Probabilidade

Revisão

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metrópole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br

Tópicos da segunda prova

- Teoria de conjuntos;
- Métodos de contagem;
- Probabilidade;

Teoria de conjuntos

Isto é um conjunto?

$A = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$A = (0, 1, 2, \ldots)$

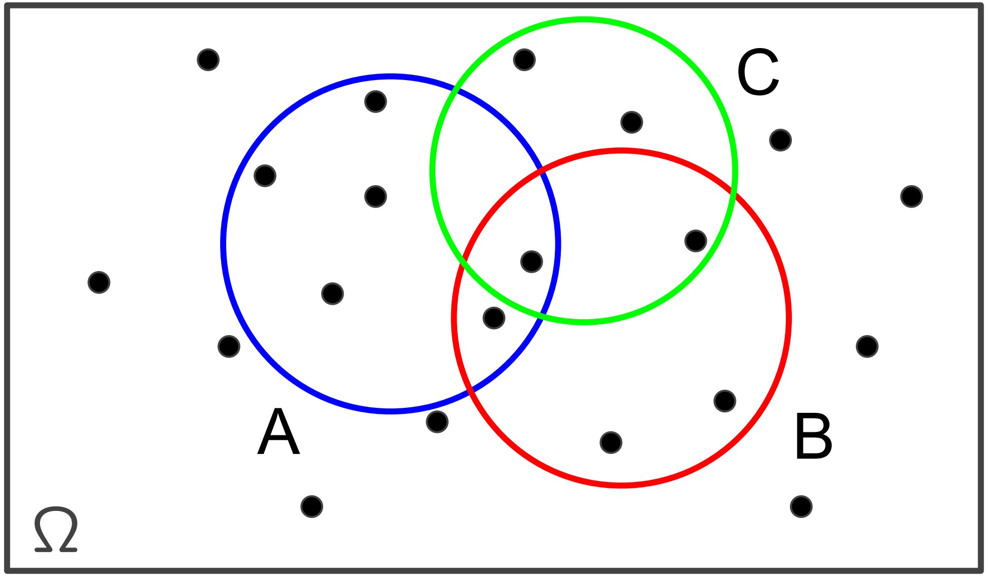
Isto é verdade?

$$\{0, 1, 2\} = \{2, 1, 0\}$$

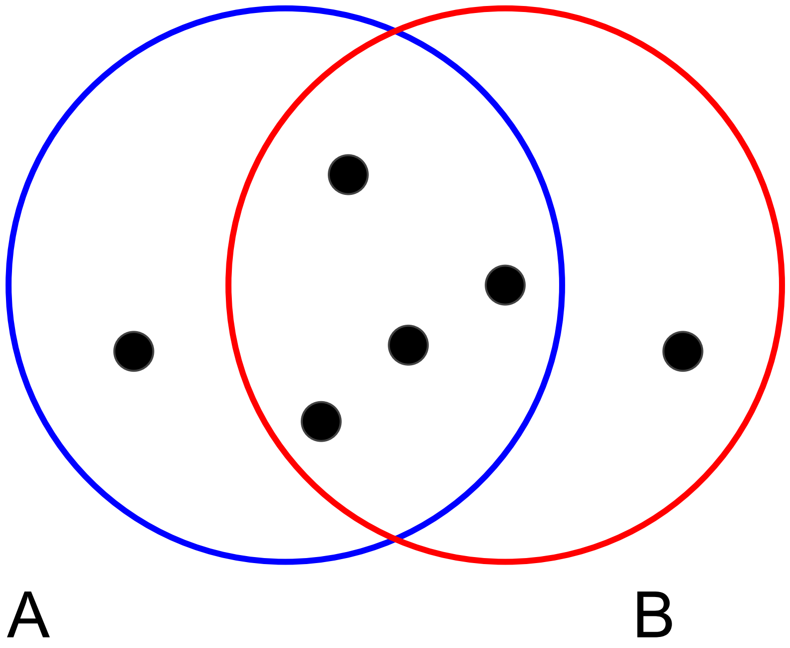
Isto é verdade?

$\{0, 1, 2\} = \{2, 2, 1, 1, 0\}$

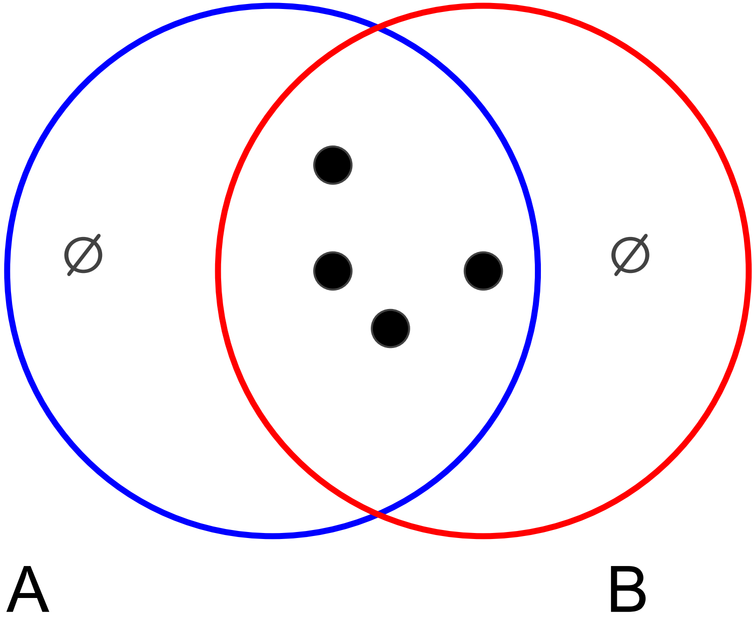
O que é isso?



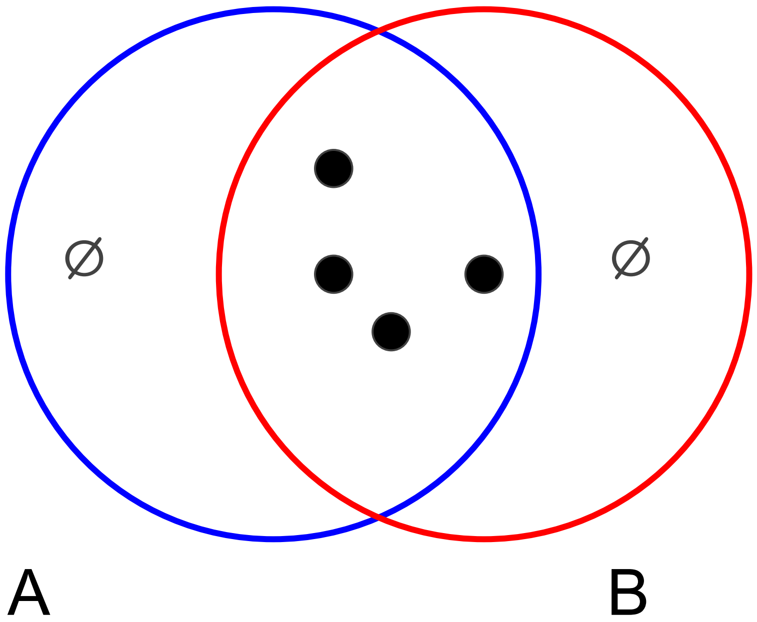
A = B ?



