 3 \} = \{ 3 \}$
- $\{ 3, \dots, 2 \} = \{ i \in Z \mid 3 \leq i \leq 2 \} = \varnothing$

Conjunto dentro de conjunto

Útil para descrever **intervalos de reais**:

- $[\ a,b\ ] = \{\ x \in R \mid a \leq x \leq b\ \}$ → números reais de “a” a “b”, incluindo “a” e “b”;
- $(\ a,b\ ) = \{\ x \in R \mid a < x < b\ \}$ → números reais de “a” a “b”, não incluindo “a” e “b”;
- $[\ a,b\ ) = \{\ x \in R \mid a \leq x < b\ \}$ → números reais de “a” a “b”, incluindo “a” e não incluindo “b”;

Exemplos: $[\ 3, 3\ ] = \{\ 3\ \}$ $\quad [\ 3, 2\ ] = [\ 3, 3\ ) = (\ 3, 3\ ] = \varnothing$

Relações e operações aplicadas em conjuntos

Relação entre números:

- $=$
- $\leq$ ou $\geq$
- $<$ ou $>$

Operações entre números:

- $+$
- $-$

Relação entre conjuntos:

- $=$
- $\subseteq$ ou $\supseteq$
- $\subset$ ou $\supset$

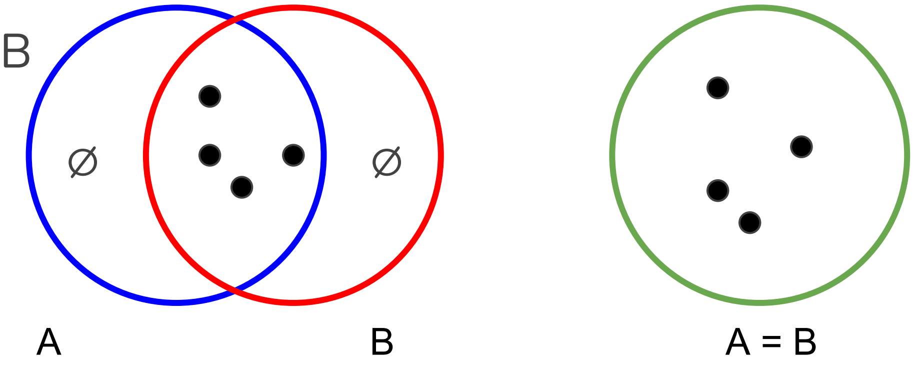
Operações entre conjuntos:

- União
- Subtração
- Interseção

Relação de igualdade

O conjunto A é dito **igual** ao conjunto B, se um contém os mesmos elementos que o outro.

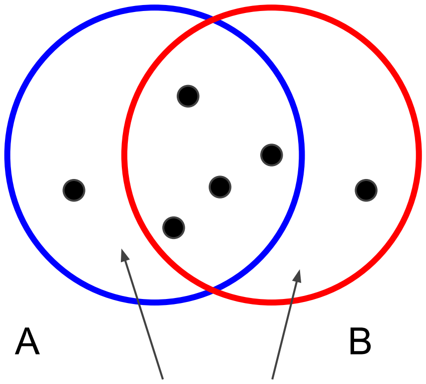
A = { 0, 1 }, B = { 1, 0 }; A = B



Relação de desigualdade

O conjunto A é dito **diferente** do conjunto B, se um contém pelo menos um elementos distinto do outro.

$A = \{ 0, 1 \}, B = \{ 1, 2 \}; A \neq B$



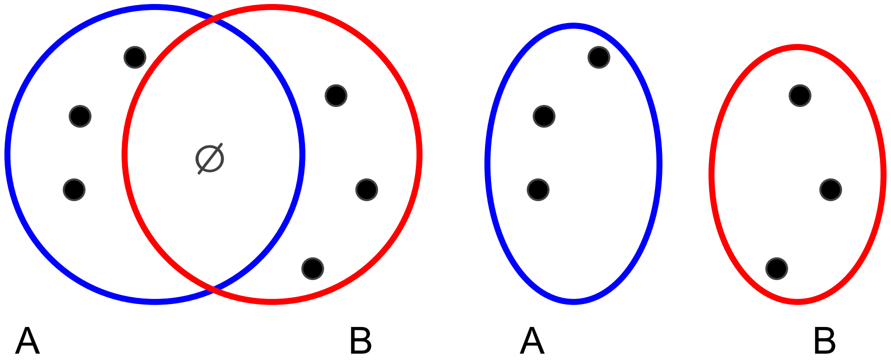
Pelo menos um deles não é ∅

Conjuntos disjuntos

A disjunção de A e B ocorre quando não há elementos elementos em comum entre A e B;

