

Probabilidade

Variáveis aleatórias

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto

Instituto Metrópole Digital - UFRN

Sala A224, ramal 182

Email: tetsu@imd.ufrn.br





Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/





Na aula passada

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$$

Até agora...



$P(\text{Cara})$ ou $P(\text{Coroa})$

$P(A K Q J 10)$

$P(\text{ } \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet\bullet & \bullet\bullet \\ \hline \bullet\bullet & \bullet\bullet \\ \hline \end{array})$

Variáveis aleatórias

Formal:

- Função que mapeia o espaço amostral em números reais

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Resultado de um processo aleatório é expresso na forma de um número.



Exemplo: jogada de 10 moedas

$$\Omega = \{\text{HHHHHHHHHH}, \text{HHHHHHHHHHT}, \dots\}$$

$$|\Omega| = 2^{10}$$

X = variável aleatória que denota o número de caras;

$$s = \text{HHTHHTHHHT}$$

$$X(s) = 7$$

Números em alguns experimentos passado...



- Resultado de um dado ($\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$)
- Número de caras depois de três jogadas de moeda ($\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$)
- Valor da peça de dominó ($\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$)

Não utilizamos as características numéricas \rightarrow extensivamente



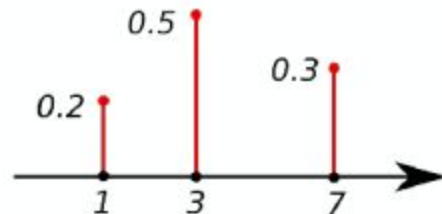
Trabalhando com números

Distribuição
 $P(x)$

Verificar no eixo

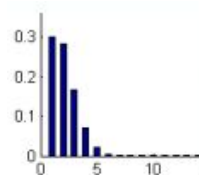
Expressar na forma de
uma função

Verificar propriedades



$$P(x) = 1/x^2$$

Decrescente, crescente,
concentrado



Variáveis
aleatórios
 X

Realizar operações

Combinar variáveis

Verificar propriedades

$$X+1$$

$$X^2$$

$$X+Y$$

Média do valor de X



Tipos de variáveis aleatórias

Depende dos valores que uma variável aleatória pode assumir:

- Se X pode assumir um número finito de valores $\{1,2,3\} \rightarrow$ **Discreta**;
- Se X pode assumir infinitos valores, mas contável $\{N\}, \{Z\} \rightarrow$ **Discreta**
- Se X pode assumir infinitos valores não contáveis $[0,2], \{R\} \rightarrow$ **Contínuas**;



Exemplos

$X = \{\text{cara} = 0, \text{coroa} = 1\}$ **Discreto**

$Y = \{\text{peso de um animal no zoo de SP}\}$ **Contínuo**

$Z = \{\# \text{ de formigas que nascerá amanhã}\}$ **Discreto**

$W = \{\text{ano de nascimento de um eleitor}\}$ **Discreto**

$A = \{\text{tempo total para completar uma corrida de 100m}\}$ **Contínuo**

$B = \{\text{tempo total para completar uma corrida de 100m em segundos}\}$
Discreto



Exemplo: jogada de três moedas

$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

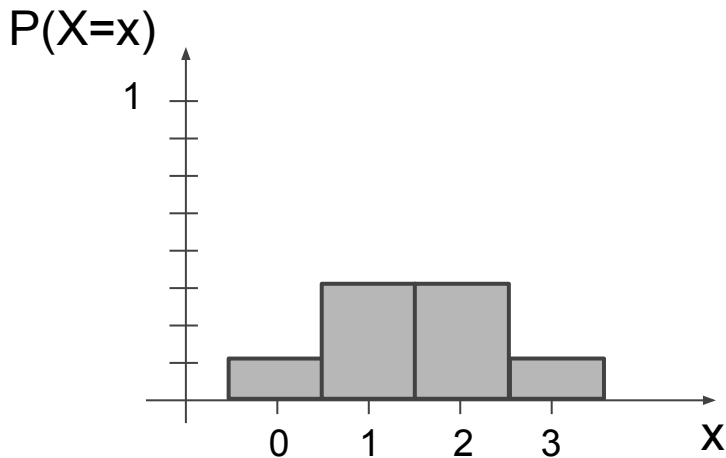
$X = \{\# \text{ de caras (H) depois de jogar 3 moedas}\}$

