Sucesiones de variables aleatorias

Julio César Galindo López

Facultad de Ciencias

23 de abril de 2020

Borel-Cantelli

Consideremos una sucesión de eventos $\{A_n, n \geq 1\}$ en $(\Omega, \mathcal{F})$. La sucesión de eventos $\{B_n = \cup_{k\geq n} A_k, n \geq 1\}$ es decreciente, su intersección

$$A = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} B_n$$

es un evento en $\mathcal{F}$. El evento A representa al conjunto de aquellos $\omega \in \Omega$ que pertenecen a una infinidad de eventos A_n. Escribiremos,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{A_n \text{ i.o.}\}.$$

Podemos definir igualmente

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} A_n &= \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k \\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ salvo un número finito de índices } n\}\end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $A_1 = \emptyset$, $A_2 = [-3, 3]$ y

$$A_{2k-1} = [-1, 2), \qquad A_{2k} = [-2, 1], \qquad k \geq 1.$$

Se tiene

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = [-2, 2), \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n = [-1, 1].$$

Borel-Cantelli

Teorema (Lema de Borel-Cantelli)

Sea $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de eventos.

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, entonces
$$\mathbb{P}(A_n \text{ i.o.}) = 0.$$
2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, y si **los eventos** $\{A_n\}$ **son independientes** (es decir, para todo n, $A_1, \ldots, A_n$ son independientes), entonces
$$\mathbb{P}(A_n \text{ i.o.}) = 1.$$

Nota

Usaremos la siguiente versión de la parte 1. : existe un evento $\widetilde{B}$ con $\mathbb{P}(\widetilde{B}) = 1$, tal que para todo $\omega \in \widetilde{B}$, podemos encontrar $n_0 = n_0(\omega) < \infty$ tal que $\omega \in A_n^c$ cuando $n \geq n_0$.

Demostración del lema de Borel-Cantelli.

.

1. Fijemos $\varepsilon > 0$. Existe un entero N tal que $\sum_{n=N}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \varepsilon$, y en consecuencia $\mathbb{P}(\cup_{n \geq N} A_n) < \varepsilon$. Así, $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) < \varepsilon$.
2. Se tiene

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=k}^{m} A_j\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=k}^{m} A_j^c\right) = 1 - \prod_{j=k}^{m} \mathbb{P}(A_j^c) \geq 1 - \exp\left[-\sum_{j=k}^{m} \mathbb{P}(A_j)\right]$$

Haciendo tender m hacia ∞,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j\right) \geq 1 - \exp\left[-\sum_{j=k}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)\right] = 1.$$

Como los eventos $\cup_{j=k}^{\infty} A_j$ decrecen hacia $\limsup_{n\to\infty} A_n$ cuando $k \to \infty$, $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq 1$.

Definición (convergencia c.s.)

Decimos que la sucesión de v.a. $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge casi seguramente hacia una v.a. X si existe un evento A con $\mathbb{P}(A) = 1$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \qquad \text{para todo } \omega \in A.$$

Ejemplo

Sea (X_n) una sucesión de v.a. reales independientes que siguen la misma ley gaussiana $\mathcal{N}(0,1)$. Sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Sabemos que $S_n \sim \mathcal{N}(0,n)$. De donde, por la desigualdad de Markov, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon) = \mathbb{P}(|S_n|^3 > \varepsilon^3 n^3) \leq \frac{\mathbb{E}(|S_n|^3)}{\varepsilon^3 n^3}.$$

Ya que $\sum_n \mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon) < \infty$, por el lema de Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon, \text{ i.o.}) = 0$$

Entonces existe $\widetilde{B} \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(\widetilde{B}) = 1$ tal que

$$\forall \omega \in \widetilde{B}, \ \exists n_0 = n_0(\omega, \varepsilon) \text{ tal que } |S_n(\omega)| \leq n\varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

A fortiori, para toda $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\omega : \limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n(\omega)|}{n} \leq \varepsilon\right) = 1.$$

Ejemplo

Nótese que,

$$\left\{ \limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n(\omega)|}{n} = 0 \right\} = \bigcap_{k\geq 1} \left\{ \limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n(\omega)|}{n} \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{P}\left(\omega : \limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n(\omega)|}{n} = 0 \right) = 1.$$

Esto es,

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \qquad \text{c.s.}$$

Proposición

Sean $X, X_1, X_2, \ldots$ v.a. reales tales que la serie $\sum \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ es convergente para toda $\varepsilon > 0$, entonces $X_n \to X$ c.s.

