Probabilidade

Distribuição contínua

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metrópole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br

Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/

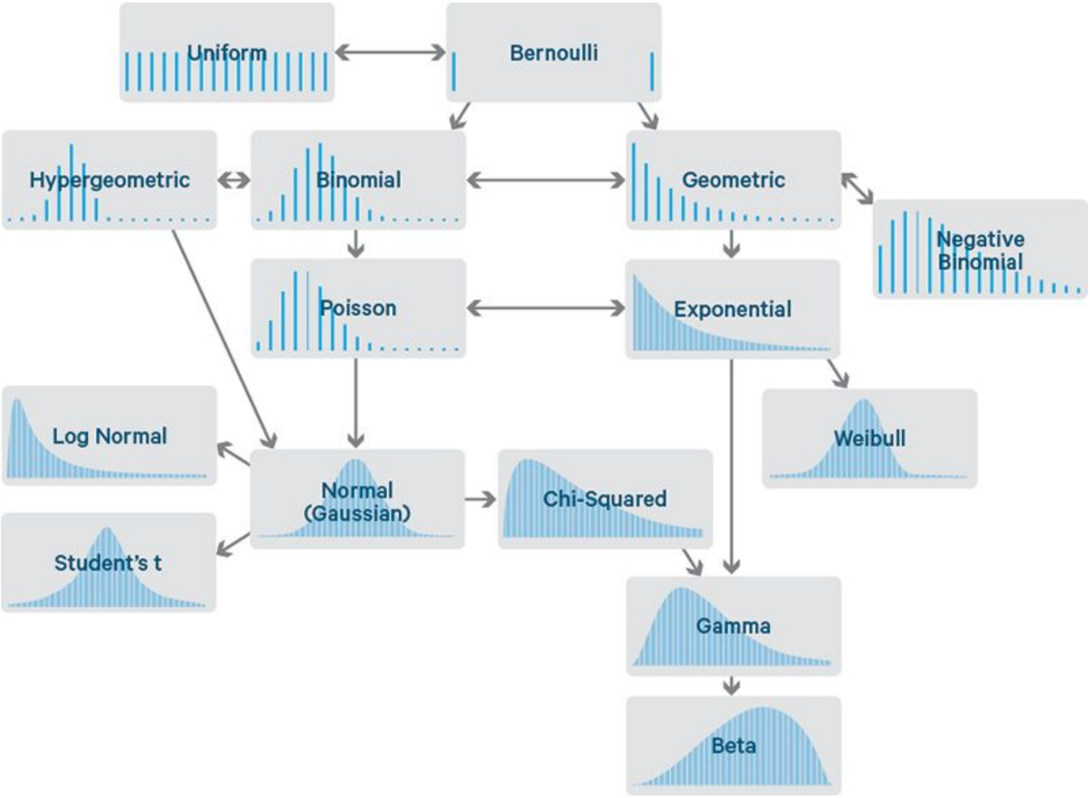
Na aula passada

Distribuição:

- Não deve haver probabilidades negativas;
- Soma deve ser 1;

Distribuição Discreta

- Bernoulli
- Binomial
- Poisson
- Geométrica



Tipos de variáveis aleatórias

Quando os valores do espaço amostral…

- possuem valores bem definido, contáveis → **Discretas**;
- se encontram em um intervalo de valores que são dificilmente definidos, incontáveis → **Contínuas**;

Variável aleatória contínua

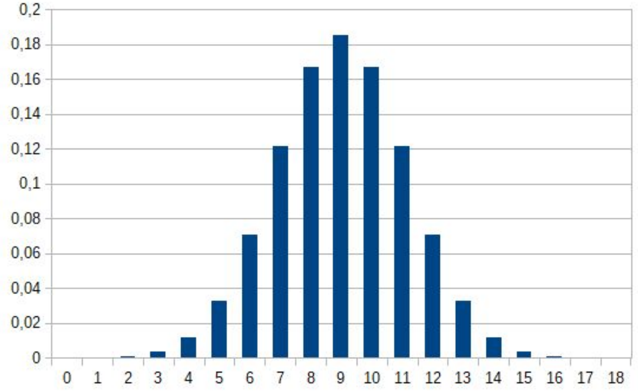
Muitas variáveis são contínuas:

