Probabilidade

Variância e Covariância

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metrópole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br

Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/

Na aula passada...

Esperança matemática

- Valor médio "esperado" de um experimento se ele for repetido muitas vezes.
- Média dos elementos de um espaço amostral ponderada pelas suas probabilidades.

$$E(X) = \sum_{x} p_x \, . \, x$$

A esperança não é tudo

Duas empresas, e as duas possuem 1000 empregados;

As duas empresas possuem a mesma média salarial: R$10.000,00;

- E1: Todos os empregados ganham R$10.000,00;
- E2: Todos os empregados ganham R$100, mas o chefe R$9.000.000,00;

Em qual das duas empresas você trabalharia?

Mesma média, distribuição diferente;

Variância

Medida que calcula a dispersão dos dados;

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n} \quad \sigma^2 = V(X) = E(X - \mu)^2$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

Dado justo

$$E(X) = \sum_x p_x \,.\, x \qquad E(X) = \mu = 3.5$$

face	prob	x - μ	(x - μ)²
1	⅙	-2.5	6.25
2	⅙	-1.5	2.25
3	⅙	-0.5	0.25
4	⅙	0.5	0.25
5	⅙	1.5	2.25
6	⅙	2.5	6.25

$$V(X) = E(X - \mu)^2$$

$$V(X) = p_1 \,.\, (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_6 \,.\, (x_6 - \mu)^2$$

$$V(X) = 2.92...$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.92} = 1.71...$$

Três moedas

X = {número de caras após jogadas de três moedas}

$$E(X) = \sum_x p_x \,.\, x \qquad E(X) = \mu = 1.5$$

# caras	prob	x - µ	$(x - \mu)^2$
0	⅛	-1,5	2.25
1	⅜	-0.5	0.25
2	⅜	0.5	0.25
3	⅛	1.5	2.25

$$V(X) = E(X - \mu)^2$$

$$V(X) = \frac{1}{8}.2.25 + \ldots + \frac{1}{8}.2.25$$

$$V(X) = 0.75 = \frac{3}{4}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Fórmula alternativa da variância

$$V(X) = E(X-\mu)^2$$

$$E(X) = \mu$$

Fórmula alternativa da variância

$$V(X) = E(X - \mu)^2 \qquad E(X) = \mu$$

$$V(X) = E(X^2 - 2X\mu + \mu^2)$$

$$V(X) = E(X^2) - E(2X\mu) + E(\mu^2)$$

$$V(X) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$

$$V(X) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Dado justo

$$E(X) = \sum_x p_x \cdot x \qquad E(X) = \mu = 3.5$$

face	prob	x^2	$p(x)x^2$
1	⅙	1	1/6
2	⅙	4	4/6
3	⅙	9	9/6
4	⅙	16	16/6
5	⅙	25	25/6
6	⅙	36	36/6

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \frac{91}{6} - 3.5^2$$

$$V(X) = 2.92...$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.92} = 1.71...$$

Como as modificações simples em X afeta a sua variância?

Adição por uma constante (Tradução)

