Solución_Proba_1_

February 26, 2023

[1]:
```
import sympy as sym
from sympy import*
```

0.1 Ejercicios

0.1.1 Ejercicio 1.

Supongamos que se lanzan dos dados honestos. Considere los siguientes eventos: - S_n : la suma de las caras de los dados es n. - D_m : la diferencia de las caras de los dados es mayor o igual a m.

Sea R_{S_n} el conjunto de valores que toma la variable S_n y similarmente para R_{D_n}. Conteste la siguientes preguntas justificando sus respuestas:

- Calcule $\mathbb{P}(S_7 \mid D_3)$ y $\mathbb{P}(D_3 \mid S_7)$.
- ¿Los eventos dados son ajenos para alguna elección de $(n, m) \in R_{S_n} \times R_{D_m}$?
- ¿Los eventos son independientes?
- Calcule $\mathbb{P}(S_n \cap D_m)$ para dos $(n, m), (n', m') \in R_{S_n} \times R_{D_m}$ distintos.

Solución. El espacio muestral tanto para S_n como para D_n es el mismo:

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ahora, veamos el rango de cada evento:

- $R_{S_n} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
- $R_{D_n} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

[2]:
```
# Espacio muestral

from itertools import product



Omega1 = set(product({1,2,3,4,5,6}, repeat =2))
print(Omega1)
print("La cardinalidad de Omega1 es:", len(Omega1))
```

```
{(3, 4), (4, 3), (3, 1), (5, 4), (4, 6), (5, 1), (2, 2), (1, 6), (2, 5), (1, 3),
(6, 2), (6, 5), (4, 2), (4, 5), (3, 3), (5, 6), (3, 6), (5, 3), (2, 4), (1, 2),
(2, 1), (1, 5), (6, 1), (6, 4), (3, 2), (4, 1), (3, 5), (5, 2), (4, 4), (5, 5),
```

```
(1, 1), (1, 4), (2, 3), (2, 6), (6, 6), (6, 3)}
La cardinalidad de Omega1 es: 36
```

La descripción conjuntista de los eventos en cuestión son:

$$S_n = \{(i,j) \in \Omega_1 : i + j = n\}$$

y

$$D_m = \{(i,j) \in \Omega_1 : |i - j| \geq m\}$$

[3]:
```python
# La suma de los dos dados en n
def S(n):
    S = {o for o in Omega1 if o[0]+o[1] == n}
    return S
```

Veamos los eventos para cada n:

[4]:
```python
Rango_Sn = range(2,13)

Eventos_Sn = {n : S(n) for n in Rango_Sn }

Eventos_Sn
```

[4]:
```
{2: {(1, 1)},
 3: {(1, 2), (2, 1)},
 4: {(1, 3), (2, 2), (3, 1)},
 5: {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)},
 6: {(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)},
 7: {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)},
 8: {(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)},
 9: {(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)},
 10: {(4, 6), (5, 5), (6, 4)},
 11: {(5, 6), (6, 5)},
 12: {(6, 6)}}
```

Similarmente,

[5]:
```python
# La suma de los dos dados en n
def D(m):
    D = {o for o in Omega1 if abs(o[0]-o[1]) >= m}
    return D
```

[29]:
```python
Rango_Dm = range(0,6)

Eventos_Dm = {m : D(m) for m in Rango_Dm}

print(Eventos_Dm)
```

```
{0: {(3, 4), (4, 3), (3, 1), (5, 4), (4, 6), (5, 1), (2, 2), (1, 6), (2, 5), (1,
3), (6, 2), (6, 5), (4, 2), (4, 5), (3, 3), (5, 6), (3, 6), (5, 3), (2, 4), (1,
```

```
2), (2, 1), (1, 5), (6, 1), (6, 4), (3, 2), (4, 1), (3, 5), (5, 2), (4, 4), (5,
5), (1, 1), (1, 4), (2, 3), (2, 6), (6, 6), (6, 3)}, 1: {(3, 4), (4, 3), (3, 1),
(5, 4), (4, 6), (5, 1), (1, 6), (2, 5), (1, 3), (6, 2), (6, 5), (4, 2), (4, 5),
(5, 6), (3, 6), (5, 3), (2, 4), (1, 2), (2, 1), (1, 5), (6, 1), (6, 4), (3, 2),
(4, 1), (3, 5), (5, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 6), (6, 3)}, 2: {(3, 1), (4, 6), (5,
1), (1, 6), (2, 5), (1, 3), (6, 2), (4, 2), (3, 6), (5, 3), (2, 4), (1, 5), (6,
1), (6, 4), (4, 1), (3, 5), (5, 2), (1, 4), (2, 6), (6, 3)}, 3: {(6, 2), (1, 5),
(6, 1), (5, 1), (1, 4), (6, 3), (2, 6), (3, 6), (1, 6), (2, 5), (4, 1), (5, 2)},
4: {(6, 2), (1, 5), (6, 1), (5, 1), (2, 6), (1, 6)}, 5: {(1, 6), (6, 1)}}
```