Exemplo:

- $\{ 0, 1 \} \cap \{ 2, 3 \} = \varnothing$
- $[3, 4) \cap [4, 5] = \varnothing$



Subconjuntos (⊆)

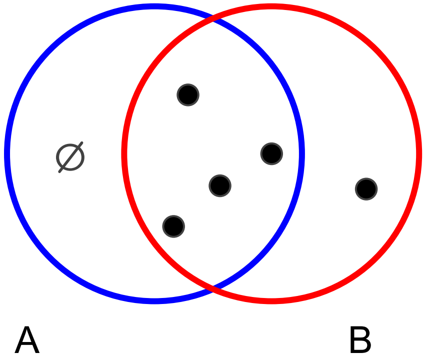
Generalização da relação $\leq$;

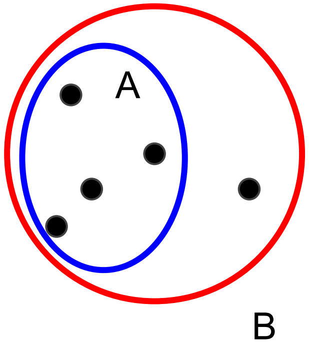
Se todos os elementos de A pertencerem a B, então A é um subconjunto de B;

- $A \subseteq B$

Exemplo:

- $\{0\} \subseteq \{0, 1\}$
- $\{0\} \subseteq \{0\}$





Superconjuntos (⊇)

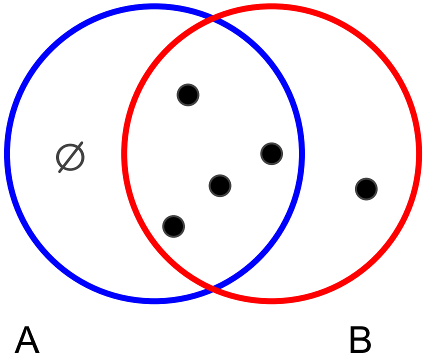
Generalização da relação $\geq$;

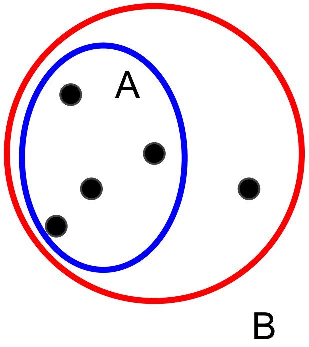
B é superconjunto de A se B contiver todos os elementos de A;

- $B \supseteq A$

Exemplo:

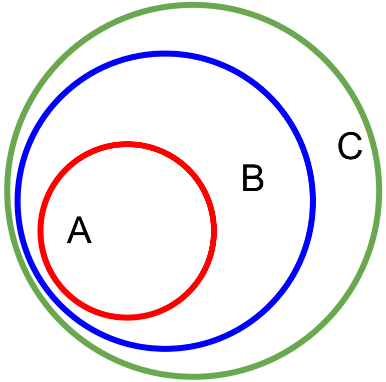
- $\{0, 1\} \supseteq \{0\}$
- $\{0\} \supseteq \{0\}$

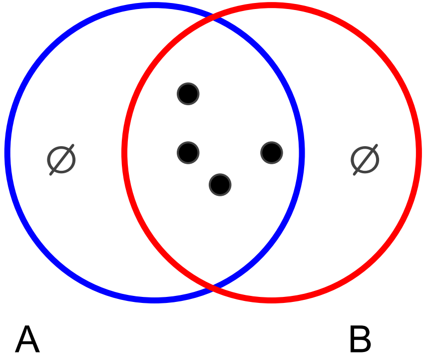




Propriedades do subconjunto

- $\varnothing \subseteq A \subseteq A \subseteq \Omega$
- $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$ (transitividade)
- $A \subseteq B$, $B \subseteq A$, então $A = B$





(Sub ou Super)conjuntos estritos (⊂)

Se A é subconjunto de B e A é diferente de B, então A é um subconjunto estrito de B;

