

Probabilidade

Probabilidade condicional

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto

Instituto Metr pole Digital - UFRN

Sala A224, ramal 182

Email: tetsu@imd.ufrn.br





Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/





Revisão

- Probabilidade condicional
 - $P(E | F) = P(E \cap F) / P(F)$
- Regra do produto
 - $P(E | F)P(F) = P(E \cap F)$
- Independência dos eventos
 - **Independentes** → A ocorrência de um evento **não** altera a probabilidade do segundo evento;
 - **Dependentes** → A ocorrência de um evento altera a probabilidade do segundo evento;



Exemplo



$$P(E \cap F) = P(F|E) \cdot P(E)$$

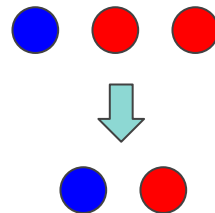
Pegando duas bolas, qual a probabilidade de pegar duas bolas vermelhas?

V_1 = primeira bola vermelha V_2 = segunda bola vermelha;

$$P(\text{duas vermelhas}) = P(V_1 \cap V_2)$$

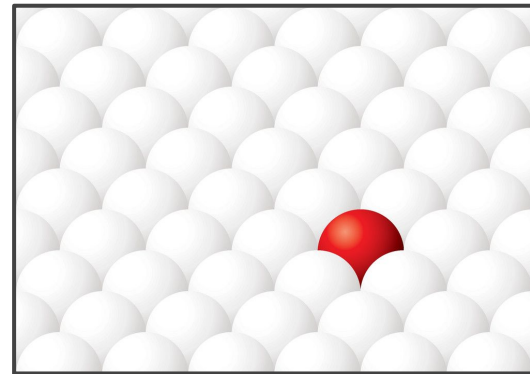
$$P(\text{duas vermelhas}) = P(V_1) \cdot P(V_2 | V_1)$$

$$P(\text{duas vermelhas}) = 2/3 \cdot 1/2 = 1/3$$





Exemplo



1 bola vermelha;

$n - 1$ bolas brancas

Qual a probabilidade da última bola ser vermelha?

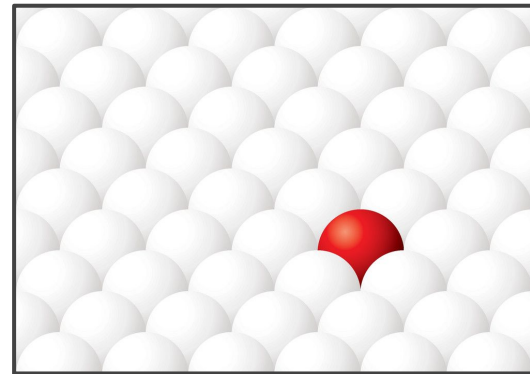


Regra do produto genérico

$$\begin{aligned}P(E \cap F \cap G) &= P((E \cap F) \cap G) \\&= P(X \cap G) \quad X = E \cap F \\&= P(G|X)P(X) \\&= P(G|E \cap F)P(E \cap F) \\&= P(G|E \cap F)P(E|F)P(F)\end{aligned}$$



Exemplo



1 bola vermelha; $n - 1$ bolas brancas; Qual a probabilidade da última bola ser vermelha?

$B_i \rightarrow i$ -ésima bola ser branca, $B_1, B_2, B_3, \dots B_i$,

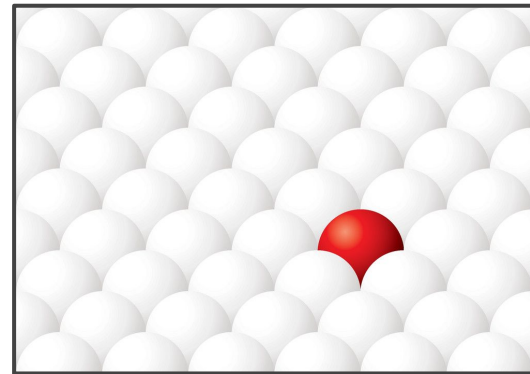
$$P(\text{última bola vermelha}) = P(B_1) * P(B_2|B_1) * P(B_3|B_2) * \dots * P(B_{n-1}|B_{n-2})$$

$$P(\text{última bola vermelha}) = \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{2}$$

$$P(\text{última bola vermelha}) = 1/n$$



Exemplo



1 bola vermelha; $n - 1$ bolas brancas; Qual a probabilidade da última bola ser vermelha?