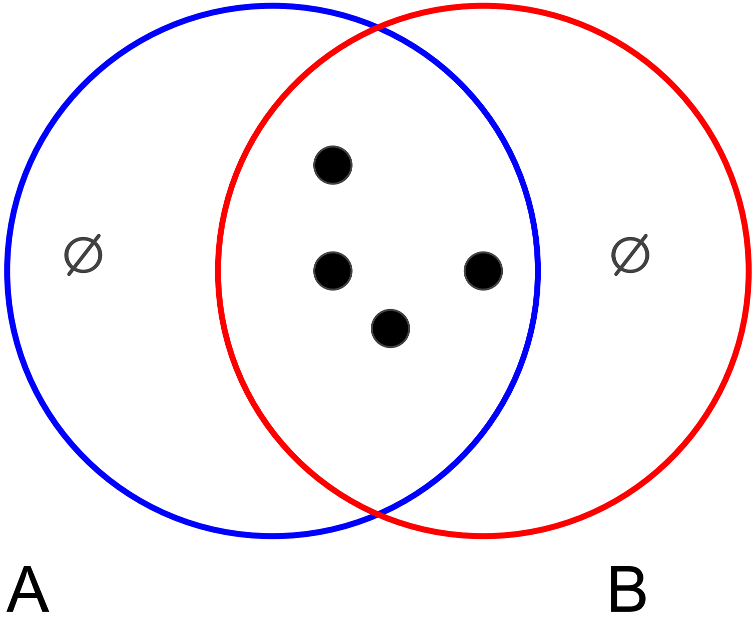
A ≠ B ?



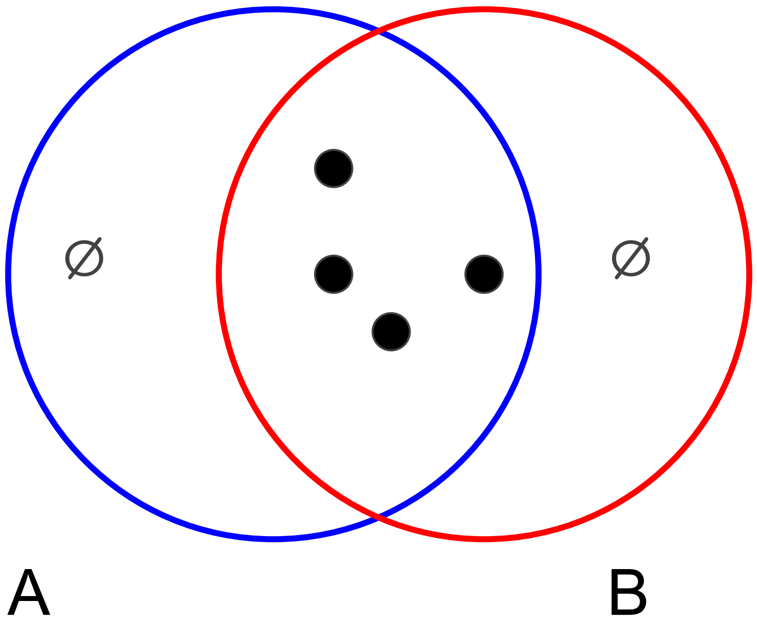
A ⊆ B ?



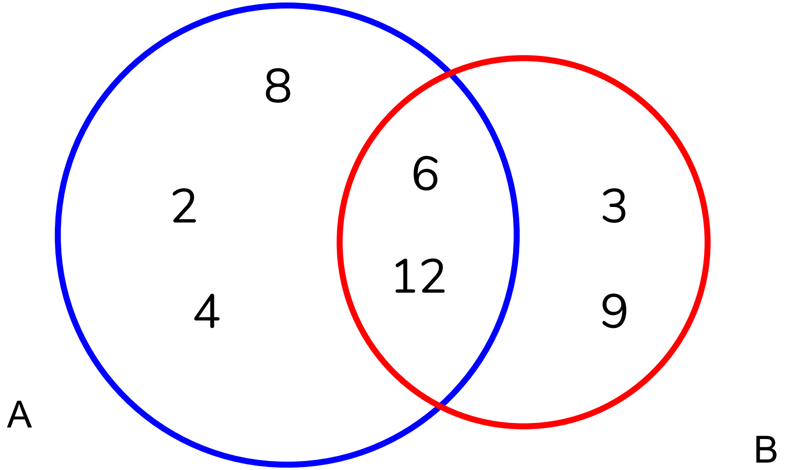
A ⊇ B ?



$A \subset B$?



$6 \in B$?



Qual a diferença entre $\subseteq$ e $\in$?

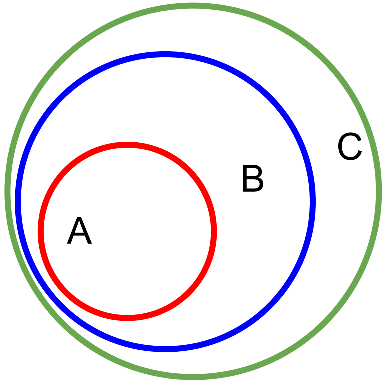
$\in$ (pertence a) vs $\subseteq$ (contém)

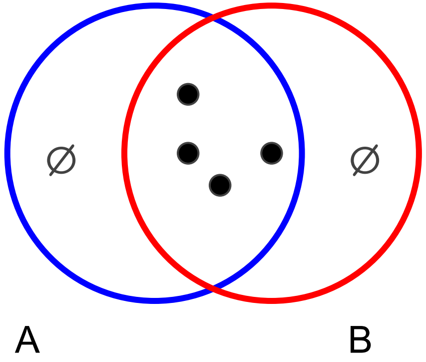
- $\in$ → relação entre um elemento e um conjunto;
  - $x \in A$ → elemento x pertence ao conjunto A;
  - $0 \in \{ 0 , 1 \}$
  - $\{ 0 \} \notin \{ 0, 1 \}$

- $\subseteq$ → relação entre dois conjuntos;
  - $A \subseteq B$ → o conjunto A é um subconjunto do conjunto B
  - $\{ 0 \} \subseteq \{ 0 , 1 \}$
  - $0 \nsubseteq \{ 0, 1 \}$

