Probabilidade

Análise combinatória

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metrópole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br

Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/

Revisão

- Tamanho do conjunto
- Número de elementos em um intervalo;
- Número de múltiplos;
- Regra da soma;
- Regra da subtração;
- Produto cartesiano;
- Potência cartesiana;
    - Conjunto binário;
        - Número de subconjuntos;
- Árvores.

Nesta aula

Análise combinatória: parte da Matemática que estuda métodos e técnicas que permitem resolver problemas relacionados com contagem.

Muito utilizada nos estudos sobre probabilidade, ela faz análise das possibilidades e das combinações possíveis entre um conjunto de elementos.

- Princípio Fundamental da Contagem;
- Arranjos/permutação;
- Combinação;
- Multiconjunto.

Qual dos métodos utilizar?

Tentar identificar qual método que é adequado para a contagem determinando:

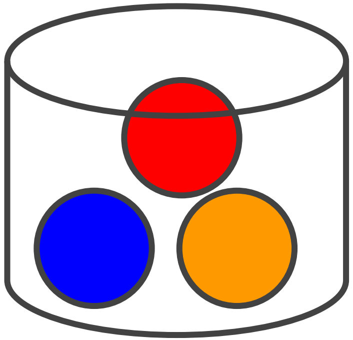
- **A ordem importa?**
- **Existe reposição das amostras?**

Ordem/Reposição	**Sim**	**Não**
Sim	Princípio Fundamental da contagem	Arranjos/Permutação
Não	Multiconjunto	Combinação

Considere este experimento:

Urna com três bolas de cores distintas;.

Pegar duas boas.

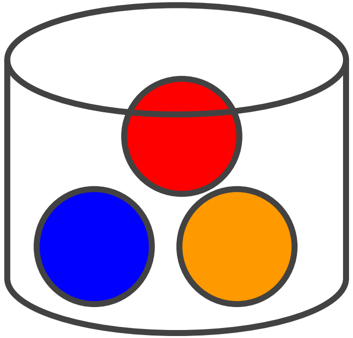


Ordem (sim) / reposição (sim)

Princípio Fundamental de Contagem

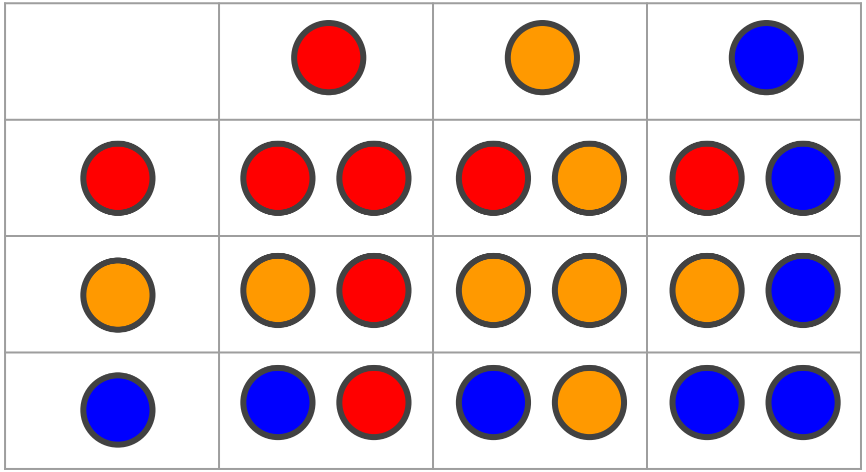
Urna com três bolas de cores distintas;

Pegar duas boas.



