Probabilidade

Esperança

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metrópole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br

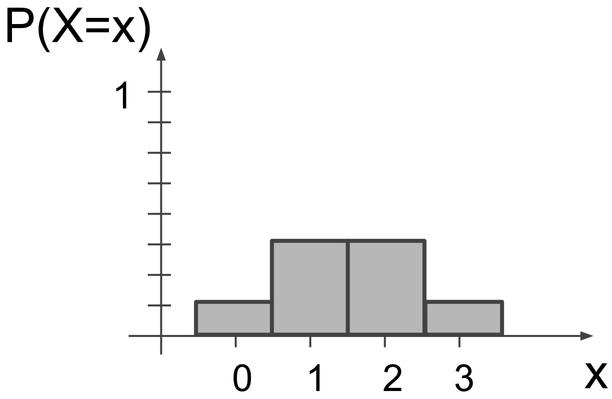
Slides e notebook em:

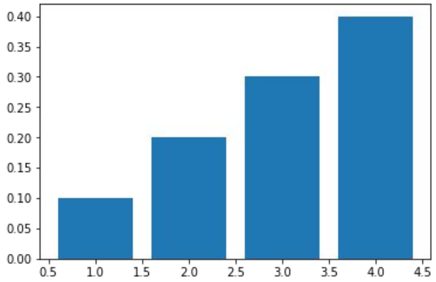
github.com/tetsufmbio/IMD0033/

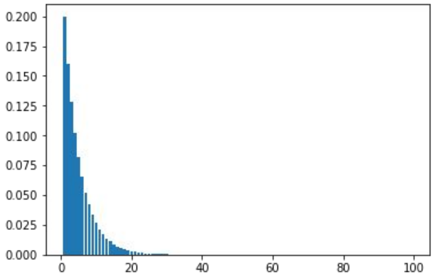
Na aula passada...

- Variáveis aleatórias
  - Discretas;
    - Finita;
    - Infinita;
  - Contínuas;
- Distribuição de probabilidade;
- Função de distribuição acumulada;

Distribuição de probabilidades







A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X contém toda a informação probabilística de X.

Às vezes o interessante é apresentar um valor que descreva esta distribuição.

Propriedades das variáveis aleatórias

- Intervalo de valores;
- Média;
  - Média do intervalo;
  - Média dos elementos;
  - Média amostral.

$$\frac{(x_{min}+x_{max})}{2} = 50$$

$$\frac{(0+90+100)}{3} = 63,3$$

Ω = {0, ..., 100}

p(0) = 0,8
p(90) = 0,1
p(100) = 0,1
p(outros) = 0

{0, 0, 0, 90, 0, 0, 100, 0, 0, 0}

$$\frac{(0*0.8+90*0.1+100*0.1)}{10} = 19$$

Esperança matemática

Valor esperado, expectância

Valor médio "esperado" de um experimento se ele for repetido muitas vezes.

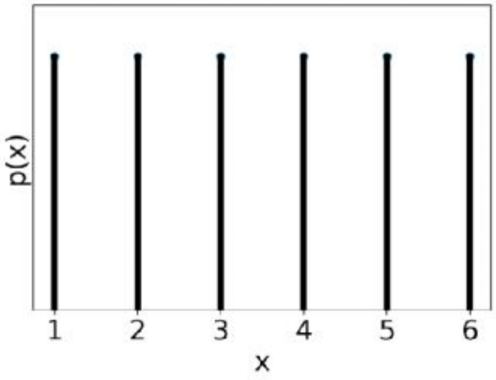
Média dos elementos de um espaço amostral ponderada pelas suas probabilidades.

$E(X)$, EX, μ

Esperança matemática em jogadas de n dados

n ⟶ ∞

Qual é a média dos valores observados?

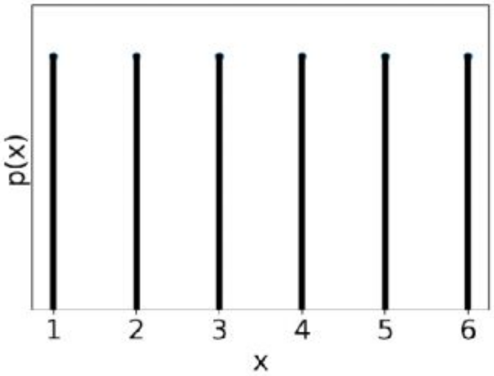


Esperança matemática em jogadas de n dados

$n \longrightarrow \infty$

Qual é a média dos valores observados?