- Tempo
- Espaço
- Massa
- Temperatura

Muitas outras podem ser tratadas como contínuas:

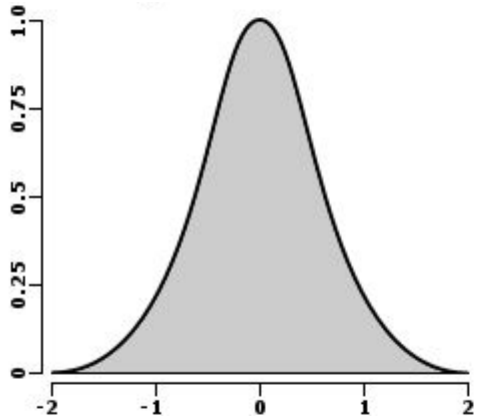
- Custo
- Taxas

Distr. Discreta X Distr. Contínua



Função massa de probabilidade P(x)

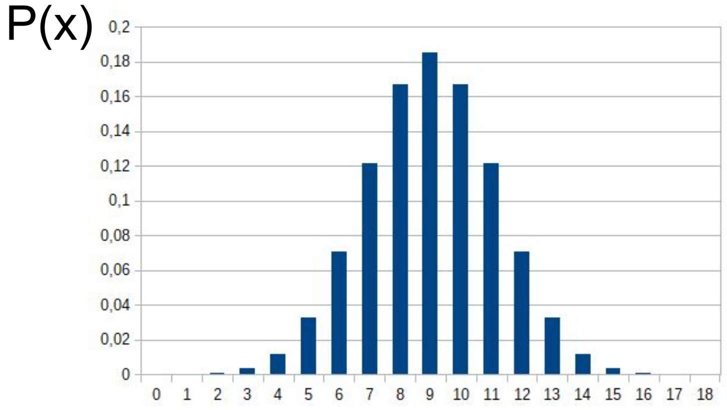
- $P(x) \geq 0$;
- $\sum P(x_i) = 1$;



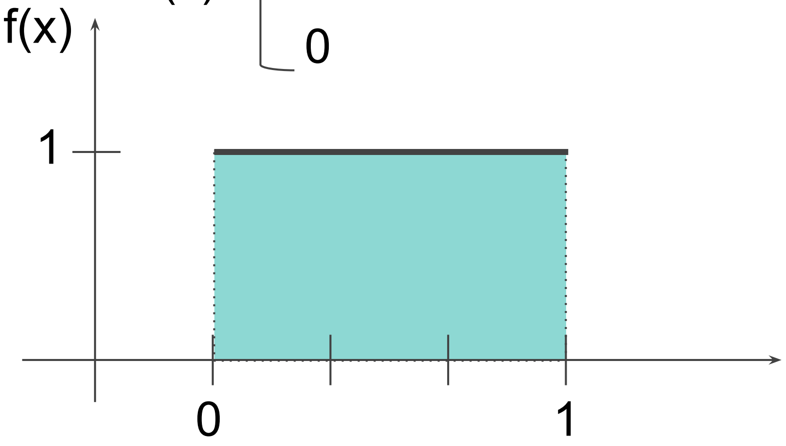
Função densidade de probabilidade f(x)

- $f(x) \geq 0$;
- Área sob a curva = 1;

f(x) não é probabilidade de x (P(x))