$V_n \rightarrow$ vermelha como a última bola

$$P(\text{última bola vermelha}) = |V_n| / |\Omega|$$

$$|\Omega| = \binom{n}{1} = n$$

$$P(\text{última bola vermelha}) = 1/n$$



Exemplo: Paradoxo da data de aniversário

Quantas pessoas você deve pegar para que dois deles compartilhem a mesma data de aniversário?

Assuma que:

- Todos os anos tem 365 dias;
- Todos possuem a mesma probabilidade de nascer em qualquer data do ano.



Exemplo: Paradoxo da data de aniversário

Quantas pessoas você deve pegar para que dois deles compartilhem a mesma data de aniversário?

Probabilisticamente falando:

- Escolher n números inteiros $\{1, 2, \dots, 365\}$, com reposição;
- $A(n) \rightarrow$ probabilidade de que dois ou mais tenha a mesma data de nascimento;
- Para qual valor de n , $A(n)$ é acima de $\frac{1}{2}$?



Exemplo: Paradoxo da data de aniversário

Quantas pessoas você deve pegar para que dois deles compartilhem a mesma data de aniversário?

Primeira tentativa:

- Lista de aniversário: 2, 10, 320, 45, ...
- Possíveis datas de aniversário: $\{1, 2, \dots, 365\}$
- Todas as sequências de aniversário possíveis: $\Omega = \{1, 2, \dots, 365\}^n$
 $|\Omega| = 365^n$
- $A_n = \{n \text{ sequências com repetição}\}$
- $P(A_n) = |A_n| / |\Omega|$



Exemplo: Paradoxo da data de aniversário

Quantas pessoas você deve pegar para que dois deles compartilhem a mesma data de aniversário?

Primeira tentativa:

- $A_n = \{n \text{ sequências com repetição}\}$
- $A_n^c = \{n \text{ sequências sem repetição}\}$
- $$P(A_n^c) = \frac{365}{365} \frac{364}{365} \frac{363}{365} \cdots \frac{365-n+2}{365} \frac{365-n+1}{365}$$
- $P(A_n) = 1 - P(A_n^c)$



Exemplo: Paradoxo da data de aniversário

Quantas pessoas você deve pegar para que dois deles compartilhem a mesma data de aniversário?

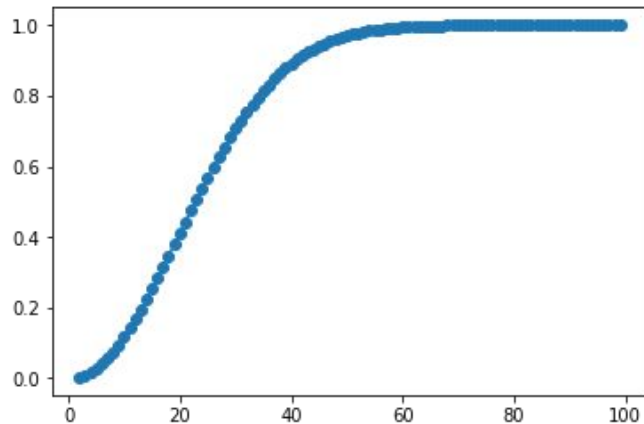
- $A_n = \{n \text{ sequências com repetição}\}$
- $A_n^c = \{n \text{ sequências sem repetição}\}$
- $$P(A_n^c) = \frac{365}{365} \frac{364}{365} \frac{363}{365} \cdots \frac{365-n+2}{365} \frac{365-n+1}{365}$$
- $P(A_n) = 1 - P(A_n^c)$



Exemplo: Paradoxo da data de aniversário

Quantas pessoas você deve pegar para que dois deles compartilhem a mesma data de aniversário?

