Probabilidade

Análise combinatória

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metrópole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br

Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/

Revisão

- Princípio fundamental da contagem;
- Arranjos/permutação;
- Combinação;
- Subconjuntos de tamanho k de um conjunto de n elementos: diferentes combinações;
- Número de combinações distintos → coeficiente binomial;

Nesta aula

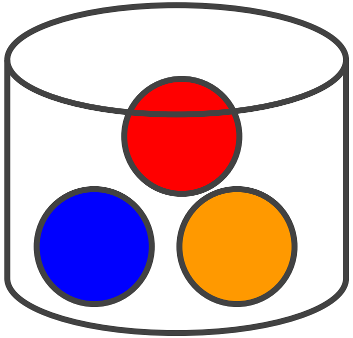
- Coeficiente multinomial;
- Multiconjunto.

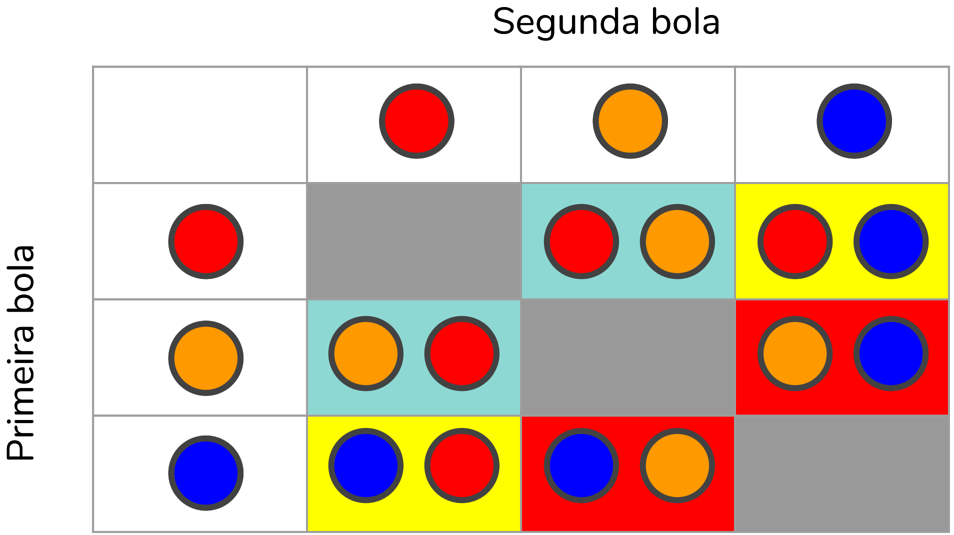
Ordem (não) / reposição (não)

Combinação

Urna com três bolas de cores distintas;

Pegar duas boas.





k-subconjuntos

Subconjuntos de tamanho k;

$$\binom{[n]}{k}$$

Coleção de todos os subconjuntos de tamanho k presentes no conjunto [n] = {1,2, ..., n}

$$\binom{[3]}{1} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

Os diferentes **subconjuntos** correspondem à diferentes combinações.

$$\binom{[3]}{2} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$$

Interesse: Contar o número de k-subconjuntos em [n].

k-subconjuntos e sequências binárias

$$\binom{[n]}{k}$$

Coleção de todos os subconjuntos de tamanho k presentes no conjunto [n] = {1,2, ..., n}

	Subconjuntos	**Sequências binárias**
$\binom{[3]}{1}$	{{1}, {2}, {3}}	100, 010, 001
$\binom{[3]}{2}$	{{1,2}, {2,3}, {1,3}}	110, 011, 101
$\binom{[4]}{2}$	{{1,2}, {1,3}, ... , {3,4}}	1100, 1010, ... , 0011

Sequência de n-bits com k-1s

E se quisermos saber para uma sequência com mais de dois caracteres?

Sequência de 8 caracteres onde se tem:

caracter	1	2	3	4
contagem	1	4	2	1

Sequência válida: 13224322

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\binom{n-k_1-k_2-k_3}{k_4}$$

E se quisermos saber para uma sequência com mais de dois caracteres?