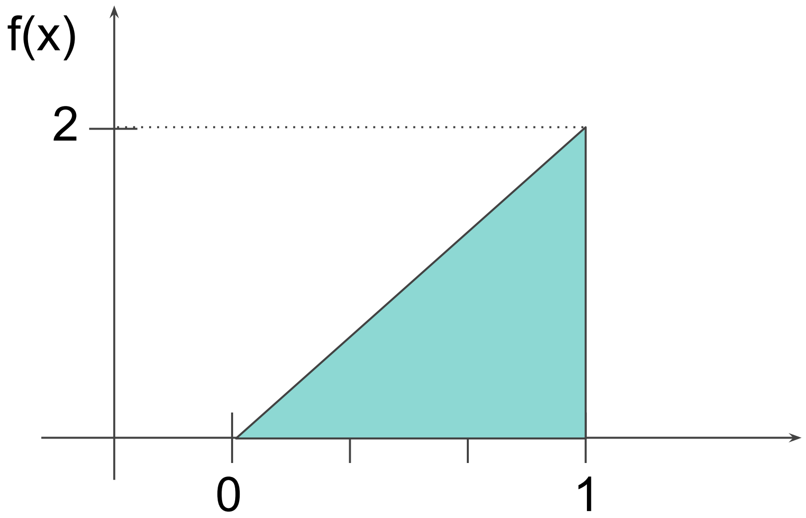
$$f(x) \begin{cases} 1 \text{ se } 0 < x < 1 \\ 0 \end{cases}$$



Em uma função densidade de probabilidade, a probabilidade corresponde a **área da curva**.

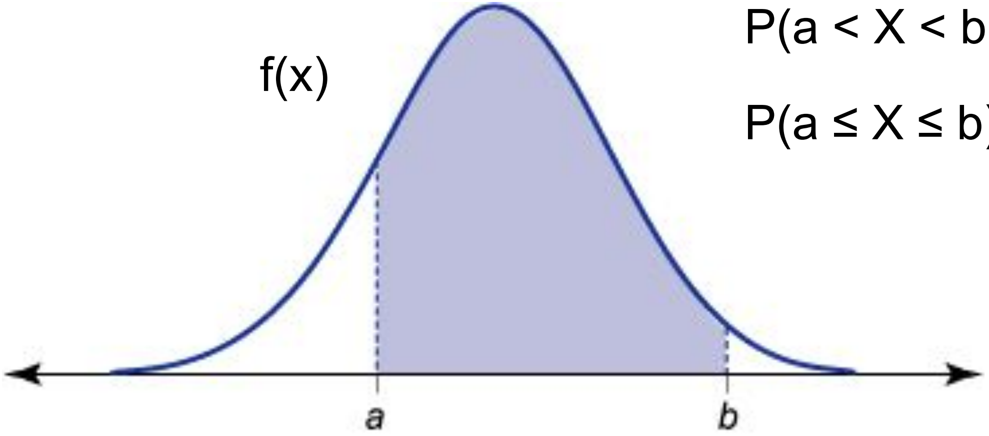
f(x) pode ser maior que 1

$$f(x) \begin{cases} 2x \text{ se } 0 < x < 1 \\ 0 \end{cases}$$



A probabilidade corresponde a área sob a curva

f(x)



$P(a < X < b)$

$P(a \leq X \leq b)$

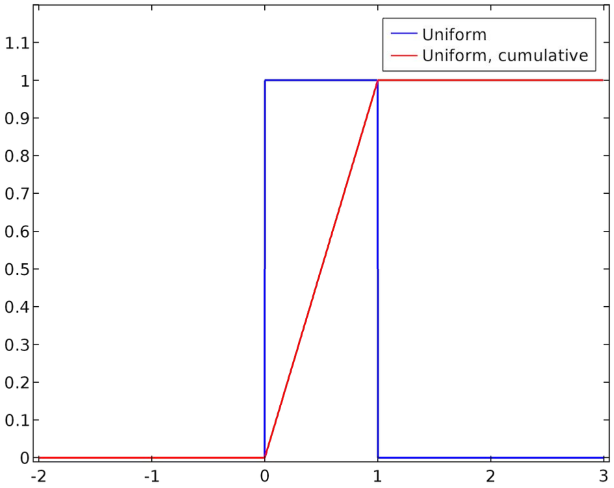
$P(X = a) = 0$

$P(X = b) = 0$

$P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a)$

Função distribuição acumulada

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$



$$f(x) \begin{cases} 1 \text{ se } 0 < x < 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$F(x) \begin{cases} 0 \text{ se } x < 0 \\ P(X < x) \text{ se } 0 < x < 1 \\ 1 \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = F(x)'$$

