

Probabilidade

Distribuição discreta

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto

Instituto Metr pole Digital - UFRN

Sala A224, ramal 182

Email: tetsu@imd.ufrn.br





Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/





Na aula passada

Variância;

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= V(X) = E(X - \mu)^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2\end{aligned}$$

Esperança e variância com duas variáveis aleatórias;

Covariância.

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

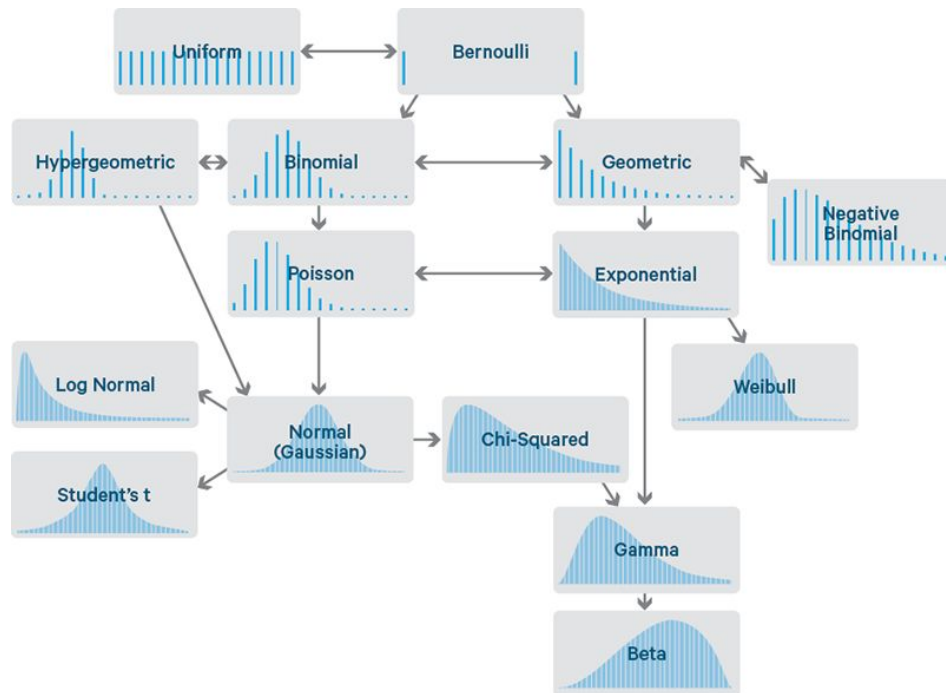
Nesta aula

Distribuição de Probabilidades →

Uma tabela, equação ou gráficos que mapeia os resultados possíveis de um experimento a um valor de probabilidade

Famílias de distribuição

- Motivação
- Aplicação
- Fórmula
- Visualização
- Exemplos
- Propriedades





Para demonstrar que uma certa função é uma distribuição de probabilidades...