$$P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{8}$$





Especificando as probabilidades



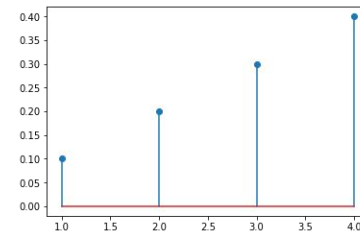
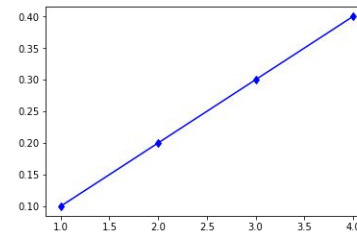
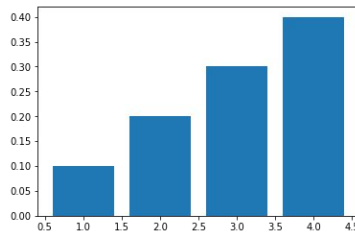
Podemos especificar as probabilidades de várias formas:

- Explícita: $P(1) = 0.1$, $P(2)=0.2$, $P(3)=0.3$, $P(4)=0.4$
- Tabela:

x	1	2	3	4
P(X=x)	0.1	0.2	0.3	0.4

Mas com números, podemos especificar as probabilidades de outras formas:

- Função $\rightarrow P(X=x) = x/10$, $x \in \{1,2,3,4\}$
- Gráficos





Função Massa de Probabilidade



$P(X=x) = x/10, x \in \{1,2,3,4\} \rightarrow$ **Função Massa de Probabilidade**

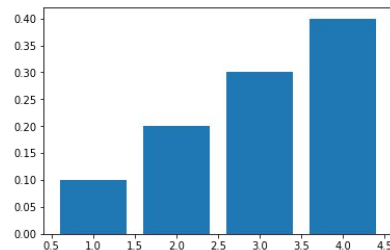
FMP \rightarrow função que mapeia os elementos de uma variável aleatória a um valor de probabilidade;

Quando você acessa as probabilidades de todos os valores de uma variável aleatória \rightarrow **Distribuição de probabilidade;**

Axiomas da teoria da probabilidade:

$$P(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$$

$$\sum_{x \in \Omega} P(x) = 1$$





Tipos de distribuição de probabilidade discreto

Finito $\rightarrow |\Omega| = n \in \mathbb{P}$

Infinito $\rightarrow |\Omega| = \infty = \aleph_0$



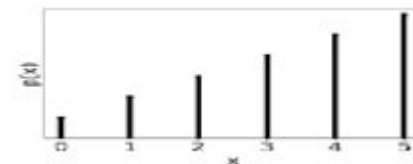
Distribuição de probabilidade discreta finita

$$|\Omega| = n \quad P(x) \geq 0, \forall x \in \Omega \quad \sum_{x \in \Omega} P(x) = 1$$

Uniforme: $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n$

Crescente: $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$

Decrescente: $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$





Distribuição de probabilidade discreta infinita

$$|\Omega| = \infty$$

Infinito em uma direção: $p_1, p_2, p_3 \dots$

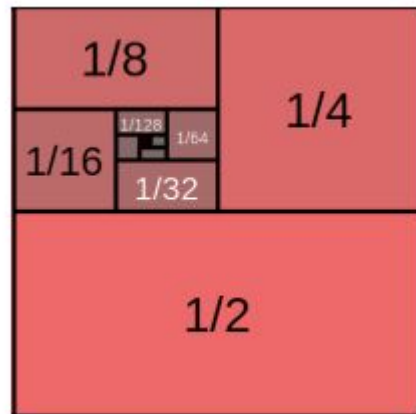
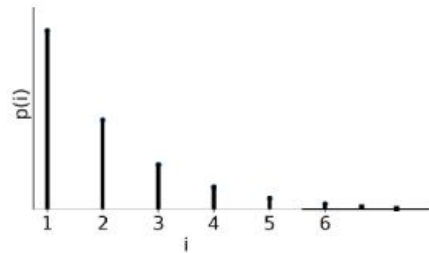
Não pode ser uniforme $p=0 \rightarrow \sum = 0$, $p > 0 \rightarrow \sum = \infty$

Não pode ser crescente: $p_i > 0 \rightarrow p_{i+1}, p_{i+2}, \dots > 0 \rightarrow \sum = \infty$

Pode ser decrescente: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}$ $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$

Infinito nas duas direções: $\dots, p_{-2}, p_{-1}, p_0, p_1, p_2, \dots$

$\dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$





Exemplo:

João planeja comprar um pacote de figurinhas até ele conseguir a figurinha que ele quer. Suponha que cada pacote tenha 0,2 de probabilidade de conter a figurinha que João deseja.

