

Probabilidade

Probabilidade condicional

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto

Instituto Metr pole Digital - UFRN

Sala A224, ramal 182

Email: tetsu@imd.ufrn.br





Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/





Motivação

- Probabilidade de um resultado ou um evento;
- Conhecimento parcial de uma informação;
- Obter melhores estimativas e verificar como esta informação modifica a probabilidade de um evento;

Exemplo:

- Consumo de produto
 - Gênero;
- Tráfego para a praia
 - Altas temperaturas;



Probabilidade condicional

$E, F \Rightarrow$ Eventos

$P(E | F)$ = Probabilidade de E acontecer dado que F aconteceu;

- $P(\text{comprar + 3 peças} | \text{cliente feminino})$
- $P(\text{tráfego intenso} | \text{temperatura alta})$



Dado justo

$$P(2) = ?$$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right\}$$



Dado justo

$$P(2) = \frac{1}{6}$$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right\}$$



Dado justo

$$P(2) = \frac{1}{6}$$

$$P(2 \mid \text{par}) = ?$$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right\}$$



Dado justo

$$P(2) = \frac{1}{6}$$

$$P(2 \mid \text{par}) = \frac{1}{3}$$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right\}$$



Dado justo

$$P(2) = \frac{1}{6}$$

$$P(2 \mid \text{par}) = \frac{1}{3}$$

$$P(2 \mid \text{ímpar}) = ?$$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right\}$$



Dado justo

$$P(2) = \frac{1}{6}$$

$$P(2 \mid \text{par}) = \frac{1}{3}$$

$$P(2 \mid \text{ímpar}) = 0$$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right\}$$



Probabilidade condicional

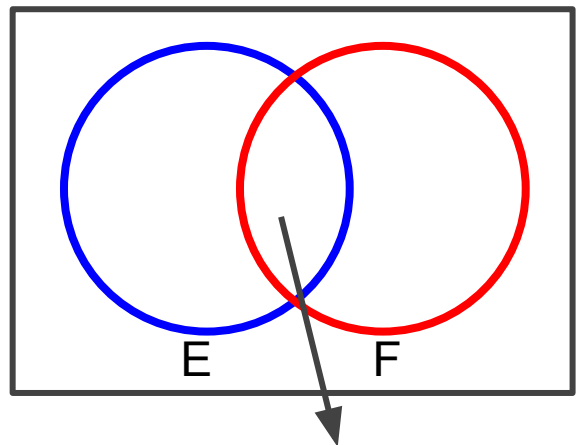
$$P(F | E) = P(x \in F | x \in E)$$

$$= P(x \in F \cap x \in E | x \in E)$$

$$= P(x \in F \cap E | x \in E)$$

$$= P(F \cap E) / P(E) \rightarrow \text{no geral}$$

$$= |E \cap F| / |E| \rightarrow \text{distribuição uniforme}$$



$E \cap F$



Dado justo

$$P(4) = \frac{1}{6}$$

$$P(4 \mid \geq 3) = ?$$

$$P(4 \mid \leq 3) = ?$$



Dado justo

$$P(4) = \frac{1}{6}$$

$$P(4 \mid \geq 3) = P(4 \mid \{3, 4, 5, 6\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(4 \mid \leq 3) = P(4 \mid \{1, 2, 3\}) = 0/3 = 0$$



Dado justo

$$P(\leq 2) = P(\{1,2\}) = 2/6 = 1/3$$

$$P(\leq 2 \mid \leq 4) = ?$$

$$P(\leq 2 \mid \geq 2) = ?$$



Dado justo

$$P(\leq 2) = P(\{1,2\}) = 2/6 = 1/3$$

$$P(\leq 2 \mid \leq 4) = P(\{1,2\} \mid \{1,2,3,4\}) = 2/4 = 1/2$$

$$P(\leq 2 \mid \geq 2) = P(\{1,2\} \mid \{2,3,4,5,6\}) = 1/5$$



Exemplo



Considere um dado de 4 lados cujas probabilidades dos números são:

número	1	2	3	4
probabilidade	0.1	0.2	0.3	0.4

$$P(\geq 2 \mid \leq 3) = ?$$



Exemplo



Considere um dado de 4 lados cujas probabilidades dos números são:

número	1	2	3	4
probabilidade	0.1	0.2	0.3	0.4

$$P(\geq 2 \mid \leq 3) = ?$$

$$P(\{2,3,4\} \cap \{1,2,3\}) / P(\{1,2,3\})$$

$$P(\{2,3\}) / P(\{1,2,3\}) = 0.5/0.6 = \frac{5}{6}$$



Regra do produto

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

$$P(E \cap F) = P(F|E) \cdot P(E)$$



Exemplo



$$P(E \cap F) = P(F|E) \cdot P(E)$$

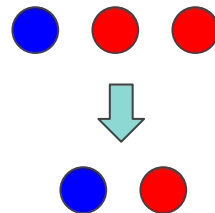
Pegando duas bolas, qual a probabilidade de pegar duas bolas vermelhas?

V_1 = primeira bola vermelha V_2 = segunda bola vermelha;

$$P(\text{duas vermelhas}) = P(V_1 \cap V_2)$$

$$P(\text{duas vermelhas}) = P(V_1) \cdot P(V_2 | V_1)$$

$$P(\text{duas vermelhas}) = 2/3 \cdot 1/2 = 1/3$$





Regra do produto genérico

$$\begin{aligned}P(E \cap F \cap G) &= P((E \cap F) \cap G) \\&= P(X \cap G) \quad X = E \cap F \\&= P(G|X)P(X) \\&= P(G|E \cap F)P(E \cap F) \\&= P(G|E \cap F)P(E|F)P(F)\end{aligned}$$



Exercício

A tabela de contingência abaixo mostra o número de pessoas indo para o trabalho (em milhares) em São Paulo em 2015, organizadas pelo meio de transporte e pelo tempo de viagem.

