Probabilidade

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metrópole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br

Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/

Na aula passada...

- Princípio fundamental da contagem;
- Arranjos/permutação;
- Combinação;
- Subconjuntos de tamanho k de um conjunto de n elementos: diferentes combinações;
- Número de combinações distintos → coeficiente binomial;
- Coeficiente multinomial;
- Multiconjunto.

Probabilidade

Na vida existem algumas certezas...

Outros processos são incertos, mas mais ou menos previsíveis:

- Médicos → doença, medicamento;
- Fazendeiros → chuva, produção;
- Investidores → preço do estoque, economia;
- Publicitário → visualização, concorrência;
- Consumidores → disponibilidade, preço;
- Estudante → tamanho da fila, nota, pais, emprego, encontros, jogos.

Fenômenos randômicos

Não podemos dizer coisas que sejam necessariamente certos...

Desistir? Ou podemos dizer algo que seja inteligente e útil?

Aprender:

- Intervalo;
- Média;
- Variabilidade.

Inferir:

- Estrutura;
- Mudança;
- Relação.

Predizer:

- Futuro;
- Probabilidade;
- Garantia.

Beneficiar:

- Entendendo os dados;
- Planejando;
- Construindo.

Termos em probabilidade

Probabilidade foi desenvolvida para ajudar a ciência

Experimentos

Processo que consiste em executar um fenômeno randômico e observar o seu resultado;

Conceito genérico → Coleta de dados e observações de diferentes possibilidades.

Termos em probabilidade

Ponto amostral → Um resultado de um experimento (cara);

Espaço amostral → Conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento, denotado como **Ω** ({ cara, coroa});

Experimento	Espaço amostral
Moeda	{ h, t }
Dado	{ 1, 2, 3, 4, 5 ,6 }
Idade	N
Temperatura	R

Pontos amostrais → minúsculo (h, t, x ...)

Elementos, conjuntos

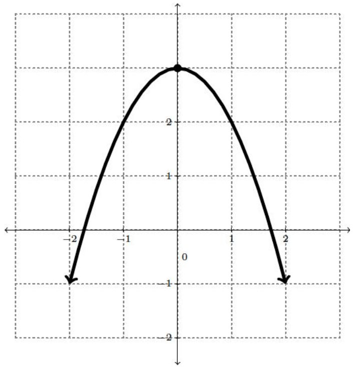
Tipos de espaço amostral

Discreto → Espaço amostral finito ou infinito, mas contável;

{ h, t }   { 1, 2, ..., 6 }   N   Z   { palavras }

Contínuo → Espaço amostral infinito incontável;

R   { temperatura }   { altura }



Resultados aleatórios

Em algebra:

Um valor desconhecido → x;

2x - 4 = 0

Antes da resolução: $x \in R$

Depois da resolução: x = 2

Notação para incógnitas: x, y, z

Em probabilidade:

Valor aleatório de um ponto amostral → X;

X - resultado da jogada de uma moeda;

Antes do experimento: $X \in \Omega$;

Depois do experimento: X = h (se cara), X = t (se coroa).

Notação para variáveis aleatórios : X, Y, Z

Probabilidade de um ponto amostral

A **probabilidade do ponto amostral** (resultado) **x** $\in \Omega$ ($P(x)$ ou $P(X=x)$) é a fração de vezes que x ocorre quando o experimento é repetido várias vezes.

Moeda justa:

- A medida que # de experimento $\rightarrow \infty$, fração de cara (ou coroa) = ½;

  Cara possui uma probabilidade de ½ $P(h) = P(X=h) = ½$

Dado justo:

- A medida que # de experimento $\rightarrow \infty$, fração da face 1 = ⅙;

  Face 1 possui uma probabilidade de ⅙ $P(1) = P(X=1) = ⅙$

Observando a probabilidade de todos os pontos amostrais...

- Moeda: $P(h) = ½$ $P(t) = ½$
- Dados: $P(1) = ⅙$, $P(2) = ⅙$, ... , $P(6) = ⅙$
- Tempo: P(chuva) = 10%, P(sol) = 90%

Função distribuição de probabilidade

P é uma função que mapeia o Ω para valores não negativos e que somam 1 $P: \Omega \rightarrow R$ $\quad P(x) \geq 0$ $\quad \sum_{x \in \Omega} P(x) = 1$

Tipos de distribuição de probabilidade

- Uniforme
- Não uniforme

Distribuição de probabilidade uniforme

Normalmente os pontos amostrais (resultados) de um experimento possuem diferentes probabilidades.

No entanto, existem experimentos cujos resultados são igualmente prováveis de acontecerem.

P(h) = P(t) = ½

Distribuição de probabilidade uniforme

P(1) = P(2) = ...
P(6) = ⅙

Distribuição de probabilidade uniforme

Todos os pontos amostrais (resultados) são igualmente prováveis.

$\forall\ x \in \Omega\ P(x) = p$

$1 = \sum_{x \in \Omega} P(x) = \sum_{x \in \Omega} p = |\Omega|.p$

$p = 1/|\Omega|$

Moeda:

- $P(h) = P(t) = p$
- $1 = P(h) + P(t) = 2p$
- $p = ½$

Distribuição uniforme → todos os resultados possuem probabilidade de 1/|Ω|

Tudo que você precisa saber → |Ω|

Atenção na notação

$P(X = 3) \rightarrow$ dado justo: ⅙

$P(3) = P(X = 3)$

$P(x) \rightarrow$ especifique o x, para $\forall x$, $P(x) =$ ⅙ (dado justo)

Notação correta

$P(1 = 3) \rightarrow$ Probabilidade do resultado 1 ser 3 (0)

$P(X) \rightarrow$ Probabilidade de ocorrer um resultado aleatório

Pouco comum, reveja se é isso que você quer dizer.

