1. *Três diferentes classes contêm 20, 18 e 25 estudantes, respectivamente e nenhum estudante é membro de mais de uma classe. Se um time deve ser composto por um estudante de cada classe, de quantas maneiras diferentes podemos formar esse time?*

Resposta: Os membros dos grupo devem ser compostos por alunos das três diferentes classes. Como a ordem com que esses alunos não importa e cada membro do grupo deve ser escolhido de diferentes classes, então podemos calcular as diferentes formas de compor esse grupo utilizando o princípio fundamental da contagem.

20 * 18 * 25

2. *Se quatro dados são jogados, qual a probabilidade de todos os números dos dados terem números distintos?*

Resposta: Cada jogada de dado representa um experimento independente, o que seria semelhante a um experimento com reposição. Podemos resolver este problema considerando a ordem com que os dados foram jogados. O número de possíveis resultados do dado (Omega) pode ser calculado como:

|Omega| = 6^4

E o número de diferentes resultados que possuem todos os dados com números diferentes (evento A) como sendo:

|A| = $A_{6,4}$ = 6!/(6-4)!

Logo, a probabilidade de se obter dados com diferentes números seria:

P(A) = |A|/|Omega| = 6!/(2!6^4)

3. *Se seis dados são jogados, qual a probabilidade de todos os números dos dados terem números distintos?*

Resposta: Podemos resolver este exercício de forma similar ao exercício 2:

|Omega| = 6^6

|A| = $A_{6,6}$ = P_6 = 6!

P(A) = |A|/|Omega| = 6!/6^6

4. Se 12 bolas são jogados de forma aleatória em 20 caixas, qual a probabilidade de nenhuma caixa receber mais de uma bola?

Resposta: Vamos considerar que as caixas estão enumeradas e que as 12 bolas podem entrar em uma das 20 caixas. Então, o número de possíveis resultados dessa jogada (|Omega|) pode ser calculado como:

$|Omega| = 20^{12}$

Como a probabilidade que queremos calcular é a de que nenhuma caixa tenha duas ou mais bolas (evento A), o número de resultados possíveis pode ser calculado utilizando arranjos:

$|A| = A_{20,12} = 20!/(20-12)!$

Portanto, a probabilidade de A seria:

$P(A) = P(A) = |A|/|Omega| = 20!/(8!20^{12})$

5. *Suponha que três corredores do time A e três corredores do time B participam de uma corrida. Se todos os seis corredores possuem a mesma habilidade e não existe empate, qual a probabilidade dos três corredores do time A ocuparem os três primeiros lugares e os três corredores do time B ocuparem os três últimos lugares?*

Neste problema temos 6 posições que devem ser ocupados por três membros do time A e três membros do time B. Um dos resultados possíveis seria este:

A A B A B B

O número de formas possíveis que posso dispor estas pessoas (|Omega|) pode ser calculado usando combinação:

$|Omega| = C_{6,3} = 6!/(3!3!)$

O número de combinações onde todos os corredores do time A ocupam o primeiro lugar (evento A) é apenas 1, que seria:

A A A B B B

Então, a probabilidade de A seria:

$P(A) = |A|/|Omega| = 1/(6!/(3!3!)) = 3!3!/6!$

6. *Se k pessoas estão sentadas em uma fileira contendo n cadeiras, onde n > k, qual a probabilidade dessas pessoas ocuparem k cadeiras adjacentes?*

Se temos n cadeiras e k pessoas, onde n > k, as diferentes formas que podemos dispor as pessoas, independente da ordem das pessoas, (|Omega|) seria:

$|Omega| = C_{n,k}$

Se eu quero que as k pessoas ocupem k cadeiras adjacentes (evento A), em um espaço que tem n posições, posso juntar k posições e considerá-la como um espaço. Então, nesse caso tenho n-k+1 espaços. Considerando n = 4 e k = 2, por exemplo:

_ _ _ _ (quatro espaços para preencher)

_ __ _ (se eu juntar k espaços (2), tenho n - k + 1 espaços (3))

Basta agora verificar quantas posições as k pessoas juntas podem se posicionar em n - k + 1 espaço. Isso seria:

$|A| = C_{n-k+1,1}$

Então, a probabilidade de A seria:

$P(A) = C_{n-k+1,1} / C_{n,k}$

7. *Se n pessoas estão sentadas de forma aleatória em uma fileira contendo 2n cadeiras, qual a probabilidade de que não haja cadeiras adjacentes ocupadas?*

Calculando primeiramente o número de formas que n pessoas podem se dispor em 2n cadeiras (|Omega|), temos:

$|Omega| = C_{2n,n}$

Considerando um caso simples, onde n = 2, então nós temos 4 espaços que devem ser preenchidas por duas pessoas, Nós temos $C_{4,2}$ = 6 combinações no total. Considerando 1 como espaço ocupado e 0 como espaço vazio, estas 6 combinações seriam:

1100

1010

1001

0110

0101

0011

Para que não haja cadeiras adjacentes ocupadas, então entre cada uma das pessoas deve existir um espaço vago. Podemos esquematizar isso desta forma:

1 0 1

Agora só falta posicionar um espaço vago e ela poderia estar antes do primeiro 1, depois do segundo 1 ou junto com o 0:

0 1 0 1 (antes do primeiro 1)

1 0 1 **0** (depois do primeiro 1)

1 **0** 0 1 (junto com o zero)

O número de diferentes posições que o 0 pode se posicionar seria:

$C_{3,1} = 3$

Se aplicarmos isso para diferentes valores de n, logo podemos perceber que em todos os casos teremos que calcular de quantas formas um 0 poderia se posicionar em n+1 espaços. Então, de forma genérica, o número combinações onde não há cadeiras adjacentes ocupados seria:

$C_{n+1,1} = n + 1$

Então, a probabilidade de A seria:

$P(A) = |A|/|Omega| = (n + 1)/ C_{2n,n}$

8. *Suponha que um comitê de 12 pessoas será montado de forma aleatória de um grupo de 100 pessoas. Determine a probabilidade de duas pessoas em particular (A e B) sejam ambas selecionadas.*

Existem duas formas de calcular essa probabilidade, primeiro considerando a ordem e segundo não considerando a ordem.

Se eu não considerar a ordem, que de fato é o caso, o número de combinações diferentes que podemos formar nesse comitê (|Omega|) corresponde a $C_{100,12}$:

$|Omega| = C_{100,12} = 100!/(12!88!)$

O número de combinações de comitê onde as pessoas A e B estão presentes (evento A) corresponde a $C_{98,10}$, já que dois espaços já estão ocupadas por A e B. Portanto:

$|A| = C_{98,10} = 98!/(10!88!)$

Então, a probabilidade de A seria:

$P(A) = P(A) = |A|/|Omega| = (98!/(10!88!)) / (100!/(12!88!))$

A segunda forma de calcular esta probabilidade é considerando a ordem com que as pessoas são escolhidos. Neste caso, o número de resultados distintos que podemos ter deve ser calculado com arranjos:

$|Omega| = A_{100,12} = 100!/(100 - 12)!$

Com relação ao número de resultados onde as pessoas A e B estão presentes no comitê, primeiramente devemos calcular o número de combinações que podemos posicionar duas pessoas em 12 espaços. Isso pode ser calculado usando combinações:

$C_{12,2} = 12!/(2!(12-2)!)$

Uma das combinações possíveis seria:

1 1 _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Para cada combinação calculada acima, podemos dispor as pessoas A e B de duas maneiras, Por exemplo, para a combinação exemplificada acima podemos dispor A e B das seguintes maneiras:

A B _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

B A _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Que no caso corresponde a $P_2 = 2!$

E para cada combinação, podemos dispor as 98 pessoas nos 10 espaços restantes de $A_{98,10}$ maneiras:

$A_{98,10} = 98!/(98 - 10)!$

Então, |A| seria:

$|A| = 2*C_{12,2}*A_{98,10} = 2 * 12!/(2!(12-2)!) * 98!/88!$

A probabilidade de A então seria:

$P(A) = 2 * 12!/(2!(12-2)!) * 98!/(10!88!) / 100!/(100-12)!$

Reparem que as probabilidades calculadas das duas maneiras possuem os mesmos valores.