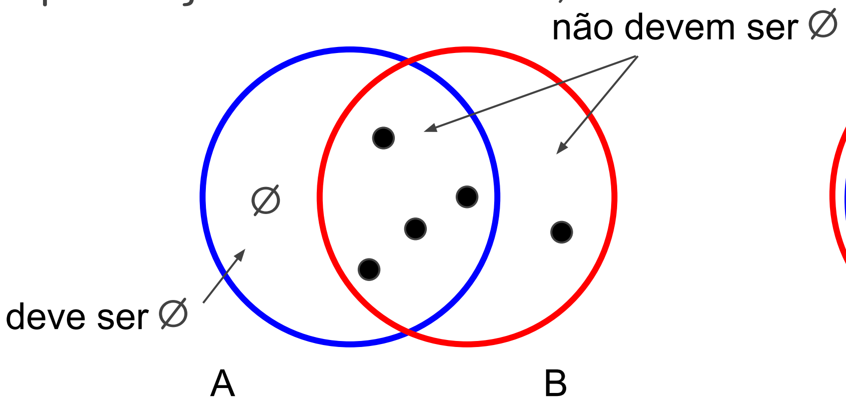
- $A \subset B$

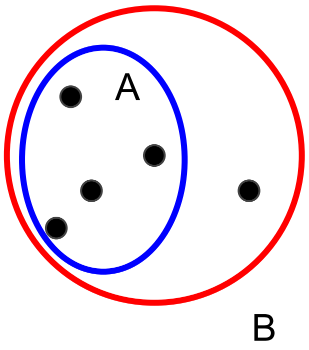
Da mesma forma, B é superconjunto estrito de A;

- $B \supset A$

Exemplo:

- $\{0\} \subset \{0, 1\}$
- $\{0, 1\} \supset \{0\}$





∈ (pertence a) vs ⊆ (contém)

- ∈ → relação entre um elemento e um conjunto;
  - $x \in A$ → elemento x pertence ao conjunto A;
  - $0 \in \{ 0 , 1 \}$
  - $\{ 0 \} \notin \{ 0, 1 \}$

- ⊆ → relação entre dois conjuntos;
  - $A \subseteq B$ → o conjunto A é um subconjunto do conjunto B
  - $\{ 0 \} \subseteq \{ 0 , 1 \}$
  - $0 \nsubseteq \{ 0, 1 \}$

Operações aplicadas em conjuntos

Operações entre números:

- +
- -

Operações entre conjuntos:

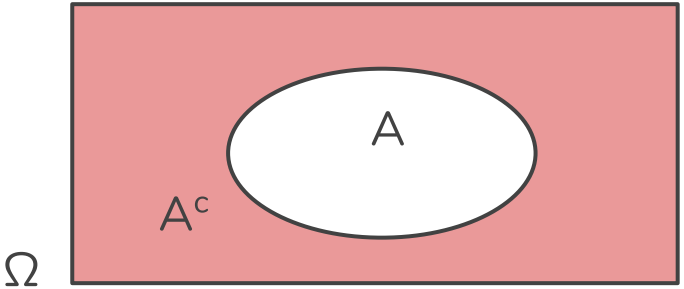
- União
- Subtração
- Interseção

Complemento

$\Omega \rightarrow$ conjunto de todos os elementos possíveis;

Complemento do conjunto A (A^c) $\rightarrow$ todo elemento em Ω que não está no A;

Em termos lógicos: $A^c = \{ x \in \Omega \mid x \notin A \}$



$\Omega = \{ 0, 1\}$

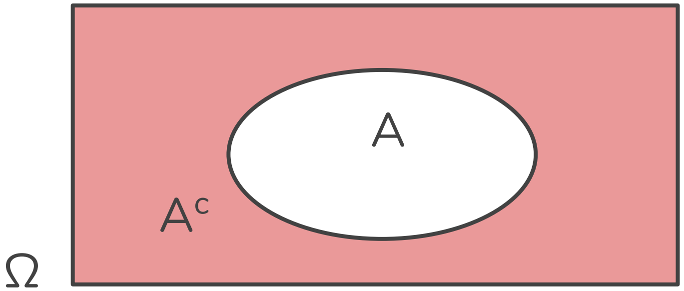
$\{ 0 \}^c = \{ 1 \}$

$\{ 0, 1 \}^c = \varnothing$

$\{ \varnothing \}^c = \Omega$

Propriedades do complemento

- $\Omega^c = \varnothing$ $\varnothing^c = \Omega$
- A e A^c são sempre disjuntos
- $(A^c)^c = A \rightarrow$ involução



Interseção (∩)

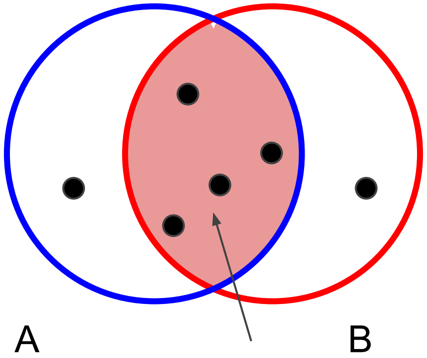
A interseção de A e B é um conjunto de elementos que simultaneamente pertencem ao conjunto A e ao conjunto B;