Como estamos en el contexto clásico,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega_1}.$$

[7]:
```
from fractions import Fraction

def P(A,Omega):
    p = Rational(len(A),len(Omega1))
    return p
```

Calcule $\mathbb{P}(S_7 \mid D_3)$ y $\mathbb{P}(D_3 \mid S_7)$.

[8]:
```
S7D3 = D(3).intersection(S(7))
```

[9]:
```
P(S7D3, Omega1)/P(D(3), Omega1)
```

[9]: $\frac{1}{3}$

[10]:
```
P(S7D3, Omega1)/P(S(7), Omega1)
```

[10]: $\frac{2}{3}$

¿Los eventos dados son ajenos para alguna elección de $(n, m) \in R_{S_n} \times R_{D_m}$?

[11]:
```
Rango = set(product({2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}, {0,1,2,3,4,5}))
```

[30]:
```
L = [(n,m) for n,m in Rango if len(D(m).intersection(S(n)))==0]
print(L)
```

```
[(12, 4), (12, 1), (3, 4), (4, 3), (5, 4), (9, 5), (11, 2), (11, 5), (2, 2),
(10, 3), (2, 5), (6, 5), (12, 3), (4, 5), (3, 3), (8, 5), (9, 4), (11, 4), (2,
4), (10, 5), (2, 1), (12, 2), (12, 5), (3, 2), (3, 5), (4, 4), (5, 5), (10, 4),
(11, 3), (2, 3)]
```

Lo anterior, son las parejas $(n, n) \in R_{S_n} \times R_{D_m}$ en donde $S_n \cap D_m = \emptyset$.

Calcule $\mathbb{P}(S_n \cap D_m)$ para dos $(n, m), (n', m') \in R_{S_n} \times R_{D_m}$ distintos.

[13]:
```
probabilidades = {(n,m) : P(D(m).intersection(S(n)), Omega1) for n,m in Rango␣
↪if len(D(m).intersection(S(n)))!=0}
probabilidades
```

[13]:
```
{(4, 0): 1/12,
 (3, 1): 1/18,
 (5, 1): 1/9,
 (8, 0): 5/36,
 (9, 2): 1/18,
 (8, 3): 1/18,
 (10, 0): 1/12,
 (7, 4): 1/18,
 (6, 2): 1/9,
 (7, 1): 1/6,
 (12, 0): 1/36,
 (4, 2): 1/18,
 (3, 0): 1/18,
 (5, 0): 1/9,
 (5, 3): 1/18,
 (8, 2): 1/9,
 (9, 1): 1/9,
 (10, 2): 1/18,
 (11, 1): 1/18,
 (6, 1): 1/9,
 (7, 0): 1/6,
 (6, 4): 1/18,
 (7, 3): 1/9,
 (4, 1): 1/18,
 (5, 2): 1/18,
 (9, 0): 1/9,
 (8, 4): 1/18,
 (9, 3): 1/18,
 (8, 1): 1/9,
 (11, 0): 1/18,
 (2, 0): 1/36,
 (10, 1): 1/18,
 (7, 2): 1/9,
 (6, 0): 5/36,
 (7, 5): 1/18,
 (6, 3): 1/18}
```

¿Los eventos son independientes?

[14]:
```
def Indep(A,B):
    indep = P(A.intersection(B), Omega1)==P(A, Omega1)*P(B,Omega1)
    return indep
```

[15]:
```
Independencia = [(n,m) for (n,m) in Rango if Indep(D(m),S(n))==True]
Independencia
```

[15]:
```
[(4, 0),
 (8, 0),
 (10, 0),
 (12, 0),
 (3, 0),
 (5, 0),
 (7, 0),
 (9, 0),
 (11, 0),
 (2, 0),
 (6, 0)]
```

Por lo tanto, habrá independencia cuando $n \in R_{S_n}$ y $m = 0$.