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\binom{n-k_1-k_2-k_3}{k_4}$$

$$\frac{n!}{(n-k_1)!k_1!}\,\frac{(n-k_1)!}{(n-k_1-k_2)!k_2!}\,\frac{(n-k_1-k_2)!}{(n-k_1-k_2-k_3)!k_3!}\,\frac{(n-k_1-k_2-k_3)!}{(n-k_1-k_2-k_3-k_4)!k_4!}$$

$$\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} = \binom{n}{k_1,k_2,k_3,k_4}$$

E se quisermos saber para uma sequência com mais de dois caracteres?

Sequência de 8 caracteres onde se tem:

caracter	1	2	3	4
contagem	1	4	2	1

Sequência válida: 13224322

$$\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} = \frac{8!}{1!4!2!1!} = 840$$

E se quisermos saber quantos anagramas podemos formar com a palavra JARARACA?

Sequência de 8 caracteres onde se tem:

caracter	J	A	R	C
contagem	1	4	2	1

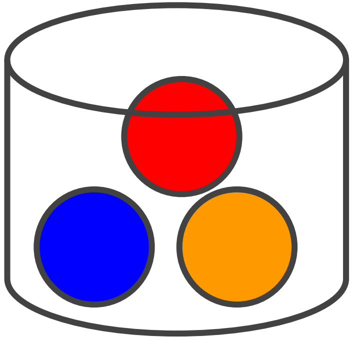
$$\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} = \frac{8!}{1!4!2!1!} = 840$$

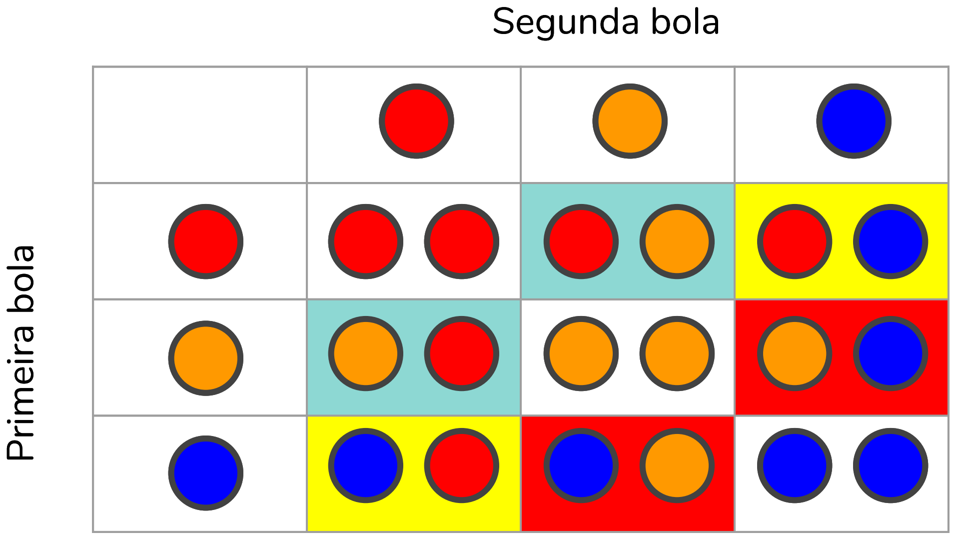
Ordem (não) / reposição (sim)

Multiconjunto

Urna com três bolas de cores distintas;

Pegar duas boas.





Multiconjunto

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = {}^{n+k-1}C_k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

$X_1+X_2+X_3 = 7$

$\{X_1, X_2, X_3 \in Z \mid X_1, X_2, X_3 \geq 0\}$

Quantas soluções diferentes existem para X_1, X_2 e X_3?

Multiconjunto

X1+X2+X3 = 7

{X1, X2, X3 ∈ Z | X1,X2,X3 ≥ 0}

Quantas soluções diferentes existem para X1, X2 e X3?

n = 3, k = 7

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = {}^{n+k-1}C_k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

$$\left(\!\!\binom{3}{7}\!\!\right) = \binom{7+3-1}{7} = \frac{9!}{2!7!} = 36$$