Notas del Seminario de Aplicaciones Actuariales

Claudia Cristina Reyes

28 de noviembre de 2022

Índice

1. Variables y vectores aleatorios gaussianos

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, y sea E un espacio dotado de una σ-álgebra $\mathscr{E}$. Llamamos *variable aleatoria* con valores sobre E a toda función medible $X : \Omega \to E$.

A menudo tomamos $E = \mathbb{R}$ dotada de la σ-álgebra de Borel, en este caso estaremos hablando de una variable aleatoria real.

Definición 1. La ley de una variable aleatoria X (también llamada distribución) es la medida imagen $\mathbb{P}$ para X. Esta es una medida de probabilidad sobre $(E, \mathscr{E})$, y se define por

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}), \quad A \in \mathscr{E}.$$

Supongamos que X es una variable aleatoria real. Se llama *función de distribución de la variable aleatoria* X a la función $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dada por

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x]) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si la medida de probabilidad $\mathbb{P}_X$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, es decir, si $\mathbb{P}_X(\,\mathrm{d}x) = f_X(x)\,\mathrm{d}x$ (donde $\mathrm{d}x$ es la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$), para alguna función f_X integrable sobre $\mathbb{R}$, decimos que la variable aleatoria X es absolutamente continua. En este caso, la función de distribución de X está dada por:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,\mathrm{d}u, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definición 2 (Medida de Gauss). Una medida de Gauss sobre $\mathbb{R}$, está definida como

$$\gamma(\,\mathrm{d}x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x,$$

donde $m, \sigma \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$.

En el caso cuando $m = 0$ y $\sigma^2 = 1$, diremos que $\gamma(\,\mathrm{d}x)$ es una medida de Gauss estándar.

Definición 3. Decimos que una variable aleatoria $\mathrm{N} : \Omega \to \mathbb{R}$ sigue una *ley gaussiana* con parámetros $m \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$ (en este caso usaremos la notación $\mathrm{N} \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$) si su ley es una medida de Gauss sobre $\mathbb{R}$. En el caso en que $m = 0$ y $\sigma^2 = 1$, decimos que N sigue una ley gaussiana estándar, y se denota por $\mathrm{N} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Recordemos que si una variable aleatoria X es integrable con respecto a la medida de probabilidad $\mathbb{P}$, entonces se define la *esperanza de* X como:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\,\mathrm{d}\omega) = \int X\,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Un resultado de teoría de la medida [?, Teorema 4.10.2], afirma que la medida imagen $\mathbb{P}_X$, es la única medida sobre $\mathbb{R}$ tal que para toda función medible y acotada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se tiene

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathbb{P}_X(\,\mathrm{d}x).$$

Si X es una variable aleatoria con esperanza finita, entonces se define la *varianza de* X como:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2\,.$$

Ahora, sean X y Y variables aleatorias con esperanza finita, y supongamos que la esperanza de XY es finita. Entonces, definimos la *covarianza de* X *y* Y como:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\right] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Definición 4. La función característica (o transformada de Fourier) de una variable aleatoria X está dada por la función $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right], \quad t \in \mathbb{R}.$$

En el caso en que tengamos una variable aleatoria N con ley gaussiana, su función característica es (ver [?, Capítulo 5, §7]):

$$\varphi_{\mathrm{N}}(t) = e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Recordemos que la ley de una variable aleatoria está determinada por su función característica [?, Teorema 8.2.4], es decir, si existe una variable aleatoria cuya función característica coincide con la de la variable aleatoria N, entonces ésta sigue una ley gaussiana.

A continuación se darán algunas propiedades sobre variables aleatorias gaussianas.

Proposición 5. Se tienen las siguientes propiedades para variables aleatorias que siguen una ley gaussiana:

1. Si $\mathrm{N} \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, entonces la función generadora de momentos de N es:

$$M_{\mathrm{N}}(t) := \mathbb{E}\left[e^{t\mathrm{N}}\right] = e^{tm}e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

   donde se cumple que $\mathbb{E}[e^{t\mathrm{N}}] < \infty$.

2. Sean $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2$ variables aleatorias independientes, con $\mathrm{N}_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ y $\mathrm{N}_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, entonces

$$\mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

3. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $\mathrm{N} \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, entonces

$$a\,\mathrm{N} + b \sim \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2).$$

Demostración. 1. Si $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, entonces para $t \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \mathbb{E}\left[e^{tY}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}e^{-\frac{y^2-2ty}{2}}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-t)^2}{2}}\,\mathrm{d}y = e^{\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z = e^{\frac{t^2}{2}}. \end{aligned}$$

Ahora, si $\mathrm{N} \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, entonces $Y = \dfrac{\mathrm{N}-m}{\sigma^2} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Entonces, para $t \in \mathbb{R}$

$$M_{\mathrm{N}}(t) = \mathbb{E}\left[e^{t\,\mathrm{N}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{t\left(m+\sigma^2 Y\right)}\right] = e^{tm}\mathbb{E}\left[e^{t\sigma^2 Y}\right] = e^{tm}M_Y(t\sigma^2) = e^{tm}e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

