Sucesiones de variables aleatorias II

Julio César Galindo López

Facultad de Ciencias

5 de mayo de 2020

Proposición

$X_n \to X$ en probabilidad si y sólo si para toda subsucesión $(X_{N(n)})$ podemos extraer una subsubsucesión $(X_{N(M(n))})$ que converge a X casi seguramente.

Demostración.

Si $X_n \to X$ en probabilidad, entonces $X_{N(n)} \to X$ en probabilidad. Por la proposición precedente, existe una subsucesión $(X_{N(M(n))})$ que converge hacia X casi seguramente. Recíprocamente, supongamos que para toda subsucesión $(X_{N(n)})$, podemos extraer una subsubsucesión $(X_{N(M(n))})$ que converge a X casi seguramente. Sea $\varepsilon > 0$ fijo, y sea $a_n := \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$. Para toda subsucesión $(a_{N(n)})$ podemos extraer una subsucesión $(a_{N(M(n))})$ que converge a 0. Esto equivale a que $a_n \to 0$ ($n \to \infty$). Es decir, $X_n \to X$ en probabilidad. $\square$

Proposición

Si $X_n \to X$ en probabilidad, y si f es una función continua sobre $\mathbb{R}$, entonces $f(X_n) \to f(X)$ en probabilidad.

Demostración.

Sea $(f(X_{N(n)}))$ una subsucesión cualquiera. Por la proposición anterior, existe una subsucesión $(X_{N(M(n))})$ que converge a X casi seguramente, por lo que $(f(X_{N(M(n))}))$ converge a $f(X)$ casi seguramente. Nuevamente, por la proposición anterior, $f(X_n) \to f(X)$ en probabilidad. $\square$

Convergencia en L^p

Definición

Para toda $p \geq 1$, decimos que una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge en $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ hacia una variable aleatoria $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

Nota

1. Si $X_n \to X$ en L^p, y si $1 \leq q < p$, entonces la convergencia se da en L^q.
2. Si $X_n \to X$ en L^p, entonces $|X_n| \to |X|$ en L^p.
3. Si $X_n \to X$ en L^p, y si $p > 1$, entonces $\mathbb{E}[X_n^p] \to \mathbb{E}[X^p]$.

CONVERGENCIA EN L^p

EJEMPLO

Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias que siguen la misma ley. Supongamos que $X_1 \in L^1$. Sea $Y_n = \frac{X_n}{n}$. Estudiemos sus modos de convergencia hacia la variable aleatoria constante 0.

1. Convergencia en L^1:

$$\mathbb{E}[|Y_n - 0|] = \frac{\mathbb{E}[|X_1|]}{n} \to 0 \qquad Y_n \to 0 \text{ en } L^1.$$

2. Convergencia c.s.: Sea $k > 0$ un real fijo. Nótemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > 1/k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(k|X_1| \geq n) = \mathbb{E}[k|X_1|] < \infty.$$

Sea $A_k = \{\limsup_{n\to\infty} |Y_n| < 1/k\}$. Por el lema de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(A_k) = 1$. Así, $Y_n \to 0$ c.s.

$L^p \Rightarrow \mathbb{P}$

Proposición

Si $X_n \to X$ en L^p, entonces la convergencia se da en probabilidad.

Demostración.

Fijemos $\varepsilon > 0$. Por la desigualdad de Markov,

$$\mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X - X_n|^p]}{\varepsilon^p} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

$\square$

$\mathbb{P} \not\Rightarrow L^p$

Ejemplo

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. reales tales que

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{\ln n} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{\ln n}.$$

Para toda $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\ln n} \to 0 \text{ y } X_n \to 0 \text{ en } \mathbb{P}.$$

Por otra parte,

$$\mathbb{E}[|X_n|^p] = \frac{n^p}{\ln n} \to \infty,$$

de donde X_n no converge a 0 en L^p.

PROPOSICIÓN

Si $X_n \to X$ en probabilidad y si existe una v.a. real $Y \in L^p$ tal que $|X_n| \leq Y$ para toda n, entonces $X_n \to X$ en L^p.

DEMOSTRACIÓN.

Si $X_n \to X$ en probabilidad, entonces $X_{N(n)} \to X$ en probabilidad para cualquier subsucesión. Sabemos que existe uns subsucesión $\{X_{N(M(n))}\}$ que converge a X c.s. Eel teorema de convergencia dominada afirma que $X_{N(M(n))} \to X$ en L^p. De esta manera, de toda subsucesión de $\{X_n\}$, podemos extraer una subsubsucesión que converge a X en L^p y por lo tanto $X_n \to X$ en L^p. $\square$

Corolario

Si $X_n \to X$ en probabilidad y si existe una v.a. real $Y \in L^1$ tal que $|X_n| \leq Y$ para toda n, entonces $X_n \to X$ en L^1. En particular, $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$.

Ejemplo

Sea Y una v.a. real definida sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, uniformemente distribuída sobre $[3, 6]$. Para toda $n \geq 1$ y toda $\omega \in \Omega$, sea

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 5n^2 & 3 \leq Y(\omega) \leq 3 + (4/n^2), \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

1. Determinar $\mathbb{E}[X_n]$ y $\mathbb{E}[X_n^2]$, $(n \geq 1)$.
2. Calcular $\mathbb{E}[X_{n+1}X_{n+2}]$, $(n \geq 1)$.
3. Estudiar la convergencia c.s. de (X_n).
4. Estudiar la convergencia en probabilidad de (X_n).
5. Estudiar la convergencia en L^1 de (X_n).

Solución.

1. $\mathbb{E}[X_n] = 5n^2\mathbb{P}(3 \le Y \le 3 + 4n^{-2})$ y $\mathbb{E}[X_n^2] = 25n^4\mathbb{P}(3 \le Y \le 3 + 4n^{-2})$. Si $n = 1$, $\mathbb{P}(3 \le Y \le 7) = 1$, $\mathbb{E}[X_1] = 5$ y $\mathbb{E}[X_1^2] = 25$. Si $n \ge 2$, $\mathbb{P}(3 \le Y \le 3 + 4n^{-2}) = 4n^{-2}/3$, de donde $\mathbb{E}[X_n] = \frac{20}{3}$ y $\mathbb{E}[X_n^2] = \frac{100}{3}n^2$.
2. $X_{n+1}X_{n+2} = 25(n+1)^2(n+2)^2\mathbf{1}_{[3,3+4(n+2)^{-2}]}(Y)$. Esto implica que $\mathbb{E}[X_{n+1}X_{n+2}] = 25(n+1)^2(n+2)^2\mathbb{P}(3 \le Y \le 3 + 4(n+2)^{-2}) = \frac{100}{3}(n+1)^2$.
3. Sea $\Omega_0 = \{\omega \in \Omega : 3 < Y(\omega) \le 6\}$. Entonces $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$. Para todo $\omega \in \Omega_0$, sea $n_0 = n_0(\omega) = 2/\sqrt{Y(\omega) - 3}$. Así, $Y(\omega) > 3 + 4/n^2$ cuando $n > n_0$. En consecuencia, $\mathbb{P}(\omega \in \Omega : \text{lím}_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0) = 1$, esto es $X_n \to 0$ c.s.

Ejemplo

4. $c.s \Rightarrow \mathbb{P}$. Estonces, $X_n \to 0$ en probabilidad.
5. Si $X_n \to 0$ en L^1, entonces $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[0] = 0$. Sin embargo, $\mathbb{E}[X_n] = \frac{20}{3}$. En conclusión, X_n no converge en L^1.