Segunda bola

Primeira bola

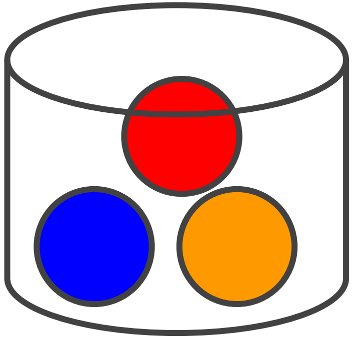


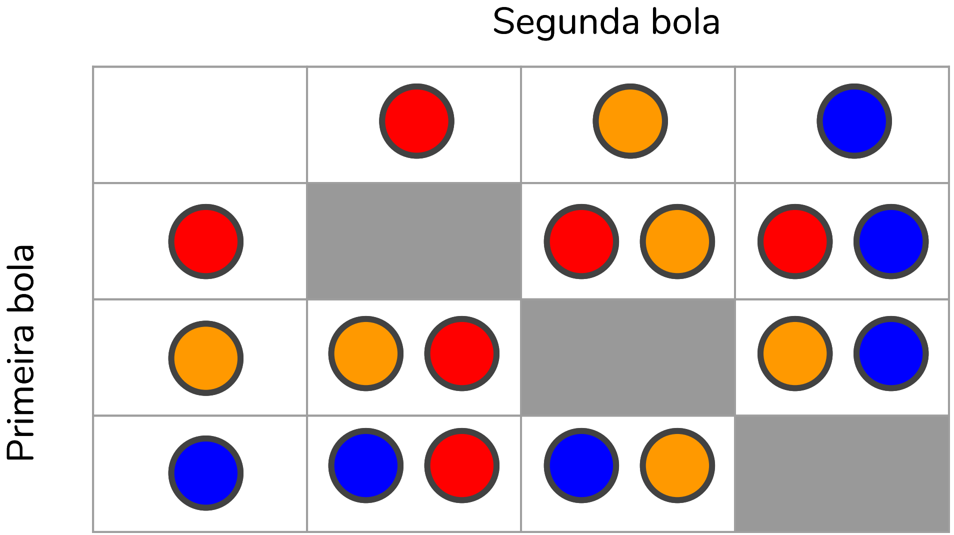
Ordem (sim) / reposição (não)

Arranjo/Permutação

Urna com três bolas de cores distintas;

Pegar duas boas.



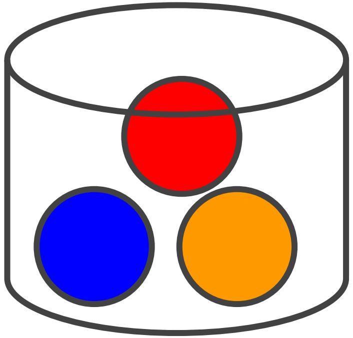


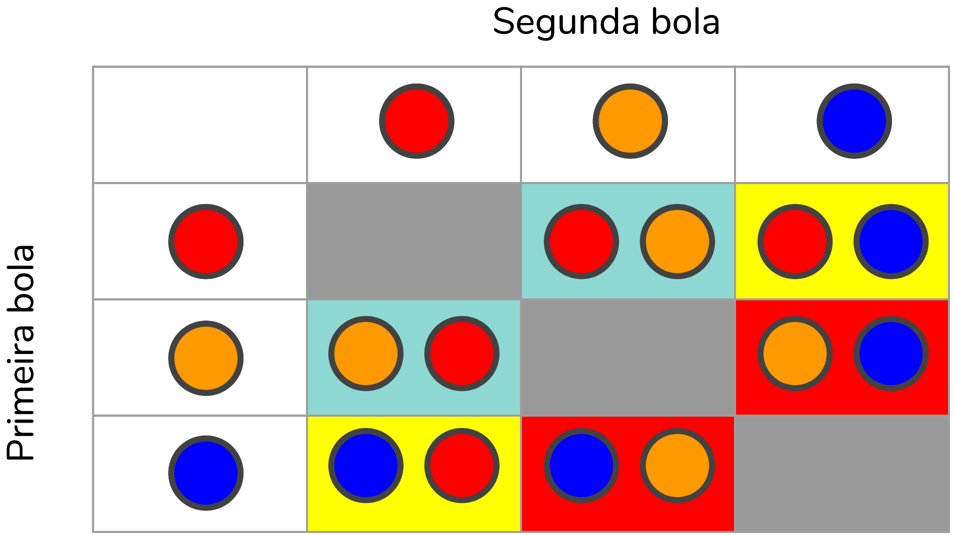
Ordem (não) / reposição (não)

Combinação

Urna com três bolas de cores distintas;

Pegar duas boas.