2. Si $\mathrm{N}_1 \sim \mathcal{N}(m_1,\sigma_1^2)$ y $\mathrm{N}_2 \sim \mathcal{N}(m_2,\sigma_2^2)$, sean φ_{N_1} y φ_{N_2} las funciones características de N_1 y N_2, es decir,

$$\varphi_{\mathrm{N}_1}(t) = e^{itm_1-\frac{\sigma_1^2 t}{2}} \quad \text{y} \quad \varphi_{\mathrm{N}_2}(t) = e^{itm_2-\frac{\sigma_2^2 t}{2}},$$

como N_1 y N_2 son variables aleatorias independientes, se tiene

$$\varphi_{\mathrm{N}_1}(t)\varphi_{\mathrm{N}_1}(t) = e^{it(m_1+m_2)}e^{-t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)/2} = \varphi_{\mathrm{N}_1+\mathrm{N}_2}(t),$$

y como la función característica caracteriza la ley de la variable aleatoria, entonces podemos concluir que

$$\mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2 \sim \mathcal{N}(m_1+m_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

3. Si $\mathrm{N} \sim \mathcal{N}(0,1)$, entonces $Y = a\,\mathrm{N} + b$ es una variable aleatoria gaussiana, y tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[a\,\mathrm{N}+b] = a\mathbb{E}[\mathrm{N}] + b = am + b, \\ \mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}(a\,\mathrm{N}+b) = a^2\,\mathrm{Var}(\mathrm{N}) = a^2\sigma^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a\,\mathrm{N}+b \sim \mathcal{N}(am+b, a^2\sigma^2)$.

■

El siguiente resultado caracteriza a los momentos de una variable aleatoria que sigue una ley gaussiana estándar.

Proposición 6. Si $\mathrm{N} \sim \mathcal{N}(0,1)$, entonces los momentos de la variable aleatoria N son:

$$\mathbb{E}[\mathrm{N}^n] = \begin{cases} \dfrac{(2n)!}{2^n n!} & \text{si n es par} \\ 0 & \text{si n es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Primero, notemos que se tiene lo siguiente debido al teorema de convergencia dominada,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{it\,\mathrm{N}}\right] &= \mathbb{E}\left[1 + (it\,\mathrm{N}) + \frac{(it\,\mathrm{N})^2}{2!} + \frac{(it\,\mathrm{N})^3}{3!} + \frac{(it\,\mathrm{N})^4}{4!} + \cdots + \frac{(it\,\mathrm{N})^n}{n!} + \cdots\right] \\ &= 1 + i\mathbb{E}\left[\mathrm{N}\right]t + \frac{i^2\mathbb{E}\left[\mathrm{N}^2\right]}{2!}t^2 + \frac{i^3\mathbb{E}\left[\mathrm{N}^3\right]}{3!}t^3 + \frac{i^4\mathbb{E}\left[\mathrm{N}^4\right]}{4!}t^4 + \cdots + \frac{i^n\mathbb{E}\left[\mathrm{N}^n\right]}{n!}t^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n\mathbb{E}\left[\mathrm{N}^n\right]}{n!}t^n. \end{aligned}$$

Como la función característica de una variable aleatoria normal estándar es $\varphi_{\mathrm{N}}(t) = e^{-t^2/2}$. Entonces, veamos cuál es su serie de potencias:

$$
\begin{aligned}
e^{-t^2/2} &= 1 + \left(-\frac{t^2}{2}\right) + \frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^3}{3!} + \cdots + \frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^n}{n!} + \cdots \\
&= 1 - \frac{t^2}{1!2^1} + \frac{t^4}{2!2^2} - \frac{t^6}{3!2^3} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!2^n} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n} t^{2n}.
\end{aligned}
$$

Ahora, identificamos los coeficientes de $\mathbb{E}\left[e^{it\mathrm{N}}\right]$ y de $e^{-t^2/2}$, y llegamos a que

$$
\mathbb{E}[\mathrm{N}^n] = \begin{cases} \dfrac{(2n)!}{2^n n!} & \text{si n es par,} \\ 0 & \text{si n es impar.} \end{cases}
$$

■

Ahora consideraremos variables aleatorias con valores sobre $\mathbb{R}^d$, es decir, vectores aleatorios. A los elementos de $\mathbb{R}^d$ los tomaremos como vectores columna.

Definición 7. Sea $\mathrm{N} = (\mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_d)$ un vector aleatorio de dimensión d. Se dice que N es un vector aleatorio gaussiano de dimensión d, si toda combinación lineal de sus coordenadas sigue una ley gaussiana para $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$, es decir,

$$
t \cdot \mathrm{N} = \sum_{k=1}^{d} t_k \, \mathrm{N}_k \, .
$$

Si $\mathrm{N} = (\mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_d)$ es un vector aleatorio gaussiano, entonces cada coordenada es una variable aleatoria gaussiana; sin embargo, el recíproco es falso. En efecto, sean Y y Z dos variables aleatorias independientes tales que Y sigue una ley gaussiana estándar y tal que $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = -1) = 1/2$. Nótese que $W = ZY$ es una variable aleatoria gaussiana. Sin embargo, (Y, W) no es un vector aleatorio gaussiano ya que $Y + W$ no es una variable aleatoria gaussiana: $\mathbb{P}(Y + W = 0) = 1/2$.

