Probabilidade

Probabilidade condicional

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metrópole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br

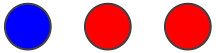
Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/

Revisão

- Probabilidade condicional
  - $P(E \mid F) = P(E \cap F) / P(F)$
- Regra do produto
  - $P(E \mid F)P(F) = P(E \cap F)$
- Independência dos eventos
  - **Independentes** → A ocorrência de um evento **não** altera a probabilidade do segundo evento;
  - **Dependentes** → A ocorrência de um evento altera a probabilidade do segundo evento;

Exemplo



$$P(E \cap F) = P(F|E).P(E)$$

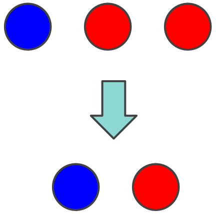
Pegando duas bolas, qual a probabilidade de pegar duas bolas vermelhas?

V_1 = primeira bola vermelha V_2 = segunda bola vermelha;

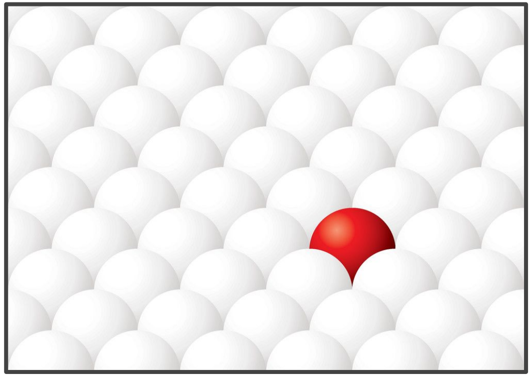
P(duas vermelhas) = $P(V_1 \cap V_2)$

P(duas vermelhas) = $P(V_1) \,.\, P(V_2 \mid V_1)$

P(duas vermelhas) = 2/3 . 1/2 = 1/3



Exemplo



1 bola vermelha;

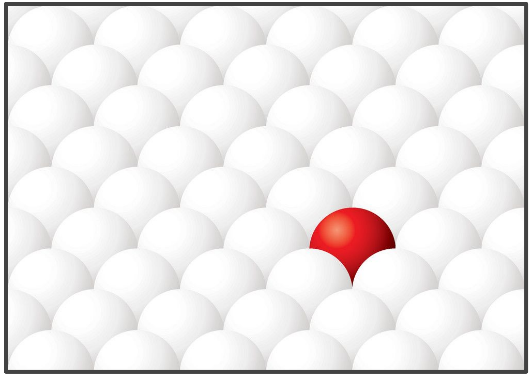
n - 1 bolas brancas

Qual a probabilidade da última bola ser vermelha?

Regra do produto genérico

$$
\begin{aligned}
P(E \cap F \cap G) &= P((E \cap F) \cap G) \\
&= P(X \cap G) \qquad X = E \cap F \\
&= P(G|X)P(X) \\
&= P(G|E \cap F)P(E \cap F) \\
&= P(G|E \cap F)P(E|F)P(F)
\end{aligned}
$$

Exemplo



1 bola vermelha; n - 1 bolas brancas; Qual a probabilidade da última bola ser vermelha?

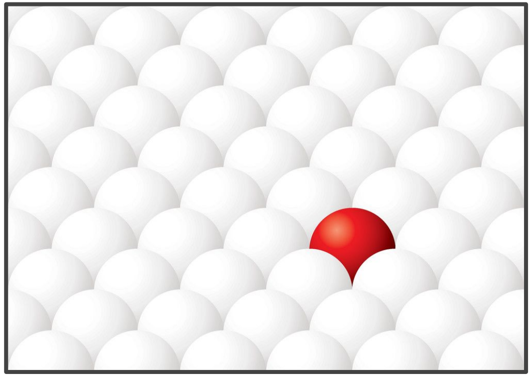
$B_i \rightarrow$ i-ésima bola ser branca, B_1, B_2, B_3, ... B_i,

P(última bola vermelha) = $P(B_1)*P(B_2|B_1)*P(B_3|B_2)*...*P(B_{n-1}|B_{n-2})$

P(última bola vermelha) = $\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\frac{1}{2}$

P(última bola vermelha) = 1/n

Exemplo



1 bola vermelha; n - 1 bolas brancas; Qual a probabilidade da última bola ser vermelha?