$$V(X) = E(X-\mu)^2$$

$E(Y) = E(X)+b$

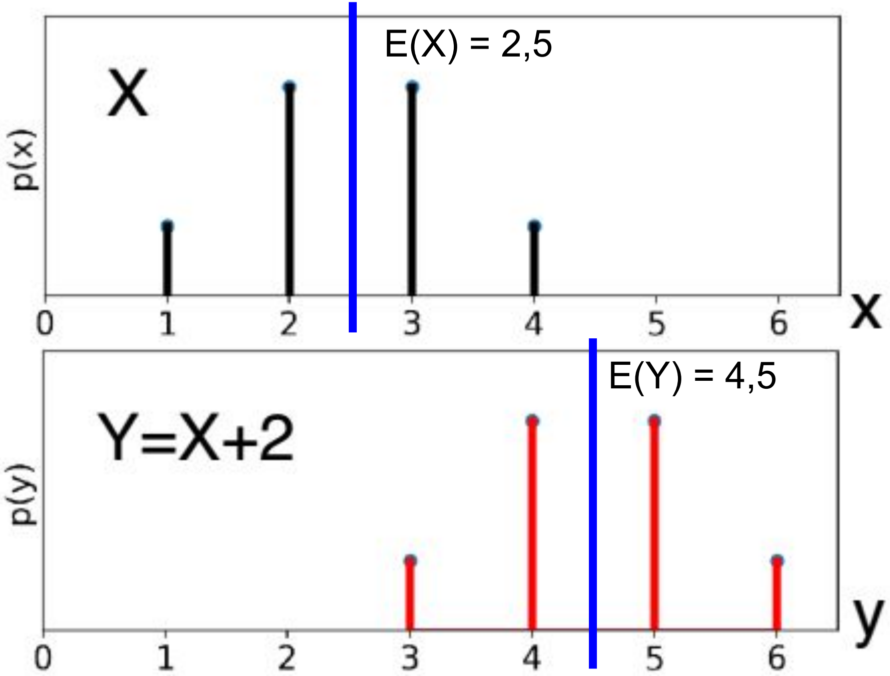
$V(Y) = V(X+b)$

$= E(X+b-\mu_{x+b})^2$

$= E(X+b-(\mu_x+b))^2$

$V(Y) = E(X-\mu_x)^2$

$V(Y) = V(X)$



Multiplicação por uma constante (dimensionamento)

$$V(X) = E(X - \mu)^2$$

E(Y) = bE(X)

V(Y) = V(Xb)

