

# Probabilidade

## Distribuição discreta II

**Prof. Dr. Tetsu Sakamoto**

Instituto Metr pole Digital - UFRN

Sala A224, ramal 182

Email: [tetsu@imd.ufrn.br](mailto:tetsu@imd.ufrn.br)





**Slides e notebook em:**

[github.com/tetsufmbio/IMD0033/](https://github.com/tetsufmbio/IMD0033/)





# Na aula passada

## Distribuição:

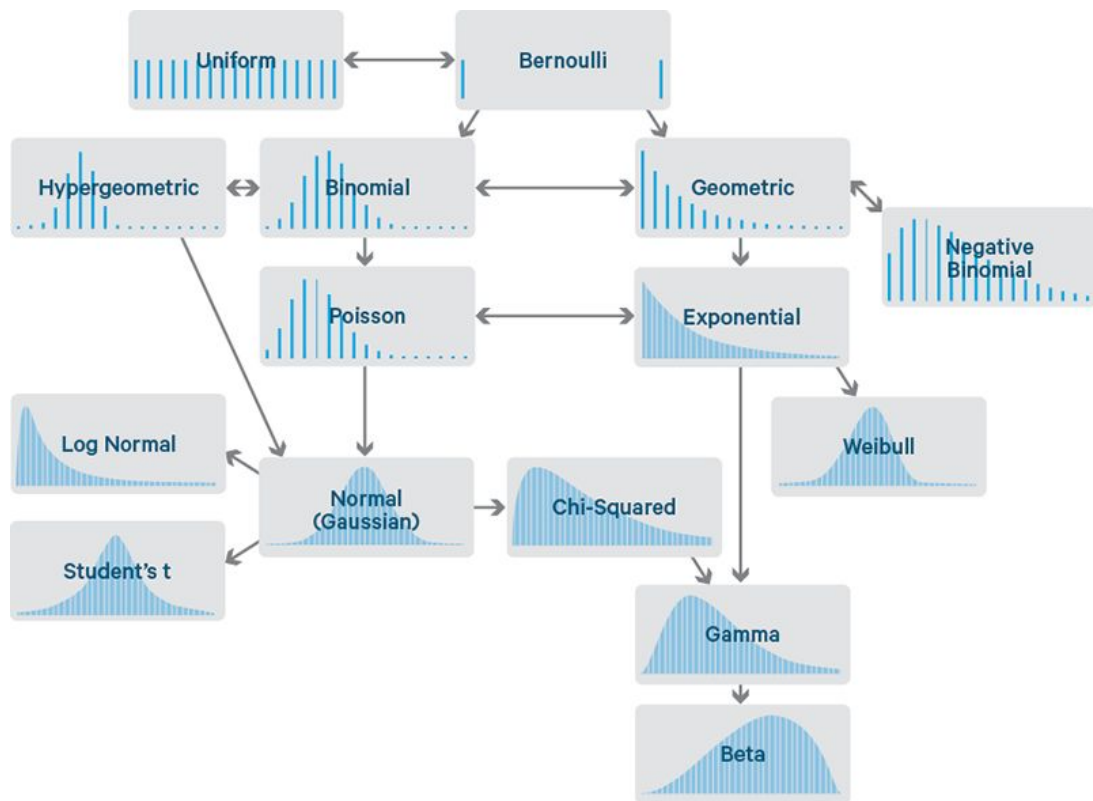
- Não deve haver probabilidades negativas;
- Soma deve ser 1;

## Distribuição de Bernoulli

- Média:  $p$
- Variância:  $pq$

## Distribuição Binomial

- Média:  $np$
- Variância:  $npq$

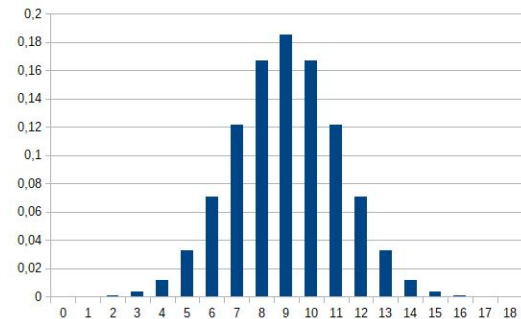
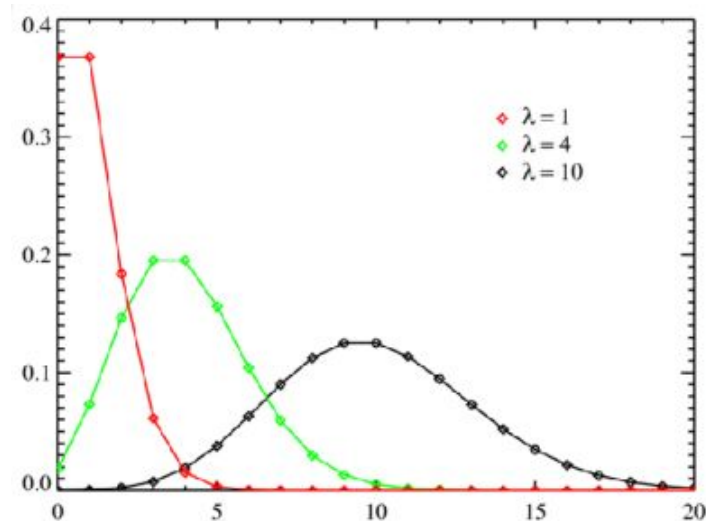


