Probabilidade

Probabilidade condicional

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metrópole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br

Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/

Motivação

- Probabilidade de um resultado ou um evento;
- Conhecimento parcial de uma informação;
- Obter melhores estimativas e verificar como esta informação modifica a probabilidade de um evento;

Exemplo:

- Consumo de produto
  - Gênero;
- Tráfico para a praia
  - Altas temperaturas;

Probabilidade condicional

E, F ⇒ Eventos

P(E | F) = Probabilidade de E acontecer dado que F aconteceu;

- P(comprar + 3 peças | cliente feminino)
- P(tráfico intenso | temperatura alta)

Dado justo

P(2) = ?

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right\}$$

Dado justo

$P(2) = \frac{1}{6}$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right\}$$

Dado justo

$P(2) = \frac{1}{6}$

$P(2 \mid par) = ?$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right\}$$

Dado justo

P(2) = ⅙

P(2 | par) = ⅓

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right\}$$

Dado justo

$P(2) = \frac{1}{6}$

$P(2 \mid \text{par}) = \frac{1}{3}$

$P(2 \mid \text{ímpar}) = ?$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right\}$$

Dado justo

$P(2) = \frac{1}{6}$

$P(2 \mid \text{par}) = \frac{1}{3}$

$P(2 \mid \text{ímpar}) = 0$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array} \right\}$$

Probabilidade condicional em eventos em geral (distribuição uniforme)

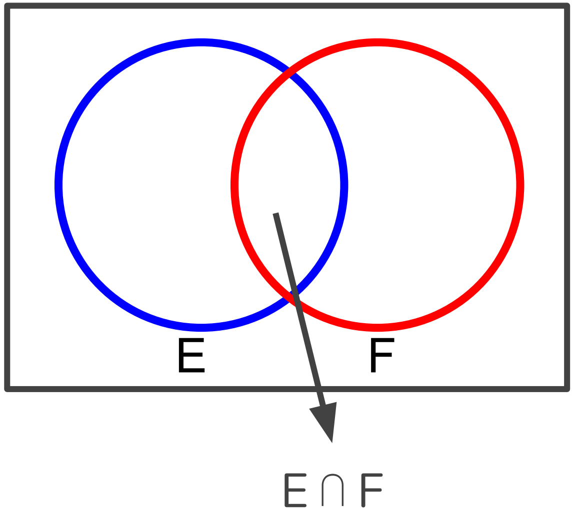
$$P(F \mid E) = P(X \in F \mid X \in E)$$