0.1.2 Ejercicio 2.

Sean A, B y C tres eventos relativos a un experimento aleatorio. ¿Cuáles de las siguientes aseveraciones son verdaderas?

a) $\mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(A^c \mid B) = 1$.

b) $\mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(A \mid B^c) = 1$.

c) Si A y B son independientes, entonces $\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C)\mathbb{P}(B \mid C)$.

d) Si $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(B)$, entonces A y B son independientes.

e) Si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = p$, entonces $\mathbb{P}(A \cap B) \leq p^2$.

En todos los casos, justifique su respuesta, ya sea demostrando que la aseveración es verdadera o dando un contraejemplo que muestre que la aseveración es falsa.

Solución.

a) Verdadera ya que $\mathbb{P}(\bullet \mid B)$ es función de probabilidad.

b) Falsa

[16]:
```
S7D2 = D(2).intersection(S(7))
P(S7D2, Omega1)/P(D(2), Omega1)
```

[16]: $\frac{1}{5}$

[17]:
```
def Dc(m):
    Dc = {o for o in Omega1 if abs(o[0]-o[1]) < m}
    return Dc
```

[18]:
```
S7Dc2 = Dc(2).intersection(S(7))
P(S7Dc2, Omega1)/P(Dc(2), Omega1)
```

[18]: $\frac{1}{8}$

[19]:
```
P(S7D2, Omega1)/P(D(2), Omega1) + P(S7Dc2, Omega1)/P(Dc(2), Omega1) ==1
```

[19]: False

c) Falsa: Sea C el evento el máximo de las caras es 6:

$$C = \{(i,j) \in \Omega_1 : \max(i,j) = 6\}.$$

[20]:
```
C = {o for o in Omega1 if max(o)==6}
```

Sabemos que S_{12} y D_0 son independientes.

[21]:
```
P(S(12).intersection(D(0).intersection(C)), Omega1)/P(C, Omega1), P(S(12).
↪intersection(C), Omega1)/P(C, Omega1)
```

[21]: $\frac{1}{11}$

[22]:
```
P(S(12).intersection(C), Omega1)/P(C, Omega1)
```

[22]: $\frac{1}{11}$

[23]:
```
P(D(0).intersection(C),Omega1)/P(C, Omega1)
```

[23]: 1

e) Si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = p$, entonces $\mathbb{P}(A \cap B) \leq p^2$.

Falso

[24]:
```
P(S(7), Omega1), P(D(4),Omega1)
```

[24]: (1/6, 1/6)

[25]:
```
P(S(7).intersection(D(4)), Omega1)
```

[25]: $\frac{1}{18}$

[26]:
```
P(S(7).intersection(D(4)), Omega1)<= P(D(4),Omega1)*P(D(4),Omega1)
```

[26]: False

0.1.3 Ejercicio 3.

Una urna contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Un experimento consiste en elegir, al azar y sin reemplazo, dos bolas de la urna, consecutivamente. Calcule

a) la probabilidad de que la suma de los dos números elegidos sea par y,
b) la probabilidad de que en la primera elección resulte par dado que la suma fue par.

Solución. Sean

- B= la suma de los números elegidos es par.
- A_1=el número de la primera elección es par
- A_2=el número de la segunda elección es impar

[27]:
```
Omega2 = {i for i in range(1,11)}
B = {(i,j) for i in Omega2 for j in Omega2 if (i+j)%2==0}
A1 = {i for i in Omega2 if i%2==0}
A2 = {i for i in Omega2 if i%2==1}
```

Calculemos $\mathbb{P}(B \mid A_1)$ **y** $\mathbb{P}(B \mid A_2)$

[28]:
```
BA1 = {(i, j) for i in A1 for j in Omega2 if (i+j)%2==0 and i!=j}
BA1
```

[28]:
```
{(2, 4),
 (2, 6),
 (2, 8),
 (2, 10),
 (4, 2),
 (4, 6),
 (4, 8),
 (4, 10),
 (6, 2),
 (6, 4),
 (6, 8),
 (6, 10),
 (8, 2),
 (8, 4),
 (8, 6),
 (8, 10),
 (10, 2),
 (10, 4),
 (10, 6),
 (10, 8)}
```

Así, $\mathbb{P}(B \mid A_1) = \frac{4}{9} = \mathbb{P}(B \mid A_2)$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(B) = \frac{4}{9}.$$

Así, por Bayes
$$\mathbb{P}(A_1 \mid B) = \frac{2/9}{4/9} = \frac{1}{2}.$$

```
[ ]:
```