Propriedades do subconjunto

- $\varnothing \subseteq A \subseteq A \subseteq \Omega$
- $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$ (transitividade)
- $A \subseteq B$, $B \subseteq A$, então $A = B$

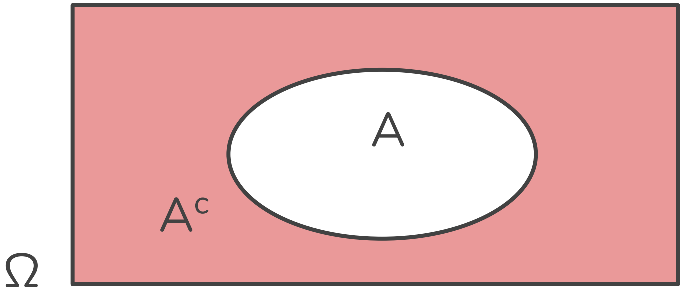




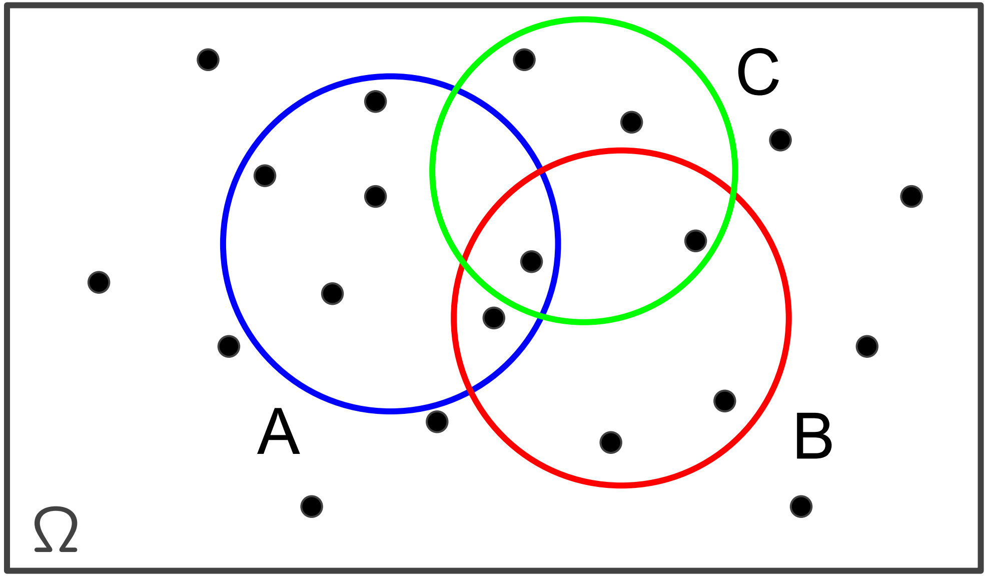
$$X = \{ x \in \Omega \mid x \notin A \}$$

Complemento

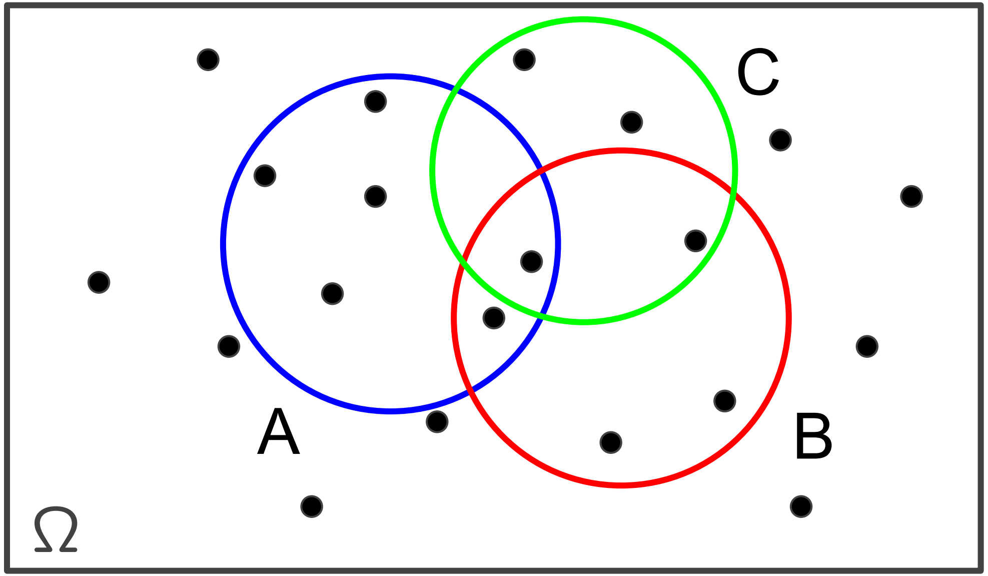
- $\Omega^c = \varnothing$ $\qquad\qquad$ $\varnothing^c = \Omega$
- A e A^c são sempre disjuntos
- $(A^c)^c = A \rightarrow$ involução



