Probabilidade

Teorema de Bayes

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metrópole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br

Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/

Na aula passada...

- Probabilidade condicional
  - $P(E \mid F) = P(E \cap F) / P(F)$
- Independência dos eventos
  - **Independentes** → A ocorrência de um evento **não** altera a probabilidade do segundo evento;
  - **Dependentes** → A ocorrência de um evento altera a probabilidade do segundo evento;

Via direta e reversa

Em alguns momentos:

- $P(F|E) \rightarrow$ Fácil de calcular
- $P(E|F) \rightarrow$ Difícil de calcular

Exemplo: Duas moedas (Ca_i: cara na moeda i; $\exists Ca$: existe cara)

- $P(\exists Ca|Ca_1) \rightarrow$ Fácil $\qquad P(Ca_1|\exists Ca) \rightarrow$ Difícil

Exemplo: Dois dados (D_i: face do dado i; $S = D_1+D_2$: soma dos dois dados)

- $P(S=5|D_1=2) \rightarrow$ Fácil $\qquad P(D_1=2|S=5) \rightarrow$ Díficil

Para calcular estas probabilidades $\rightarrow$ Teorema de Bayes

P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B).P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(B|A).P(A) = P(B \cap A)$$

P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B).\, P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A).\, P(A) = P(B \cap A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B).\,P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A).\,P(A) = P(B \cap A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

$$P(A|B).\,P(B) = P(B|A).\,P(A)$$

P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B).P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A).P(A) = P(B \cap A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

$$P(A|B).P(B) = P(B|A).P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$$

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$$

Thomas Bayes (1701 - 1761):

- Pastor e matemático inglês;
- Idealizou a fórmula.

Richard Price (1723-1791):

- Matemático, filósofo inglês;
- Descobriu os estudos de Bayes e contribuiu significativamente na sua publicação;
- “Essay toward solving a Problem in the Doctrine of Chances” (1763).

Exemplo: Duas moedas

Duas moedas justas (ordem importa):

- Ca1 $\rightarrow$ primeira moeda ser cara;
- $\exists$ Ca $\rightarrow$ existe cara;

$|\Omega| = ?$

$P(\exists Ca \mid Ca1) = ?$

$P(Ca1 \mid \exists Ca) = ?$

Exemplo: Duas moedas

Duas moedas justas (ordem importa):

- Ca1 → primeira moeda ser cara;
- ∃ Ca → existe cara;

|Ω| = 4 (Ω={CaCa, CaCo, CoCa, CoCo})
P(Ca1) = P(CaCa, CaCo) = ½; **P(∃ Ca)** = P(CaCa, CaCo, CoCa) = ¾
P(∃ Ca ∩ Ca1) = P(CaCa, CaCo) = ½

P(∃ Ca | Ca1) = P(∃ Ca ∩ Ca1)/P(Ca1) = ½ / ½ = 1

P(Ca1 | ∃ Ca) = ?

Exemplo: Duas moedas

Duas moedas justas (ordem importa):

- Ca1 → primeira moeda ser cara;
- ∃ Ca → existe cara;

|Ω| = 4 (Ω={CaCa, CaCo, CoCa, CoCo})
P(Ca1) = P(CaCa, CaCo) = ½; **P(∃ Ca)** = P(CaCa, CaCo, CoCa) = ¾
P(∃ Ca ∩ Ca1) = P(CaCa, CaCo) = ½

P(∃ Ca | Ca1) = P(∃ Ca ∩ Ca1)/P(Ca1) = ½ / ½ = 1

P(Ca1 | ∃ Ca) = P(∃ Ca|Ca1)P(Ca1)/P(∃ Ca) = ½ / ¾ = ⅔

Exemplo: Dois dados

Dois dados justos:

- D_i = resultado do i-ésimo dado
- $S = D_1 + D_2$
- $P(D_1=2|S=5) = ?$

Exemplo: Dois dados

Dois dados justos:

- Di = resultado do i-ésimo dado
- S = D1 + D2
- P(D1=2|S=5) = ?

