

# Probabilidade

## Análise combinatória

**Prof. Dr. Tetsu Sakamoto**

Instituto Metrópole Digital - UFRN

Sala A224, ramal 182

Email: [tetsu@imd.ufrn.br](mailto:tetsu@imd.ufrn.br)





**Slides e notebook em:**

[github.com/tetsufmbio/IMD0033/](https://github.com/tetsufmbio/IMD0033/)





# Revisão

- Princípio fundamental da contagem;
- Arranjos/permutação;
- Combinação;
- Subconjuntos de tamanho  $k$  de um conjunto de  $n$  elementos: diferentes combinações;
- Número de combinações distintos  $\rightarrow$  coeficiente binomial;



# Nesta aula

- Coeficiente multinomial;
- Multiconjunto.

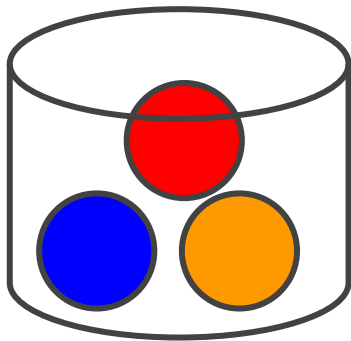


# Ordem (não) / reposição (não)

## Combinação



















Urna com três bolas de cores distintas;

Pegar duas boas.



Primeira bola

Segunda bola



# k-subconjuntos

Subconjuntos de tamanho k;

$$\binom{[n]}{k}$$

Coleção de todos os subconjuntos de tamanho k presentes no conjunto  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$

$$\binom{[3]}{1} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

Os diferentes **subconjuntos** correspondem à diferentes combinações.

$$\binom{[3]}{2} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$$

**Interesse:** Contar o número de k-subconjuntos em  $[n]$ .



# k-subconjuntos e sequências binárias

$$\binom{[n]}{k}$$

Coleção de todos os subconjuntos de tamanho k presentes no conjunto  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$

Subconjuntos

Sequências binárias

$$\binom{[3]}{1}$$

$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

100, 010, 001

$$\binom{[3]}{2}$$

$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$

110, 011, 101

$$\binom{[4]}{2}$$

$\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{3, 4\}\}$

1100, 1010, ... , 0011

Sequência de  
n-bits com k-1s



## E se quisermos saber para uma sequência com mais de dois caracteres?

Sequência de 8 caracteres onde se tem:

caracter	1	2	3	4
contagem	1	4	2	1

Sequência válida: 13224322

$$\binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \binom{n-k_1-k_2-k_3}{k_4}$$





**E se quisermos saber para uma sequência com mais de dois caracteres?**

$$\begin{aligned} & \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \binom{n-k_1-k_2-k_3}{k_4} \\ & \frac{n!}{(n-k_1)!k_1!} \frac{(n-k_1)!}{(n-k_1-k_2)!k_2!} \frac{(n-k_1-k_2)!}{(n-k_1-k_2-k_3)!k_3!} \frac{(n-k_1-k_2-k_3)!}{(n-k_1-k_2-k_3-k_4)!k_4!} \\ & \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} = \binom{n}{k_1, k_2, k_3, k_4} \end{aligned}$$



## E se quisermos saber para uma sequência com mais de dois caracteres?

Sequência de 8 caracteres onde se tem:

caracter	1	2	3	4
contagem	1	4	2	1

Sequência válida: 13224322

$$\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} = \frac{8!}{1!4!2!1!} = 840$$



# E se quisermos saber quantos anagramas podemos formar com a palavra JARARACA?

Sequência de 8 caracteres onde se tem:

caracter	J	A	R	C
contagem	1	4	2	1

$$\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} = \frac{8!}{1!4!2!1!} = 840$$

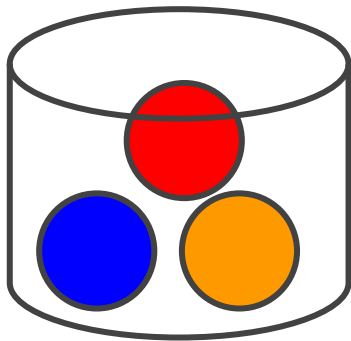


# Ordem (não) / reposição (sim)

## Multiconjunto

























Urna com três bolas de cores distintas;

Pegar duas boas.



Primeira bola

Segunda bola



# Multiconjunto

$$\left(\binom{n}{k}\right) = {}^{n+k-1}C_k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$\{x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \mid$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$

Quantas soluções  
diferentes existem para  
 $x_1, x_2$  e  $x_3$ ?



# Multiconjunto

$$X_1 + X_2 + X_3 = 7$$

$$\{X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{Z} \mid X_1, X_2, X_3 \geq 0\}$$

Quantas soluções diferentes existem para  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ ?

Como se eu estivesse escolhendo 7 caixas de 3 elementos (já que pode repetir)  $\rightarrow n = 3, k = 7$

$$\left(\binom{n}{k}\right) = {}^{n+k-1}C_k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

$$\left(\binom{3}{7}\right) = \binom{7+3-1}{7} = \frac{9!}{2!7!} = 36$$



# Multiconjunto

●	●	●	●	●	●	●	●	●	
★	★	★	■	★	★	■	★	★	3+2+2
■	■	★	★	★	★	★	★	★	0+0+7
★	★	★	★	■	■	★	★	★	4+0+3
★	★	■	★	■	★	★	★	★	2+1+4

De quantas formas diferente consigo posicionar as barras?

$$\binom{9}{2} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2!7!} = 36$$