$$= P(X \in F \cap X \in E \mid X \in E)$$

$$= P(X \in F \cap E \mid X \in E)$$

$$= P(F \cap E) \,/\, P(E)$$

$$= |E \cap F| \,/\, |E|$$



Dado justo

$P(4) = \frac{1}{6}$

$P(4 \mid \geq 3) = ?$

$P(4 \mid \leq 3) = ?$

Dado justo

$P(4) = \frac{1}{6}$

$P(4 \mid \geq 3) = P(4 \mid \{3, 4, 5, 6\}) = \frac{1}{4}$

$P(4 \mid \leq 3) = P(4 \mid \{1, 2, 3\}) = 0/3 = 0$

Dado justo

$P(\leq 2) = P(\{1,2\}) = 2/6 = 1/3$

$P(\leq 2 \mid \leq 4) = ?$

$P(\leq 2 \mid \geq 2) = ?$

Dado justo

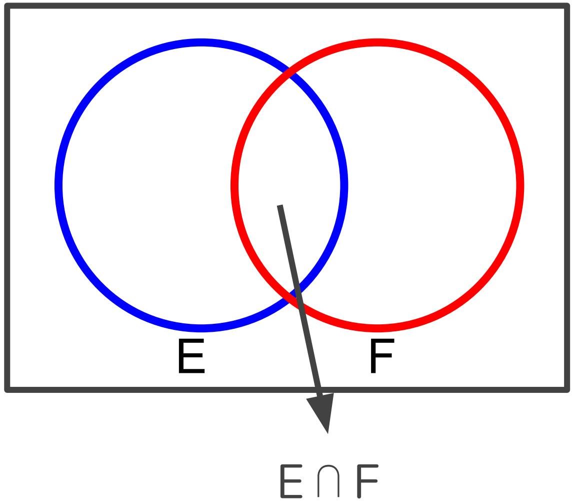
$P(\leq 2) = P(\{1,2\}) = 2/6 = 1/3$

$P(\leq 2 \mid \leq 4) = P(\{1,2\} \mid \{1,2,3,4\}) = 2/4 = 1/2$

$P(\leq 2 \mid \geq 2) = P(\{1,2\} \mid \{2,3,4,5,6\}) = 1/5$

Probabilidade condicional em distribuições em geral

$$
\begin{aligned}
P(F \mid E) &= P(X \in F \mid X \in E) \\
&= P(X \in F \cap X \in E \mid X \in E) \\
&= P(X \in F \cap E \mid X \in E) \\
&= P(F \cap E) / P(E)
\end{aligned}
$$



Exemplo

Considere um dado de 4 lados cujas probabilidades dos números são:

número	1	2	3	4
probabilidade	0.1	0.2	0.3	0.4

P(≥ 2 | ≤ 3) = ?

Exemplo

Considere um dado de 4 lados cujas probabilidades dos números são:

número	1	2	3	4
probabilidade	0.1	0.2	0.3	0.4

$P(\geq 2 \mid \leq 3) = ?$

$P(\{2,3,4\} \cap \{1,2,3\}) / P(\{1,2,3\})$

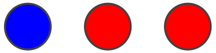
$P(\{2,3\}) / P(\{1,2,3\}) = 0.5/0.6 = 5/6$

Regra do produto

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

$$P(E \cap F) = P(F|E).P(E)$$

Exemplo



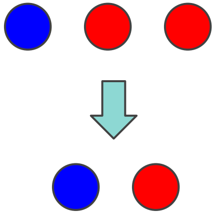
$$P(E \cap F) = P(F|E).P(E)$$

Pegando duas bolas, qual a probabilidade de pegar duas bolas vermelhas?

V_1 = primeira bola vermelha V_2 = segunda bola vermelha;

P(duas vermelhas) = $P(V_1 \cap V_2)$

P(duas vermelhas) = $P(V_1) \,.\, P(V_2 \mid V_1)$



P(duas vermelhas) = 2/3 . 1/2 = 1/3

Regra do produto genérico

$$
\begin{aligned}
P(E \cap F \cap G) \quad &= P((E \cap F) \cap G) \\
&= P(X \cap G) \qquad\qquad X = E \cap F \\
&= P(G|X)P(X) \\
&= P(G|E \cap F)P(E \cap F) \\
&= P(G|E \cap F)P(E|F)P(F)
\end{aligned}
$$

Exercício

A tabela de contingência abaixo mostra o número de pessoas indo para o trabalho (em milhares) em São Paulo em 2015, organizadas pelo meio de transporte e pelo tempo de viagem.

	Menos de 15 min	15-29 min	30-44 min	45-59 min	60 min ou mais	Total
Veículo particular	636	908	590	257	256	2647
Transporte público	9	54	96	62	108	329
Outro	115	70	23	7	7	222
Total	760	1032	709	326	371	3198

$P(60+ \text{ minutos} \mid \text{transporte público}) = ?$

Exercício

Se os eventos A e B são disjuntos, quanto é $P(A|B)$?

a) 0
b) ½
c) 1
d) ¼

Independência

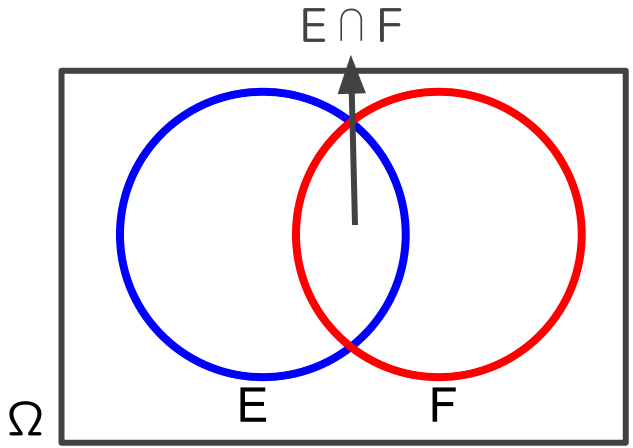
Dois eventos (E, F) são independentes ($E \perp F$) se a ocorrência de um evento não altera a probabilidade do outro evento ocorrer.