Sendo a variável aleatória X o número de pacotes de cartões que João comprar, segue a distribuição de probabilidade para X :

$X = \{\text{\# de pacotes}\}$	1	2	3	...
$P(X)$	0,2	0,16	0,128	...

Escreva a Função Massa de Probabilidade para este problema.



Exemplo:

João planeja comprar um pacote de figurinhas até ele conseguir a figurinha que ele quer. Suponha que cada pacote tenha 0,2 de probabilidade de conter a figurinha que João deseja.

Sendo a variável aleatória X o número de pacotes de cartões que João comprar, segue a distribuição de probabilidade para X :

$X = \{\text{\# de pacotes}\}$	1	2	3	...
$P(X)$	0,2	0,16	0,128	...

Represente a distribuição de probabilidades na forma de um gráfico.



Exemplo:

João planeja comprar um pacote de figurinhas até ele conseguir a figurinha que ele quer. Suponha que cada pacote tenha 0,2 de probabilidade de conter a figurinha que João deseja.

Sendo a variável aleatória X o número de pacotes de cartões que João comprar, segue a distribuição de probabilidade para X :

$X = \{\text{\# de pacotes}\}$	1	2	3	...
$P(X=x)$	0,2	0,16	0,128	...

Calcule $P(X \leq 1)$, $P(X \leq 2)$ e $P(X \leq 3)$;

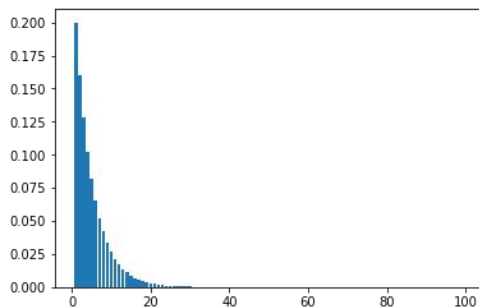


Distribuição acumulada de probabilidade

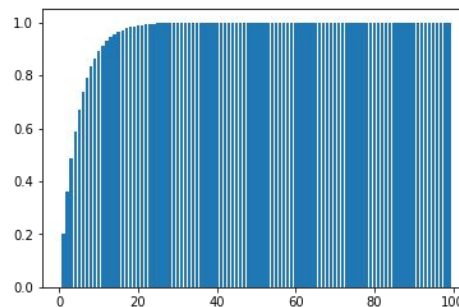
$$F(x) = P(X \leq x) \\ = \sum_{u \leq x} p(u)$$

X = {# de pacotes}	1	2	3	...
P(X=x)	0,2	0,16	0,128	...
P(X≤x)	0,2	0,36	0,488	...

Distribuição de probabilidades



Distribuição acumulada de probabilidades





Exemplo:

João planeja comprar um pacote de figurinhas até ele conseguir a figurinha que ele quer. Suponha que cada pacote tenha 0,2 de probabilidade de conter a figurinha que João deseja.

Sendo a variável aleatória X o número de pacotes de cartões que João comprar, segue a distribuição de probabilidade para X :

$X = \{\text{\# de pacotes}\}$	1	2	3	...
$P(X=x)$	0,2	0,16	0,128	...

Escreva a Função Distribuição Acumulada de Probabilidade para este problema.



Exemplo:

João planeja comprar um pacote de figurinhas até ele conseguir a figurinha que ele quer. Suponha que cada pacote tenha 0,2 de probabilidade de conter a figurinha que João deseja.

Sendo a variável aleatória X o número de pacotes de cartões que João comprar, segue a distribuição de probabilidade para X :

$X = \{\text{\# de pacotes}\}$	1	2	3	...
$P(X=x)$	0,2	0,16	0,128	...

Represente a Distribuição Acumulada de Probabilidade na forma de um gráfico.



Exemplo:

João planeja comprar um pacote de figurinhas até ele conseguir a figurinha que ele quer. Suponha que cada pacote tenha 0,2 de probabilidade de conter a figurinha que João deseja.

Sendo a variável aleatória X o número de pacotes de cartões que João comprar, segue a distribuição de probabilidade para X :

$X = \{\# \text{ de pacotes}\}$	1	2	3	...
$P(X=x)$	0,2	0,16	0,128	...

João quer comprar um número de pacotes de forma que ele teria mais de 90% de chance dele conseguir a figurinha que quer. Quantos pacotes ele deve comprar?



Revisão

- Variáveis aleatórias
 - Discretas;
 - Finita;
 - Infinita;
 - Contínuas;
- Distribuição de probabilidade;
- Função acumulada de probabilidade.