

# Probabilidade

## Distribuição contínua

**Prof. Dr. Tetsu Sakamoto**

Instituto Metr pole Digital - UFRN

Sala A224, ramal 182

Email: [tetsu@imd.ufrn.br](mailto:tetsu@imd.ufrn.br)





**Slides e notebook em:**

[github.com/tetsufmbio/IMD0033/](https://github.com/tetsufmbio/IMD0033/)





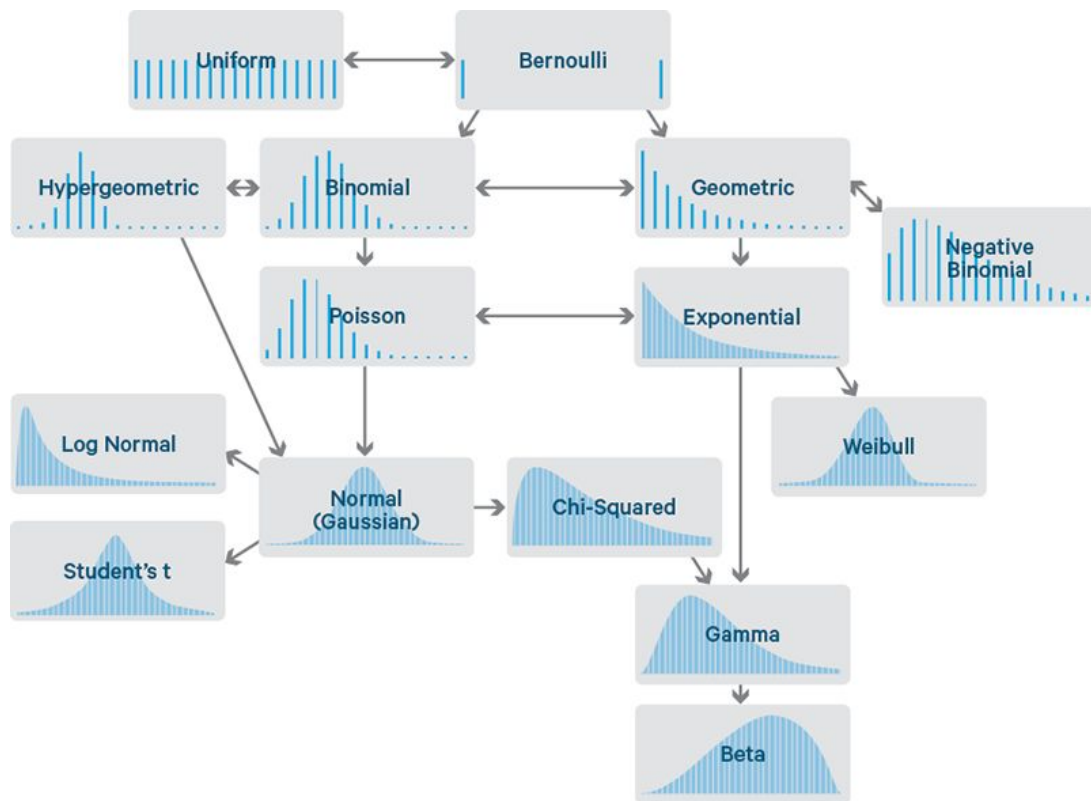
# Na aula passada

## Distribuição:

- Não deve haver probabilidades negativas;
- Soma deve ser 1;

## Distribuição Discreta

- Bernoulli
- Binomial
- Poisson
- Geométrica





## Tipos de variáveis aleatórias

Quando os valores do espaço amostral...