Cada valor aparecerá n/6 vezes.



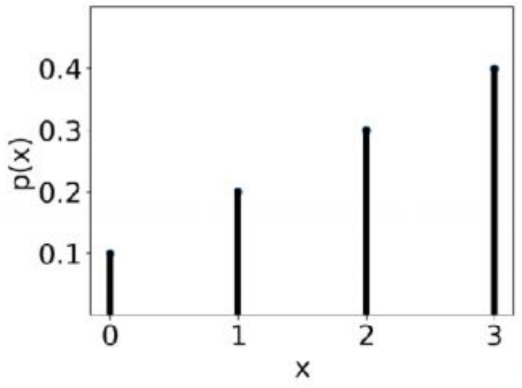
$$\frac{\frac{n}{6}.1+\frac{n}{6}.2+...+\frac{n}{6}.6}{n} \quad \frac{1+2+...+6}{6} = 3.5$$

Esperança matemática em jogadas de n dados

$n \longrightarrow \infty$

Qual é a média dos valores observados?

face	prob
1	0.1
2	0.2
3	0.3
4	0.4

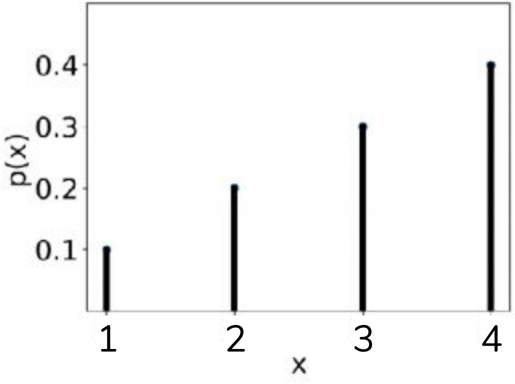


Esperança matemática em jogadas de n dados

$n \longrightarrow \infty$

Qual é a média dos valores observados?

face	prob
1	0.1
2	0.2
3	0.3
4	0.4



$$\frac{0{,}1.n.1+0{,}2.n.2+...+0{,}4.n.4}{n} = 0,1+0,4+\ldots+1,6 = 3$$

Esperança matemática

6 faces $$\frac{\frac{n}{6}.1+\frac{n}{6}.2+...+\frac{n}{6}.6}{n}$$

n ⟶ ∞

4 faces $$\frac{0{,}1.n.1+0{,}2.n.2+...+0{,}4.n.4}{n}$$

$$E(X)=\frac{\sum_x P(X=x).n.x}{n}=\sum_x P(X=x).\,x$$

$$=\sum_x p_x\,.\,x$$

Exemplo:

X = # de exercícios realizados por semana por João

Qual é o número de exercícios médio que João faria em uma dada semana?

x	P(X=x)
0	0,1
1	0,15
2	0,4
3	0,25
4	0,1

Propriedades da esperança matemática

E(X) → apesar da notação...

$$E(X) = 1,5$$

- Não é uma função;
- Não é um número aleatório;
- Ele é uma constante;
- Uma propriedade de uma variável aleatória.

$$x_{min} \leq E(X) \leq x_{max}$$

Se X é uma constante c, então E(X) = c;

E(E(X)) = E(X)

O valor esperado é esperado?

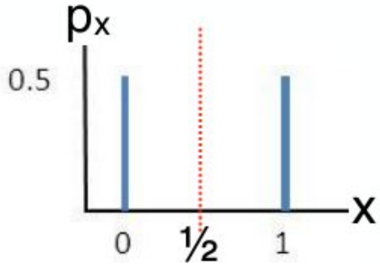
Se $\mu = E(X)$, p_μ é alto?

Não necessariamente...

