Regresión lineal múltiple

Nota. Los modelos de regresión funcionan tanto para datos numéricos como para datos aleatorios
cuantitativos

El caso simple:

1.- ¿Qué tan fuerte es la relación entre dos variables?

2.- Conocer el valor de la variable dependiente de un cierto valor de la variable independiente.

$y = \beta_0 + \beta_1 x$

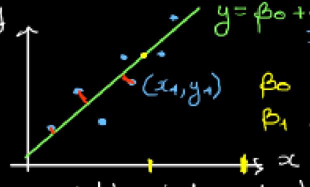
7 observaciones

(x_1, y_1)

β_0 interceptο

β_1 slope (pendiente)

variables dependientes



variables independiente

Hipótesis:

(i) Homogeneidad de la varianza: el tamaño del error en la predicción no cambia (significativamente) conforme los valores de la variable indep cambia

(ii) Independencia entre las observaciones.

(iii) Normalidad: Los datos siguen una distribución normal

Modelo de regresión simple

$$y = \beta_0 + \beta_1 X$$

interceptο; coef. de regresión; slope (pendiente)

variable dependiente; variable independiente

Error total del modelo

$$e = y - (\beta_0 + \beta_1 X)$$

Hipótesis sobre el error: $\mathbb{E}[e] = 0$, $Var[e] = 1$

Meta: A partir de un conjunto dado de datos $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$

encontrar

$$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1 = \underset{\beta_0, \beta_1}{\arg\min} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

$\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ son estimadores para β_0 y β_1 respectivamente

- $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ dependen de $\{(x_i, y_i)\}$
- "Aproximan" a β_0 y a β_1

Siempre es posible realizar una regresión lineal simple

(X, Y) vector gaussiano:

$aX + bY \sim N(\mu, \sigma^2)$ para cualquier a, b que no sean 0 simultáneamente.

Por un resultado en prob, existe una v.a. que se llama esperanza condicional

$$\mathbb{E}[Y|X] = \beta_0 + \beta_1 X$$

$$\beta_0 = \mathbb{E}[Y - \beta_1 X]$$

$$\beta_1 = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}$$

Muestral

$$\beta_0 = \overline{Y} - \beta_1 \overline{X}$$

$$\beta_1 = \frac{\widehat{Cov}(X,Y)}{\widehat{Var}(X)}$$

Múltiple: $k<n$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} \qquad i = 1, \dots, n \qquad (1)$$

El sistema de ecs lineales (1), lo podemos reescribir como

$$\boxed{y = X\beta + e}$$

$$\underbrace{y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} \qquad X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix}}_{n\times(k+1)} \qquad \underbrace{\boxed{\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}}}_{(k+1)\times 1} \qquad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

Este vector es el que necesitamos

Obs. Los coeficientes de la matriz X pueden ser variables aleatorias pero si son variables numéricas el vector e de errores se aproxima (en promedio) a 0

Problema de optimización:

$(x_1, \dots, x_n) = x$

$(y_1, \dots, y_n) = y$

$x^T y$ producto punto

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e^T e = (y - X\beta)^T (y - X\beta)$$

$$S(\beta) = y^T y - \beta^T X^T y - y^T X\beta + \beta^T X^T X \beta$$

$$S(\beta) = y^T y - 2\beta^T X^T y + \beta^T X^T X\beta$$

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = -2X^T y + 2X^T X\beta = 0 \qquad \frac{d\, \beta^T\beta}{d\beta} = 2\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{X^T X\beta = X^T y} \quad \text{Ecuaciones normales}$$

Si $X^T X$ es invertible $\Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y}$

Coeficiente de determinación

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}}$$

Medida de qué tan bien se ajusta el modelo regresión

$$SS_{res} = \sum e_i^2$$

$R^2 \sim 1$ mejor ajuste

$$SS_{tot} = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

numerador que aparece en la varianza