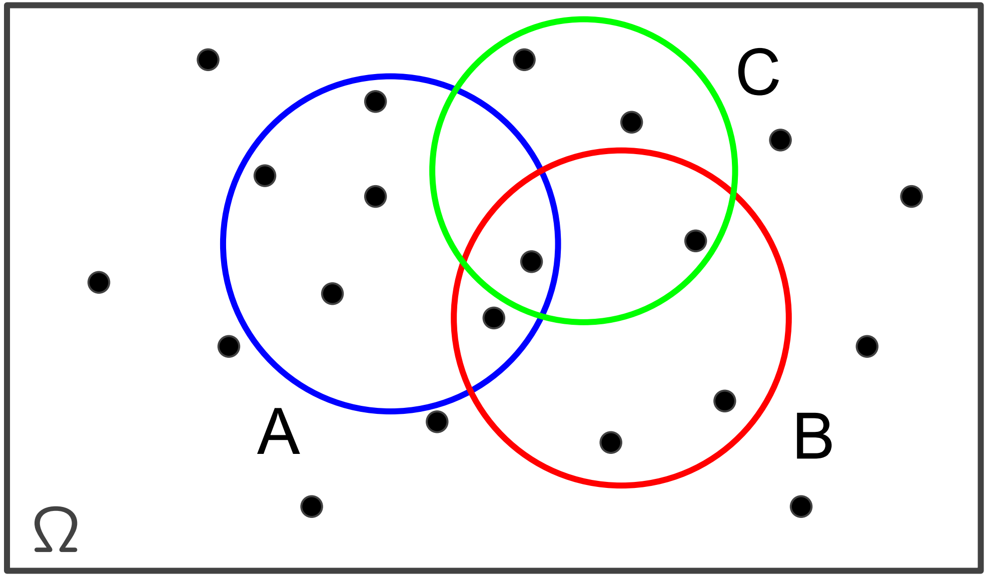
$A \cap B$



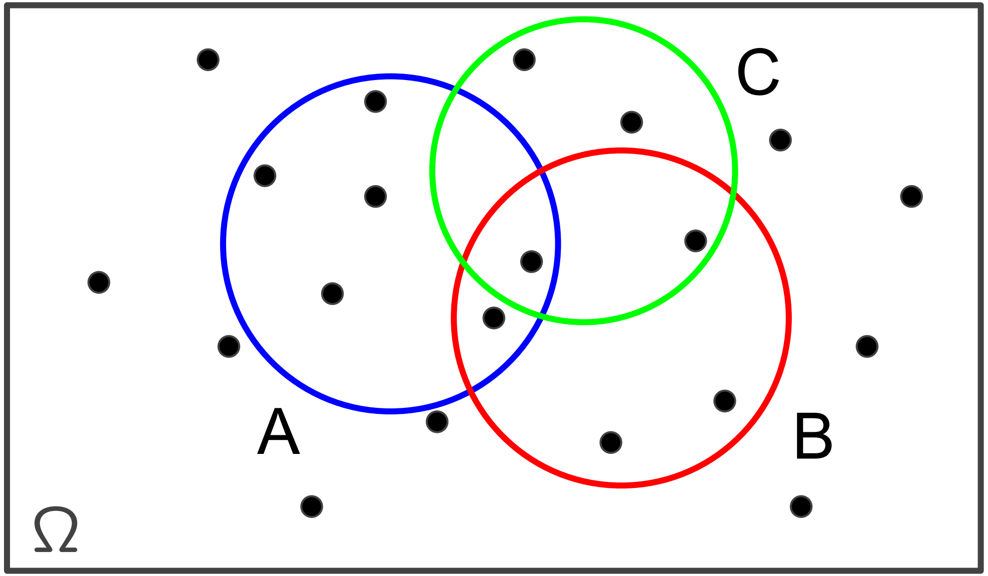
A ∪ B



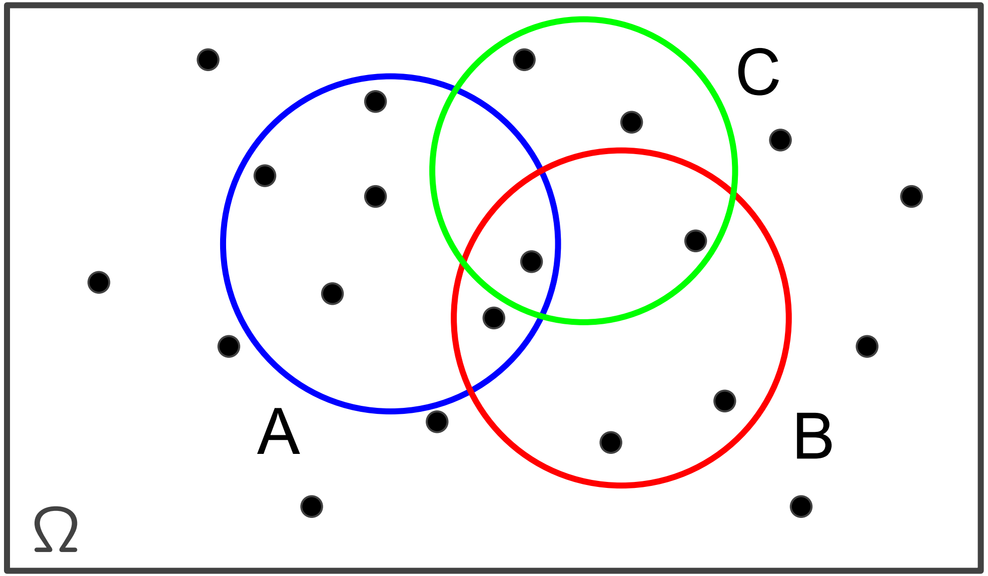
A - B



A Δ B



$(A \cap B)^c$



Métodos de contagem

Métodos de contagem

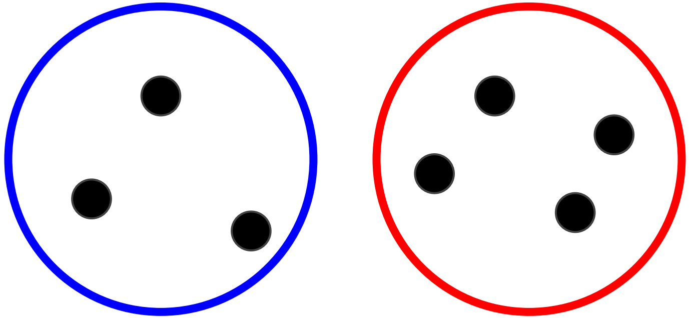
- Regra da soma;
- Regra da inclusão e exclusão;
- Regra da multiplicação (produto cartesiano);
- Potência cartesiana;
- Conjunto de partes (power set);
- Árvores;
- Princípio Fundamental da Contagem
- Arranjos/Permutação;
- Coeficiente Binomial (Combinação) e Multinomial.
- Multiconjuntos

Quando

$|A \cup B| = |A| + |B|$?

União disjunta

$|A| = 3$ $|B| = 4$



$$|A \cup B| = |A| + |B| = 7$$

Para conjuntos disjuntos, o tamanho da união é a soma dos tamanhos dos conjuntos.

Regra da soma

Quando

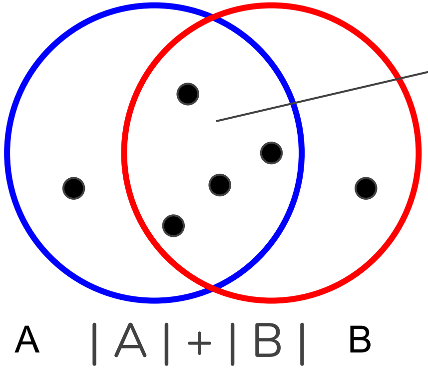
$|A \cup B| \neq |A| + |B|$?

