

# Probabilidade

## Variância e Covariância

**Prof. Dr. Tetsu Sakamoto**  
Instituto Metr pole Digital - UFRN  
Sala A224, ramal 182  
Email: [tetsu@imd.ufrn.br](mailto:tetsu@imd.ufrn.br)





**Slides e notebook em:**

[github.com/tetsufmbio/IMD0033/](https://github.com/tetsufmbio/IMD0033/)





## Na aula passada...

### Esperança matemática

- Valor médio “esperado” de um experimento se ele for repetido muitas vezes.
- Média dos elementos de um espaço amostral ponderada pelas suas probabilidades.



# A esperança não é tudo



Duas empresas, e as duas possuem 1000 empregados;

As duas empresas possuem a mesma média salarial: R\$10.000,00;

- E1: Todos os empregados ganham R\$10.000,00;
- E2: Todos os empregados ganham R\$100, mas o chefe R\$9.000.000,00;

Em qual das duas empresas você trabalharia?

Mesma média, distribuição diferente;



# Variância

Medida que calcula a dispersão dos dados;

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n} \quad \sigma^2 = V(X) = E(X - \mu)^2$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$



## Dado justo



$$E(X) = \sum_x p_x \cdot x \quad E(X) = \mu = 3.5$$

face	prob	x - $\mu$	(x - $\mu$ ) <sup>2</sup>
1	$\frac{1}{6}$	-2.5	6.25
2	$\frac{1}{6}$	-1.5	2.25
3	$\frac{1}{6}$	-0.5	0.25
4	$\frac{1}{6}$	0.5	0.25
5	$\frac{1}{6}$	1.5	2.25
6	$\frac{1}{6}$	2.5	6.25

$$V(X) = E(X - \mu)^2$$

$$V(X) = p_1 \cdot (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_6 \cdot (x_6 - \mu)^2$$

$$V(X) = 2.92\dots$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.92} = 1.71\dots$$



# Três moedas



$X = \{\text{número de caras após jogadas de três moedas}\}$

$$E(X) = \sum_x p_x \cdot x \quad E(X) = \mu = 1.5$$

# caras	prob	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
0	$\frac{1}{8}$	-1,5	2.25
1	$\frac{3}{8}$	-0.5	0.25
2	$\frac{3}{8}$	0.5	0.25
3	$\frac{1}{8}$	1.5	2.25

$$V(X) = E(X - \mu)^2$$

$$V(X) = \frac{1}{8} \cdot 2.25 + \dots + \frac{1}{8} \cdot 2.25$$

$$V(X) = 0.75 = \frac{3}{4}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



## Fórmula alternativa da variância

$$V(X) = E(X - \mu)^2$$

$$E(X) = \mu$$





## Fórmula alternativa da variância

$$V(X) = E(X - \mu)^2 \qquad E(X) = \mu$$

$$V(X) = E(X^2 - 2X\mu + \mu^2)$$

$$V(X) = E(X^2) - E(2X\mu) + E(\mu^2)$$

$$V(X) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$

$$V(X) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$



## Dado justo



$$E(X) = \sum_x p_x \cdot x \quad E(X) = \mu = 3.5$$

face	prob	$x^2$	$p(x)x^2$
1	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	4	$\frac{4}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	9	$\frac{9}{6}$
4	$\frac{1}{6}$	16	$\frac{16}{6}$
5	$\frac{1}{6}$	25	$\frac{25}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	36	$\frac{36}{6}$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \frac{91}{6} - 3.5^2$$

$$V(X) = 2.92...$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.92} = 1.71...$$