	Menos de 15 min	15-29 min	30-44 min	45-59 min	60 min ou mais	Total
Veículo particular	636	908	590	257	256	2647
Transporte público	9	54	96	62	108	329
Outro	115	70	23	7	7	222
Total	760	1032	709	326	371	3198

$P(60+ \text{ minutos} \mid \text{transporte público}) = ?$



Exercício

Se os eventos A e B são disjuntos, quanto é $P(A|B)$?

- a) 0
- b) $\frac{1}{2}$
- c) 1
- d) $\frac{1}{4}$



Independência

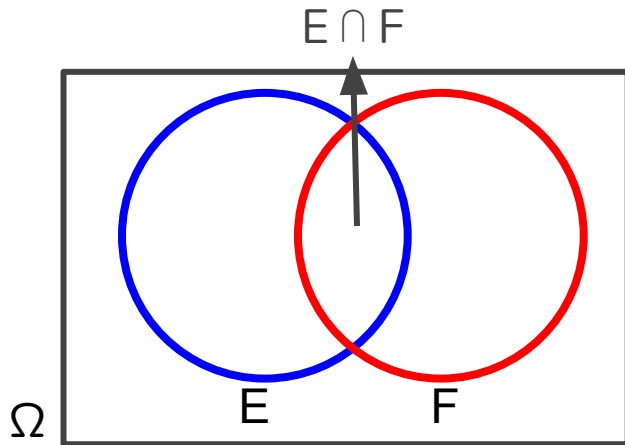
Dois eventos (E, F) são independentes ($E \perp F$) se a ocorrência de um evento não altera a probabilidade do outro evento ocorrer.

$$P(F | E) = P(F)$$

$$P(F) = |F| / |\Omega|$$

$$P(F | E) = |F \cap E| / |E|$$

$$|F| / |\Omega| = |F \cap E| / |E|$$





Independência

$$P(F|E) = P(F)$$

$$\frac{P(F \cap E)}{P(E)} = P(F)$$

$$P(F \cap E) = P(F) \cdot P(E)$$



Exemplos (Dado)

Evento	Conjunto	Probabilidade
primos	$\{2, 3, 5\}$	$\frac{1}{2}$
ímpar	$\{1, 3, 5\}$	$\frac{1}{2}$
quadrado	$\{1, 4\}$	$\frac{1}{3}$

Quais pares de eventos são independentes?

Interseção	Conj.	Prob.	=?	Produto	Independência
$\text{Primos} \cap \text{ímpar}$					
$\text{Primos} \cap \text{quadrado}$					
$\text{Quadrado} \cap \text{ímpar}$					



Exemplos (Dado)

Evento	Conjunto	Probabilidade
primos	$\{2, 3, 5\}$	$\frac{1}{2}$
ímpar	$\{1, 3, 5\}$	$\frac{1}{2}$
quadrado	$\{1, 4\}$	$\frac{1}{3}$

Quais pares de eventos são independentes?

Interseção	Conj.	Prob.	=?	Produto	Independência
$\text{Primos} \cap \text{ímpar}$	$\{3, 5\}$	$\frac{1}{3}$	\neq	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	dependente
$\text{Primos} \cap \text{quadrado}$	$\{\emptyset\}$	0	\neq	$\frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	dependente
$\text{Quadrado} \cap \text{ímpar}$	$\{1\}$	$\frac{1}{6}$	$=$	$\frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	independente



Exemplos (três moedas)

Evento	Descrição	Conj.	Prob.
H1	1ª cara	$\{H^{**}\}$	$\frac{1}{2}$
H2	2ª cara	$\{^*H^*\}$	$\frac{1}{2}$
HH	2 caras consecutivos	$\{THH, HHT\}$	$\frac{1}{3}$

Quais pares de eventos são independentes?

Interseção	Conj.	Prob.	=?	Produto	Independência
$H1 \cap H2$					
$H2 \cap HH$					
$H1 \cap HH$					



Exemplos (três moedas)

Evento	Descrição	Conj.	Prob.
H1	1ª cara	{H**}	$\frac{1}{2}$
H2	2ª cara	{*H*}	$\frac{1}{2}$
HH	2 caras consecutivos	{THH, HHT}	$\frac{1}{4}$

Quais pares de eventos são independentes?

Interseção	Conj.	Prob.	=?	Produto	Independência
$H1 \cap H2$	{HH*}	$\frac{1}{4}$	=	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	independente
$H2 \cap HH$	{THH, HHT}	$\frac{1}{4}$	\neq	$\frac{1}{2} * \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$	dependente
$H1 \cap HH$	{HHT}	$\frac{1}{8}$	=	$\frac{1}{2} * \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$	independente



Exercício

Se os eventos A e B são disjuntos, A e B são dependentes ou independentes?

Resposta: Dependentes!



Exercício

Esquematize na forma de um diagrama de Venn dois eventos que sejam independentes.

Em jogada de um dado:

$A = \{\text{quadrado}\}$

$B = \{\text{ímpar}\}$

1	3	5
4	2	6



Revisão

- Probabilidade condicional
 - $P(E | F) = P(E \cap F) / P(F)$
- Regra do produto
 - $P(E | F)P(F) = P(E \cap F)$
- Independência dos eventos
 - **Independentes** → A ocorrência de um evento **não** altera a probabilidade do segundo evento;
 - **Dependentes** → A ocorrência de um evento altera a probabilidade do segundo evento;