Sucesiones de variables aleatorias: Ejemplos y LGN

Julio César Galindo López

Facultad de Ciencias

6 de mayo de 2020

Resumen

- c.s. $\Rightarrow \mathbb{P}$ pero $\mathbb{P} \nRightarrow$ c.s.
- $\mathbb{P} \Rightarrow$ sub c.s..
- $\mathbb{P} \Leftrightarrow$ sub sub c.s.
- Para $p \geq 1$, $L^p \Rightarrow \mathbb{P}$ pero $\mathbb{P} \nRightarrow L^p$.
- $\mathbb{P} \Rightarrow$ dom L^p.

Ejemplo (La hipótesis de dominación es necesaria)

Sea $(T_n)_n$ una sucesión de v.a. tales que

$$\mathbb{P}(T_n = n^2) = \frac{1}{n\sqrt{n}} = 1 - \mathbb{P}(T_n = 0).$$

- Para $\varepsilon > 0$, tenemos $\mathbb{P}(T_n \geq \varepsilon) = \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Por el Lema de Borel-Cantelli, $T_n \to 0$ c.s.
- Por otra parte, $\mathbb{E}[T_n] = \sqrt{n}$ y la sucesión no puede converger en L^1.

Ejemplos

Ejemplo

Sea $(X_n)_n$ una sucesión de variables aleatorias Bernoulli **independientes** tales que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

1. $X_n \to 0$ en $\mathbb{P}$: Para toda $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \frac{1}{n} \to 0, \ (n \to \infty).$$

2. $X_n \to 0$ en L^1:

$$\mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{n} \to 0, \ (n \to \infty).$$

3. ¿Qué se puede decir sobre la convergencia c.s.?
Para $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = \frac{1}{n}$. Si $A_n = \{X_n \geq \varepsilon\}$, entonces $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty$. Por independencia y el Lema de Borel-Cantelli, para casi todo ω, una infinidad de $X_n(\omega)$ serán superiores a ε. Por lo que la sucesión no puede converger a 0 c.s.

Ejemplo

Consideremos un caso particular del ejemplo anterior: Sea $U \sim \text{unif}[0,1]$. Sea $Z_n = \mathbf{1}_{\{U \leq \frac{1}{n}\}}$. Entonces

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \mathbb{P}\left(U \leq \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \qquad \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Hemos visto que la sucesión (Z_n) converge en probabilidad y en L^1. Veamos que la sucesión *converge casi seguramente*:

En efecto, si ω es fijo, entonces ya que $U(\omega) > 0$ (con probabilidad 1), existe n_0 tal que $U(\omega) > \frac{1}{n_0}$. Esto implica que $Z_n(\omega) = 0$, para todo $n \geq n_0$.

Nota

Este resultado no está en contradicción con el ejemplo anterior debido a que las v.a. no son independientes:

$$\mathbb{P}(Z_n = 1, Z_{n+1}) = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) = \frac{1}{n+1} \qquad \mathbb{P}(Z_n = 1)\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

EJEMPLO

Sea $(Z_n)_n$ una sucesión de v.a. tales que

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{n^2}, \qquad \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

1. Convergencia c.s. a 0: Para toda $\varepsilon > 0$, consideremos el evento $B_n = \{Z_n \geq \varepsilon\}$. Entonces $\sum_n \mathbb{P}(B_n) < \infty$. Por el Lema de Borel-Cantelli, para casi todo ω, un número finito de $Z_n(\omega)$ serán superiores a ε. Por lo tanto $Z_n \to 0$ c.s.
2. Convergencia en $\mathbb{P}$: c.s.$\Rightarrow$ $\mathbb{P}$.
3. Convergencia en L^1: $\mathbb{E}[Z_n] = \frac{1}{n^2} \to 0$. Por lo tanto, $Z_n \to 0$ en L^1.

Ley de los grandes números LGN

Sea (X_n) una sucesión de v.a. independientes e idénticamente distribuídas. Estamos interesados en la convergencia de la sucesión de v.a. $(M_n)_n$ en donde

$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Se tienen dos tipos de resultados:

- Ley débil de los grandes números (LDGN): convergencia en probabilidad.
- Ley fuerte de los grandes números (LFGN): convergencia c.s.

Teorema (LDGN)

Sea $(X_n)_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas integrables. Sea $\mathbb{E}[X_1] = m$. Entonces

$$M_n \to_{n\to\infty} m, \quad \text{en } \mathbb{P} \text{ (y por lo tanto en } L^1)$$

Nota

La LDGN no es difícil de demostrar (recae en la desigualdad de Chebyshev principalmente).

Ley de los grandes números LGN

Teorema (LFGN)

Sea $(X_n)_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas integrables. Sea $\mathbb{E}[X_1] = m$. Entonces

$$M_n \to_{n\to\infty} m, \quad \text{c.s.}$$

Nota

La prueba de LFGN es mucho más delicada. Realizaremos dos demostraciones:

1. Suponiendo segundo momento finito: $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$.
2. El caso general.

AGUJA DE BUFFON

El experimento de Buffon consiste en lanzar sucesivamente agujas en una latiz horizontal. Llamamos por E al evento: la aguja intersecta una de las rectas de la latiz. Vimos que, si ℓ es la longitud de la aguja (menor que la distancia, a, entre las rectas horizontales),

$$\mathbb{P}(E) = \frac{2\ell}{a\pi}.$$

Efectuamos una sucesión de lanzamientos de una aguja y denotamos por E_i al evento: en el i-ésimo lanzamiento, la aguja intersecta a una de las rectas de la latiz horizontal. Sea $X_i = \mathbf{1}_{E_i}$ y

$$F_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Aguja de Buffon

Las X_i son v.a. $\mathrm{Ber}(p = \mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(E))$. Los eventos E_i forman una sucesión de eventos independientes y de misma ley p. Las X_i forman una sucesión de v.a.i.i.d de ley $\mathrm{Ber}(p)$.

Por LFGN:

$$F_n \to \mathbb{E}[X_1] = \mathbb{P}(E), \quad \text{c.s.}$$

O, equivalentemente,

$$\frac{2\ell}{aF_n} \to \pi \quad \text{c.s.}$$