Definición 8. La función característica de un vector aleatorio gaussiano N es la función $\varphi_N : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ dada por:

$$
\begin{aligned}
\varphi_N(t) &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{i \sum_{k=1}^{d} t_k \, \mathrm{N}_k\right\}\right] \\
&= \exp\left(i \sum_{k=1}^{d} t_k m_k - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{d} t_k t_l C_{k,l}\right),
\end{aligned}
$$

para $t \in \mathbb{R}^d$ y donde $C = (C_{k,l})_{d \times d}$ es la matriz de covarianzas del vector aleatorio N, para $k, l = 1, \ldots, d$.

En consecuencia la ley de un vector aleatorio gaussiano está determinada por su media y su matriz de covarianzas. Se denotara como $\mathcal{N}(m, C)$, donde $m = (m_1, \ldots, m_d)$ es el vector de medias con $m_k = \mathbb{E}[\mathrm{N}_k]$ para $k = 1, \ldots, d$.

Proposición 9. La matriz de covarianzas C de un vector aleatorio gaussiano N es tal que, para toda $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k,l=1}^{d} t_k t_l C_{k,l} \geq 0,$$

es decir, C es una matriz definida positiva.

Demostración. Por definición de la matriz C y utilizando la definición de covarianza, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{k,l=1}^{d} t_k t_l C_{k,l} &= \sum_{k,l=1}^{d} t_k t_l \operatorname{Cov}(\mathrm{N}_k, \mathrm{N}_l)\\ &= \sum_{k,l=1}^{d} t_k t_l \mathbb{E}\left[(\mathrm{N}_k - \mathbb{E}[\mathrm{N}_k])(\mathrm{N}_l - \mathbb{E}[\mathrm{N}_l])\right],\end{aligned}$$

como la suma anterior es finita,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{k,l=1}^{d} t_k t_l (\mathrm{N}_k - \mathbb{E}[\mathrm{N}_k])(\mathrm{N}_l - \mathbb{E}[\mathrm{N}_l])\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k,l=1}^{d} t_k (\mathrm{N}_k - \mathbb{E}[\mathrm{N}_k])\right)^2\right]\\ &= \operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{d} t_k \mathrm{N}_k\right) \geq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto C es definida positiva. ■

En el siguiente resultado, se muestra cómo construir un vector aleatorio gaussiano con vector de medias y matriz de covarianzas dados.

Teorema 10. Sea $m \in \mathbb{R}^d$, y sea C una matriz simétrica y definida positiva de tamaño $d \times d$. Entonces existe un vector gaussiano de dimensión d, con media m y matriz de covarianza C.

Demostración. Consideremos d variables aleatorias $Y_1, \ldots, Y_d$, las cuales son gaussianas estándar e independientes, es decir, tenemos el siguiente vector aleatorio gaussiano $Y = (Y_1, \ldots, Y_d)$ y sea $m = (m_1, \ldots, m_d)$ un vector de medias.

Por otra parte, como toda matriz definida positiva admite raíz cuadrada, entonces podemos encontrar una matriz simétrica $D = (D_{k,l})_{d \times d}$ tal que $D^2 = C$. Por lo que se tiene la construcción $\mathrm{N} = DY + m$:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{N}_1 \\ \mathrm{N}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{N}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & \cdots & D_{1,d} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & \cdots & D_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{d,1} & D_{d,2} & \cdots & D_{d,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_d \end{pmatrix}.$$

Entonces N es un vector aleatorio gaussiano de media m (debido a que suma de variables aleatorias gaussianas independientes es gaussiana, y la combinación lineal de componentes de $DY+m$, es una combinación lineal de $Y_1,\ldots,Y_d$).

Para determinar a la matriz de covarianzas, hay que notar que

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\mathrm{N}_k,\mathrm{N}_l) &= \mathbb{E}\left[(\mathrm{N}_k - m_k)(\mathrm{N}_l - m_l)\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^d D_{k,i}Y_i\right)\left(\sum_{j=1}^d D_{l,j}Y_j\right)\right]\\ &= \sum_{i,j=1}^d D_{k,i}D_{l,j}\mathbb{E}[Y_iY_j].\end{aligned}$$

donde $\mathbb{E}[Y_iY_j]=1$ si $i=j$, y $\mathbb{E}[Y_iY_j]=0$ si $i\neq j$. Lo anterior nos lleva a que

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\mathrm{N}_k,\mathrm{N}_l) &= \sum_{i=1}^d D_{k,i}D_{l,i}\\ &= \left(DD^t\right)_{k,l},\end{aligned}$$

donde D^t es la transpuesta de D. Por lo que, la matriz de covarianzas de N es DD^t y como la matriz D es simétrica, se tiene $DD^t = D^2 = C$. De este modo, se ha probado que N es un vector aleatorio gaussiano de media m y matriz de covarianza C. ■

Teorema 11 (Densidad gaussiana de dimensión d). Sea m un vector de $\mathbb{R}^d$ y sea C una matriz simétrica y definida positiva de tamaño $d\times d$. Si $\det(C)\neq 0$ y $C^{-1}=(C^{-1}_{k,l})_{d\times d}$ denota a la matriz inversa de C, entonces la ley gaussiana de dimensión d, denotada por $\mathcal{N}(m,C)$, es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^d$, la cual tiene por densidad:

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(C)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^d C^{-1}_{k,l}(x_k-m_k)(x_l-m_l)\right).$$

Proposición 12. Sea $\mathrm{N}=(\mathrm{N}_1,\ldots,\mathrm{N}_d)$ un vector aleatorio gaussiano. Para que las variables aleatorias $\mathrm{N}_1,\ldots,\mathrm{N}_d$ sean independientes es necesario y suficiente que la matriz de covarianzas de N sea diagonal.