- possuem valores bem definido, contáveis → **Discretas;**
- se encontram em um intervalo de valores que são dificilmente definidos, incontáveis → **Contínuas;**



# Variável aleatória contínua

Muitas variáveis são contínuas:

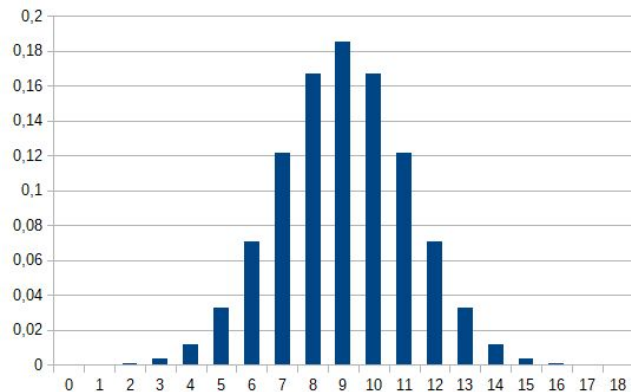
- Tempo
- Espaço
- Massa
- Temperatura

Muitas outras são tratadas como contínuas:

- Custo
- Taxas

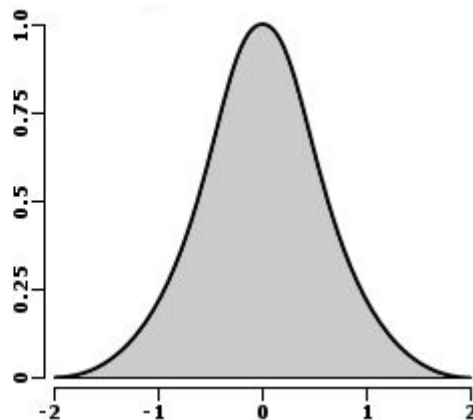


# Distr. Discreta X Distr. Contínua



Função massa de probabilidade  $P(x)$

- $P(x) \geq 0$ ;
- $\sum P(x_i) = 1$ ;

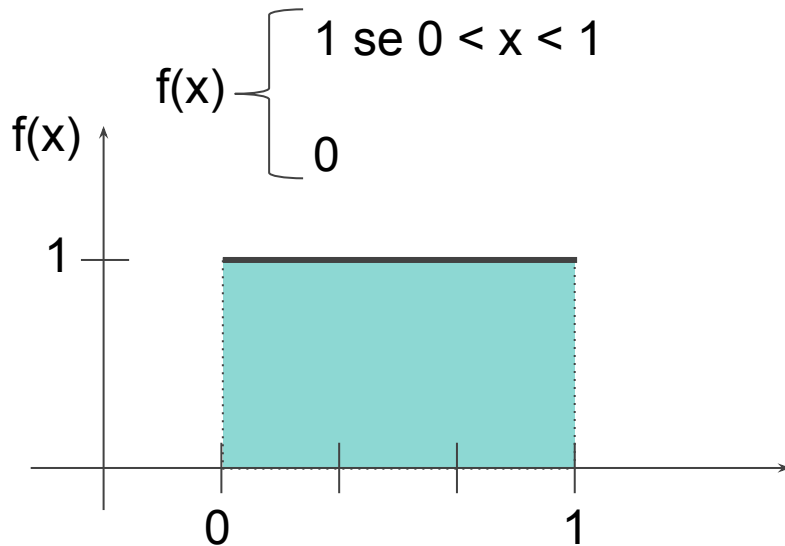
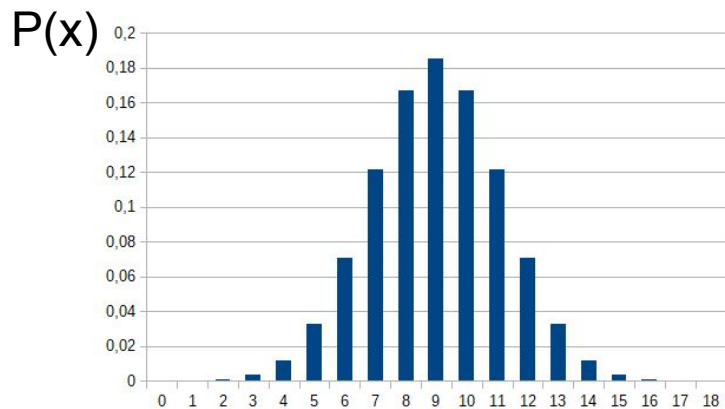


Função densidade de probabilidade  $f(x)$

- $f(x) \geq 0$ ;
- Área sob a curva = 1;