União geral

Se A e B são disjuntos, $|A \cup B| = |A| + |B|$

Em geral: $|A \cup B| \neq |A| + |B|$

$|\{1\} \cup \{1\}| = |\{1\}| = 1 \neq |\{1\}| + |\{1\}| = 2$



Elementos nesta área ($A \cap B$) são contados 2X

Princípio da Inclusão e Exclusão:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Múltiplos de 2 números

$D = \{ 1 \leq i \leq 100 : 3 \mid i \lor 2 \mid i \} = \{ 2, 3, 4, 6, 8, \ldots 100 \}$

$|D| = ?$

$A = \{ 1 \leq i \leq 100 : 2 \mid i \}$

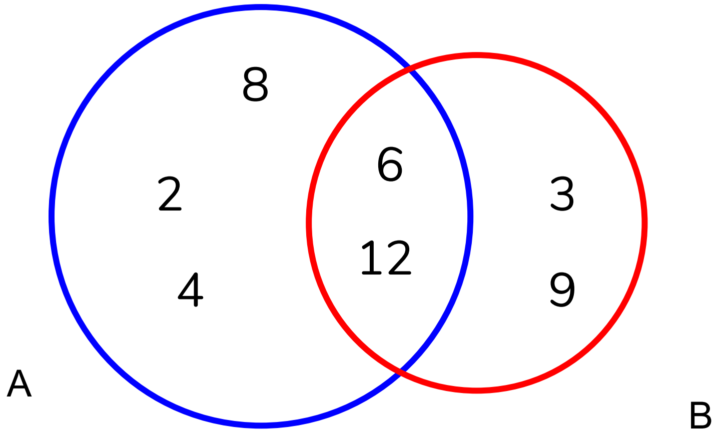
$B = \{ 1 \leq i \leq 100 : 3 \mid i \}$

$|A| = \lfloor 100 / 2 \rfloor = 50$

$|B| = \lfloor 100 / 3 \rfloor = 33$

$|A \cap B| = \{ 1 \leq i \leq 100 : 2 \mid i \land 3 \mid i \} = \{ 1 \leq i \leq 100 : 6 \mid i \}$

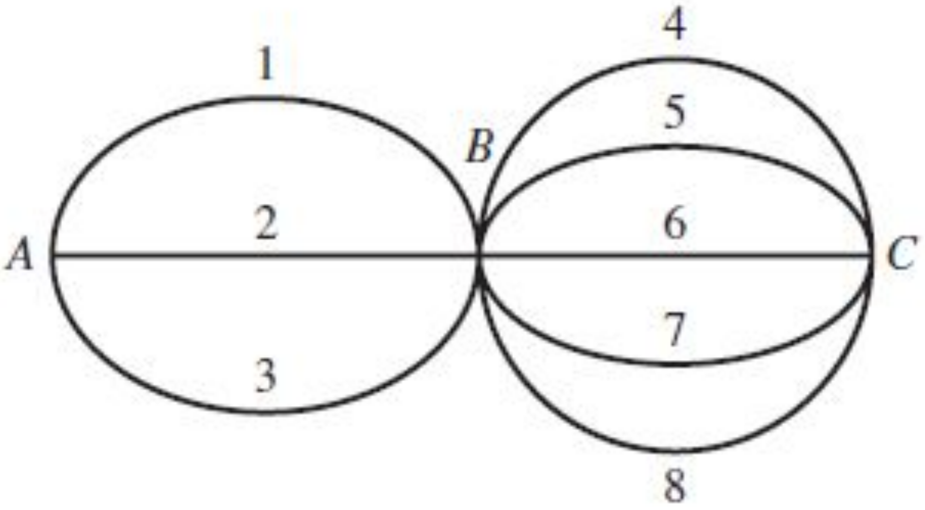
$|A \cap B| = \lfloor 100 / 6 \rfloor = 16$



$|D| = |A| + |B| - |A \cap B| = 67$

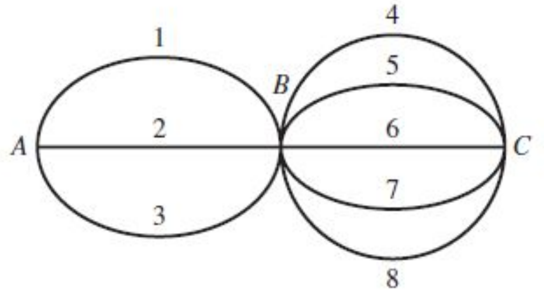
- Produto cartesiano
- Potência cartesiana
- Permutação
- Permutação parcial (arranjo)
- Combinação

Quantas rotas possíveis de A para C?



Regra da multiplicação

Possíveis rotas: (1,4), (1,5), (1,6), ..., (3,8)



Produto cartesiano

rAB = { 1 ,2 3 }

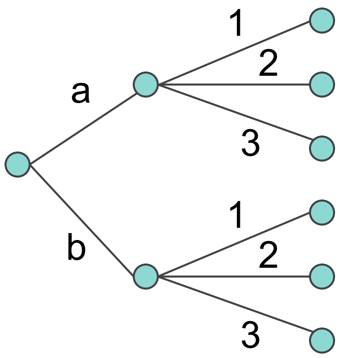
rBC = { 4 ,5, 6, 7, 8 }

	4	5	6	7	8
1	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
2	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8
3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8

rAB X rBC = { (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8)
(2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8)
(3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8) }

| rAB X rBC |= |A| X |B|

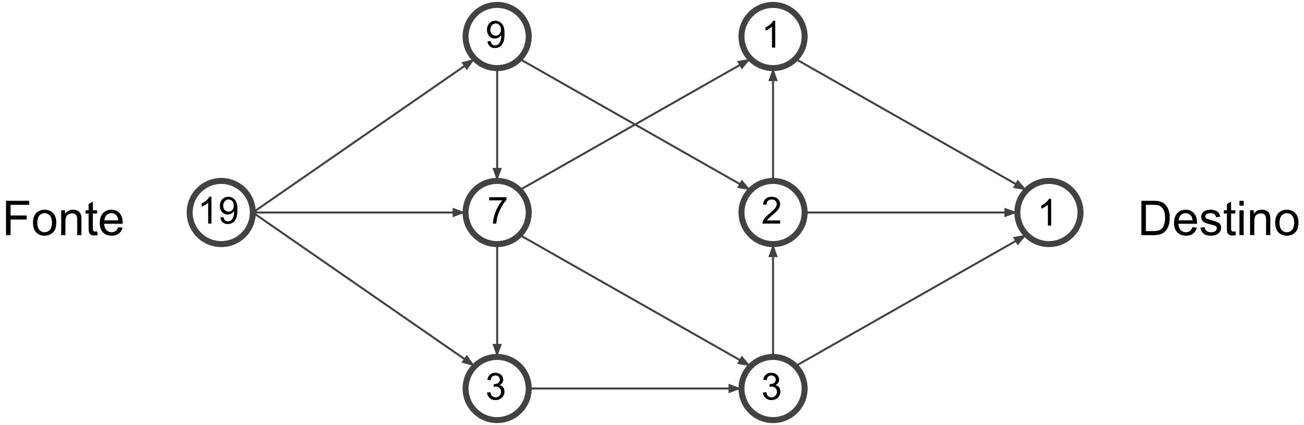
Produto cartesiano como árvores

Árvore	Sequência	Produto cartesiano
	{a, 1} {a, 2} {a, 3} {b, 1} {b, 2} {b, 3}	{a, b} × {1, 2, 3}
2 × 3 = 6		|{a, b} × {1, 2, 3}| = 2 × 3 = 6

Usado apenas quando, em todos os níveis, os nós possuem o mesmo grau.