Em termos lógicos: $A \cap B = \{ x \in \Omega \mid x \in A \wedge x \in B \}$

e

Exemplos:

- $\{ 0, 1 \} \cap \{ 1, 2 \} = \{1\}$
- $[3, 4] \cap [2, 5] = [3, 4]$



Não ∅

União (U)

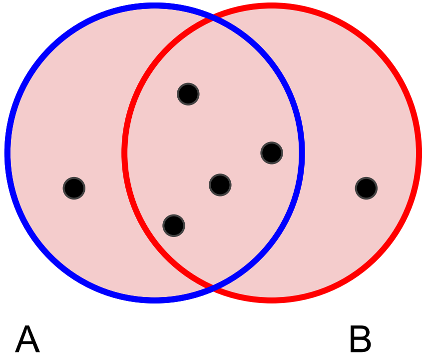
União dos conjuntos A e B corresponde a todos os elementos que pertencem aos conjuntos A e B.

Em termos lógicos: $A \cup B = \{ x \in \Omega \mid x \in A \vee x \in B \}$

ou

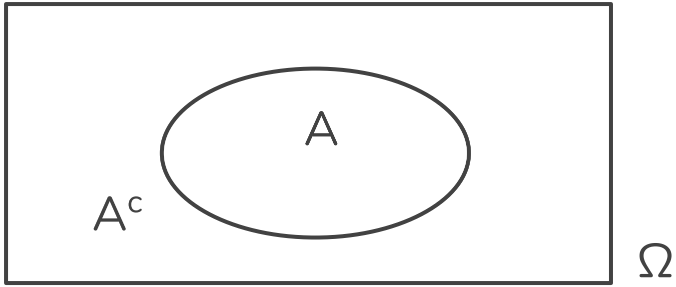
Exemplos:

- $\{ 0, 1 \} \cup \{ 1, 2 \} = \{0, 1, 2\}$
- $[3, 4] \cup [2, 5] = [2, 5]$



Propriedades (∪ e ∩)

Identidade	$A \cap \Omega = A$	$A \cup \Omega = \Omega$
Limite universal	$A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \cup \varnothing = A$
Idempotente	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Complemento	$A \cap A^c = \varnothing$	$A \cup A^c = \Omega$



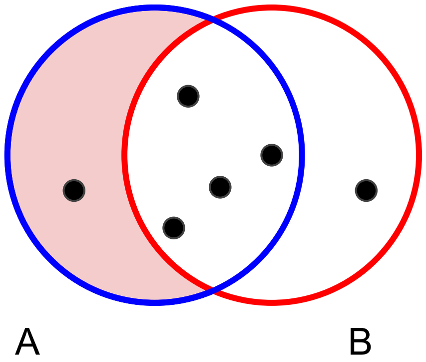
Subtração de conjuntos

Subtração do conjunto A por B (A - B) corresponde a todos os elementos em A que não estejam em B.

Em termos lógicos: $A - B = \{ x \in \Omega \mid x \in A \wedge x \notin B \}$

Exemplos:

- $\{ 0, 1 \} - \{ 1 \} = \{0\}$
- $[3, 4] - [2, 5] = \varnothing$



$A - B = A \cap B^c$

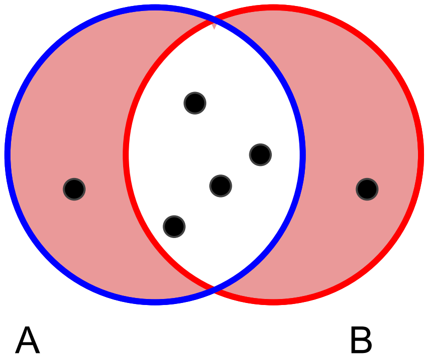
Subtração simétrica (Δ)

Subtração simétrica de dois conjuntos correspondem aos elementos que ocorrem exatamente apenas em um dos conjuntos.

Em termos lógicos: $A \,\Delta\, B = \{ x \in \Omega \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$

Exemplos:

- $\{ 0, 1 \} \,\Delta\, \{ 1, 2 \} = \{0, 2\}$
- $[0, 2] \,\Delta\, [1, 3] = [0, 1) \cup (2, 3]$



$A \,\Delta\, B = (A-B) \cup (B-A)$