Demostración. Si las variables aleatorias $\mathrm{N}_1,\ldots,\mathrm{N}_d$ son independientes, se sigue que $\mathrm{Cov}(\mathrm{N}_k,\mathrm{N}_l)=0$ para toda $k\neq l$, es decir, la matriz de covarianzas es diagonal.

Para el recíproco, utilizaremos la construcción utilizada en la demostración del Teorema 10, es decir, $\mathrm{N}=DY+m$. Si la matriz C es diagonal, entonces la matriz D también es diagonal: $D=\mathrm{diag}(D_{11},\ldots,D_{dd})$. Por lo tanto $\mathrm{N}_k = D_{kk}Y_k + m_k$ para $k=1,\ldots,d$. Como $Y_1,\ldots,Y_d$ son variables aleatorias gaussianas independientes, entonces podemos deducir la independencia de las variables $\mathrm{N}_1,\ldots,\mathrm{N}_d$. ■

La prueba de la proposición anterior nos muestra que si $(\mathrm{N}_1,\ldots,\mathrm{N}_d,Y_1,\ldots,Y_n)$ es un vector gaussiano, entonces $(\mathrm{N}_1,\ldots,\mathrm{N}_d)$ y $(Y_1,\ldots,Y_n)$ son independientes si y sólo si $\mathrm{Cov}(\mathrm{N}_k,Y_l)=0$, para $k=1,\ldots,d$ y $l=1,\ldots,n$.

2. Procesos estocásticos, el teorema de extensión de Kolmogorov y el criterio de continuidad de Kolmogorov

Se discutirá un resultado central en la teoría de la probabilidad, el teorema de extensión de Kolmogorov, el cual permite construir medidas sobre espacios de dimensión infinita y, de esta manera, construir procesos estocásticos. Este teorema básicamente nos está dando la existencia de procesos estocásticos sobre un espacio de probabilidad, pero de los cuales, no conocemos como es el comportamiento de sus trayectorias, para lo cual es útil el teorema de continuidad de Kolmogorov.

Primero introduciremos las herramientas necesarias para la comprensión del teorema de extensión de Kolmogorov.

Denotaremos por $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}_+$ a $\mathbb{R}$, al cual llamaremos *espacio de trayectorias*. Y consideremos a la siguiente familia de conjuntos, que llamaremos cilindros:

$$\{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) : f(t_1) \in I_1, \dots, f(t_d) \in I_d\},$$

con $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}_+$ y donde $I_1, \dots, I_d$ son intervalos de la forma $(a_k, b_k]$. Denotaremos por $\mathscr{T}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ a la σ-álgebra de $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ generada por esta familia.

Definición 13. Un proceso estocástico definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, es una familia de variables aleatorias $(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$, indexadas por un conjunto $\mathbf{T}$, las cuales son medibles con respecto a $\mathcal{F}$.

A menudo se considera $\mathbf{T} = [0, T]$ con $T < \infty$, $\mathbf{T} = [0, \infty)$ o $\mathbf{T} = \mathbb{R}$. En lo subsecuente tomaremos $\mathbf{T} = [0, \infty)$, es decir, trabajaremos con procesos estocásticos en tiempo continuo.

Un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ puede ser visto como una colección de funciones

$$X(\omega) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}),\ \omega \in \Omega$$

$$t \mapsto X(\omega)(t) := X_t(\omega)$$

estas funciones se llaman las *trayectorias del proceso estocástico* $(X_t)_{t\geq 0}$. La función

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathscr{T}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$$

es medible. Y la medida de probabilidad definida por

$$\mu(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)), \quad A \in \mathscr{T}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

es llamada la *ley del proceso estocástico* $(X_t)_{t\geq 0}$.

Para $t \geq 0$, denotamos por ω_t a la función que a cada $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ le asocia $f(t)$. El proceso estocástico $(\omega_t)_{t\geq 0}$ definido sobre un espacio de probabilidad $(\mathcal{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathscr{T}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mu)$ es llamado el *proceso estocástico canónico asociado a* X. Este es un proceso de ley μ.

En general, no se tiene una regularidad a *priori* de las trayectorias de un proceso estocástico, por lo que lo mínimo que se requiere es la medibilidad de las trayectorias.

Definición 14. Decimos que un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ es medible, si la función

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ \times \Omega &\to \Omega \\ (t,\omega) &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

es medible con respecto a $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{F}$, es decir, si para toda $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$, se tiene

$$\{(t,\omega) : X_t(\omega)\in A\}\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{F},$$

donde $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ denota la σ-álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}_+$.

Observación 15. La definición anterior nos dice que un proceso estocástico medible tiene trayectorias medibles.

Nuestro interés principal es en procesos estocásticos que tengan trayectorias continuas. Denotaremos al espacio de funciones continuas por $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ dotado de la σ-álgebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, la cual está generada por

$$\{f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) : f(t_1)\in I_1,\dots,f(t_d)\in I_d\},$$

con $t_1,\dots,t_d\in\mathbb{R}_+$.