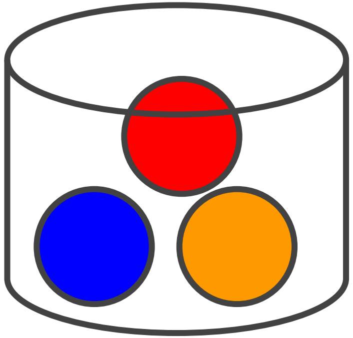


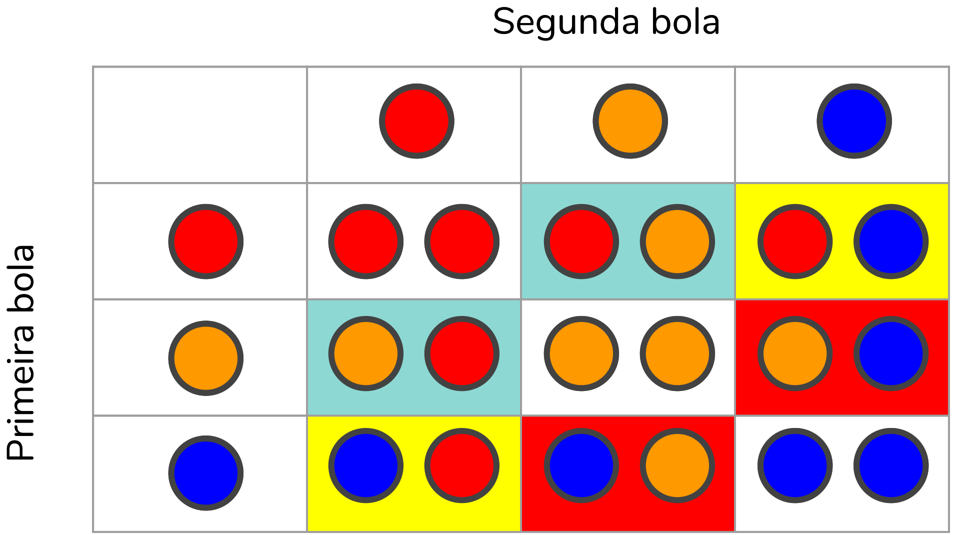
Ordem (não) / reposição (sim)

Multiconjunto

Urna com três bolas de cores distintas;

Pegar duas boas.





Número de ordens diferentes que você pode visitar três cidades (Natal, João Pessoa, Fortaleza)

Quantas sequências diferentes de 10 bits podemos formar?

Número de anagramas que você pode formar com 3 letras utilizando o seguinte conjunto de letras: {P, E, R, A, S}

Um comitê deve ser composto por 4 pessoas. 7 pessoas estão aptas a compor o comitê. Quantas maneiras diferentes posso formar este comitê?

$X1+X2+X3 = 7$

$\{X1, X2, X3 \in Z\}$

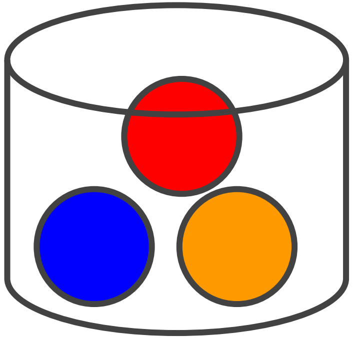
Quantas soluções diferentes existem para X1, X2 e X3?

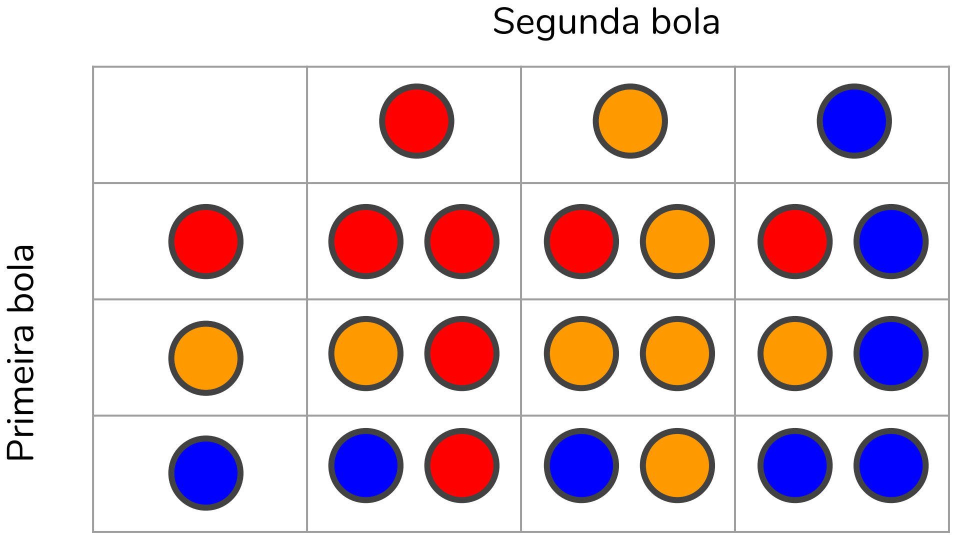
Ordem (sim) / reposição (sim)

Princípio Fundamental de Contagem

Urna com três bolas de cores distintas;

Pegar duas boas.