- $P(A_n) = 1 - P(A_n^c)$





Lei da probabilidade total

Às vezes é mais fácil dividir os eventos em diferentes partes;

Calcular a probabilidade de cada parte;

Somar as probabilidades;

Dividir e conquistar;



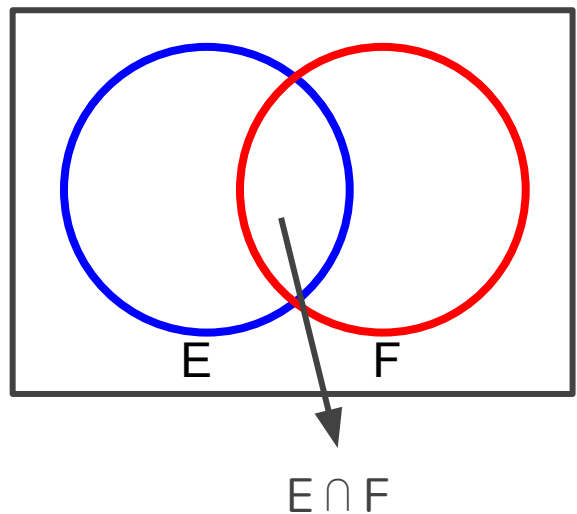
Lei da probabilidade total

Eventos E, F; $P(F) = ?$

$$F = (E \cap F) \cup (E^c \cap F)$$

$$P(F) = P(E \cap F) + P(E^c \cap F)$$

$$P(F) = P(E) * P(F|E) + P(E^c) * P(F|E^c)$$





Lei da probabilidade total

Exemplo: 2 moedas

Ca_i = i-ésima moeda é cara

$\exists Ca$ = cara existe

$P(\exists Ca) = ?$



Lei da probabilidade total

Exemplo: 2 moedas

Ca_i = i-ésima moeda é cara

$\exists Ca$ = cara existe

$$P(\exists Ca) = ?$$

$$P(\exists Ca) = P(Ca_1 \cap \exists Ca) + P(Ca_1^c \cap \exists Ca)$$

$$P(\exists Ca) = P(Ca_1)P(\exists Ca|Ca_1) + P(Ca_1^c)P(\exists Ca|Ca_1^c)$$

$$P(\exists Ca) = \frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$



Lei da probabilidade total

Exemplo: 2 dados

D_i = resultado do i -ésimo dado

$$S = D_1 + D_2$$

$$P(S=5) = ?$$



Lei da probabilidade total

Exemplo: 2 dados

D_i = resultado do i -ésimo dado

$$S = D_1 + D_2$$

$$P(S=5) = ?$$

$$P(S = 5) = \sum_{i=1}^4 P(D_1 = i)P(D_2 = 5 - i | D_1 = i)$$

$$P(S = 5) = \sum_{i=1}^4 P(D_1 = i)P(D_2 = 5 - i)$$

$$P(S = 5) = 4 \cdot \frac{1}{36} = 1/9$$



Lei da probabilidade total

Exercício

Três fábricas produzem 50%, 30% e 20% dos Iphones no mercado. A taxa de iphones com defeito é de 4%, 10% e 5% respectivamente. Qual a probabilidade de você comprar um iphone com defeito?



Lei da probabilidade total

Exercício

Três fábricas produzem 50%, 30% e 20% dos Iphones no mercado. A taxa de iphones com defeito é de 4%, 10% e 5% respectivamente. Qual a probabilidade de você comprar um iphone com defeito?

Resposta: 0.06