Definición 16. Un proceso estocástico continuo es un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$, que toma valores sobre $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.

Si $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso continuo, entonces la función

$$X : (\Omega,\mathcal{F}) \to (\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}),\mathscr{B}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}))$$

es medible y la ley de X es la medida de probabilidad sobre $(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}),\mathscr{B}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}))$. Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 17. Un proceso estocástico continuo es medible.

Demostración. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico continuo. Primero demostraremos que para toda $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$\{(t,\omega)\in[0,1]\times\Omega : X_t(\omega)\in A\}\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{F}.$$

Para $n\in\mathbb{N}$, sea

$$X_t^n = X_{\frac{[2^n t]}{2^n}} \quad \text{con } t\in[0,1],$$

done $[\bullet]$ denota la parte entera. Ya que las trayectorias de X_t^n son constantes por pedazos, tenemos

$$\{(t,\omega)\in[0,1]\times\Omega : X_t^n(\omega)\in A\}\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{F}.$$

Por otra parte, para $t\in[0,1]$ y $\omega\in\Omega$ se tiene

$$\lim_{n\to+\infty} X_t^n = X_t,$$

lo cual implica que

$$\{(t,\omega) \in [0,1] \times \Omega : X_t(\omega) \in A\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}.$$

De la misma manera mostraremos que para toda $k \in \mathbb{N}$,

$$\{(t,\omega) \in [k,k+1] \times \Omega : X_t(\omega) \in A\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}.$$

Como

$$\{(t,\omega) \in \mathbb{R} \times \Omega : X_t(\omega) \in A\} = \bigcup_k \{(t,\omega) \in [k,k+1] \times \Omega : X_t(\omega) \in A\}$$

se deduce lo que queríamos mostrar. ■

2.1. El teorema de extensión de Kolmogorov

Como hemos visto, un proceso estocástico define una medida de probabilidad sobre el espacio $(\mathcal{A}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}), \mathscr{T}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}))$. En primer lugar, veremos que esta medida de probabilidad está completamente determinada por las leyes finito dimensionales del proceso estocástico:

Definición 18. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico. Para $t_1,\ldots,t_d \in \mathbb{R}_+$, denotamos por $\mu_{t_1,\ldots,t_d}$ a la ley del vector aleatorio $(X_{t_1},\ldots,X_{t_d})$, la cual es una medida de probabilidad sobre $\mathbb{R}^d$. A las medidas de probabilidad de este tipo las llamaremos leyes finito dimensionales del proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$.

Proposición 19. Si dos procesos estocásticos definidos sobre espacios de probabilidad distintos tienen las mismas leyes finito dimensionales, entonces decimos que tienen la misma ley.

La demostración de esta proposición puede consultarse en [**?**, Proposición 2.2].

El teorema de extensión de Kolmogorov afirma que, dada una familia de medidas de probabilidad definidas sobre los cilindros de $\mathscr{T}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, es posible construir un proceso estocástico cuyas leyes finito dimensionales están dadas por estas probabilidades.

Teorema 20 (**Teorema de extensión de Kolmogorov, 1933**)**.** Supongamos que para cada $t_1,\ldots,t_d \in \mathbb{R}_+$, tenemos una medida de probabilidad $\mu_{t_1,\ldots,t_d}$ sobre $\mathbb{R}^d$. Supongamos que esta medida de probabilidad verifica las dos condiciones:

- $\mu_{t_1,\ldots,t_d}(A_1 \times \cdots \times A_d) = \mu_{t_{\tau(1)},\ldots,t_{\tau(d)}}(A_{\tau(1)} \times \cdots \times A_{\tau(d)}), \quad A_k \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),$
  donde τ una permutación del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$;
- $\mu_{t_1,\ldots,t_d}(A_1 \times \cdots \times A_{d-1} \times \mathbb{R}) = \mu_{t_1,\ldots,t_{d-1}}(A_1 \times \cdots \times A_{d-1}), \quad A_k \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$

Entonces, existe una única medida de probabilidad μ sobre $(\mathcal{A}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}), \mathscr{T}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}))$ tal que para toda $t_1,\ldots,t_d \in \mathbb{R}_+$ y $A_1,\ldots,A_d \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ se tiene:

$$\mu\left(\omega_{t_1} \in A_1,\ldots,\omega_{t_d} \in A_d\right) = \mu_{t_1,\ldots,t_d}(A_1 \times \cdots \times A_d).$$

Para la demostración del teorema de extensión de Kolmogorov, se recomienda revisar [**?**, Capítulo 3, §4] o [**?**, Capítulo 7, §36].

Lo esencialmente interesante del teorema de extensión de Kolmogorov es la construcción de un proceso estocástico usando sus leyes finito dimensionales. Este teorema se utiliza a menudo para la construcción de procesos estocásticos gracias al siguiente resultado:

Corolario 21. Supongamos que para cada $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{R}_+$ tenemos una medida de probabilidad $\mu_{t_1,\ldots,t_d}$ sobre $\mathbb{R}^d$. Supongamos que esta medida de probabilidad verifica las condiciones del teorema de extensión de Kolmogorov.

Entonces, existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ definido sobre este espacio tal que sus leyes finito dimensionales de $(X_t)_{t\geq 0}$ están dadas por $\mu_{t_1,\ldots,t_d}$.