Produto cartesiano → |A| X |B| = 3 x 3 = 9

Quantas sequências diferentes de 10 bits podemos formar?

M1 = M2 = M3 = … = M10 = {“cara”, “coroa”}

Ω = M1 x M2 x M3 x … x M10

$|\Omega|$ = |M1 x M2 x M3 x … x M10|

$|\Omega|$ = |M1| x |M2| x |M3| x … x |M10|

$|\Omega|$ = 2 x 2 x 2 x … x 2

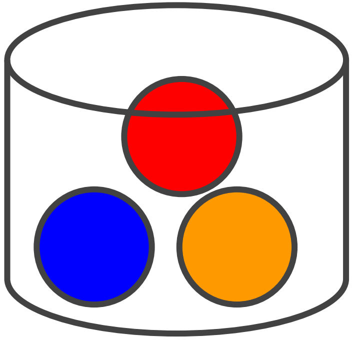
$|\Omega| = 2^{10} = 1024$

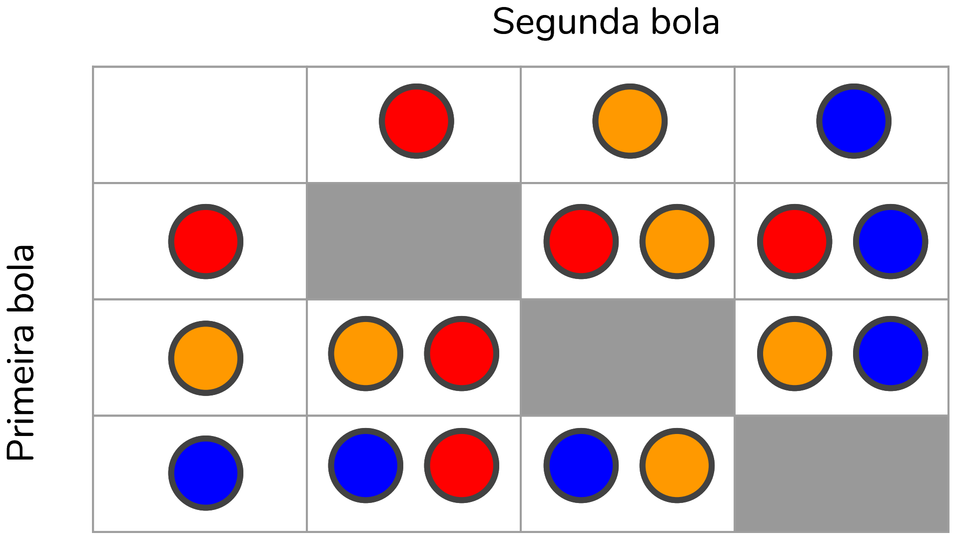
Ordem (sim) / reposição (não)

Arranjo/Permutação

Urna com três bolas de cores distintas;

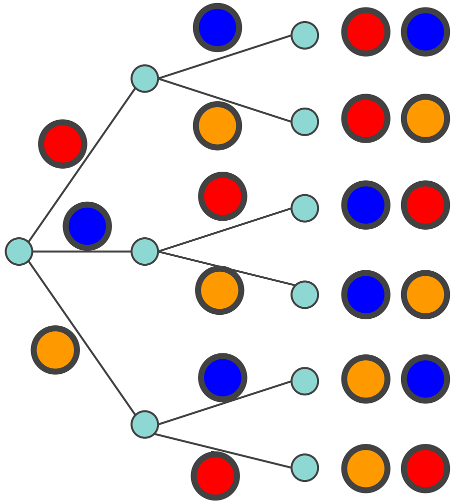
Pegar duas boas.





Arranjo/Permutação

# experimento	1	2	...	k
|Ω no experimento|	n	n-1	...	n-k+1



$$n.(n-1).(n-2). \ldots .(n-k+1)$$

3 x 2 = 6

n = 3; k = 2

k = n → permutação
k < n → arranjo

Permutação

Arranjos utilizando todos os elementos;

k = n

$$n.(n-1).(n-2).\ \ldots\ .(n-k+1)$$

$$n.(n-1).(n-2).\ \ldots\ .(n-n+1)$$

$$n.(n-1).(n-2).\ \ldots\ .(1) = n!$$

$$P_n = n!$$

Número de ordens diferentes que você pode visitar três cidades (Natal, João Pessoa, Fortaleza)

Cidades = {“Natal”, “João Pessoa”, “Fortaleza”}

|Cidades| = 3

$P_3 = 3! = 3*2*1 = 6$

Fatorial de 0

Para n> 0, n! = n x (n - 1) x … x 2 x 1

Mas e quando n = 0?!

