

Probabilidade

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metr pole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br





Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/





Na aula passada...

- Princípio fundamental da contagem;
- Arranjos/permutação;
- Combinação;
- Subconjuntos de tamanho k de um conjunto de n elementos: diferentes combinações;
- Número de combinações distintos \rightarrow coeficiente binomial;



Probabilidade

Na vida existem algumas certezas...



Outros processos são incertos, mas mais ou menos previsíveis:

- Médicos → doença, medicamento;
- Fazendeiros → chuva, produção;
- Investidores → preço do estoque, economia;
- Publicitário → visualização, concorrência;
- Consumidores → disponibilidade, preço;
- Estudante → tamanho da fila, nota, pais, emprego, encontros, jogos.



Fenômenos randômicos

Não podemos dizer coisas que sejam necessariamente certos...

Desistir? Ou podemos dizer algo que seja inteligente e útil?

Aprender:

- Intervalo;
- Média;
- Variabilidade.

Inferir:

- Estrutura;
- Mudança;
- Relação.

Predizer:

- Futuro;
- Probabilidade;
- Garantia.

Beneficiar:

- Entendendo os dados;
- Planejando;
- Construindo.



Termos em probabilidade



Probabilidade foi desenvolvida para ajudar a ciência

Experimentos

Processo que consiste em executar um fenômeno randômico e observar o seu resultado;

Conceito genérico → Coleta de dados e observações de diferentes possibilidades.



Termos em probabilidade



Ponto amostral → Um resultado de um experimento (cara);

Espaço amostral → Conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento, denotado como Ω ({ cara, coroa});

Experimento	Espaço amostral
Moeda	{ h, t }
Dado	{ 1, 2, 3, 4, 5 ,6 }
Idade	N
Temperatura	R

Pontos amostrais →
minúsculo (h, t, x ...)

Elementos, conjuntos



Tipos de espaço amostral

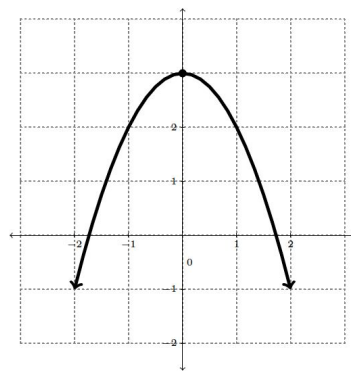
Discreto → Espaço amostral finito ou infinito, mas contável;

$\{h, t\}$ $\{1, 2, \dots, 6\}$ \mathbb{N} \mathbb{Z} $\{\text{palavras}\}$



Contínuo → Espaço amostral infinito incontável;

\mathbb{R} $\{\text{temperatura}\}$ $\{\text{altura}\}$





Resultados aleatórios



Em algebra:

Um valor desconhecido $\rightarrow x$;

$$2x - 4 = 0$$

Antes da resolução: $x \in \mathbb{R}$

Depois da resolução: $x = 2$

Notação incógnitas: x ,
 y , z

Em probabilidade:

Valor aleatório de um ponto amostral $\rightarrow X$;

X - resultado da jogada de uma moeda;

Antes do experimento: $X \in \Omega$;

Depois do experimento: $X = h$ (se cara), $X = t$ (se coroa).

Notação para variáveis
aleatórias : X , Y , Z



Probabilidade de um ponto amostral

A **probabilidade do ponto amostral** (resultado) $x \in \Omega$ ($P(x)$ ou $P(X=x)$) é a fração de vezes que x ocorre quando o experimento é repetido várias vezes.

Moeda justa:

- A medida que # de experimento $\rightarrow \infty$, fração de cara (ou coroa) = $\frac{1}{2}$;
Cara possui uma probabilidade de $\frac{1}{2}$ $P(h) = P(X=h) = \frac{1}{2}$

Dado justo:

- A medida que # de experimento $\rightarrow \infty$, fração da face 1 = $\frac{1}{6}$;
Face 1 possui uma probabilidade de $\frac{1}{6}$ $P(1) = P(X=1) = \frac{1}{6}$



Função distribuição de probabilidade

$P(x)$ é a fração de vezes que o ponto amostral x ocorre

Observando a probabilidade de todos os elementos do espaço amostral \rightarrow surge um padrão!

- Moeda: $P(h) = 1/2$ $P(t) = 1/2$
- Dados: $P(1) = 1/6$, $P(2) = 1/6$, ... , $P(6) = 1/6$
- Tempo: $P(\text{chuva}) = 10\%$, $P(\text{sol}) = 90\%$

P é uma função que mapeia o Ω para valores não negativos que somam 1

$$P: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad P(x) \geq 0 \quad \sum_{x \in \Omega} P(x) = 1$$

Função distribuição de probabilidade



Tipos de distribuição de probabilidade

- Uniforme
- Não uniforme



Distribuição de probabilidade uniforme

Normalmente os pontos amostrais (resultados) de um experimento possuem diferentes probabilidades.