2.2. El criterio de continuidad de Kolmogorov

Como se vio anteriormente, el teorema de extensión de Kolmogorov 20 proporciona la existencia de procesos estocásticos. Sin embargo, no afirma nada sobre el comportamiento de las trayectorias de estos procesos.

El criterio de continuidad de Kolmogorov, precisa que, bajo ciertas condiciones, podemos trabajar con procesos estocásticos cuyas trayectorias sean bastante regulares en un sentido que a continuación se hará preciso.

Definición 22. Una función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, decimos que es hölderiana de exponente $\alpha > 0$, si existe una constante $c > 0$ tal que para toda $s, t \in \mathbb{R}_+$, se tiene

$$|f(t) - f(s)| \leq c|t - s|^\alpha.$$

Definición 23. Un proceso estocástico $(Y_t)_{t\geq 0}$ es una modificación del proceso $(X_t)_{t\geq 0}$, si para toda $t \geq 0$, se cumple

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

Nota 24. Si $(Y_t)_{t\geq 0}$ es una modificación del proceso $(X_t)_{t\geq 0}$, entonces $(Y_t)_{t\geq 0}$ tiene las mismas leyes finito dimensionales que $(X_t)_{t\geq 0}$ (ver [?]).

Cabe mencionar que las leyes finito dimensionales no determinan las trayectorias del proceso estocástico. Por ejemplo, tomemos $\Omega = [0, 1)$, $\mathcal{F} = \mathscr{B}([0, 1))$ y $\mathbb{P}$ la medida de Lebesgue. Definamos un proceso estocástico $(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$, con $\mathbf{T} = [0, 1]$, como sigue:

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \neq \omega \\ 1, & \text{si } t = \omega \end{cases}$$

Y para toda $\omega \in \Omega$, sea $Y_t(\omega) \equiv 0$ otro proceso estocástico que es modificación $X_t(\omega)$, para cada t. Los procesos estocásticos definidos tienen las mismas leyes finito dimensionales, pero sus trayectorias no son las mismas, ya que para X_t las trayectorias son discontinuas, mientras que para Y_t son continuas.

El siguiente teorema, da una condición suficiente para que un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ admita una modificación continua con trayectorias hölderianas.

Teorema 25 (Criterio de continuidad de Kolmogorov). Sean η, ε y c constantes positivas. Si un proceso estocástico $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$, con $T > 0$, está definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y si además para toda $s, t \in [0, T]$ se satisface

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^\eta\right] \leq c|t - s|^{1+\varepsilon},$$

entonces existe un proceso estocástico continuo con trayectorias hölderianas de exponente α, para toda $\alpha \in (0, \varepsilon/\eta)$, que es una modificación de X. Es decir X admite una modificación continua.

La demostración de este teorema, se puede consultar en [**?**, Capítulo 2, Teorema 2.1].

3. Procesos gaussianos y el movimiento browniano

3.1. Procesos Gaussianos

El teorema de extensión de Kolmogorov es la herramienta básica para demostrar la existencia de un proceso estocástico cuyas leyes finito dimensionales están dadas. En esta sección, veremos la forma en que se puede utilizar este teorema para probar la existencia de los procesos gaussianos.

Definición 26. Un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es llamado proceso estocástico gaussiano si para toda $d \geq 1$ y para toda $(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d$, el vector aleatorio $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_d})$ sigue una ley gaussiana. Dicho de otro modo, si todas sus leyes finito dimensionales siguen una ley gaussiana.

La ley de un proceso gaussiano está caracterizadas por su función de medias

$$m(t) = \mathbb{E}[X_t],$$

y su función de covarianzas

$$R(s,t) = \mathbb{E}\left[(X_t - m(t))(X_s - m(s))\right].$$

La función de densidad de la ley finito dimensional $\mu_{t_1,\ldots,t_d}$ de la densidad gaussiana con respecto a la medida de Lebesgue es:

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{d} (x_k - m(t_k))\left(\Sigma^{-1}\right)_{k,l}(x_l - m(t_l))\right),$$

donde, $\Sigma_{k,l} = R(t_k, t_l)$.

Hay que notar que la función de covarianza es simétrica $R(s,t) = R(t,s)$ y positiva definida, es decir, para cualesquiera $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ y $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}\sum_{k,l=1}^{d} a_k a_l R(t_k, t_l) &= \sum_{k,l=1}^{d} a_k a_l \mathbb{E}\left[(X_{t_k} - m(t_k))(X_{t_l} - m(t_l))\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{d}(X_{t_k} - m(t_k))\right)^2\right] \geq 0.\end{aligned}$$

Del teorema de extensión de Kolmogorov 20, se tiene el siguiente resultado para procesos gaussianos, el cual exhibe la existencia de los procesos gaussianos.

Teorema 27 (**Teorema de extensión de Kolmogorov para procesos gaussianos**). Sea $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función y $R : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función que es simétrica y positiva definida. Entonces, existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un proceso gaussiano $(X_t)_{t\geq 0}$ definido sobre este espacio, el cual tiene a m por función de media y a R por función de covarianza.