De quantas formas diferentes é possível permutar 0 objetos?

{a,b}: (a,b) (b,a) {a}: (a) { }: ( )

Uma forma de permutar o conjunto vazio

0! = 1

Arranjos

Arranjos utilizando parte dos elementos;

k < n

$$n.\,(n-1).\,(n-2).\;\ldots\;.\,(n-k+1) = A_{n,k}$$

$$n! = (n-1).\,(n-2).\;\ldots\;.\,(n-k+1).\,(n-k).\,(n-k-1).\,(n-k-2).\;\ldots\;.\,(2).\,(1)$$

$$n! = A_{n,k}.\,(n-k).\,(n-k-1).\,(n-k-2).\;\ldots\;.\,(2).\,(1)$$

$$n! = A_{n,k}.\,(n-k)!$$

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Número de anagramas que você pode formar com 3 letras utilizando o seguinte conjunto de letras: {P, E, R, A, S}

Letras = {“P”, “E”, “R”, “A”, “S”}

n = 5, k = 3;

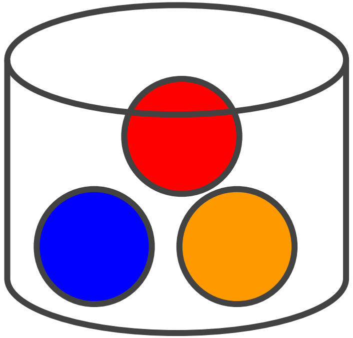
$A_{5,3}$ = 5!/(5-3)! = 60

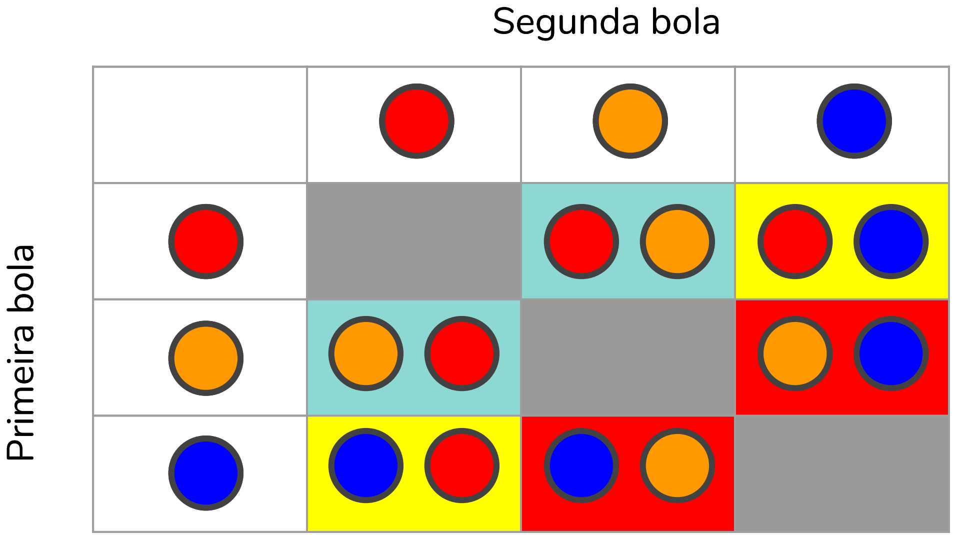
Ordem (não) / reposição (não)

Combinação

Urna com três bolas de cores distintas;

Pegar duas boas.





k-subconjuntos

Subconjuntos de tamanho k;

$$\binom{[n]}{k}$$

Coleção de todos os subconjuntos de tamanho k presentes no conjunto [n] = {1,2, ..., n}

$$\binom{[3]}{1} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

Os diferentes **subconjuntos** correspondem à diferentes combinações.

$$\binom{[3]}{2} = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$$

Interesse: Contar o número de k-subconjuntos em [n].

k-subconjuntos e sequências binárias

$\binom{[n]}{k}$ Coleção de todos os subconjuntos de tamanho k presentes no conjunto [n] = {1,2, ..., n}

	Subconjuntos	**Sequências binárias**
$\binom{[3]}{1}$	{{1}, {2}, {3}}	100, 010, 001
$\binom{[3]}{2}$	{{1,2}, {2,3}, {1,3}}	110, 011, 101
$\binom{[4]}{2}$	{{1,2}, {1,3}, ... , {3,4}}	1100, 1010, ... , 0011