$V_n \rightarrow$ vermelha como a última bola

P(última bola vermelha) = $|V_n| / |\Omega|$

$$|\Omega| = \binom{n}{1} = n$$

P(última bola vermelha) = 1/n

Exemplo: Paradoxo da data de aniversário

Quantas pessoas você deve pegar para que dois deles compartilhem a mesma data de aniversário?

Assuma que:

- Todos os anos tem 365 dias;
- Todos possuem a mesma probabilidade de nascer em qualquer data do ano.

Exemplo: Paradoxo da data de aniversário

Quantas pessoas você deve pegar para que dois deles compartilhem a mesma data de aniversário?

Probabilisticamente falando:

- Escolher n números inteiros {1,2, ... , 365}, com reposição;
- $A(n) \rightarrow$ probabilidade de que dois ou mais tenha a mesma data de nascimento;
- Para qual valor de n, $A(n)$ é acima de ½?

Exemplo: Paradoxo da data de aniversário

Quantas pessoas você deve pegar para que dois deles compartilhem a mesma data de aniversário?

Primeira tentativa:

- Lista de aniversário: 2, 10, 320, 45, ...
- Possíveis datas de aniversário: {1,2, ..., 365}
- Todas as sequências de aniversário possíveis: $\Omega = \{1,2, \ldots, 365\}^n$
  $|\Omega| = 365^n$
- An = {n sequências com repetição}
- $P(An) = |An| / |\Omega|$

Exemplo: Paradoxo da data de aniversário

Quantas pessoas você deve pegar para que dois deles compartilhem a mesma data de aniversário?

Primeira tentativa:

- An = {n sequências com repetição}
- An^c = {n sequências sem repetição}
- $P(An^c) = \frac{365}{365}\frac{364}{365}\frac{363}{365}\cdots\frac{365-n+2}{365}\frac{365-n+1}{365}$
- $P(An) = 1 - P(An^c)$

Exemplo: Paradoxo da data de aniversário

Quantas pessoas você deve pegar para que dois deles compartilhem a mesma data de aniversário?

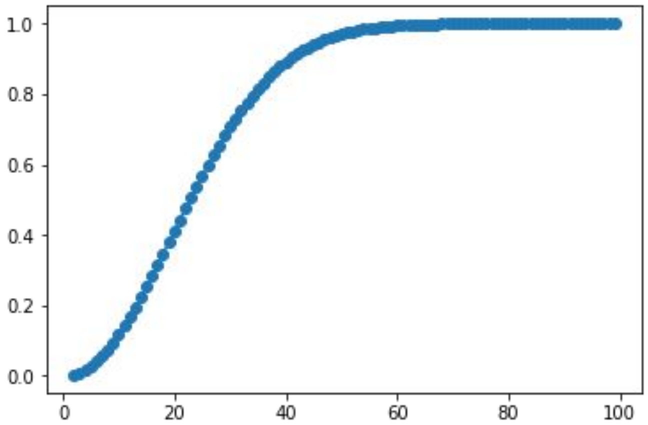
- A_n = {n sequências com repetição}
- A_n^c = {n sequências sem repetição}
- $P(A_n^c)$ $$= \frac{365}{365}\frac{364}{365}\frac{363}{365}\cdots\frac{365-n+2}{365}\frac{365-n+1}{365}$$

- $P(A_n) = 1 - P(A_n^c)$

Exemplo: Paradoxo da data de aniversário

Quantas pessoas você deve pegar para que dois deles compartilhem a mesma data de aniversário?