**Como as modificações  
simples em  $X$  afeta a sua  
variância?**

## Adição por uma constante (Tradução)

$$V(X) = E(X - \mu)^2$$

$$E(Y) = E(X) + b$$

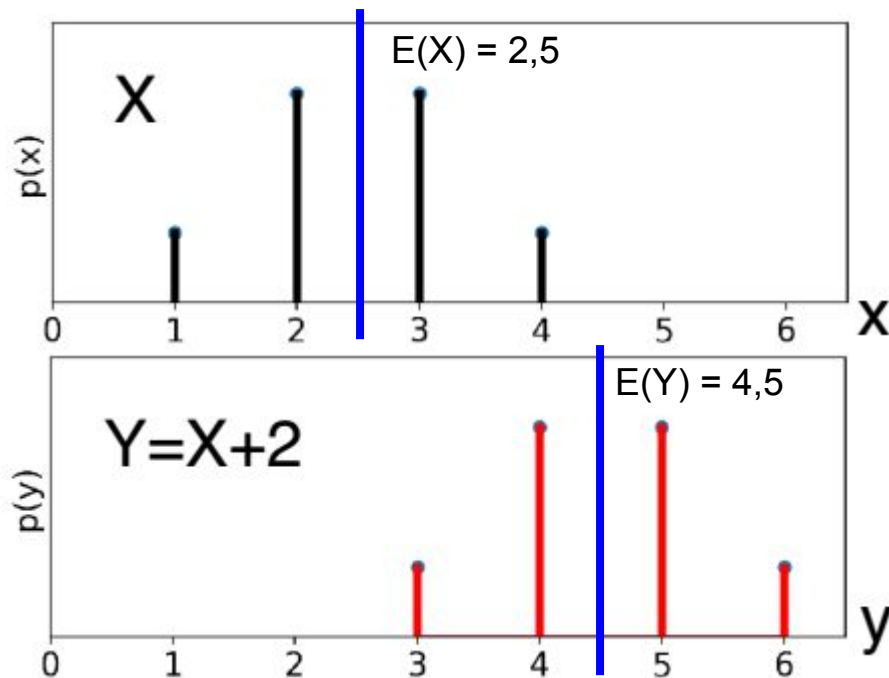
$$V(Y) = V(X + b)$$

$$= E(X + b - \mu_{X+b})^2$$

$$= E(X + b - (\mu_X + b))^2$$

$$V(Y) = E(X - \mu_X)^2$$

$$V(Y) = V(X)$$



## Multiplicação por uma constante (dimensionamento)

$$V(X) = E(X - \mu)^2$$

$$E(Y) = bE(X)$$

$$V(Y) = V(bX)$$

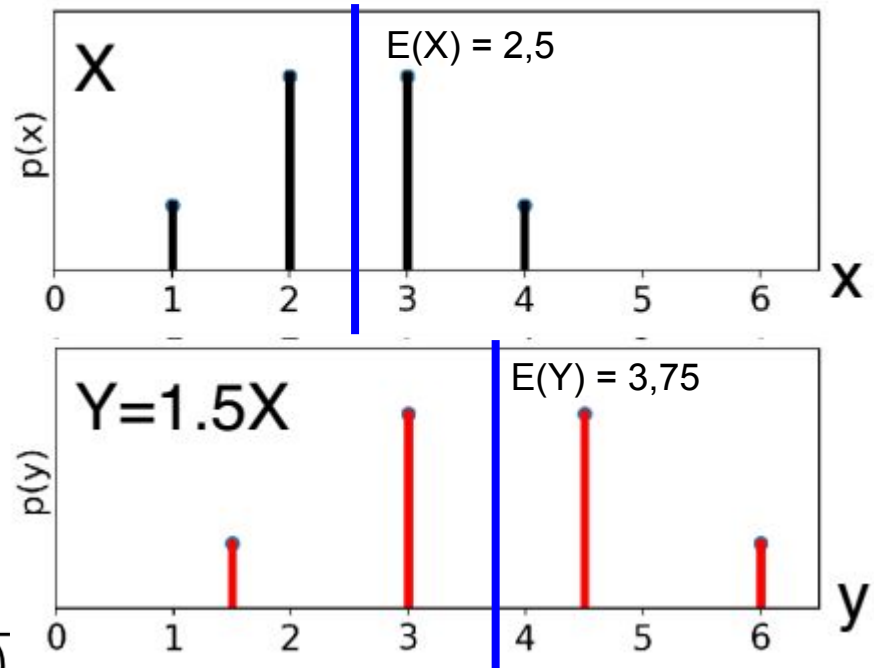
$$= E(Xb - \mu_{xb})^2$$

$$= E(Xb - b\mu_x)^2$$

$$= E(b(X - \mu_x))^2$$

$$= b^2 E(X - \mu_x)^2 = b^2 V(X)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{b^2 V(X)} = b\sqrt{V(X)}$$