$P(x = 3) \rightarrow$ x corresponde a um resultado do experimento, portanto ele é um valor.

Provavelmente está errado.

Eventos

Até o momento nós lidamos com a probabilidade de um único ponto amostral (resultado):

- Se um determinado cavalo ganhará a corrida;
- Se um aluno tirará nota B+;

Mas normalmente estamos interessados na probabilidade de um conjunto de resultados:

- Se a temperatura > 25º;
- Se um aluno passará no curso;

Conjunto de resultados → **Subconjunto do espaço amostral** → **EVENTOS**

Exemplos de eventos

Eventos → subconjunto do espaço amostral;

Dado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \supseteq$ Eventos

Eventos	Nome
$\{1, \ldots, 6\}$	Ω (certeza)
$\{2, 4, 6\}$	pares
$\{1, 4\}$	quadrados
$\{5, 6\}$	> 4
$\{1, 2, 5\}$	$\{1, 2, 5\}$

Ocorrência do evento

Quando consideramos que o evento E ocorre?

O evento E ocorre quando o ponto amostral (resultado) observado pertence a E.

E ocorre se $X \in E$

Resultados

Eventos	Nome	1	2	3	4	5	6
{ 1, ... , 6 }	Ω (certeza)	o	o	o	o	o	o
{ 2, 4, 6 }	pares	x	o	x	o	x	o
{ 1, 4 }	quadrados	o	x	x	o	x	x
{ }	vazio	x	x	x	x	x	x

o Evento ocorre

x Evento não ocorre

Probabilidade dos eventos

Probabilidade do evento E $\quad P(E)$ $\quad$ Probabilidade do evento E ocorrer $\quad P(x \in E)$

Fração de experimentos onde E ocorre à medida que o número de experimento cresce.

P(Par) $\quad$ 3 4 2 5 6 3 6 4 3 1 1 2 3 5 $\quad$ 14

$P(Par) \approx$ fração $= 6/14 = 0{,}4285$

Desejável: - $P(E)$ = fração $\rightarrow$ # experimento $\rightarrow \infty$

- Escrever isso para eventos e distribuições de forma geral.

Relacionando P(x) com P(E)

\# de vezes que **Par** ocorre = soma do # de vezes que 2, 4 e 6 ocorrem.

P(**Par**) = fração de vezes que o Evento Par ocorre
P(**Par**) = soma das frações do número de vezes que 2, 4, 6 ocorrem
P(**Par**) = P(2) + P(4) + P(6)

Em geral:

- \# de vezes que o evento E ocorre = soma do número de vezes que seus elementos ocorrem.
- P(E) = soma das probabilidades de seus elementos.

$$\mathbf{P(E) = P(X \in E) = \sum_{x \in E} P(x)}$$

Relacionando P(x) com P(E)

		Resultados						
Eventos	Nome	1	2	3	4	5	6	Probabilidades
{ 1, ... , 6 }	Ω (certeza)	o	o	o	o	o	o	P(1)+P(2)+ ... + P(6) = 1
{ 2, 4, 6 }	pares	x	o	x	o	x	o	P(2)+P(4)+ P(6) = ½
{ 1, 4 }	quadrados	o	x	x	o	x	x	P(1)+P(4) = ⅓
{ }	vazio	x	x	x	x	x	x	0

Axiomas da probabilidade

Axioma 1: Para todos os eventos:

$$P(A) \geq 0$$

Axioma 2: Para eventos que são certos de ocorrerem:

$$P(\Omega) = 1$$

Axioma 3: Para todas as sequências de eventos disjuntos:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Propriedades da probabilidade

Propriedade 1: $$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Propriedade 2: $$A \subset B,\ então\ P(A) \leq P(B)$$

Propriedade 3: Para todos os eventos A:

$$0 \leq P(A) \leq P(\Omega)$$

Propriedade 4: Para todos os pares de eventos A e B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemplo:

Um paciente vai ao médico com garganta inflamada e febre baixa. Após exames, o médico decidiu que o paciente possui uma infecção bacteriana ou viral. O médico determinou que existe uma probabilidade de 0,7 de que o paciente está com infecção bacteriana e uma probabilidade de 0,4 de que o paciente está com infecção viral. Qual a probabilidade dele estar com ambas infecções?

$$P(B \cup V) = P(B) + P(V) - P(B \cap V)$$
$$P(B \cap V) = 0,7 + 0,4 - 1$$
$$P(B \cap V) = 0,1$$

Exemplo:

Considere dois eventos A e B tal que $P(A) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{1}{2}$. Determine o valor de $P(B \cap A^c)$ para cada uma das seguintes condições:

a) A e B são disjuntos;
b) $A \subset B$;
c) $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$;

$$a)\ P(B \cap A^c) = \frac{1}{2}$$

$$b)\ P(B \cap A^c) = \frac{1}{6}$$

$$c)\ P(B \cap A^c) = \frac{3}{8}$$

Paradoxo do Aniversário

Considerando o grupo de pessoas que estão presentes na sala de aula, qual a probabilidade de encontrar pelo menos duas pessoas que tenham a mesma data de aniversário (desconsiderando o ano)?

A = pelo menos duas pessoas com a mesma data;
A^c = todos com uma data distinta de aniversário.
k = número de alunos;

$$P(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|}$$

$$|A^c| = A_{365,k} = \frac{365!}{(365-k)!}$$

$$|\Omega| = 365^k$$

Revisão

Probabilidade

- Experimento;
- Espaço amostral;
- Ponto amostral;
    - Probabilidade do ponto amostral
- Evento
    - Probabilidade do evento