$X \in \{0, 1\}$

$P_0 = P_1 = 0,5$

$E(X) = 0,5.0 + 0,5.1 = 0,5$



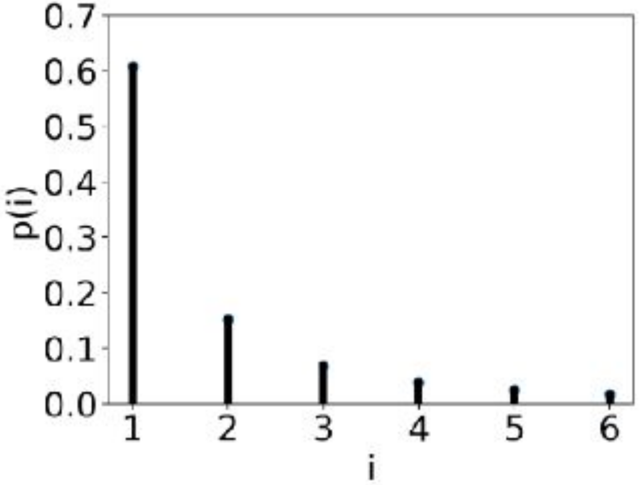
0,5 nunca ocorrerá...

0,5 é a média dos resultados após várias repetições do experimento

Esperança em uma distribuição discreta e infinita

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

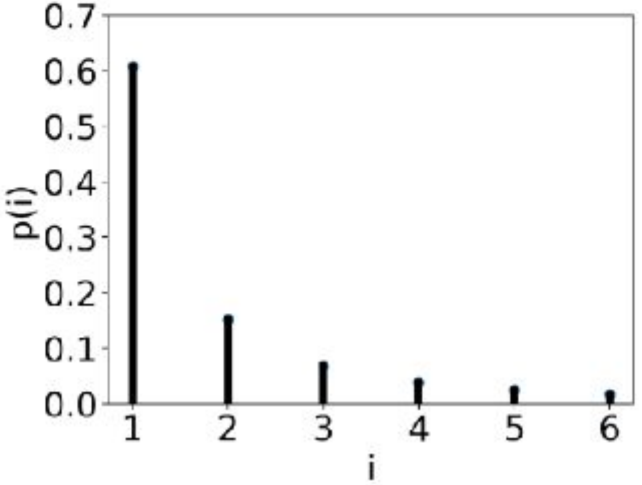
Problema de Basileia



Esperança em uma distribuição discreta e infinita

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Problema de Basileia



$$\frac{6}{\pi^2} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = 1$$

$$p_x = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{x^2},\ x > 0$$

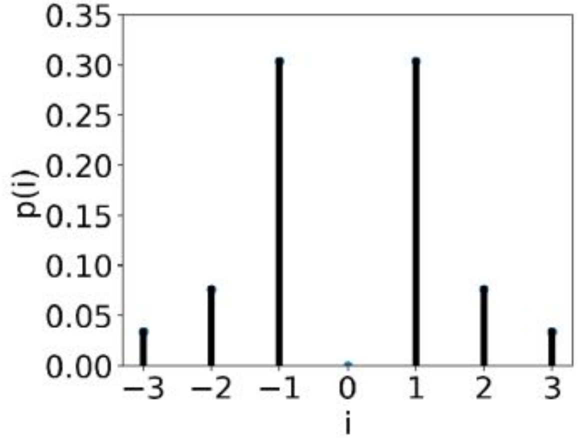
$$E(X) = \sum_x p_x \, . \, x$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x$$

$$\frac{6}{\pi^2} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x} = \infty$$

Esperança em uma distribuição discreta e infinita

$$p_x = \frac{3}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2^x},\ x \neq 0$$



$$E(X) = \sum_x p_x \cdot x$$

$$E(X) = \infty - \infty$$

Esperança indefinida

Exercício

Um participante de um show de quiz tem duas perguntas a sua frente, questão 1 e questão 2. Ele pode escolher uma das perguntas para responder primeiro. Se ele responder a primeira pergunta selecionada errada, ele não poderá responder a segunda questão. Se os prêmios caso ele responda corretamente as questões 1 e 2 são respectivamente R$200 e R$100, e o participante possui 60% e 80% de certeza de responder corretamente as questões 1 e 2, qual das questões ele deve responder primeiramente para maximizar o prêmio esperado?

Modificações nas variáveis aleatórias

Variáveis aleatórios X assumem um valor em R;

Frequentemente temos interesse em analisar uma segunda variável relacionada ao X ($Y = g(X)$)

- Adição por uma constante $\rightarrow Y = X + 10$;
- Multiplicação por uma constante $\rightarrow Y = 1.1X$;
- Exponencial $\rightarrow Y = X^2$.