P(D1=2 | S=5) = P(S=5|D1=2)P(D1=2)/P(S=5)

$$P(D1 = 2|S = 5) = \frac{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4}$$

Exemplo: Produto defeituoso

Os produtos de uma fábrica é produzido por três máquinas. A porcentagem de produção e dos produtos defeituosos produzidos por cada máquina está listado na tabela abaixo:

	Máquina 1	**Máquina 2**	**Máquina 3**
% produzido do total	20	30	50
% defeituosos	5	3	1

Se um item é selecionado aleatoriamente e for verificado que ele é defeituoso, qual a probabilidade dele ter sido produzido pela máquina 3?

Exemplo: Produto defeituoso

$$D = defeituoso$$

$$M_n = produzido\ por\ máquina\ n$$

$$P(M_3|D) = ?$$

$$P(M_3|D) = \frac{P(D|M_3).P(M_3)}{P(D)}$$

$$P(M_3|D) = \frac{0{,}01 * 0{,}5}{0{,}024}$$

$$P(M_3|D) = 0,2083$$

$$P(D) = P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + +P(D \cap M_3)$$

$$P(D) = P(D|M_1).P(M_1) + P(D|M_2).P(M_2) + P(D|M_3).P(M_3)$$

$$P(D) = 0,05 * 0,2 + 0,03 * 0,3 + 0,01 * 0,5$$

$$P(D) = 0,024$$

Exemplo: Doença rara

Uma doença rara acomete 1 a cada 1000 pessoas. Um teste para detectar esta doença possui uma taxa de falso positivo de 5%. Assuma que o teste possui uma taxa de falso negativo de 0%. Se pegarmos uma pessoa aleatória que apresentou o resultado positivo para o teste, qual a probabilidade dele ter realmente a doença?

a) 95%
b) 56%
c) 5%
d) 2%

Exemplo: Doença rara

$$D = doente$$
$$+ = teste\ positivo$$
$$P(D) = 0,001$$
$$P(+|D^c) = 0,05$$
$$P(+|D) = 1$$
$$P(D|+) =?$$

$$P(+) = P(D \cap +) + P(D^c \cap +)$$
$$P(+) = P(+|D).\,P(D) + P(+|D^c).\,P(D^c)$$
$$P(+) = 1 * 0,001 + 0,05 * (1 - 0,001)$$
$$P(+) = 0,05095$$

$$P(D|+) = \frac{P(+|D).P(D)}{P(+)}$$
$$P(D|+) = \frac{1{*}0{,}001}{0{,}05095}$$
$$P(D|+) = 0.0196$$

Exemplo: Produto defeituoso (2)

Os produtos de uma fábrica é produzido por três máquinas. A porcentagem de produção e dos produtos defeituosos produzidos por cada máquina está listado na tabela abaixo:

	Máquina 1	**Máquina 2**	**Máquina 3**
% produzido do total	20	30	50
% defeituosos	5	3	1

Se um item é selecionado aleatoriamente e for verificado que ele é defeituoso, qual das máquinas é o mais provável de ter produzido este produto?

Exemplo: Produto defeituoso (2)

$$D = defeituoso$$

$$M_n = produzido\ por\ máquina\ n$$

$$max(P(M_1|D), P(M_2|D), P(M_3|D)) =?$$

$$P(M_1|D) = \frac{P(D|M_1).P(M_1)}{P(D)} \quad P(M_2|D) = \frac{P(D|M_2).P(M_2)}{P(D)} \quad P(M_3|D) = \frac{P(D|M_3).P(M_3)}{P(D)}$$

$$P(M_1|D) = \frac{0{,}05*0{,}2}{0{,}024} \quad P(M_2|D) = \frac{0{,}03*0{,}3}{0{,}024} \quad P(M_3|D) = \frac{0{,}01*0{,}5}{0{,}024}$$

$$P(M_1|D) = 0,4167 \quad P(M_2|D) = 0,375 \quad P(M_3|D) = 0,2083$$

$$max(P(M_1|D), P(M_2|D), P(M_3|D)) = P(M_1|D)$$

Revisão

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$$