- $P(An) = 1- P(An^c)$



Lei da probabilidade total

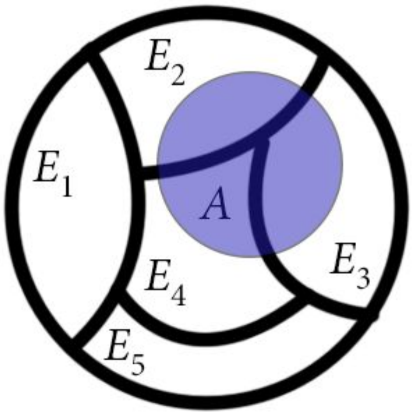
Às vezes é mais fácil dividir os eventos em diferentes partes;

Calcular a probabilidade de cada parte;

Somar as probabilidades;

Dividir e conquistar;

$P(A) = P(E_1 \cap A) + P(E_2 \cap A) + \ldots + P(E_5 \cap A)$



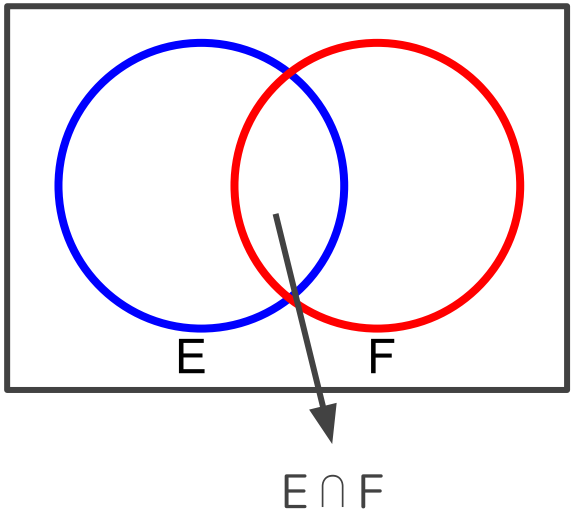
Lei da probabilidade total

Eventos E, F; $P(F) = ?$

$F = (E \cap F) \cup (E^c \cap F)$

$P(F) = P(E \cap F) + P(E^c \cap F)$

$P(F) = P(E)*P(F|E) + P(E^c)*P(F|E^c)$



Lei da probabilidade total

Exemplo: 2 moedas

Ca_i = i-ésima moeda é cara

$\exists$ Ca = cara existe

$P(\exists Ca) = ?$

Lei da probabilidade total

Exemplo: 2 moedas

Ca_i = i-ésima moeda é cara

$\exists Ca$ = cara existe

$P(\exists Ca) = ?$

$P(\exists Ca) = P(Ca_1 \cap \exists Ca) + P(Ca_1^c \cap \exists Ca)$

$P(\exists Ca) = P(Ca_1)P(\exists Ca|Ca_1) + P(Ca_1^c)P(\exists Ca|Ca_1^c)$

$P(\exists Ca) = ½ * 1 + ½ * ½ = ¾$

Lei da probabilidade total

Exemplo: 2 dados

D_i = resultado do i-ésimo dado

$S = D_1 + D_2$

$P(S=5) = ?$

Lei da probabilidade total

Exemplo: 2 dados

D_i = resultado do i-ésimo dado

$S = D_1 + D_2$

P(S=5) = ?

$$P(S=5) = \sum_{i=1}^{4} P(D_1 = i)P(D_2 = 5 - i | D_1 = i)$$

$$P(S=5) = \sum_{i=1}^{4} P(D_1 = i)P(D_2 = 5 - i)$$

$$P(S=5) = 4.\frac{1}{36} = 1/9$$

Lei da probabilidade total

Exercício

Três fábricas produzem 50%, 30% e 20% dos Iphones no mercado. A taxa de iphones com defeito é de 4%, 10% e 5% respectivamente. Qual a probabilidade de você comprar um iphone com defeito?

Lei da probabilidade total

Exercício

Três fábricas produzem 50%, 30% e 20% dos Iphones no mercado. A taxa de iphones com defeito é de 4%, 10% e 5% respectivamente. Qual a probabilidade de você comprar um iphone com defeito?

Resposta: 0.06