- 1. Não deve haver valores negativos;**
- 2. Os valores devem somar 1.**



Propriedades de uma distribuição

- Média

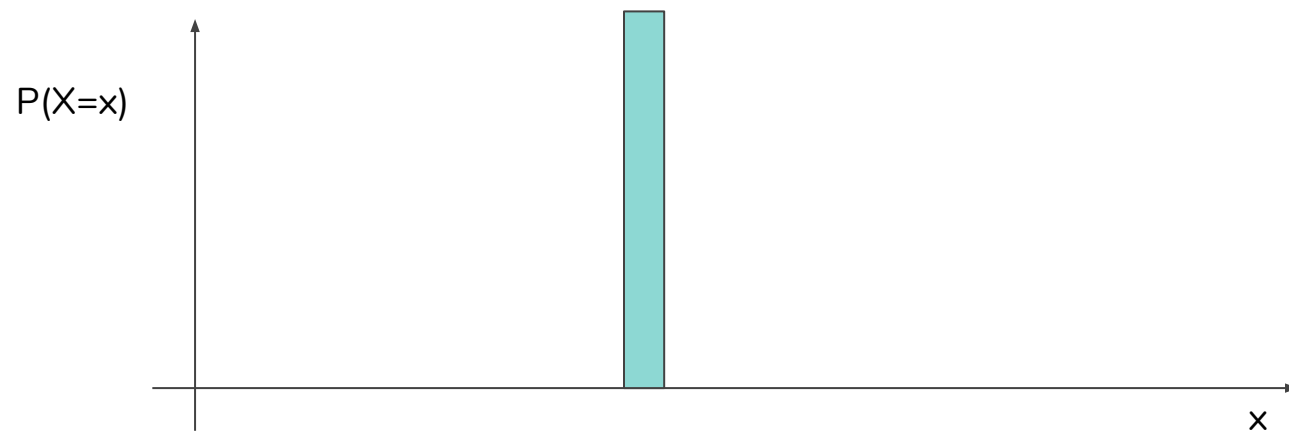
$$E(X) = \sum_{x=0}^n xP(x)$$

- Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$



Distribuição mais simples





Distribuição mais simples não-trivial



Distribuição de Bernoulli



Distribuição de Bernoulli

Distribuição não-trivial mais simples;

Jacob Bernoulli (1655 - 1705)

Base para várias outras distribuições;

- Binomial
- Poisson
- Normal



Distribuição de Bernoulli

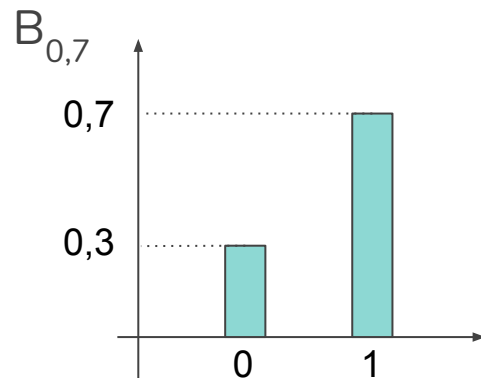
$$B_p, 0 \leq p \leq 1$$

Dois valores	0	1
probabilidade	$1-p$	p

Somatória das probabilidades = 1?

$$P(0) + P(1) = 1 - p + p = 1$$

$X \sim B_p$ (Variável aleatória X distribuído de acordo com a distribuição de Bernoulli)





Quem se importa com apenas dois valores?

Versão binária de eventos complexos:

- Produtos: 80 bons e 20 defeituosos
 - Selecione um, bom ou ruim $\rightarrow \sim B_{0,8}$
- Próximo bebê será menino
 - $\sim B_{0,5}$

Experimentos repetitivos

- Base para outras distribuições importantes
 - Binomial, Geométrica, Poisson, Normal...



Média de B_p

$$X \sim B_p$$

$$p(0) = 1 - p$$

$$p(1) = p$$

$$E(X) = \sum p(x).x = (1-p).0 + p.1 = p$$

$$X \sim B_{0,8} \rightarrow E(X) = 0,8$$

$E(X) = P(X=1) \rightarrow$ Fração de vezes que é esperado observar 1



Variância de B_p

$$X \sim B_p \quad p(0) = 1 - p \quad p(1) = p$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

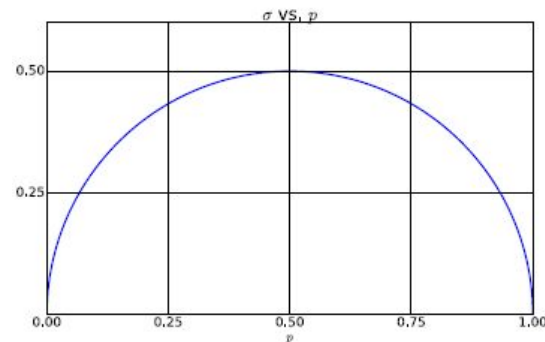
$$\sum p(x) \cdot x^2 - p^2 = (p(1) \cdot 1 + p(0) \cdot 0) - p^2$$

$$= p - p^2$$

$$= p(1-p)$$

$$V(X) = pq \quad \sigma = \sqrt{pq}$$

p	EX	V(X)	σ
0	0	0	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$





Experimentos independentes

Uma das importâncias da distribuição de Bernoulli é a sua aplicação em experimentos múltiplos;

O mais comum, é que estes experimentos sejam independentes;

$$0 \leq p \leq 1 \quad X_1, X_2, X_3 \sim B_p \quad q = 1 - p$$

$$P(110) = p^2q = P(101) = P(011)$$

De forma geral, $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \sim B_p$

$$x^n = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \{0,1\}^n \quad n_0 \rightarrow \# \text{ 0s e } n_1 \rightarrow \# \text{ 1s}$$

$$P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = p^{n_1} q^{n_0} \quad P(10101) = p^{n_1} q^{n_0} = p^3 q^2$$