9. *Uma caixa contém 24 lâmpadas nas quais quatro são defeituosas. Se uma pessoa seleciona 10 lâmpadas da caixa de forma aleatória, e depois uma segunda pessoa pega as lâmpadas restantes, qual é a probabilidade de que todas as quatro lâmpadas defeituosas estejam com a mesma pessoa?*

Para calcularmos este problema, primeiramente vamos calcular os possíveis resultados (|Omega|). Neste caso, nós temos 24 posições onde nós queremos posicionar 4 lâmpadas que são defeituosas. Podemos calcular este valor usando combinação:

|Omega| = $C_{24,4}$ = 24!/(4!(24 - 4)!)

Agora vamos calcular a probabilidade da primeira pessoa pegar as quatro lâmpadas defeituosas (evento A). Como esta pessoa vai pegar 10 lâmpadas, então basta calcular como estas quatro lâmpadas defeituosas podem se dispor nos 10 espaços usando combinação:

|A| = $C_{10,4}$ = 10!(4!(10 - 4)!)

Agora vamos calcular a probabilidade da segunda pessoa pegar as quatro lâmpadas defeituosas (evento B). Como esta pessoa vai pegar 14 lâmpadas, então basta calcular como estas quatro lâmpadas defeituosas podem se dispor nos 14 espaços usando combinação:

|B| = $C_{14,4}$ = 14!(4!(14 - 4)!)

O número de possíveis resultados onde uma das duas pessoas pegaram as 4 lâmpadas defeituosas (evento C) seria a soma do tamanho dos dois eventos calculados acima (|A|+|B|), então temos que:

|C| = |A|+|B| = 10!(4!(10 - 4)!) + 14!(4!(14 - 4)!)

Então a probabilidade de C seria:

P(C) = |C|/|Omega| = (10!(4!(10 - 4)!) + 14!(4!(14 - 4)!))/ 24!/(4!(24 - 4)!)

Você pode tentar calcular essa probabilidade considerando a ordem também usando arranjos e permutações.

10. *Um baralho contendo 52 cartas contém quatro Ás. Se as cartas são embaralhadas e distribuídas de forma aleatória para quatro jogadores de forma que cada jogador receba 13 cartas, qual a probabilidade de todos os quatro Ases estejam com um único jogador?*

Nós temos 52 cartas que são igualmente distribuídos para os 4 jogadores. O número de formas como essas cartas são distribuídas, sem considerar os naipes (a ordem) dos ases, pode ser calculada usando combinação:

|Omega| = $C_{52,4}$ = 52!/4!(52 - 4)!

Um jogador recebe 13 cartas, o número de maneiras que os quatro ases podem se dispor nas 13 posições (evento A) seria:

|A| = $C_{13,4}$ = 13!/4!(13-4)!

Como queremos saber a probabilidade de um dos quatro jogadores terem os quatro ases (evento B), então:

|B| = 4*|A|

Portanto, a probabilidade de B seria:

P(B) = |B|/|Omega| = (4 * 13!/4!(13-4)!) / 52!/4!(52 - 4)!

11. *Se a probabilidade do estudante A não passar na prova de estatística é de 0,5, a probabilidade do estudante B não passar é de 0,2, e a probabilidade dos dois estudantes A e B não passarem é de 0,1, qual a probabilidade de pelo menos um dos estudantes não passarem na prova?*

Resposta: Pelo enunciado:

A: A passar na prova

B: B passar na prova

$P(A^c) = 0,5$

$P(B^c) = 0,2$

$P(A^c \cap B^c) = 0,1$

$P(A^c U B^c) = ?$

$P(A^c U B^c) = P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c) = 0,6$

12. *Considerando o exercício 15, qual a probabilidade de nenhum dos dois estudantes não passarem na prova?*

$P(A \cap B) = 1 - P(A^c U B^c) = 0,4$

13. *Considerando o exercício 15, qual a probabilidade de exatamente um dos dois estudantes não passarem na prova?*

$P(A^c \Delta B^c) = P(A^c U B^c) - P(A^c \cap B^c) = 0,5$