Demostración. Definimos una medida de probabilidad sobre $\mathbb{R}^d$ como

$$\mu_{t_1,\dots,t_d} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{d} (x_k - m(t_k)) \left(\Sigma^{-1}\right)_{k,l} (x_l - m(t_l)) \right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_d,$$

donde $\Sigma_{k,l} = R(t_k, t_l)$ y $\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_d$ es la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^d$. Por hipótesis sobre la función de covarianza R, se tiene que Σ es una matriz simétrica y definida positiva, de modo que $\mu_{t_1,\dots,t_d}$ sigue una ley gaussiana. Esta medida de probabilidad cumple con las condiciones del teorema de extensión de Kolmogorov 20, y aplicando el corolario 21, se sigue que existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ cuyas leyes finito dimensionales están dadas por $\mu_{t_1,\dots,t_d}$, la cual es la ley de un proceso gaussiano. ■

3.2. El movimiento browniano

Gracias al teorema de extensión de Kolmogorov para procesos gaussianos 27 y al teorema de continuidad de Kolmogorov 25, podemos demostrar la existencia del movimiento browniano, el cual es un proceso continuo. Además, se darán algunas de las propiedades más importantes de este proceso estocástico.

Teorema 28. Existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un proceso estocástico gaussiano $X = (X_t)_{t\geq 0}$, con función de media 0 y función de covarianza dada por

$$R(t, s) = \mathbb{E}[X_s X_t] = \mathrm{mín}(s, t).$$

Por otro lado, para toda $d \geq 0$ y $0 \leq s \leq t$, por la proposición 6, se tiene

$$\mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^{2d}\right] = \frac{(2d)!}{2^d d!}(t-s)^d,$$

y del teorema de continuidad de Kolmogorov 25, existe una modificación continua $(W_t)_{t\geq 0}$ del proceso $(X_t)_{t\geq 0}$, cuyas trayectorias son hölderianas de exponente α, con $\alpha \in \left[0, \frac{d-1}{2d}\right)$.

Una consecuencia de lo antes dicho es que, como modificación de $(X_t)_{t\geq 0}$, el proceso $(W_t)_{t\geq 0}$ tiene las mismas leyes finito dimensionales que $(X_t)_{t\geq 0}$, es decir, tienen la misma ley.

Definición 29 (**Definición 1. Movimiento browniano**). Un proceso estocástico continuo $B = (B_t)_{t\geq 0}$, se llama movimiento browniano de dimensión 1, si es un proceso gaussiano con función de media

$$m(t) = \mathbb{E}[W_t] = 0,$$

y función de covarianza

$$R(t, s) = \mathbb{E}[W_s W_t] = \mathrm{mín}(s, t).$$

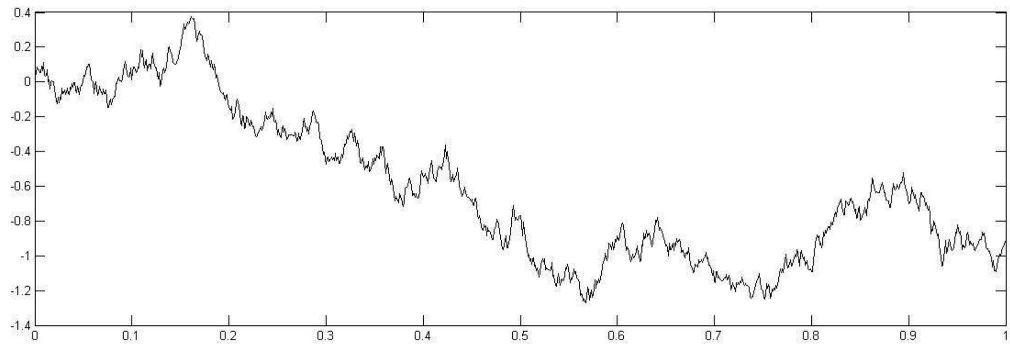


Figura 1: Trayectorias del movimiento browniano sobre el intervalo $[0, 1]$.

Nota 30. Tenemos que la función $R : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es simétrica y para $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{R}_+$ y $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$, es definida positiva, es decir,

$$\sum_{k,l=1}^{d} a_k a_l R(t_k, t_l) = \sum_{k,l=1}^{d} a_k a_l \min(t_k, t_l) \geq 0$$

Para esto, vamos a introducir las funciones $f_t(x) = \mathbb{1}_{[0,t]}(x)$ y $f_s(x) = \mathbb{1}_{[0,s]}(x)$ ara obtener que

$$\int_0^{\infty} f_t(x) f_s(x) = \min(s, t)$$

si y sólo si $x \in [0, t]$ y simultáneamente $x \in [0, s]$; si y sólo si $x \in [0, \min(s, t)]$. Ahora sustituyendo está expresión, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^{d} a_k a_l \min(t_k, t_l) &= \sum_{k,l=1}^{d} a_k a_l \int_0^{\infty} f_{t_k}(x) f_{t_l}(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} \left(\sum_{k,l=1}^{d} a_k f_{t_k}(x) a_l f_{t_l}(x) \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{d} a_k f_{t_k}(x) \right)^2 \mathrm{d}x \geq 0.
\end{aligned}$$

Definición 31 (Definición 2. Movimiento browniano). Un proceso estocástico continuo $B = (B_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano de dimensión 1 si y sólo si

(1) *Comienza en cero.* $W_0 = 0$.