Caminhos da fonte até o destino

Generalização da contagem de caminhos para um grafo acíclico :



“Potência cartesiana” de um conjunto

Produto cartesiano de um conjunto com ela mesma.

$A^2 = A \times A$ $\rightarrow$ quadrado cartesiano

$A^n = A \times A \times \ldots \times A$ $\rightarrow$ n-ésima potência cartesiana

$|\, A^n \,| = |A \times A \times \ldots \times A| = |A| \times |A| \times \ldots \times |A| = |A|^n$

Aplicações teóricas e práticas.

Potência em conjunto de binário

$\{ 0 ,1 \}$

$\{ 0, 1 \}^n$ = { string binário de tamanho n} = { string de n-bit }

n	Conjunto	String
1	$\{0,1\}^1$	0, 1
2	$\{0,1\}^2$	00, 01, 10, 11
3	$\{0,1\}^3$	000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111
…	…	…
n	$\{0,1\}^n$	0 … 0, …, 1 … 1

$| \{0, 1\}^n | = | \{0, 1\}|^n = 2^n$

Conjunto de partes (power set)

Conjunto de partes de S é a coleção de todos os subconjuntos de S.

$\mathbb{P}(\{ a, b \}) = \{ \{ \}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\} \}$

$| \mathbb{P}(S) | = ?$

$\mathbb{P}(S)$ possui uma correspondência com $\{ 0, 1 \}^{|S|}$.

Conjunto de partes

Correspondência entre $\mathbb{P}(S)$ e $\{0, 1\}^{|S|}$:

$\mathbb{P}(\{a,b\})$ e $\{0, 1\}^2$.

$|\mathbb{P}(S)| = |\{0, 1\}^{|S|}| = 2^{|S|}$

Tamanho do conjunto de partes é a potência de base 2 elevado ao tamanho do conjunto.

$\mathbb{P}(\{a,b\})$	a	b	$\{0, 1\}^2$
{}	X	X	00
{a}	O	X	10
{b}	X	O	01
{a,b}	O	O	11

Análise combinatória

Qual dos métodos utilizar?

Tentar identificar qual método que é adequado para a contagem determinando:

- **A ordem importa?**
- **Existe reposição das amostras?**

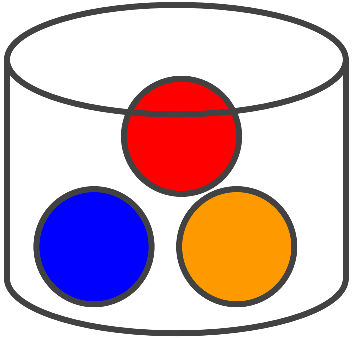
Ordem/Reposição	**Sim**	**Não**
Sim	Princípio Fundamental da contagem	Arranjos/Permutação
Não	Multiconjunto	Combinação

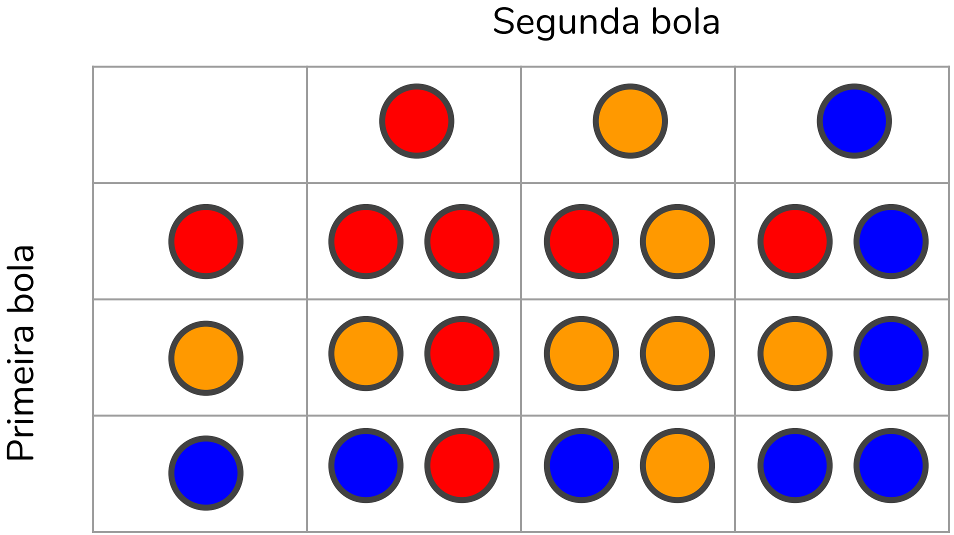
Ordem (sim) / reposição (sim)

Princípio Fundamental de Contagem

Urna com três bolas de cores distintas;

Pegar duas boas.





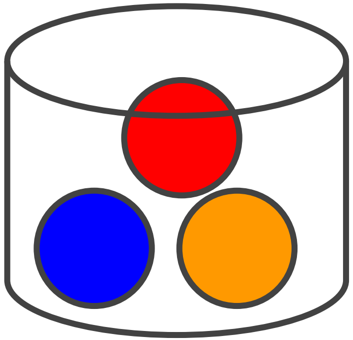
Produto cartesiano → $|A| \times |B| = 3 \times 3 = 9$

Ordem (sim) / reposição (não)

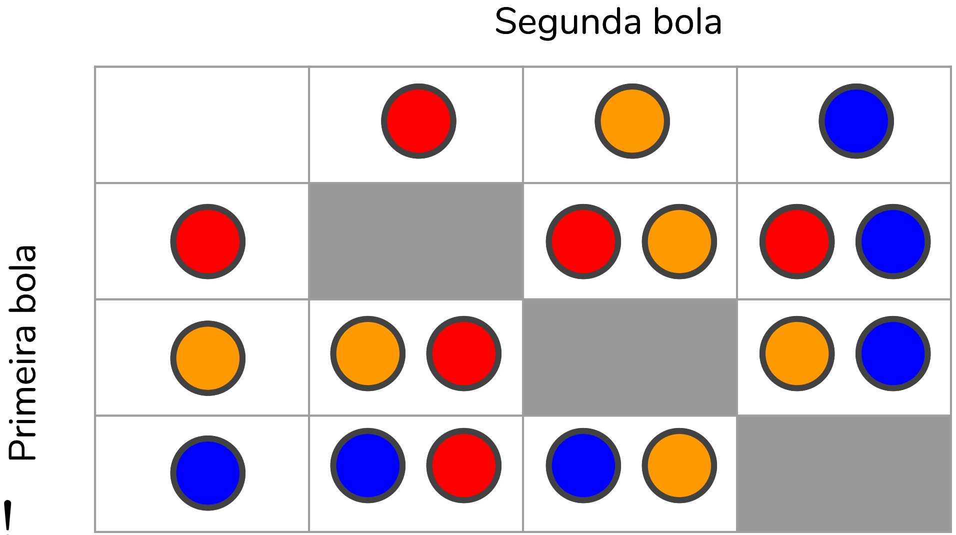
Arranjo/Permutação

Urna com três bolas de cores distintas;

Pegar duas boas.