## $f(x)$ não é probabilidade de $x$ ( $P(x)$ )

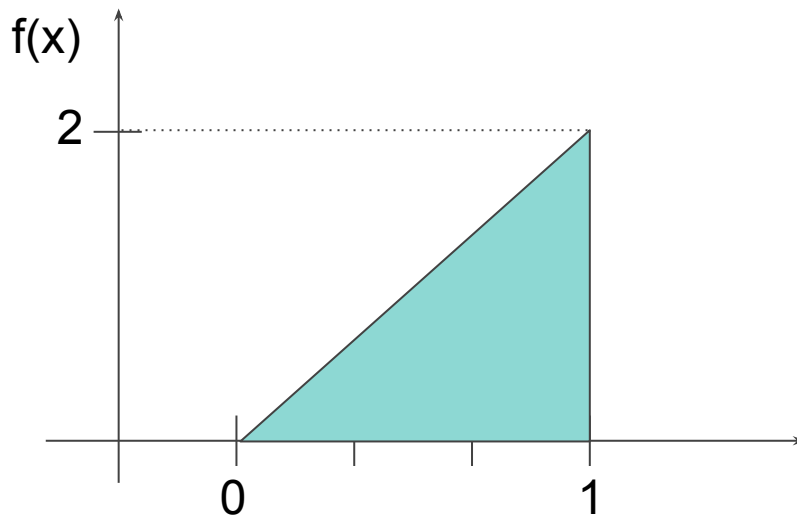


Em uma função densidade de probabilidade, a probabilidade corresponde a **área da curva**.



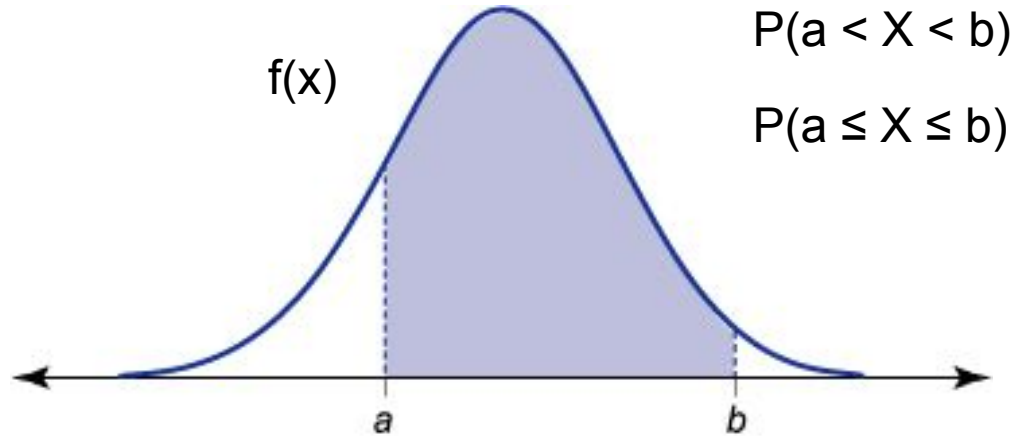
**$f(x)$  pode ser maior que 1**

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$





# A probabilidade corresponde a área sob a curva



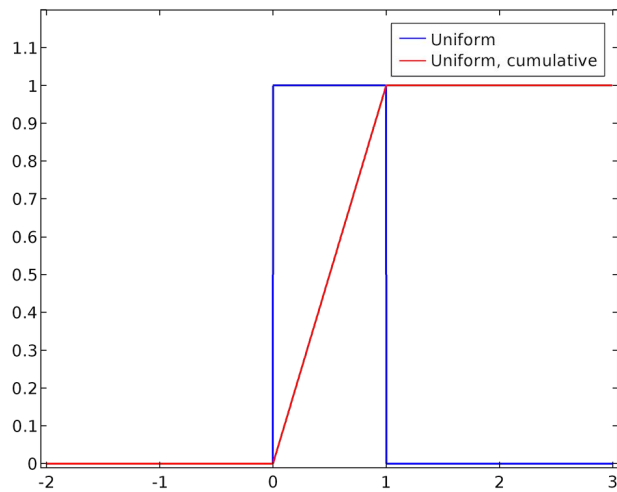
$$P(X = a) = 0$$

$$P(X = b) = 0$$

$$P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a)$$

# Função de distribuição acumulada

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{outro caso} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ P(X < x) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = F(x)'$$

