Probabilidade

Distribuição discreta II

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metrópole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br

Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/

Na aula passada

Distribuição:

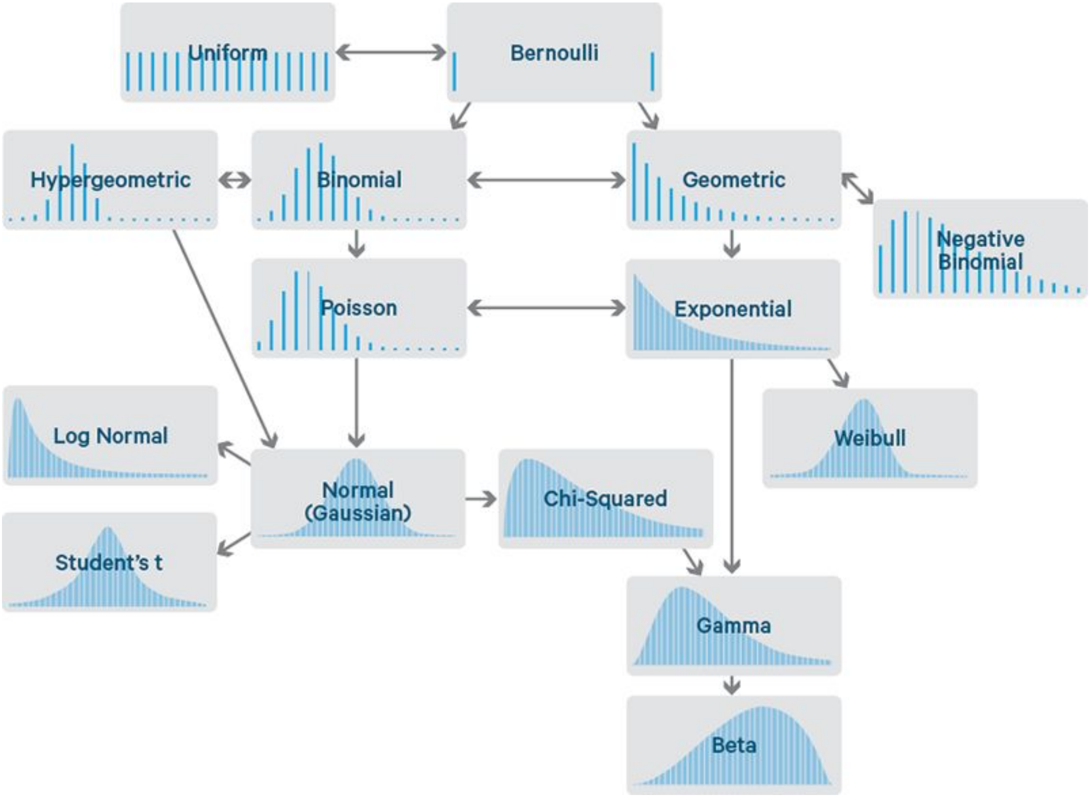
- Não deve haver probabilidades negativas;
- Soma deve ser 1;