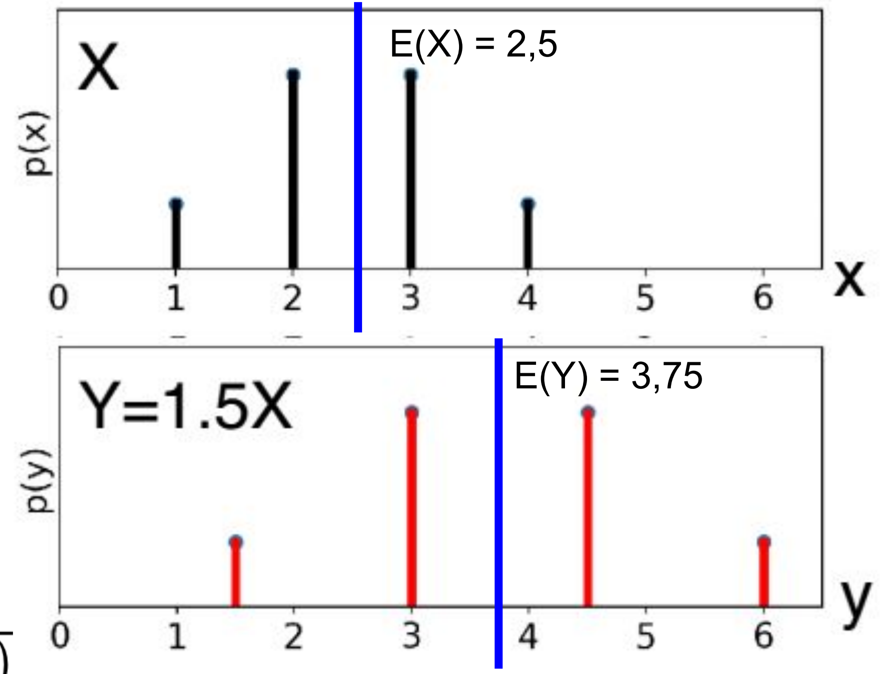
$= E(Xb - \mu_{xb})^2$

$= E(Xb - b\mu_x)^2$

$= E(b(X - \mu_x))^2$

$= b^2E(X - \mu_x)^2 = b^2V(X)$

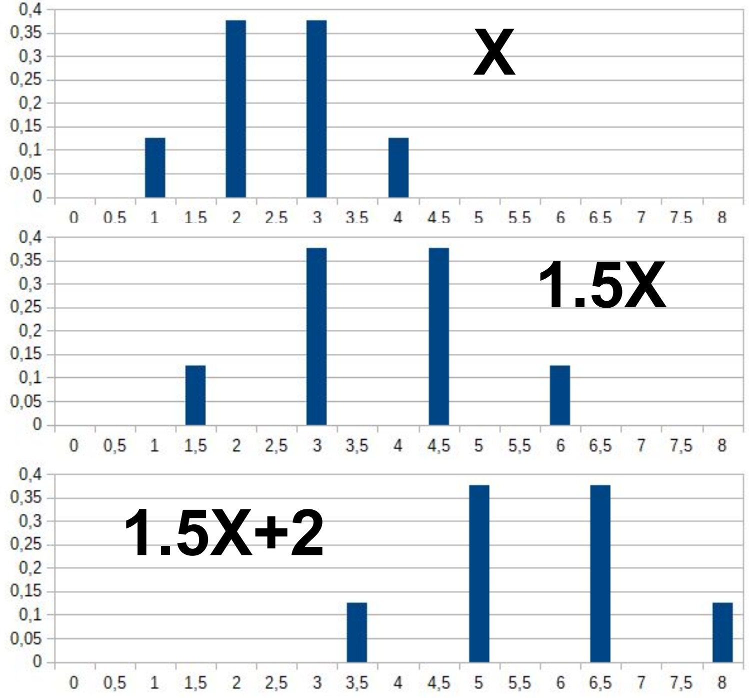
$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{b^2V(X)} = b\sqrt{V(X)}$$



Transformações afins

$$
\begin{aligned}
V(aX+b) &= V(aX) \\
&= a^2 V(X)
\end{aligned}
$$

$$\sigma_{ax+b} = |a|\sigma_x$$



Exercício

Suponha que eu tenha uma variável aleatória X e eu queira transformar esta variável de forma que a sua média se torne 0 e a sua variância se torne 1. Como devo proceder essa transformação?

$Y = aX+b$

$E(Y) = 0$

$V(Y) = 1$

Duas variáveis

Duas variáveis

$$U = X + Y$$

$$E(U) = \sum_u p_u . u$$

X = {# de caras na jogada da moeda 1}

Y = {# de caras na jogada da moeda 2}

X/Y	P(Y=0) = ½	P(Y=1) = ½
P(X=0) = ½	¼	¼
P(X=1) = ½	¼	¼

U =X+Y	P(x,y)	P(x,y).u
0	¼	0
1	½	½
2	¼	½

$$E(U) = 1$$

Duas variáveis

X = {# de caras na jogada da moeda 1}

Y = {# de caras na jogada da moeda 2}

$$U = X + Y$$

$$E(U) = \sum_u p_u . u$$

$$E(U) = \sum_x \sum_y p_{(x,y)} . (x + y)$$

$$E(U) = \sum_x \sum_y p_{(x,y)} . x + p_{(x,y)} . y$$

$$E(U) = \sum_x \sum_y p_{(x,y)} . x + \sum_x \sum_y p_{(x,y)} . y$$

$$E(U) = \sum_x x \sum_y p_{(x,y)} + \sum_y y \sum_x p_{(x,y)}$$

$$E(U) = \sum_x x . p(x) + \sum_y y . p(y)$$

$$E(U) = E(X) + E(Y)$$

X/Y	P(Y=0) = ½	P(Y=1) = ½
P(X=0) = ½	¼	¼
P(X=1) = ½	¼	¼

U =X+Y	P(x,y)	P(x,y).u
0	¼	0
1	½	½
2	¼	½

$$E(U) = 1$$

Duas variáveis

$U = X + Y \qquad V(U) = V(X) + V(Y)$ **?**

$$V(U) = E(U^2) - (E(U))^2$$

Duas variáveis

$U = X + Y \qquad V(U) = V(X) + V(Y)$ **?**

$$V(U) = E(U^2) - (E(U))^2$$

$$V(U) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2$$

$$V(U) = E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2$$

$$V(U) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - ((E(X))^2 + 2E(X)E(Y) + (E(Y))^2)$$

$$V(U) = E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 + 2(E(XY) - E(X)E(Y))$$