# Esperança

Discreta

$$E(X) = \sum_x p_x \cdot x$$

Uniforme  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \end{cases}$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x \, dx$$

$$E(X) = \int_0^1 1 \cdot x \, dx$$

$$E(X) = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1$$

$$E(X) = \frac{1}{2}$$

Contínua

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x \, dx$$

Triângulo  $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \end{cases}$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x \, dx$$

$$E(X) = \int_0^1 2x \cdot x \, dx$$

$$E(X) = \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1$$

$$E(X) = \frac{2}{3}$$



# Variância

Discreta

$$V(X) = \sum_x p_x \cdot (x - \mu)^2$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Contínua

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot (x - \mu)^2 dx$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot (x - \mu)^2 dx$$

$$V(X) = \int f(x) \cdot (x^2 - 2x\mu + \mu^2) dx$$

$$V(X) = \int f(x) \cdot x^2 dx - \int f(x) \cdot 2x\mu dx + \int f(x) \cdot \mu^2 dx$$

$$V(X) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - E(X)^2$$



# Variância

Discreta

$$V(X) = \sum_x p_x \cdot (x - \mu)^2$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Contínua

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot (x - \mu)^2 dx$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Uniforme

$f(x) = 1$  se  $0 < x < 1$

$$E(X^2) = \int_0^1 f(x) \cdot x^2 dx$$

$$E(X^2) = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{12}$$

Triângulo

$f(x) = 2x$  se  $0 < x < 1$

$$E(X^2) = \int_0^1 2x \cdot x^2 dx$$

$$E(X^2) = \frac{x^4}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}^2 = \frac{1}{18}$$



## Exercício

Suponha que  $X$  é uma variável aleatória contínua com a função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{se } |x| < 1. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1. Ache a constante  $c$ ;
2. Determine  $E(X)$ ;
3. Determine  $V(X)$ ;
4. Determine  $P(X > 1/2)$ ;



## Exercício

Ache a constante  $c$ ;

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{se } |x| < 1. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_{-1}^{+1} cx^2 dx = 1$$

$$\frac{cx^3}{3} \Big|_{-1}^1 = 1$$

$$\frac{2c}{3} = 1 \quad c = \frac{3}{2}$$



## Exercício

Determine  $E(X)$ ;

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{se } |x| < 1. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)x \, dx$$

$$E(X) = \int_{-1}^{+1} cx^2 \cdot x \, dx$$

$$E(X) = \frac{cx^4}{4} \Big|_{-1}^1$$

$$E(X) = 0$$





## Exercício

Determine  $V(X)$ ;

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{se } |x| < 1. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)x^2 \, dx$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^{+1} cx^2 \cdot x^2 \, dx$$

$$E(X^2) = \left. \frac{cx^5}{5} \right|_{-1}^1$$

$$E(X^2) = \frac{2c}{5} = \frac{3}{5}$$



## Exercício

Determine  $P(X > \frac{1}{2})$ ;

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{se } |x| < 1. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$P(X > \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$$

$$P(X > \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3x^2}{2} dx$$

$$P(X > \frac{1}{2}) = \frac{3x^3}{6} \Big|_{\frac{1}{2}}^1$$

$$P(X > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$$



## Exercício

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine:

$$\begin{aligned} P\left(X \leq \frac{2}{3} \mid X > \frac{1}{3}\right) &= \frac{P\left(\frac{1}{3} < X \leq \frac{2}{3}\right)}{P\left(X > \frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 4x^3 dx}{\int_{\frac{1}{3}}^1 4x^3 dx} \\ &= \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

# Famílias de distribuição de variáveis aleatórias contínuas

- Uniforme;
- Normal (Gaussiana);
- Exponencial;
- Gama;
- etc...