No entanto, existem experimentos cujos resultados são igualmente prováveis de acontecerem.



$$P(h) = P(t) = \frac{1}{2}$$



$$P(1) = P(2) = \dots$$

$$P(6) = \frac{1}{6}$$

Distribuição de probabilidade uniforme



Distribuição de probabilidade uniforme

Todos os pontos amostrais (resultados) são igualmente prováveis.

$$\forall x \in \Omega \quad P(x) = p$$

$$1 = \sum_{x \in \Omega} P(x) = \sum_{x \in \Omega} p = |\Omega| \cdot p$$

$$p = 1/|\Omega|$$

Moeda:

- $P(h) = P(t) = p$
- $1 = P(h) + P(t) = 2p$
- $p = 1/2$

Distribuição uniforme \rightarrow todos os resultados possuem
probabilidade de $1/|\Omega|$

Tudo que você precisa saber $\rightarrow |\Omega|$



Distribuição de probabilidade não uniforme

Exemplos:

- Chuva;
- Notas de prova;
- Palavras;
- Doença;
- Páginas da web;
- etc.



Atenção na notação

$P(X = 3) \rightarrow$ dado justo: $\frac{1}{6}$

$P(3) = P(X = 3)$

Notação correta

$P(x) \rightarrow$ especifique o x , para $\forall x$, $P(x) = \frac{1}{6}$ (dado justo)

$P(1 = 3) \rightarrow$ Probabilidade do resultado 1 ser 3 (0)

$P(X) \rightarrow$ Probabilidade de ocorrer um resultado aleatório

Pouco comum,
reveja se é isso
que você quer
dizer.

$P(x = 3) \rightarrow x$ corresponde a um resultado do
experimento, portanto ele é um valor.

Provavelmente
está errado.



Eventos

Até o momento nós lidamos com a probabilidade de um único ponto amostral (resultado):

- Se um determinado cavalo ganhará a corrida;
- Se um aluno tirará nota B+;

Mas normalmente estamos interessados na probabilidade de um conjunto de resultados:

- Se a temperatura $> 25^{\circ}$;
- Se um aluno passará no curso;

Conjunto de resultados \rightarrow Subconjunto do espaço amostral \rightarrow EVENTOS



Exemplos de eventos



Eventos \rightarrow subconjunto do espaço amostral;

Dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \supseteq$ Eventos

Eventos	Nome
$\{1, \dots, 6\}$	Ω (certeza)
$\{2, 4, 6\}$	pares
$\{1, 4\}$	quadrados
$\{5, 6\}$	> 4
$\{1, 2, 5\}$	$\{1, 2, 5\}$



Ocorrência do evento



Quando consideramos que o evento E ocorre?

O evento E ocorre quando ele contém o ponto amostral (resultado) observado.

E ocorre se $X \in E$

		Resultados							
Eventos	Nome	1	2	3	4	5	6		
$\{ 1, \dots, 6 \}$	Ω (certeza)	O	O	O	O	O	O		
$\{ 2, 4, 6 \}$	pares	X	O	X	O	X	O	O	Evento ocorre
$\{ 1, 4 \}$	quadrados	O	X	X	O	X	X	X	Evento não ocorre
$\{ \}$	vazio	X	X	X	X	X	X		



Probabilidade dos eventos

Probabilidade do evento E	$P(E)$	Probabilidade do evento E ocorrer	$P(X \in E)$
---------------------------	--------	-----------------------------------	--------------

Fração de experimentos onde E ocorre à medida que o número de experimento cresce.



$P(\text{Par})$ 3 4 2 5 6 3 6 4 3 1 1 2 3 5 14

$$P(\text{Par}) \approx \text{fração} = 6/14 = 0,4285$$

Desejável: - $P(E) = \text{fração} \rightarrow \# \text{ experimento} \rightarrow \infty$

- Escrever isso para eventos e distribuições de forma geral.



Relacionando $P(x)$ com $P(E)$



de vezes que **Par** ocorre = soma do # de vezes que 2, 4 e 6 ocorrem.

$P(\text{Par})$ = fração de vezes que Evento Par ocorre

$P(\text{Par})$ = soma das frações do número de vezes que 2, 4, 6 ocorrem

$$P(\text{Par}) = P(2) + P(4) + P(6)$$

Em geral:

- # de vezes que o evento E ocorre = soma do número de vezes que seus elementos ocorrem.
- $P(E)$ = soma das probabilidades de seus elementos.

$$P(E) = P(X \in E) = \sum_{x \in E} P(x)$$



Relacionando $P(x)$ com $P(E)$

Eventos	Nome	Resultados						Probabilidades
		1	2	3	4	5	6	
$\{ 1, \dots, 6 \}$	Ω (certeza)	O	O	O	O	O	O	$P(1)+P(2)+ \dots + P(6) = 1$
$\{ 2, 4, 6 \}$	pares	X	O	X	O	X	O	$P(2)+P(4)+ P(6) = \frac{1}{2}$
$\{ 1, 4 \}$	quadrados	O	X	X	O	X	X	$P(1)+P(4) = \frac{1}{3}$
$\{ \}$	vazio	X	X	X	X	X	X	0



Revisão

Probabilidade

- Experimento;
- Espaço amostral;
- Ponto amostral;
 - Probabilidade do ponto amostral
- Evento
 - Probabilidade do evento