

Probabilidade

Teorema de Bayes

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto

Instituto Metr pole Digital - UFRN

Sala A224, ramal 182

Email: tetsu@imd.ufrn.br





Slides e notebook em:

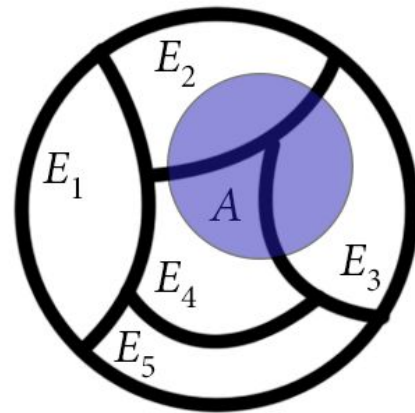
github.com/tetsufmbio/IMD0033/





Na aula passada...

- Probabilidade condicional
 - $P(E | F) = P(E \cap F) / P(F)$
- Lei da Probabilidade Total
 - $P(A) = P(E_1 \cap A) + P(E_2 \cap A) + \dots + P(E_5 \cap A)$





Lei da probabilidade total

Exercício

Três fábricas produzem 50%, 30% e 20% dos Iphones no mercado. A taxa de iPhones com defeito é de 4%, 10% e 5% respectivamente. Qual a probabilidade de você comprar um iPhone com defeito?

Resposta: 0.06



Via direta e reversa

Em alguns momentos:

- $P(F|E) \rightarrow$ Fácil de calcular
- $P(E|F) \rightarrow$ Difícil de calcular

Exemplo: Duas moedas (Ca_i : cara na moeda i ; $\exists Ca$: existe cara)

- $P(\exists Ca|Ca_1) \rightarrow$ Fácil $P(Ca_1|\exists Ca) \rightarrow$ Difícil

Exemplo: Dois dados (D_i : face do dado i ; $S = D_1 + D_2$: soma dos dois dados)

- $P(S=5|D_1=2) \rightarrow$ Fácil $P(D_1=2|S=5) \rightarrow$ Difícil

Para calcular estas probabilidades \rightarrow Teorema de Bayes



P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$



P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A)$$



P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$



P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$



P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$$

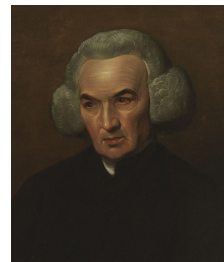
Thomas Bayes (1701 - 1761):

- Pastor e matemático inglês;
- Idealizou a fórmula.
- “Essay toward solving a Problem in the Doctrine of Chances” (1763).



Richard Price (1723-1791):

- Matemático, filósofo inglês;
- Descobriu os estudos de Bayes e contribuiu significativamente para a sua publicação;





Exemplo: Duas moedas

Duas moedas justas (ordem importa):

- $Ca_1 \rightarrow$ primeira moeda ser cara;
- $\exists Ca \rightarrow$ existe cara;

$$|\Omega| = ?$$

$$P(\exists Ca \mid Ca_1) = ?$$

$$P(Ca_1 \mid \exists Ca) = ?$$



Exemplo: Duas moedas

Duas moedas justas (ordem importa):

- $\text{Ca1} \rightarrow$ primeira moeda ser cara;
- $\exists \text{Ca} \rightarrow$ existe cara;

$|\Omega| = 4$ ($\Omega = \{\text{CaCa}, \text{CaCo}, \text{CoCa}, \text{CoCo}\}$)

$P(\text{Ca1}) = P(\text{CaCa}, \text{CaCo}) = \frac{1}{2}$; $P(\exists \text{Ca}) = P(\text{CaCa}, \text{CaCo}, \text{CoCa}) = \frac{3}{4}$

$P(\exists \text{Ca} \cap \text{Ca1}) = P(\text{CaCa}, \text{CaCo}) = \frac{1}{2}$

$P(\exists \text{Ca} \mid \text{Ca1}) = P(\exists \text{Ca} \cap \text{Ca1}) / P(\text{Ca1}) = \frac{1}{2} / \frac{1}{2} = 1$

$P(\text{Ca1} \mid \exists \text{Ca}) = ?$



Exemplo: Duas moedas

Duas moedas justas (ordem importa):

- $\text{Ca1} \rightarrow$ primeira moeda ser cara;
- $\exists \text{Ca} \rightarrow$ existe cara;

$|\Omega| = 4$ ($\Omega = \{\text{CaCa}, \text{CaCo}, \text{CoCa}, \text{CoCo}\}$)

$P(\text{Ca1}) = P(\text{CaCa}, \text{CaCo}) = \frac{1}{2}$; $P(\exists \text{Ca}) = P(\text{CaCa}, \text{CaCo}, \text{CoCa}) = \frac{3}{4}$

$P(\exists \text{Ca} \cap \text{Ca1}) = P(\text{CaCa}, \text{CaCo}) = \frac{1}{2}$