$$V(U) = V(X) + V(Y) + 2\underbrace{(E(XY) - E(X)E(Y))}_{\text{Covariância}}$$

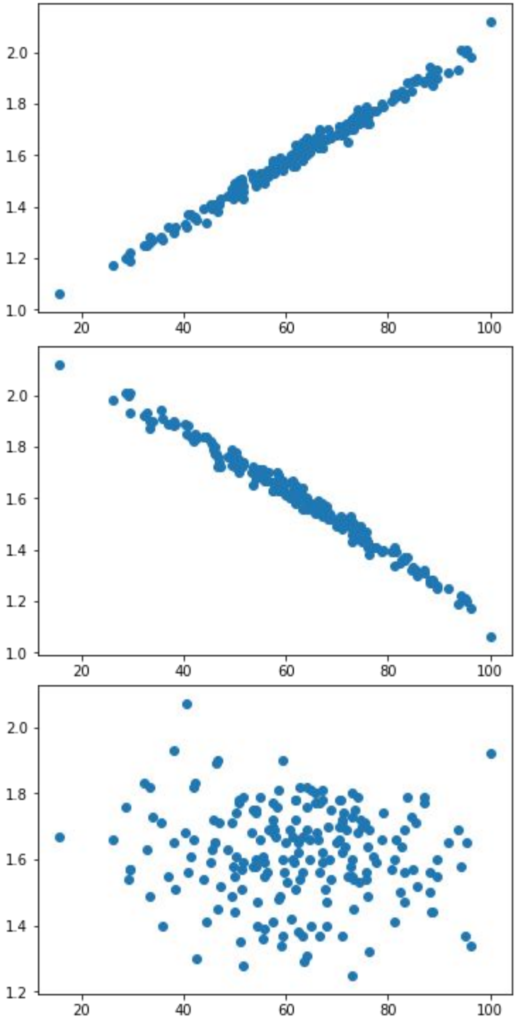
Covariância

Cov(X,Y) → Tanto de X que varia junto com Y

$$Cov(X,Y) = \frac{\sum (X_i - \overline{X}) * (Y_i - \overline{Y})}{n}$$

Média do produto da diferença entre Xi e sua média e da diferença entre Yi e sua média.

$$Cov(X,Y) = E(x - \mu_x)(y - \mu_y)$$



Covariância

$$Cov(X,Y) = \frac{\sum (X_i - \overline{X}) * (Y_i - \overline{Y})}{n}$$

$$Cov(X,Y) = E(x - \mu_x)(y - \mu_y)$$

Covariância

$$Cov(X,Y) = \frac{\sum (X_i - \overline{X}) * (Y_i - \overline{Y})}{n}$$

$$Cov(X,Y) = E(x - \mu_x)(y - \mu_y)$$

$$Cov(X,Y) = E(xy - y\mu_x - x\mu_y + \mu_x\mu_y)$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(y\mu_x) - E(x\mu_y) + E(\mu_x\mu_y)$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_x E(Y) - \mu_y E(X) + \mu_x\mu_y$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_x\mu_y - \mu_y\mu_x + \mu_x\mu_y$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_x\mu_y$$

Duas variáveis

$U = X + Y \qquad V(U) = V(X) + V(Y)$ **?**

$$V(U) = E(U^2) - (E(U))^2$$

$$V(U) = V(X) + V(Y) + 2(\underbrace{E(XY) - E(X)E(Y)}_{\text{Covariância} = 0})$$

Variáveis independentes!

Exemplos (Dado)

Evento	Conjunto	Probabilidade
primos	{2, 3, 5}	½
ímpar	{1, 3, 5}	½
quadrado	{1, 4}	⅓

Quais pares de eventos são independentes?

Interseção	Conj.	Prob.	=?	Produto	Independência
Primos ∩ ímpar	{ 3,5 }	⅓	≠	½ * ½ = ¼	dependente
Primos ∩ quadrado	{ Ø }	0	≠	½ * ⅓ = ⅙	dependente
Quadrado ∩ ímpar	{ 1 }	⅙	=	½ * ⅓ = ⅙	independente

Revisão

Variância;

Esperança e variância com duas variáveis aleatórias;

Covariância.