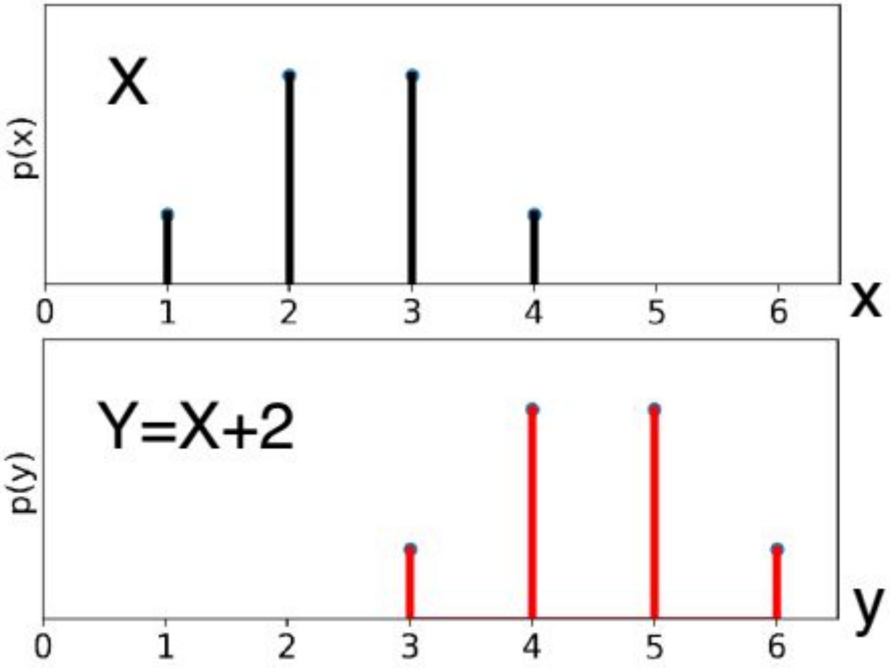
Adição por uma constante (Tradução)

Adição por uma constante **b**:

$Y = X + b$

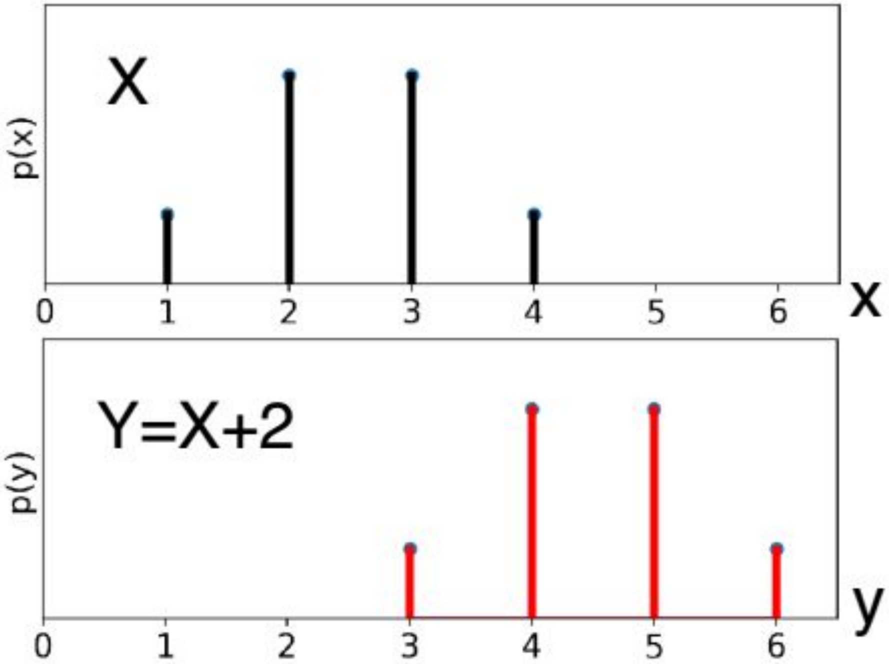
$P(Y = y) \; = P(X+b = y)$

$\qquad\qquad\; = P(X = y - b)$



Adição por uma constante (Tradução)

E(Y) = E(X+b)



Adição por uma constante (Tradução)