$$P(F \mid E) = P(F)$$

$$P(F) = |F| / |\Omega|$$

$$P(F \mid E) = |F \cap E| / |E|$$

$$|F| / |\Omega| = |F \cap E| / |E|$$



Independência

$$P(F|E) = P(F)$$

$$\frac{P(F \cap E)}{P(E)} = P(F)$$

$$P(F \cap E) = P(F).P(E)$$

Exemplos (Dado)

Evento	Conjunto	Probabilidade
primos	{2, 3, 5}	½
ímpar	{1, 3, 5}	½
quadrado	{1, 4}	⅓

Quais pares de eventos são independentes?

Interseção	Conj.	Prob.	=?	Produto	Independência
Primos ∩ ímpar					
Primos ∩ quadrado					
Quadrado ∩ ímpar					

Exemplos (Dado)

Evento	Conjunto	Probabilidade
primos	{2, 3, 5}	$\frac{1}{2}$
ímpar	{1, 3, 5}	$\frac{1}{2}$
quadrado	{1, 4}	$\frac{1}{3}$

Quais pares de eventos são independentes?

Interseção	Conj.	Prob.	=?	Produto	Independência
Primos ∩ ímpar	{ 3,5 }	$\frac{1}{3}$	≠	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	dependente
Primos ∩ quadrado	{ Ø }	0	≠	$\frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	dependente
Quadrado ∩ ímpar	{ 1 }	$\frac{1}{6}$	=	$\frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	independente

Exemplos (três moedas)

Evento	Descrição	Conj.	Prob.
H1	1ª cara	{H**}	½
H2	2ª cara	{*H*}	½
HH	2 caras consecutivos	{THH, HHT}	⅓

Quais pares de eventos são independentes?

Interseção	Conj.	Prob.	=?	Produto	Independência
H1 ∩ H2					
H2 ∩ HH					
H1 ∩ HH					

Exemplos (três moedas)

Evento	Descrição	Conj.	Prob.
H1	1ª cara	{H**}	½
H2	2ª cara	{*H*}	½
HH	2 caras consecutivos	{THH, HHT}	¼

Quais pares de eventos são independentes?

Interseção	Conj.	Prob.	=?	Produto	Independência
$H1 \cap H2$	{HH*}	¼	=	½ * ½ = ¼	independente
$H2 \cap HH$	{THH, HHT}	¼	≠	½ * ¼ = ⅛	dependente
$H1 \cap HH$	{HHT}	⅛	=	½ * ¼ = ⅛	independente

Exercício

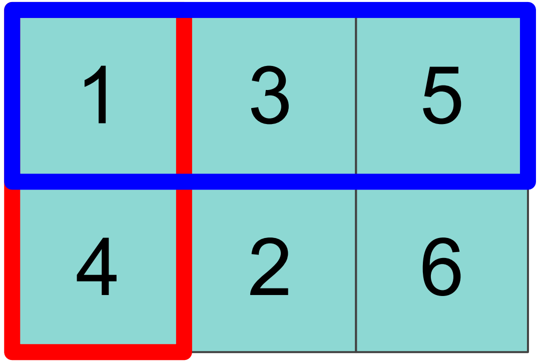
Se os eventos A e B são disjuntos, A e B são dependentes ou independentes?

Resposta: Dependentes!

Exercício

Esquematize na forma de um diagrama de Venn dois eventos que sejam independentes.

Em jogada de um dado:
A = {quadrado}
B = {ímpar}



Revisão

- Probabilidade condicional
  - $P(E \mid F) = P(E \cap F) / P(F)$
- Regra do produto
  - $P(E \mid F)P(F) = P(E \cap F)$
- Independência dos eventos
  - **Independentes** → A ocorrência de um evento **não** altera a probabilidade do segundo evento;
  - **Dependentes** → A ocorrência de um evento altera a probabilidade do segundo evento;