$P(\exists \text{Ca} \mid \text{Ca1}) = P(\exists \text{Ca} \cap \text{Ca1}) / P(\text{Ca1}) = \frac{1}{2} / \frac{1}{2} = 1$

$P(\text{Ca1} \mid \exists \text{Ca}) = P(\exists \text{Ca} \mid \text{Ca1}) P(\text{Ca1}) / P(\exists \text{Ca}) = \frac{1}{2} / \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$



Exemplo: Dois dados

Dois dados justos:

- D_i = resultado do i -ésimo dado
- $S = D_1 + D_2$
- $P(D_1=2|S=5) = ?$



Exemplo: Dois dados

Dois dados justos:

- D_i = resultado do i -ésimo dado
- $S = D_1 + D_2$
- $P(D_1=2|S=5) = ?$

$$P(D_1=2 \mid S=5) = P(S=5|D_1=2)P(D_1=2)/P(S=5)$$

$$P(D_1 = 2|S = 5) = \frac{\frac{1}{6} \frac{1}{6}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4}$$



Exemplo: Produto defeituoso

Os produtos de uma fábrica é produzido por três máquinas. A porcentagem de produção e dos produtos defeituosos produzidos por cada máquina está listado na tabela abaixo:

	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
% produzido do total	20	30	50
% defeituosos	5	3	1

Se um item é selecionado aleatoriamente e for verificado que ele é defeituoso, qual a probabilidade dele ter sido produzido pela máquina 3?



Exemplo: Produto defeituoso

$D = \text{defeituoso}$

$M_n = \text{produzido por máquina } n$

$P(M_3|D) = ?$

$$P(M_3|D) = \frac{P(D|M_3).P(M_3)}{P(D)}$$

$$P(M_3|D) = \frac{0,01*0,5}{0,024}$$

$$P(M_3|D) = 0,2083$$

$$P(D) = P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + P(D \cap M_3)$$

$$P(D) = P(D|M_1).P(M_1) + P(D|M_2).P(M_2) + P(D|M_3).P(M_3)$$

$$P(D) = 0,05 * 0,2 + 0,03 * 0,3 + 0,01 * 0,5$$

$$P(D) = 0,024$$



Exemplo: Doença rara

$D = doente$

$+$ = teste positivo

$$P(D) = 0,001$$

$$P(+|D^c) = 0,05$$

$$P(+|D) = 1$$

$$P(D|+) = ?$$

$$P(+) = P(D \cap +) + P(D^c \cap +)$$

$$P(+) = P(+|D) \cdot P(D) + P(+|D^c) \cdot P(D^c)$$

$$P(+) = 1 * 0,001 + 0,05 * (1 - 0,001)$$

$$P(+) = 0,05095$$

$$P(D|+) = \frac{P(+|D) \cdot P(D)}{P(+)}$$

$$P(D|+) = \frac{1 * 0,001}{0,05095}$$

$$P(D|+) = 0.0196$$



Exemplo: Produto defeituoso (2)

Os produtos de uma fábrica é produzido por três máquinas. A porcentagem de produção e dos produtos defeituosos produzidos por cada máquina está listado na tabela abaixo:

	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
% produzido do total	20	30	50
% defeituosos	5	3	1

Se um item é selecionado aleatoriamente e for verificado que ele é defeituoso, qual das máquinas é o mais provável de ter produzido este produto?



Exemplo: Produto defeituoso (2)

$D = \text{defeituoso}$

$M_n = \text{produzido por máquina } n$

$\max(P(M_1|D), P(M_2|D), P(M_3|D)) = ?$

$$P(M_1|D) = \frac{P(D|M_1) \cdot P(M_1)}{P(D)} \quad P(M_2|D) = \frac{P(D|M_2) \cdot P(M_2)}{P(D)} \quad P(M_3|D) = \frac{P(D|M_3) \cdot P(M_3)}{P(D)}$$

$$P(M_1|D) = \frac{0,05 \cdot 0,2}{0,024} \quad P(M_2|D) = \frac{0,03 \cdot 0,3}{0,024} \quad P(M_3|D) = \frac{0,01 \cdot 0,5}{0,024}$$

$$P(M_1|D) = 0,4167 \quad P(M_2|D) = 0,375 \quad P(M_3|D) = 0,2083$$

$$\max(P(M_1|D), P(M_2|D), P(M_3|D)) = P(M_1|D)$$



Exemplo: Doença rara

Uma doença rara acomete 1 a cada 1000 pessoas. Um teste para detectar esta doença possui uma taxa de falso positivo de 5%. Assuma que o teste possui uma taxa de falso negativo de 0%. Se pegarmos uma pessoa aleatória que apresentou o resultado positivo para o teste, qual a probabilidade dele ter realmente a doença?

- a) 95%
- b) 56%
- c) 5%
- d) 2%



Revisão

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$$