Esperança

Discreta

$$E(X) = \sum_x p_x \,.\, x$$

Contínua

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \,.\, x \; dx$$

Uniforme

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } 0 < x < 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \,.\, x \; dx$$

$$E(X) = \int_{0}^{1} 1.x \; dx$$

$$E(X) = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1$$

$$E(X) = \frac{1}{2}$$

Triângulo

$$f(x) = \begin{cases} 2x \text{ se } 0 < x < 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \,.\, x \; dx$$

$$E(X) = \int_{0}^{1} 2x \,.\, x \; dx$$

$$E(X) = \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1$$

$$E(X) = \frac{2}{3}$$

Variância

Discreta

$$V(X) = \sum_x p_x.(x-\mu)^2$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Contínua

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).(x-\mu)^2\,dx$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).(x-\mu)^2\,dx$$

$$V(X) = \int f(x).(x^2 - 2x\mu + \mu^2)\,dx$$

$$V(X) = \int f(x).x^2\,dx - \int f(x).2x\mu\,dx + \int f(x).\mu^2\,dx$$

$$V(X) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Variância

Discreta

$$V(X) = \sum_x p_x \,.\, (x-\mu)^2$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Contínua

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\,(x-\mu)^2\, dx$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Uniforme f(x) = 1 se 0 < x < 1

$$E(X^2) = \int_0^1 f(x).\, x^2\, dx$$

$$E(X^2) = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{12}$$

Triângulo f(x) = 2x se 0 < x < 1

$$E(X^2) = \int_0^1 2x.\, x^2\, dx$$

$$E(X^2) = \frac{x^4}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}^2 = \frac{1}{18}$$

Exercício

Suponha que X é uma variável aleatória contínua com a função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{se } |x| < 1. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1. Ache a constante c;
2. Determine E(X);
3. Determine V(X);
4. Determine P(X > ½);

Exercício

Ache a constante c;

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{se } |x| < 1. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$\int_{-1}^{+1} cx^2\, dx = 1$$

$$\frac{cx^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = 1$$

$$\frac{2c}{3} = 1 \qquad c = \frac{3}{2}$$

Exercício

Determine E(X);

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{se } |x| < 1. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)x \, dx$$

$$E(X) = \int_{-1}^{+1} cx^2 . \, x \, dx$$

$$E(X) = \frac{cx^4}{4} \Big|_{-1}^{1}$$

$$E(X) = 0$$

Exercício

Determine V(X);

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{se } |x| < 1. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)x^2 \; dx$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^{+1} cx^2 . x^2 \; dx$$

$$E(X^2) = \frac{cx^5}{5} \Big|_{-1}^{1}$$

$$E(X^2) = \frac{2c}{5} = \frac{3}{5}$$

Exercício

Determine P(X > ½);

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{se } |x| < 1. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$P(X > \tfrac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$$

$$P(X > \tfrac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{3x^2}{2}dx$$

$$P(X > \tfrac{1}{2}) = \frac{3x^3}{6} \Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$P(X > \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$$

Exercício

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{36}(9 - x^2) & -3 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Esquematize a função densidade probabilidade acima;
b) Calcule:
   i) $P(x < 0)$
   ii) $P(-1 \leq x \leq 1)$
   iii) $P(x \geq 2)$

Exercício

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{36}(9 - x^2) & -3 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Esquematize a função densidade probabilidade acima;
b) Calcule:
   i) $P(x < 0) = 0{,}5$
   ii) $P(-1 \leq x \leq 1) = 13/27$
   iii) $P(x \geq 2) = 2/27$

Exercício

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine: $P(X \leq \frac{2}{3} | X > \frac{1}{3})$

$$= \frac{P(\frac{1}{3} < X \leq \frac{2}{3})}{P(X > \frac{1}{3})}$$

$$= \frac{\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 4x^3 dx}{\int_{\frac{1}{3}}^{1} 4x^3 dx}$$

$$= \frac{3}{16}.$$

Famílias de distribuição de variáveis aleatórias contínuas

- Uniforme;
- Normal (Gaussiana);
- Exponencial;
- Gama;
- etc...