Distribuição de Bernoulli

- Média: p
- Variância: pq

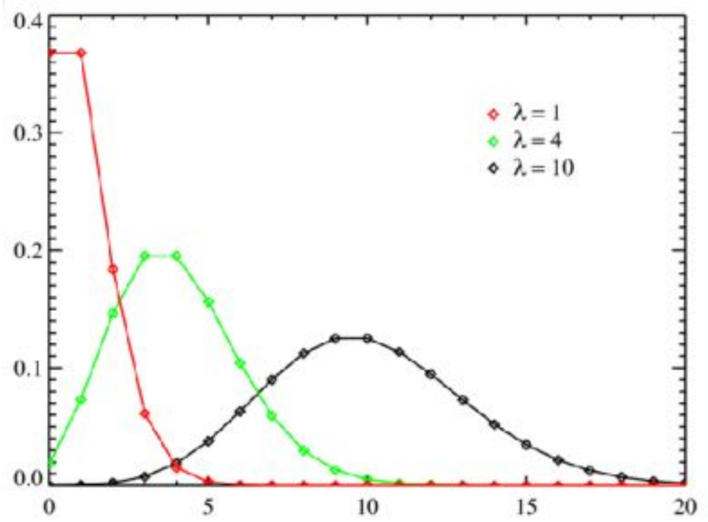
Distribuição Binomial

- Média: np
- Variância: npq



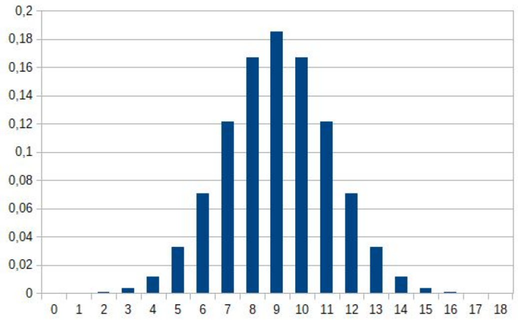
Distribuição de Poisson

$$P_\lambda(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$



Definido pelo parâmetro λ ≥ 0

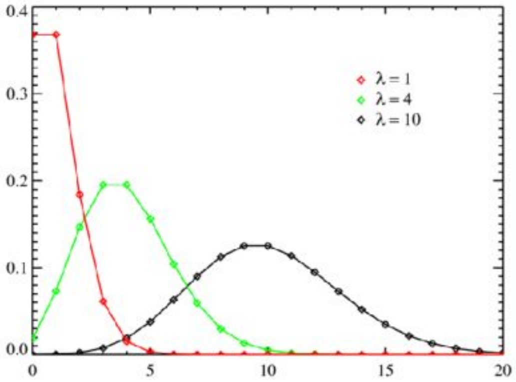
k ∈ N

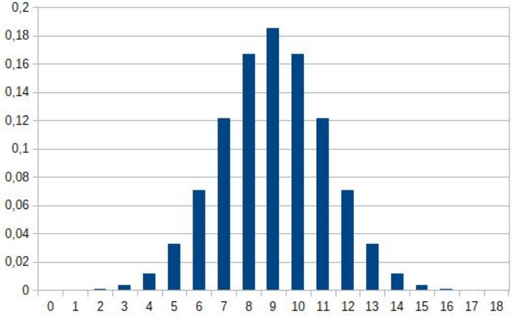


Poisson é uma aproximação de $B_{p,n}$ para n muito grande e p muito pequeno

Quando n é muito grande e p muito pequeno...

$$B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad P_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$





n.p = λ possui um valor moderado.

Situações que seguem uma distribuição de Poisson

P_λ aproxima de $B_{p,n}$ para p pequeno, n grande;

- Números de clicks em uma ad;
- Resposta a um spam;
- Cliente em uma loja;
- Compra de uma pintura de arte de uma galeria;

Pequeno k

λ	Pλ(k)	0	1	2	3
Geral	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	$\frac{1}{e^\lambda}$	$\frac{\lambda}{e^\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2e^\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{6e^\lambda}$
1	$\frac{1}{ek!}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2e}$	$\frac{1}{6e}$
2	$\frac{2^k}{e^2k!}$	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{2}{e^2}$	$\frac{2}{e^2}$	$\frac{4}{3e^2}$
0	$\frac{0^k}{k!}$	1	0	0	0

Aproximação Binomial

Poisson é uma aproximação de Bp,n para n muito grande e p muito pequeno.

$$np = \lambda \quad p = \frac{\lambda}{n}$$

$$q = 1 - p$$

$$\begin{aligned} B_{n,p}(k) &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \end{aligned}$$

Limite binomial

$$B_{p,n}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{(1-\frac{\lambda}{n})^k} \qquad P_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

k e λ fixados e $n \to \infty$

$$\frac{n!}{(n-k)!n^k} \qquad = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} = 1$$

$$(1 - \frac{\lambda}{n})^k$$

fixado de termos (k) e cada termo → 1

$$(1 - \frac{\lambda}{n})^n = ((1 - \frac{\lambda}{n})^{\frac{n}{\lambda}})^\lambda = ((1 - \frac{1}{m})^m)^\lambda = (e^{-1})^\lambda$$

$$(1 - \frac{1}{m})^m = e^{-1} \quad m = \frac{n}{\lambda}$$

Distr. de Poisson é realmente uma distribuição?