Sequência de n-bits com k-1s

Número de combinações

$$\binom{n}{k} = \left| \binom{[n]}{k} \right|$$ → Coeficiente binomial

$$\binom{3}{2} = \left| \binom{[3]}{2} \right| = |\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}| = 3$$

Número de combinações

$$\binom{3}{2} = \left|\binom{[3]}{2}\right| = |\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}| = 3$$

Número de arranjos $= \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = k!\binom{n}{k}$$

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

perm.	bin.
(1,2)	110
(1,3)	101
(2,1)	110
(2,3)	011
(3,1)	101
(3,2)	011

Permutação de {1,2}

Permutação de {1,3}

Permutação de {2,3}

Exemplos

$$\binom{[3]}{1} = \begin{Bmatrix} 001 \\ 010 \\ 100 \end{Bmatrix} \qquad \binom{3}{1} = \frac{3!}{(3-1)!1!} = 3$$

Escolhendo o 1 em uma das 3 posições

$$\binom{[3]}{2} = \begin{Bmatrix} 011 \\ 101 \\ 110 \end{Bmatrix} \qquad \binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$$

Escolhendo o 0 em uma das 3 posições

$$\binom{[4]}{2} = \begin{Bmatrix} 0011 \\ 0101 \\ 1001 \\ 0110 \\ 1010 \\ 1100 \end{Bmatrix} \qquad \binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$$

Escolhendo as posições dos 1s. Para o 1º há 4 opções, e para o 2º há 3 opções. Cada ordem possui duas formas de escolha.

Exemplos

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n)!0!} = 1$$

000

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(0)!n!} = 1$$

111

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n$$

Posição de um único 1 em uma sequência binária

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Posição de dois 1s em uma sequência binária

Um comitê deve ser composto por 4 pessoas. 7 pessoas estão aptas a compor o comitê. Quantas maneiras diferentes posso formar este comitê?

n = 7, k = 4

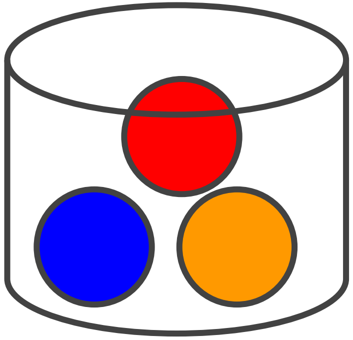
$$C_{7,4} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!4!} = 35$$

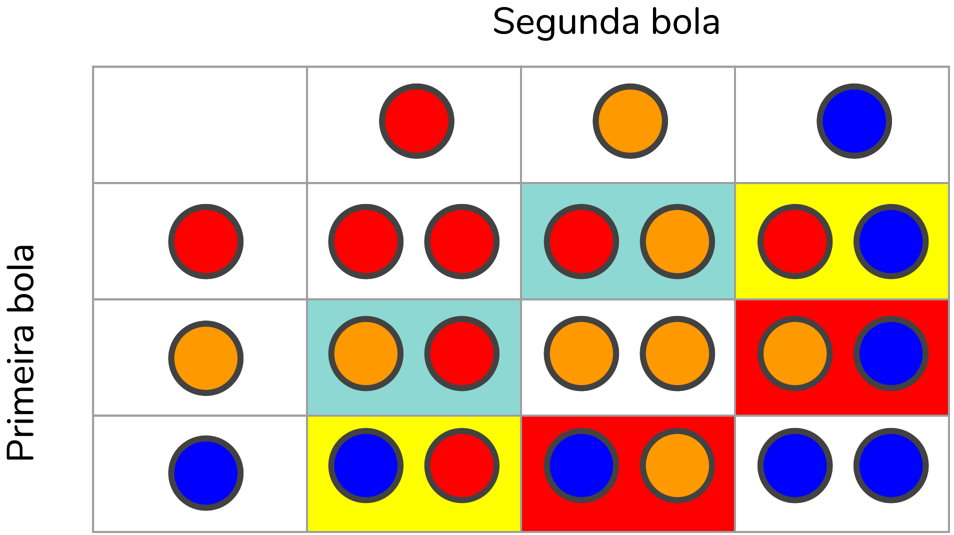
Ordem (não) / reposição (sim)

Multiconjunto

Urna com três bolas de cores distintas;

Pegar duas boas.





Multiconjunto

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = {}^{n+k-1}C_k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Exercícios do notebook

github.com/tetsufmbio/IMD0033/