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Por el lema de Borel-Cantelli, existe $\widetilde{B} \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(\widetilde{B}) = 1$ tal que

$$\forall \omega \in \widetilde{B}, \ \exists n_0 = n_0(\omega) \ \text{ tal que } \ |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Así, para todo $\omega \in \widetilde{B}$, $\limsup_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon$. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} |X_n - X| \leq \varepsilon \right) = 1$$

Ya que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, deducimos que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} (X_n - X) = 0 \right) = 1;$$

dicho de otra manera, X_n converge casi seguramente a X. $\square$

Convergencia en probabilidad

Definición

Decimos que la sucesión $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge en probabilidad hacia una v.a. X si para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Nota

Es fácil de ver que los resultados usuales sobre límites (unicidad del límite, linealidad, etc) son válidos para las convergencias c.s. y en probabilidad.

Ejemplo

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. reales tales que $\mathbb{E}[X_n] \to a$ y $\mathrm{Var}[X_n] \to 0$. Entonces, por la desigualdad de Markov, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_n - a| > \varepsilon) &= \mathbb{P}((X_n - a)^2 > \varepsilon^2) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[(X_n - a)^2]}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{\mathrm{Var}[X_n] + (a - \mathbb{E}[X_n])^2}{\varepsilon^2} \to 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, X_n converge en probabilidad hacia a.

Ejemplo

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. reales tales que $\mathbb{E}[X_n] \to a$ y $\mathrm{Var}[X_n] \to 0$. Entonces, por la desigualdad de Markov, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_n - a| > \varepsilon) &= \mathbb{P}((X_n - a)^2 > \varepsilon^2) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[(X_n - a)^2]}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{\mathrm{Var}[X_n] + (a - \mathbb{E}[X_n])^2}{\varepsilon^2} \to 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, X_n converge en probabilidad hacia a.

c.s. $\Rightarrow \mathbb{P}$

Proposición

Si $X_n \to X$ c.s., entonces la convergencia también se da en probabilidad.

Demostración.

Sea $\widetilde{B} \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(\widetilde{B}) = 1$ y que para todo $\omega \in \widetilde{B}$, $X_n(\omega) \to X(\omega)$, $n \to \infty$. Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Para cada entero n, consideremos el evento

$$B_n = \{\omega \in \widetilde{B} : \sup_{k \geq n} |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}.$$

La sucesión $\{B_n\}$ es decreciente y $\cap_{n\geq 1} B_n = \emptyset$. Entonces, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$. Como

$$\{|X_n - X| > \varepsilon\} \subset B_n \cup \widetilde{B}^c,$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

$\square$

Ejemplo

Sea $(\Omega = [1,2], \mathcal{B}_{[1,2]}, \lambda_{[1,2]})$. Para cada entero n, denotemos por k al único entero tal que $2^k \leq n < 2^{k+1}$, y tomemos

$$X_n(\omega) = \mathbf{1}_{[n2^{-k},(n+1)2^{-k}]}(\omega).$$

- $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = 2^{-k}$. Así, $X_n \to 0$ en probabilidad.
- Para todo $\omega \in [1,2]$, existe una infinidad de enteros n para los cuales $X_n(\omega) = 1$, y X_n no converge hacia 0.

PROPOSICIÓN

Si $X_n \to X$ en probabilidad, entonces existe una subsucesión $X_{N(n)}$ que converge a X c.s.

DEMOSTRACIÓN.

Como $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(|X_k - X| > \varepsilon) = 0$ para toda ε, podemos encontrar para toda $n \geq 1$ un entero $N(n)$ tal que $\mathbb{P}(|X_{N(n)} - X| > 1/n) \leq 2^{-n}$. Además, la sucesión $\{N(n)\}_{n\geq 1}$ puede escogerse de tal manera que sea creciente. La serie $\sum \mathbb{P}(|X_{N(n)} - X| > 1/n)$ es convergente y de aquí se sigue el resultado. $\square$