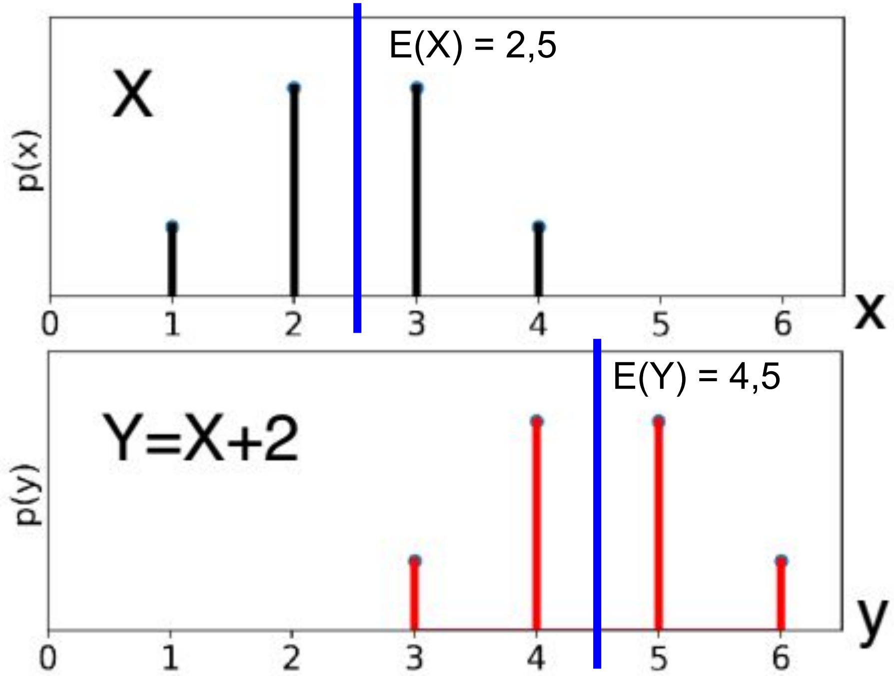
$E(Y) = E(X+b)$

$= \sum(p_x).(x+b)$

$= \sum(p_x.x)+\sum(p_x.b)$

$= \sum(p_x.x)+b\sum(p_x)$

$= E(X)+b$



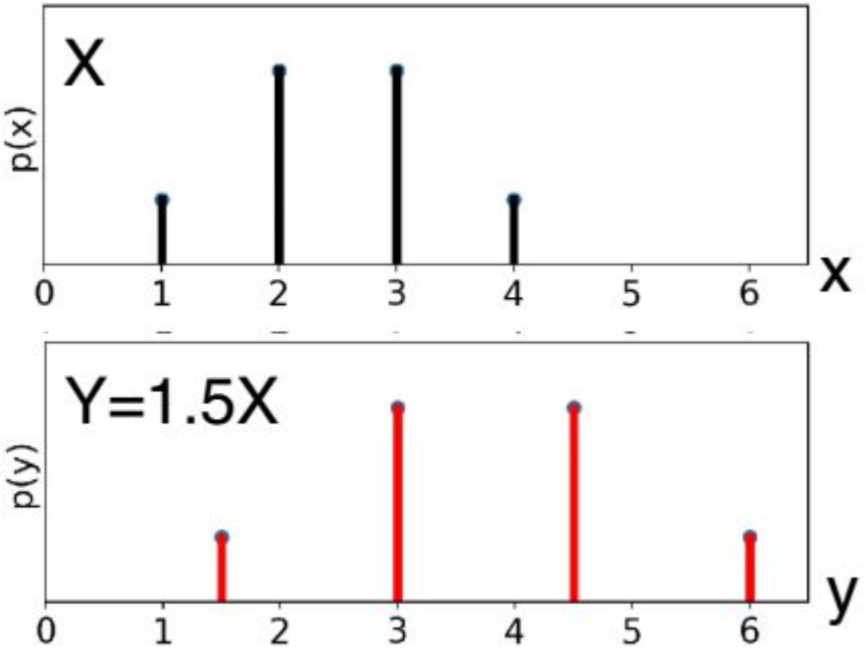
Multiplicação por uma constante (dimensionamento)

Multiplicação por uma constante **b**:

$Y = bX$

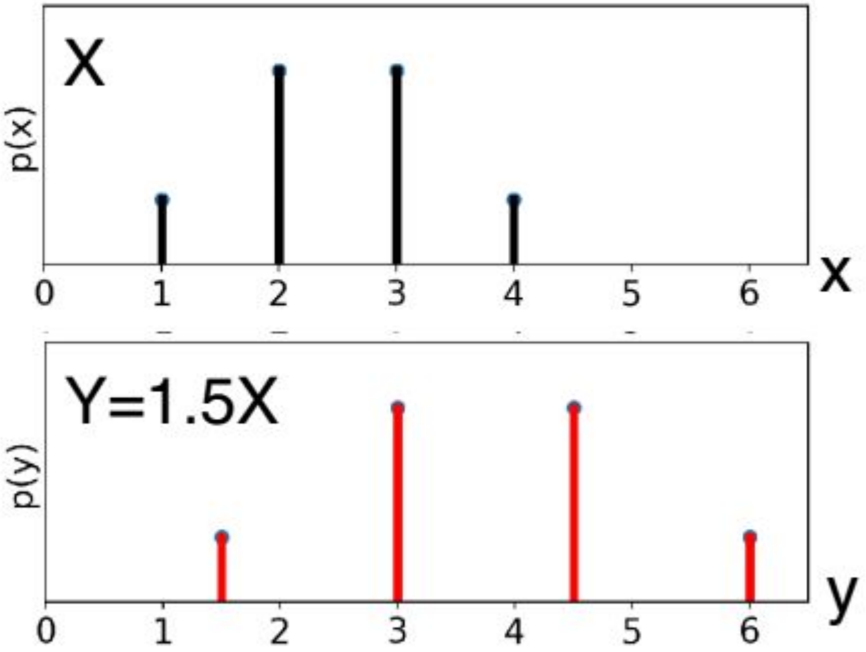
$P(Y = y) = P(bX = y)$

$= P(X = y/b)$



Multiplicação por uma constante (dimensionamento)

$E(Y) = E(bX)$



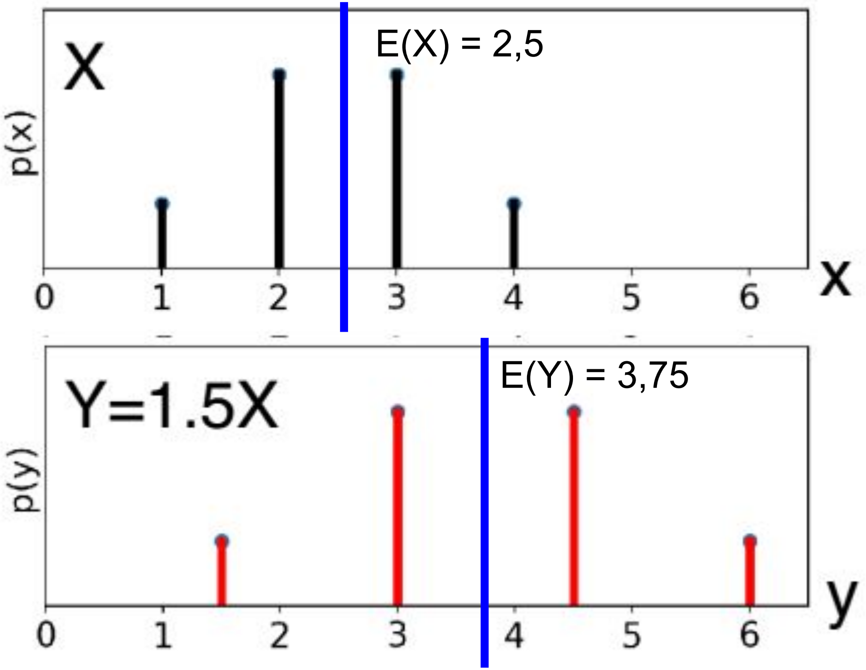
Multiplicação por uma constante (dimensionamento)

$E(Y) = E(bX)$

$= \sum(p_x).(xb)$

$= b\sum(p_x).(x)$

$= bE(X)$



Exponencial

1 para 1

X

x	0	1	2
P(X=x)	½	⅓	⅙

$Y = X^2$

y	0	1	4
P(Y=y)	½	⅓	⅙

muitos para 1

X

x	-2	-1	0	1	2
P(X=x)	⅕	⅕	⅕	⅕	⅕

$Y = X^2$

y	0	1	4
P(Y=y)	⅕	⅖	⅖

Revisão

Esperança matemática

- Valor médio “esperado” de um experimento se ele for repetido muitas vezes.
- Média dos elementos de um espaço amostral ponderada pelas suas probabilidades.