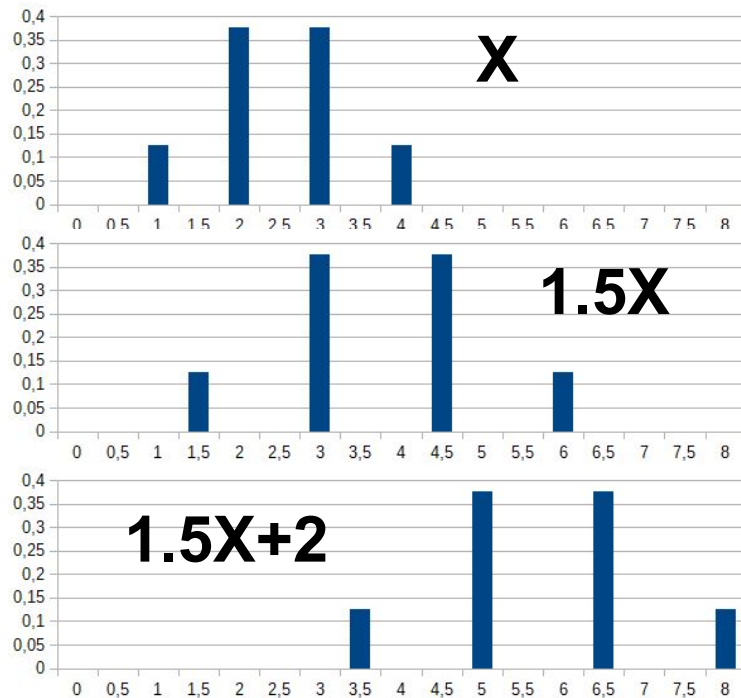




## Transformações afins

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= V(aX) \\ &= a^2 V(X) \end{aligned}$$

$$\sigma_{ax+b} = |a| \sigma_x$$





# Duas variáveis





## Duas variáveis

$$U = X + Y$$

$$E(U) = \sum_u p_u \cdot u$$

$X = \{\# \text{ de caras na jogada da moeda 1}\}$

$Y = \{\# \text{ de caras na jogada da moeda 2}\}$

X/Y	P(Y=0) = 1/2	P(Y=1) = 1/2
P(X=0) = 1/2	1/4	1/4
P(X=1) = 1/2	1/4	1/4

U = X+Y	P(x,y)	P(x,y).u
0	1/4	0
1	1/2	1/2
2	1/4	1/2

$$E(U) = 1$$





## Duas variáveis

$$U = X + Y$$

$$E(U) = \sum_u p_u \cdot u$$

$$E(U) = \sum_x \sum_y p_{(x,y)} \cdot (x + y)$$

$$E(U) = \sum_x \sum_y p_{(x,y)} \cdot x + p_{(x,y)} \cdot y$$

$$E(U) = \sum_x \sum_y p_{(x,y)} \cdot x + \sum_x \sum_y p_{(x,y)} \cdot y$$

$$E(U) = \sum_x x \sum_y p_{(x,y)} + \sum_y y \sum_x p_{(x,y)}$$

$$E(U) = \sum_x x \cdot p(x) + \sum_y y \cdot p(y)$$

$$E(U) = E(X) + E(Y)$$

$X = \{\# \text{ de caras na jogada da moeda 1}\}$

$Y = \{\# \text{ de caras na jogada da moeda 2}\}$

X/Y	P(Y=0) = 1/2	P(Y=1) = 1/2
P(X=0) = 1/2	1/4	1/4
P(X=1) = 1/2	1/4	1/4

U = X+Y	P(x,y)	P(x,y).u
0	1/4	0
1	1/2	1/2
2	1/4	1/2

$$E(U) = 1$$



## Duas variáveis

$$U = X + Y \quad V(U) = V(X) + V(Y) \quad ?$$

$$V(U) = E(U^2) - (E(U))^2$$



## Duas variáveis

$$U = X + Y \quad V(U) = V(X) + V(Y) \quad ?$$

$$V(U) = E(U^2) - (E(U))^2$$

$$V(U) = E((X + Y)^2) - (E(X + Y))^2$$

$$V(U) = E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2$$

$$V(U) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - ((E(X))^2 + 2E(X)E(Y) + (E(Y))^2)$$

$$V(U) = E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + 2(E(XY) - E(X)E(Y))$$