Probabilidade negativa?

$$P_\lambda(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad k \geq 0 \qquad \lambda = np$$

Probabilidades somam 1?

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$ Expansão de Taylor

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_\lambda(k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

Média e variância

Poisson é uma aproximação de Bp,n para n muito grande e p muito pequeno.

	μ	V
$B_{p,n}$	np	npq
P_λ	λ	λ

Exemplos

Uma indústria produz 200 itens, onde cada um possui probabilidade de 1% de ser defeituoso. Calcule a probabilidade de três desses itens serem defeituosos.

$$P(3\ ser\ defeituoso)?$$

Binomial (preciso) $$B_{0,01,200}(3) = \binom{200}{3}(0,01)^3(0,99)^{197} \approx 0,181$$

Poisson (aproximado) $$\lambda = np = 200.0,01 = 2$$

$$P_2(3) = e^{-2}\frac{2^3}{3!} \approx 0,18$$

Exemplos

Uma indústria produz 200 itens, onde cada um possui probabilidade de 1% de ser defeituoso. Calcule a probabilidade de encontrar pelo menos um defeituoso.

$$P(algum\ ser\ defeituoso)?$$

Binomial (preciso)

$$B_{0,01,200}(0) = \binom{200}{0}(0,01)^0(0,99)^{200} \approx 0,134$$

$$B_{0,01,200}(\geq 1) = 1 - 0,134 \approx 0,866$$

Poisson (aproximado)

$$\lambda = np = 200.0,01 = 2$$

$$P_2(0) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} \approx 0,135$$

$$P_2(\geq 1) = 1 - 0,135 \approx 0,865$$

Distribuição geométrica

Jogadas de moedas independentes (B_p), $p(1) = p$, $p(0) = 1 - p = q$

Binomial	$B_{p,n}$	n jogadas, # 1s
Geométrica	G_p	# de jogadas até o primeiro 1

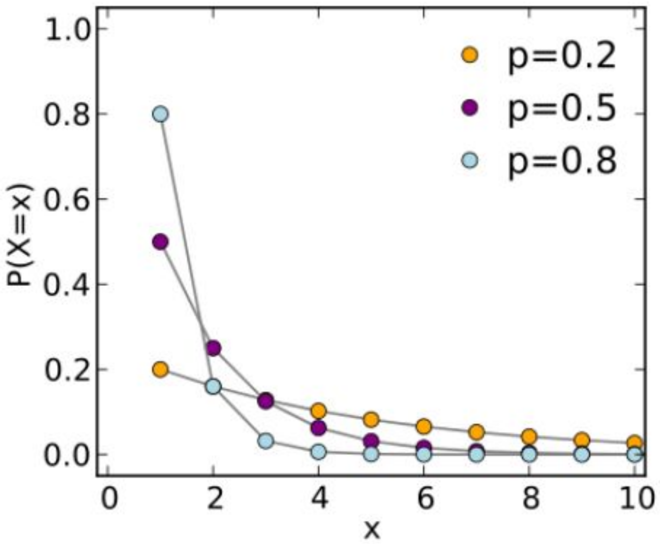
Jogadas	**X**
10101	1
01011	2
00011	4

n	$\mathbf{X_1, \ldots, X_n}$	**p(n)**
1	$X_1 = 1$	p
2	$X_1 = 0, X_2 = 1$	qp
3	$X_1 = X_2 = 0, X_3 = 1$	q^2p
n	$X_1 = X_2 = \ldots = X_{n-1} = 0, X_n = 1$	$q^{n-1}p$

Distribuição geométrica

$$G_p, 0 < p \leq 1$$

$$P(k) = q^{k-1}p = G_p(k), k \geq 1$$



Observações:

$$p \neq 0$$

n pode assumir um valor muito alto

Situações onde a distribuição é geométrica

- Ladrão tentando encontrar a chave certa em um molho de chave;
- Tentativas até acertar o alvo;
- Tentativas até sucesso;
- Tentativas até falha;