# Distribuição de Poisson

$$P_{\lambda}(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Definido pelo parâmetro  $\lambda \geq 0$

$k \in \mathbb{N}$



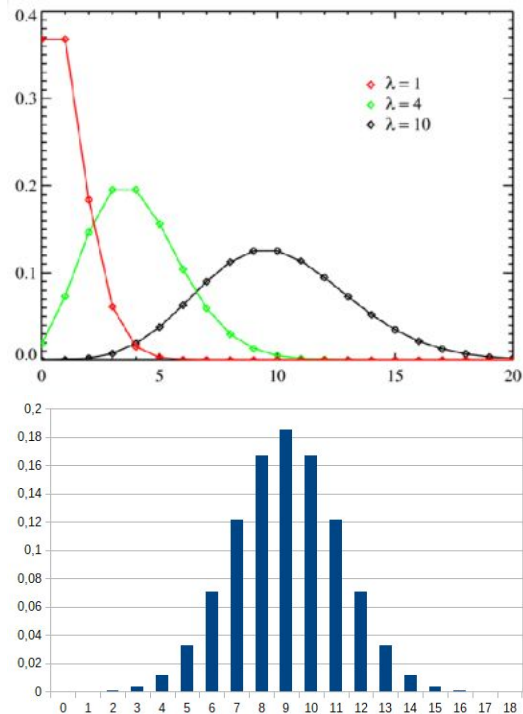


# Poisson é uma aproximação de $B_{p,n}$ para $n$ muito grande e $p$ muito pequeno

Quando  $n$  é muito grande e  $p$  muito pequeno...

$$B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad P_{\lambda}(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$n \cdot p = \lambda$  possui um valor moderado.





# Situações que seguem uma distribuição de Poisson

$P_\lambda$  aproxima de  $B_{p,n}$  para  $p$  pequeno,  $n$  grande;

- Números de clicks em uma ad;
- Resposta a um spam;
- Cliente em uma loja;
- Compra de uma pintura de arte de uma galeria;



## Pequeno k

$\lambda$	$P\lambda(k)$	0	1	2	3
Geral	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\frac{1}{e^\lambda}$	$\frac{\lambda}{e^\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2e^\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{6e^\lambda}$
1	$\frac{1}{ek!}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2e}$	$\frac{1}{6e}$
2	$\frac{2^k}{e^2 k!}$	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{2}{e^2}$	$\frac{2}{e^2}$	$\frac{4}{3e^2}$
0	$\frac{0^k}{k!}$	1	0	0	0



## Aproximação Binomial

Poisson é uma aproximação de  $B_{p,n}$  para  $n$  muito grande e  $p$  muito pequeno.

$$\begin{aligned} B_{n,p}(k) &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & np &= \lambda & p &= \frac{\lambda}{n} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} & q &= 1 - p \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \end{aligned}$$





## Limite binomial

$$B_{p,n}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{(1-\frac{\lambda}{n})^k}$$

$$P_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$k$  e  $\lambda$  fixados e  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} = 1$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k \quad \# \text{ fixado de termos } (k) \text{ e cada termo } \rightarrow 1$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \left(\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{\lambda}}\right)^\lambda = \left(\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m\right)^\lambda = (e^{-1})^\lambda$$
$$(1 - \frac{1}{m})^m = e^{-1} \quad m = \frac{n}{\lambda}$$



# Distr. de Poisson é realmente uma distribuição?

Probabilidade negativa?

$$P_{\lambda}(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k \geq 0 \quad \lambda = np$$

Probabilidades somam 1?

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{Expansão de Taylor}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{\lambda}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$



# Média e variância

Poisson é uma aproximação de  $B_{p,n}$  para  $n$  muito grande e  $p$  muito pequeno.

	$\mu$	$V$
$B_{p,n}$	$np$	$npq$
$P_{\lambda}$	$\lambda$	$\lambda$



## Exemplos

Uma indústria produz 200 itens, onde cada um possui probabilidade de 1% de ser defeituoso. Calcule a probabilidade de três desses itens serem defeituosos.

*P(3 ser defeituoso)?*

Binomial (preciso)  $B_{0,01,200}(3) = \binom{200}{3} (0,01)^3 (0,99)^{197} \approx 0,181$

Poisson (aproximado)  $\lambda = np = 200 \cdot 0,01 = 2$

$$P_2(3) = e^{-2} \frac{2^3}{3!} \approx 0,18$$



## Exemplos

Uma indústria produz 200 itens, onde cada um possui probabilidade de 1% de ser defeituoso. Calcule a probabilidade de encontrar pelo menos um defeituoso.