$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad P_n = n!$$

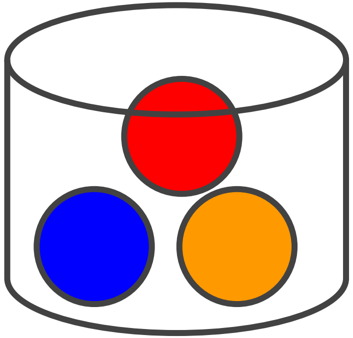


Ordem (não) / reposição (não)

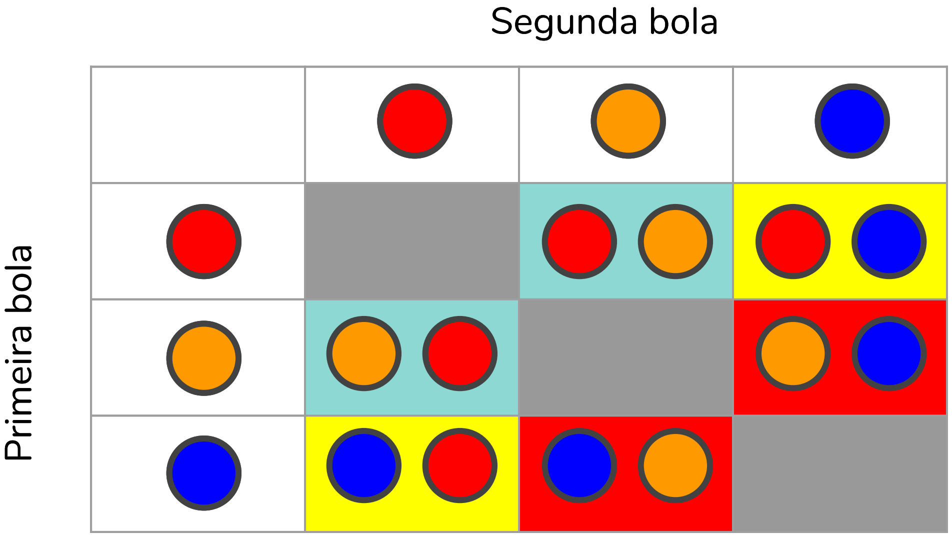
Combinação

Urna com três bolas de cores distintas;

Pegar duas boas.



$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

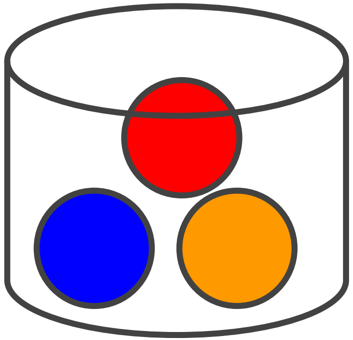


Ordem (não) / reposição (não)

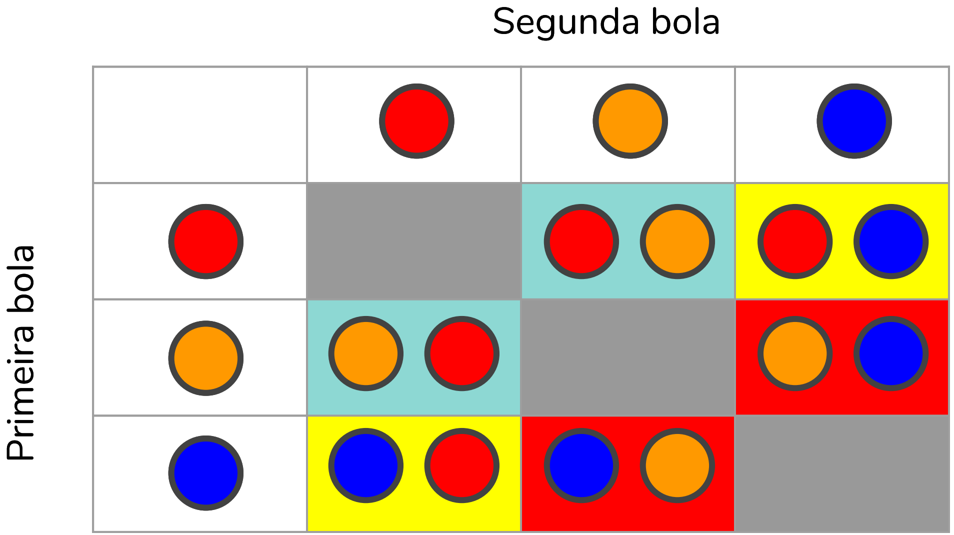
Combinação

Urna com três bolas de cores distintas;

Pegar duas boas.



$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k,n-k}$$

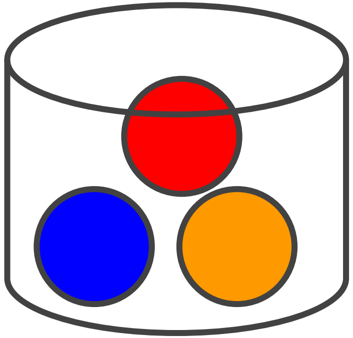


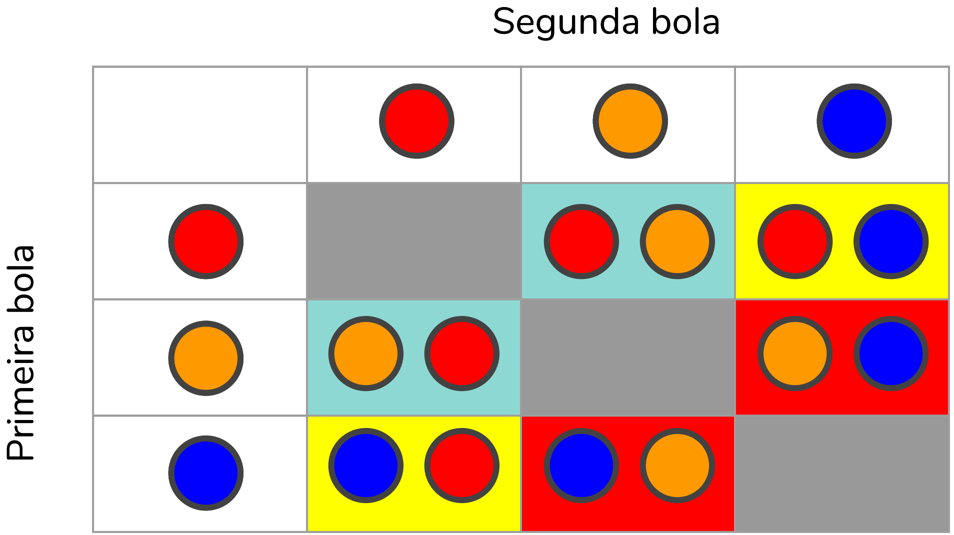
Ordem (não) / reposição (não)