Exemplos

Distribuição	Sequência típica	Descrição	Probabilidade
B_0	0000000000	Constante 0	$1^{10} = 1$
B_1	1111111111	Constante 1	$1^{10} = 1$
$B_{0,8}$	1110111011	80% de 1s	$0,8^8 \cdot 0,2^2$
$B_{0,5}$	1010101010	50% de 1s	$0,5^{10}$



Distribuição Binomial

Vários experimentos Bernoulli

Conta o número de sucesso em n experimentos Bernoulli

$P(\text{sucesso}) = p$ $P(\text{falha}) = q = 1 - p$

$B_{n,p}$ ou $B_{p,n} \rightarrow$ distribuição do número de sucessos

$n \rightarrow$ número de jogadas de moeda (cara = 1, coroa = 0)

$p(1) \rightarrow p$

$B_{n,p} \rightarrow$ distribuição do número de caras



Distribuição Binomial

Aplicações

- Resposta positiva a um medicamento
- Componentes com defeitos
- Moedas



$B_{n,p}$ - n pequeno

n experimentos B_p independentes

$$P(\text{Sucesso}) = p(1) = p \quad P(\text{Falha}) = p(0) = 1 - p$$

$B_{n,p}(k)$ - probabilidade de k sucesso

n = 0

k	$B_{p,0}(k)$
0	1

n = 1

k	$B_{p,1}(k)$
0	q
1	p

n = 2

k	seq	$B_{p,1}(k)$
0	00	q^2
1	01,10	$2pq$
2	11	p^2



$B_{n,p}$ - n e k de modo geral

n experimentos B_p independentes

$$P(\text{Sucesso}) = p(1) = p \quad P(\text{Falha}) = p(0) = 1 - p$$

$B_{n,p}(k)$ - probabilidade de k sucesso # sucesso $0 \leq k \leq n$

Se eu tenho k sucesso, eu tenho $n - k$ falhas

Probabilidade de uma sequência com k sucesso $= p^k q^{n-k}$

Número de sequências que possui k sucesso: $\binom{n}{k}$

$$B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$



É de fato uma distribuição?

$$B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

1. Não deve haver valores negativos;

$$0 \leq k \leq n \quad 0 \leq p \leq 1$$

2. Os valores devem somar 1.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n B_{n,p}(k) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= (p + q)^n = 1^n = 1 \end{aligned}$$

Teorema Binomial

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

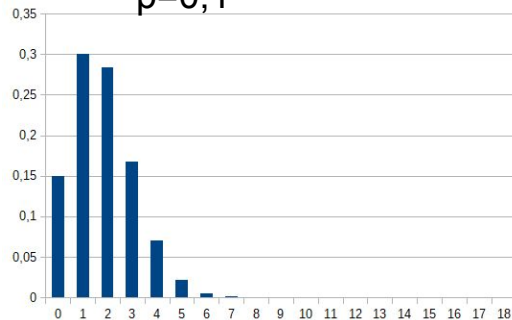


Exemplos

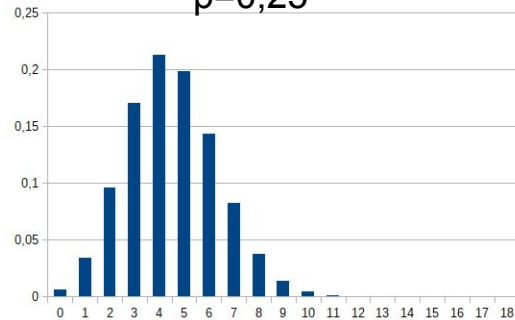
$n=18$

$B_{p,18}(k)$

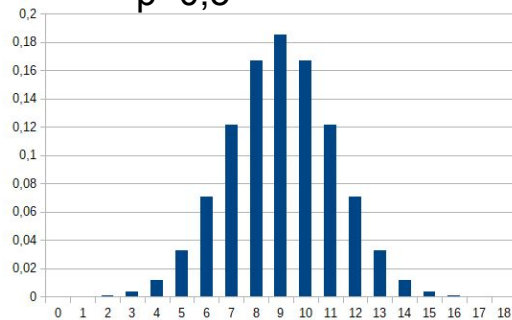
$p=0,1$



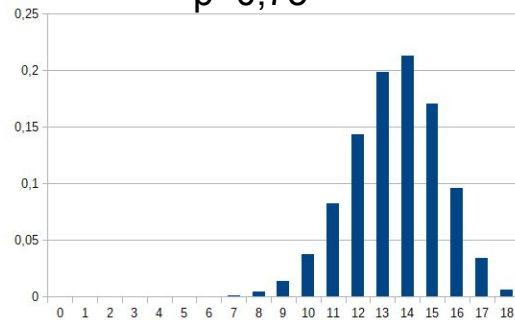
$p=0,25$



$p=0,5$



$p=0,75$





Múltiplas escolhas

Um exame possui 6 questões de múltiplas escolhas, cada um contendo 4 alternativas.