$$V(U) = V(X) + V(Y) + 2 \underbrace{(E(XY) - E(X)E(Y))}_{\text{Covariância}}$$

Covariância



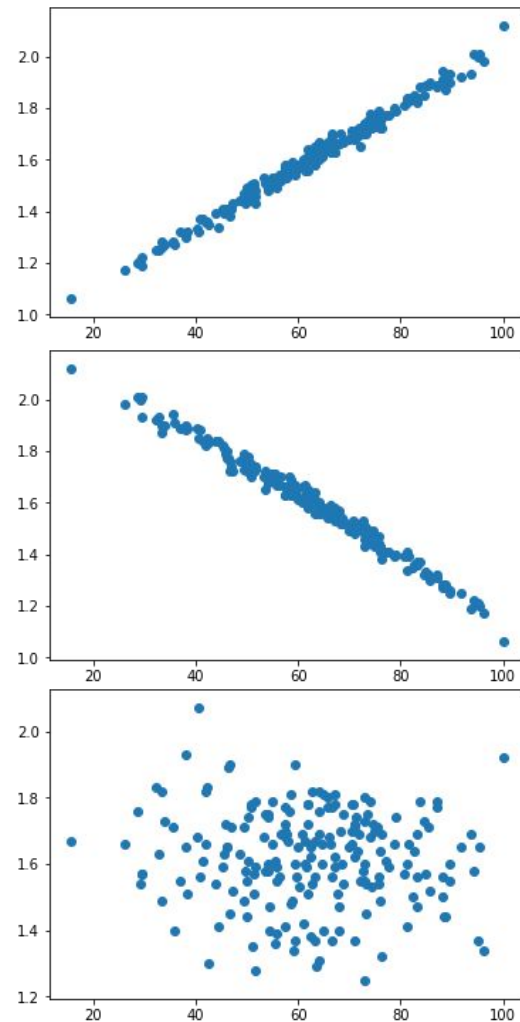
# Covariância

$Cov(X,Y) \rightarrow$  Tanto de X que varia junto com Y

$$Cov(X,Y) = \frac{\sum (X_i - \bar{X}) * (Y_i - \bar{Y})}{n}$$

Média do produto da diferença entre  $X_i$  e sua média e da diferença entre  $Y_i$  e sua média.

$$Cov(X,Y) = E(x - \mu_x)(y - \mu_y)$$





## Covariância

$$Cov(X, Y) = \frac{\sum (X_i - \bar{X}) * (Y_i - \bar{Y})}{n}$$

$$Cov(X, Y) = E(x - \mu_x)(y - \mu_y)$$



## Covariância

$$Cov(X, Y) = \frac{\sum (X_i - \bar{X}) * (Y_i - \bar{Y})}{n}$$

$$Cov(X, Y) = E(x - \mu_x)(y - \mu_y)$$

$$Cov(X, Y) = E(xy - y\mu_x - x\mu_y + \mu_x\mu_y)$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(y\mu_x) - E(x\mu_y) + E(\mu_x\mu_y)$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - \mu_x E(Y) - \mu_y E(X) + \mu_x\mu_y$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - \mu_x\mu_y - \mu_y\mu_x + \mu_x\mu_y$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - \mu_x\mu_y$$



## Duas variáveis

$$U = X + Y \quad V(U) = V(X) + V(Y) \quad ?$$

$$V(U) = E(U^2) - (E(U))^2$$

$$V(U) = V(X) + V(Y) + 2(\underbrace{E(XY) - E(X)E(Y)}_{\text{Covariância} = 0})$$

Covariância = 0

Variáveis independentes!



## Exemplos (Dado)

Evento	Conjunto	Probabilidade
primos	$\{2, 3, 5\}$	$\frac{1}{2}$
ímpar	$\{1, 3, 5\}$	$\frac{1}{2}$
quadrado	$\{1, 4\}$	$\frac{1}{3}$

Quais pares de eventos são independentes?

Interseção	Conj.	Prob.	=?	Produto	Independência
$\text{Primos} \cap \text{ímpar}$	$\{3, 5\}$	$\frac{1}{3}$	$\neq$	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	dependente
$\text{Primos} \cap \text{quadrado}$	$\{\emptyset\}$	0	$\neq$	$\frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	dependente
$\text{Quadrado} \cap \text{ímpar}$	$\{1\}$	$\frac{1}{6}$	$=$	$\frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	independente





# Revisão

Variância;

Esperança e variância com duas variáveis aleatórias;

Covariância.