Distribuição geométrica é distribuição?

$$P(n) = pq^{n-1} \qquad n \geq 1$$

Soma das probabilidades é igual a 1?

$$\begin{aligned}(1+q+q^2+\dots)(1-q) = 1 &+ q + q^2 + \dots \\ &- q - q^2 - \dots\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} = p\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i = p\frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$$

Esperança de uma distribuição geométrica

X = # de tentativas para obter o primeiro sucesso.
p = probabiliade do sucesso

$$P(X > n) = P(X_1 = \ldots = X_n = 0) = q^n$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} xP(x)$$

$$E(X) = 1.P(1) + 2P(2) + 3P(3) + \ldots$$

$$E(X) = 1.p + 2p(1-p) + 3p(1-p)^2 + \ldots$$

$$(1-p)E(X) = 1.p(1-p) + 2p(1-p)^2 + 3p(1-p)^3 + \ldots$$

$$E(X) - (1-p)E(X) = 1.p + p(1-p) + p(1-p)^2 + p(1-p)^3 + \ldots$$

$$pE(X) = 1.p + p(1-p) + p(1-p)^2 + p(1-p)^3 + \ldots$$

$$E(X) = 1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \ldots$$

$$E(X) = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

Variância de uma distribuição geométrica

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 P(x)$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 q^{(x-1)} p$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} (x+1-1)^2 q^{(x-1)} p$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} [(x-1)^2 + 2(x-1) + 1] q^{(x-1)} p \qquad j = x - 1$$

$$E(X^2) = \sum_{j=0}^{\infty} [(j)^2 + 2(j) + 1] q^{(j)} p$$

Variância de uma distribuição geométrica

$$E(X^2) = \sum_{j=0}^{\infty}(j)^2 q^{(j)} p + \sum_{j=0}^{\infty} 2(j) q^{(j)} p + \sum_{j=0}^{\infty} q^{(j)} p$$

$$E(X^2) = q \sum_{j=0}^{\infty} j^2 q^{(j-1)} p + 2q \sum_{j=0}^{\infty} j q^{(j-1)} p + p \sum_{j=0}^{\infty} q^j$$

$$E(X^2) = qE(X^2) + 2qE(X) + p\frac{1}{1-q}$$

$$(1-q)E(X^2) = 2q\frac{1}{p} + 1$$

$$E(X^2) = \frac{q+1}{p^2}$$

Variância de uma distribuição geométrica

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{q}{p^2}$$

Exemplo: Moeda justa

$X \sim G_{0,5}$

$P(X = k) = G_{0,5}(k) = 0,5^k.0,5 = 1/(2^k)$

$E(X) = 1/p = 2$

$V(X) = q/p^2 = 2$

Exemplo

Suponha que um jogador de baseball possui 0,357 de chance de acertar a bola. Suponha também que as chances não mudam entre as batidas. Qual a probabilidade dele acertar a primeira bola na quarta jogada?

Suponha que o mesmo jogador de baseball possua apenas cinco chances de rebatida. Qual a probabilidade dele não acertar nenhuma jogada?

Exemplo

Suponha que um jogador de baseball possui 0,357 de chance de acertar a bola. Suponha também que as chances não mudam entre as batidas. Qual a probabilidade dele acertar a primeira bola na quarta jogada?

$$G_{0,357}(4) = 0,357.(1 - 0,357)^3 = 0.0949$$

Suponha que o mesmo jogador de baseball possua apenas cinco chances de rebatida. Qual a probabilidade dele não acertar nenhuma jogada?

$$P(não\,acertar) = q^5 = (1 - 0,357)^5 = 0.1099$$

Sem memória

Se depois de 10 jogadas de moeda não ocorreu nenhum cara, qual a probabilidade da 12ª moeda ser cara? Ou seja, P(X = 12 | X > 10) = ?

$$P(X = 12 | X > 10) = \frac{P(X{=}12 \cap X{>}10)}{P(X{>}10)} = \frac{P(X{=}12)}{P(X{>}10)}$$

$$= \frac{q^{11}p}{q^{10}}$$

$$= qp = P(X = 2)$$