Em cada questão, o estudante seleciona de forma aleatória uma das 4 alternativas.

Para passar, ele necessita 4 ou mais questões corretas. Qual a probabilidade dele passar?



Múltiplas escolhas

Um exame possui 6 questões de múltiplas escolhas, cada um contendo 4 alternativas.

Em cada questão, o estudante seleciona de forma aleatória uma das 4 alternativas.

Para passar, ele necessita 4 ou mais questões corretas. Qual a probabilidade dele passar?

$$P(4) = \binom{6}{4} \cdot \frac{1}{4}^4 \cdot \frac{3}{4}^2 = 0,0329$$

$$P(5) = \binom{6}{5} \cdot \frac{1}{4}^5 \cdot \frac{3}{4}^1 = 0,00439 \quad P(X \geq 4) = P(4) + P(5) + P(6) = 0,03759$$

$$P(6) = \binom{6}{6} \cdot \frac{1}{4}^6 \cdot \frac{3}{4}^0 = 0,000244$$



Média e Variância de $B_{n,p}$

$$E(X) = np$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = npq$$



Média de $B_{n,p}$

$$E(X) = \sum_{x=0}^n xP(x)$$



Média de $B_{n,p}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^n xP(x) \\ &= \sum_{x=0}^n k \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ &= x_0 \binom{n}{x_0} p^{x_0} q^{n-x_0} + x_1 \binom{n}{x_1} p^{x_1} q^{n-x_1} + \dots \\ &= \sum_{x=1}^n x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^n x \left(\frac{n!}{x!(n-x)!} \right) p^x q^{n-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{x=1}^n \left(\frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} \right) p^x q^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^n \left(\frac{n(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} \right) p \cdot p^{x-1} q^{n-x} \\ &= np \sum_{x=1}^n \left(\frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} \right) \cdot p^{x-1} q^{n-x} \\ &= np \sum_{b=0}^n \left(\frac{(a)!}{(b)!(a-b)!} \right) \cdot p^b q^{a-b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= np \sum_{b=0}^n \binom{a}{b} \cdot p^b q^{a-b} \\ &= np(p+q)^n \\ &= np \end{aligned}$$



Variância de $B_{n,p}$

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^n x(x-1)p(x)$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^n x(x-1) \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Para calcular a variância é mais fácil
calcular a $E(X(X-1))$ para obter $E(X^2)$

$$E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$$



Variância de $B_{n,p}$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Para calcular a variância é mais fácil calcular a $E(X(X-1))$ para obter $E(X^2)$

$$E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^n x(x-1)p(x)$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^n x(x-1) \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)}$$

$$= \sum_{x=0}^n x(x-1) \left(\frac{n!}{x!(n-x)!} \right) p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=2}^n x(x-1) \left(\frac{n(n-1)(n-2)!}{x(x-1)(x-2)!(n-x)!} \right) p^2 p^{x-2} q^{n-x}$$

$$= p^2 n(n-1) \sum_{x=2}^n \left(\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} \right) p^{x-2} q^{n-x}$$

$$= p^2 n(n-1) \sum_{b=0}^n \left(\frac{(a)!}{(b)!(a-b)!} \right) p^b q^{a-b}$$

$$= p^2 n(n-1)(p+q)^n$$

$$= p^2 n(n-1)$$



Variância de $B_{n,p}$

$$E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$$

$$p^2 n(n-1) = E(X^2) - np$$

$$E(X^2) = p^2 n(n-1) + np$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = p^2 n(n-1) + np - n^2 p^2$$

$$V(X) = p^2 n^2 - p^2 n + np - n^2 p^2$$

$$V(X) = np(1-p)$$

$$V(X) = npq$$



Revisão

Distribuição de Bernoulli

- Média: p
- Variância: pq

Distribuição Binomial

- Média: np
- Variância: npq