Combinação

Urna com três bolas de cores distintas;

Pegar duas boas.





$$\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} = \binom{n}{k_1,k_2,k_3,k_4}$$

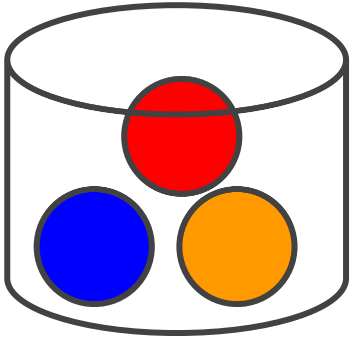
Coeficiente multinomial

Ordem (não) / reposição (sim)

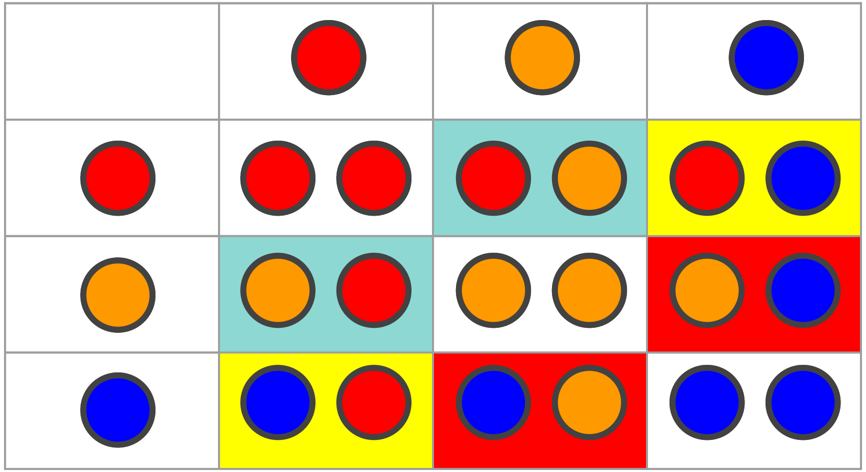
Multiconjunto

Urna com três bolas de cores distintas;

Pegar duas boas.



$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$$



$X1+X2+X3 = 7$

$\{X1, X2, X3 \in Z \mid$

$X1, X2, X3 \geq 0\}$

Quantas soluções diferentes existem para X1, X2 e X3?

Multiconjunto

$X1+X2+X3 = 7$

$\{X1, X2, X3 \in Z \mid X1,X2,X3 \geq 0\}$

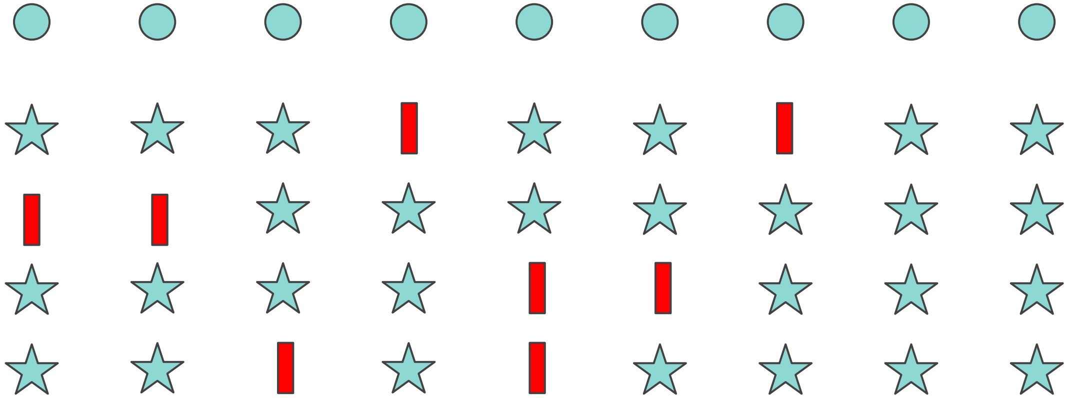
Quantas soluções diferentes existem para X1, X2 e X3?

Como se eu estivesse escolhendo 7 caixas de 3 elementos (já que pode repetir) → n = 3, k = 7

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = {}^{n+k-1}C_k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

$$\left(\!\!\binom{3}{7}\!\!\right) = \binom{7+3-1}{7} = \frac{9!}{2!7!} = 36$$

Multiconjunto



9 espaços que devem ser completados por 7 estrelas + 2 barras

3+2+2

0+0+7

4+0+3

2+1+4

De quantas formas diferente consigo posicionar as barras?

$$\binom{9}{2} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2!7!} = \mathbf{36}$$

Exercícios

Um palíndromo é uma palavra que pode ser lido da mesma forma nas duas direções (exemplo: ARARA). Quantos palíndromos de 9 letras (não necessariamente com significado) podemos formar usando letras de A-Z (26 letras no total)? (Resposta: 11881376)

Exercícios

De quantas formas possíveis podemos formar sequências de cinco letras utilizando apenas letras de A-H? Quantas delas possuem letras distintas? (Respostas: 3276, 6720)

Exercícios

O departamento de ciência quer formar um comitê de físicos e matemáticos com 8 membros. Existem 15 matemáticos e 20 físicos que podem fazer parte deste comitê. De quantas maneiras este comitê pode ser formado? Quantas dessas maneiras existem mais matemáticos que físico, mas com pelo menos um físico? (Respostas: 23535820, 4503070)

Exercícios

Quatro mulheres, Ana, Bet, Carol e Diana, e seis homens, Eric, Fred, Gil, Henry, Ian, e João, são amigos. Cada uma das mulheres querem se casar com um dos homens. De quantas maneiras isso pode ser possível? (Resposta: 360)

Exercícios

Quantos subconjuntos de 5 elementos podemos formar do conjunto { 1, 2, 3,..., 10 } que contém pelo menos um elemento ímpar? (Resposta: 251)

Exercícios

Quantos anagramas podemos formar com a palavra NATAL? (Resposta: 60)

Resolução dos exercícios anteriores se encontram no notebook da aula 18.