*P(algum ser defeituoso)?*

Binomial (preciso)  $B_{0,01,200}(0) = \binom{200}{0} (0,01)^0 (0,99)^{200} \approx 0,134$

$$B_{0,01,200}(\geq 1) = 1 - 0,134 \approx 0,866$$

Poisson (aproximado)  $\lambda = np = 200 \cdot 0,01 = 2$

$$P_2(0) = e^{-2} \frac{2^0}{0!} \approx 0,135$$

$$P_2(\geq 1) = 1 - 0,135 \approx 0,865$$



# Distribuição geométrica

Jogadas de moedas independentes ( $B_p$ ),  $p(1) = p$ ,  $p(0) = 1 - p = q$

<b>Binomial</b>	$B_{p,n}$	n jogadas, # 1s
<b>Geométrica</b>	$G_p$	# de jogadas até o primeiro 1

Jogadas	X
10101	1
01011	2
00011	4

n	$X_1, \dots, X_n$	$p(n)$
1	$X_1 = 1$	$p$
2	$X_1 = 0, X_2 = 1$	$qp$
3	$X_1 = X_2 = 0, X_3 = 1$	$q^2p$
n	$X_1 = X_2 = \dots = X_{n-1} = 0, X_n = 1$	$q^{n-1}p$



## Distribuição geométrica

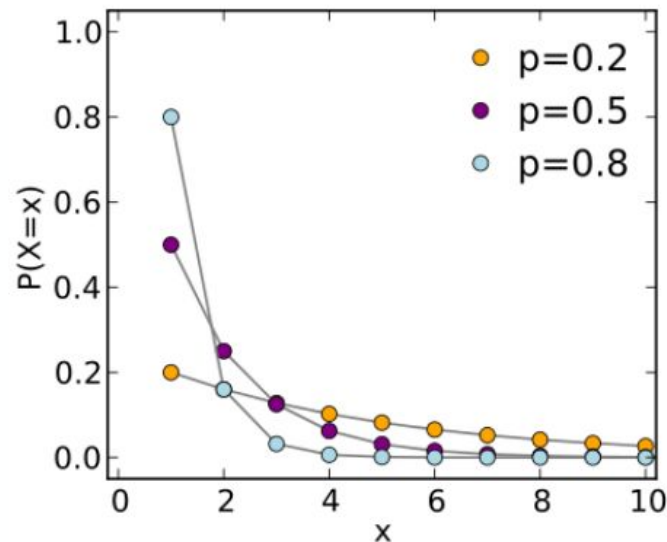
$$G_p, 0 < p \leq 1$$

$$P(n) = q^{n-1}p = G_p(n), n \geq 1$$

**Observações:**

$$p \neq 0$$

n pode assumir um valor muito alto





## Situações onde a distribuição é geométrica

- Ladrão tentando encontrar a chave certa em um molho de chave;
- Tentativas até acertar o alvo;
- Tentativas até sucesso;
- Tentativas até falha;





## Distribuição geométrica é distribuição?

$$P(n) = pq^{n-1} \quad n \geq 1$$

Soma das probabilidades é igual a 1?

$$(1 + q + q^2 + \dots)(1 - q) = 1 + q + q^2 + \dots \\ - q - q^2 - \dots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} = p \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = p \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$$



## Esperança de uma distribuição geométrica

$$P(X > n) = P(X_1 = \dots = X_n = 0) = q^n$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k$$

$$= P_1 + 2P_2 + 3P_3 \dots$$

$$= P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + P(X \geq 3) + \dots$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X > i) = \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$



## Variância de uma distribuição geométrica

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{q}{p^2}$$



## Exemplo: Moeda justa

$$X \sim G_{0,5}$$

$$P(X = k) = G_{0,5}(k) = 0,5^k \cdot 0,5 = 1/(2^k)$$

$$E(X) = 1/p = 2$$

$$V(X) = q/p^2 = 2$$



## Exemplo

Suponha que um jogador de baseball possui 0,357 de chance de acertar a bola. Suponha também que as chances não mudam entre as batidas. Qual a probabilidade dele acertar a primeira bola na quarta jogada?

Suponha que o mesmo jogador de baseball possua apenas cinco chances de rebatida. Qual a probabilidade dele não acertar nenhuma jogada?



## Exemplo

Suponha que um jogador de baseball possui 0,357 de chance de acertar a bola. Suponha também que as chances não mudam entre as batidas. Qual a probabilidade dele acertar a primeira bola na quarta jogada?

$$G_{0,357}(4) = 0,357 \cdot (1 - 0,357)^3 = 0.0949$$

Suponha que o mesmo jogador de baseball possua apenas cinco chances de rebatida. Qual a probabilidade dele não acertar nenhuma jogada?

$$P(\text{não acertar}) = q^5 = (1 - 0,357)^5 = 0.1099$$



## Sem memória

Se depois de 10 jogadas de moeda não ocorreu nenhum cara, qual a probabilidade da 12ª moeda ser cara? Ou seja,  $P(X = 12 | X > 10) = ?$

$$\begin{aligned} P(X = 12 | X > 10) &= \frac{P(X=12, X>10)}{P(X>10)} = \frac{P(X=12)}{P(X>10)} \\ &= \frac{q^{11}p}{q^{10}} \\ &= qp = P(X = 2) \end{aligned}$$