(2) *Incrementos independientes.* Para los tiempos $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_d$, los incrementos $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_d} - W_{t_{d-1}}$ son variables aleatorias independientes.

(3) *Incrementos estacionarios.* Si $0 \leq s < t$, entonces $W_t - W_s$ sigue una ley gaussiana con media cero y varianza $t - s$.

$\boxed{\textbf{Definición 1}} \Rightarrow \boxed{\textbf{Definición 2}}$ Por hipótesis sabemos que $(B_t)_{t\geq 0}$ es un proceso gaussiano con función de media $m(t) = \mathbb{E}[W_t] = 0$ y función de covarianza $R(t,s) = \mathbb{E}[W_s W_t] = \text{mín}(s,t)$.

(1) Tenemos que $\mathbb{E}[B_0] = 0$ y que $\mathbb{E}[B_0^2] = \mathbb{E}[B_0 B_0] = 0$. Por lo que la variable aleatoria B_0 tiene esperanza cero y varianza cero, de lo cual podemos concluir que $B_0 = 0$.

(2) Para demostrar que los incrementos independientes, primero vamos a probar que dos incrementos son independientes y extenderlo a cualquier numero de intervalos. Para esto sean $r \leq s \leq t \leq u$, entonces

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(B_s - B_r, B_u - B_t) &= \mathbb{E}[(B_s - B_r)(B_u - B_t)] \\
&= \mathbb{E}[B_s B_u - B_s B_t - B_r B_u + B_r B_t] \\
&= \mathbb{E}[B_s B_u] - \mathbb{E}[B_s B_t] - \mathbb{E}[B_r B_u] + \mathbb{E}[B_r B_t] \\
&= \text{Cov}(B_s, B_u) - \text{Cov}(B_s, B_t) - \text{Cov}(B_r, B_u) + \text{Cov}(B_r, B_t) \\
&= \text{mín}(s,u) - \text{mín}(s,t) - \text{mín}(r,u) + \text{mín}(r,t) \\
&= s - s - r + r = 0
\end{aligned}$$

Por lo que tenemos que los incrementos no son correlacionados ya que $\text{Cov}(B_s - B_r, B_u - B_t) = 0$, pero no basta demostrar esto para decir que $B_s - B_r$ es independiente de $B_u - B_t$. Para esto, vamos a ver que $(B_s - B_r, B_u - B_t)$ es un vector gaussiano. De la definición, tenemos

$$\lambda_1(B_s - B_r) + \lambda_2(B_u - B_t) = \lambda_1 B_s - \lambda_1 B_r + \lambda_2 B_u - \lambda_2 B_t \sim \mathcal{N}$$

ya que el movimiento browniano B es gaussiano, entonces cualquier combinación lineal de las distribuciones finito dimensionales B_r, B_s, B_t, B_u tienen una ley gaussiana.

(3) Por demostrar que $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, la cual se sigue de manera directa, ya que (B_t, B_s) es un vector Gaussiano y por lo tanto cualquier combinación lineal de sus componentes tiene distribución gaussiana y por lo tanto $B_t - B_s \sim \mathcal{N}$. Ahora, tenemos

$$\mathbb{E}[B_t - B_s] = \mathbb{E}[B_t] - \mathbb{E}[B_s] = 0$$

y

$$\begin{aligned}
\text{Var}(B_t - B_s) &= \text{Cov}(B_t - B_s, B_t - B_s) \\
&= \mathbb{E}[(B_t - B_s)(B_t - B_s)] \\
&= \mathbb{E}[B_t B_t - B_t B_s - B_s B_t + B_s B_s] \\
&= \mathbb{E}[B_t B_t] - \mathbb{E}[B_t B_s] - \mathbb{E}[B_s B_t] + \mathbb{E}[B_s B_s] \\
&= \text{mín}(t,t) - \text{mín}(t,s) - \text{mín}(s,t) + \text{mín}(s,s) \\
&= t - 2s + s = t - s
\end{aligned}$$

Por lo tanto $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

$\boxed{\textbf{Definición 2}} \Rightarrow \boxed{\textbf{Definición 1}}$ Ahora, por hipótesis sabemos que $B_0 = 0$, y que el m.b. B tiene incrementos independientes y estacionarios.

Primero, vamos a considerar cualquier combinación lineal de incrementos de $(B_t)_{t\geq 0}$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_{t_k}, \quad \text{donde } t_k \text{ son algunos puntos.}$$

Supongamos que $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_{t_k} &= \lambda_1 B_{t_1} + \lambda_2 B_{t_2} + \cdots + \lambda_n B_{t_n} \\
&= \lambda_n (B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) + (\lambda_n + \lambda_{n-1}) B_{t_{n-1}} + \sum_{k=1}^{n-2} \lambda_k B_{t_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} d_k (B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \sim \mathcal{N},
\end{aligned}$$

ya que los incrementos $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \sim \mathcal{N}(0, t_n - t_{n-1})$ y son independientes por la propiedad (2), entonces $(B_{t_1}, B_{t_2}, ..., B_{t_n})$ es un vector gaussiano y por lo tanto $(B_t)_{t\geq 0}$ es un proceso gaussiano.

Ahora, notemos que $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, ya que

$$m(t) = \mathbb{E}[B_t] = \mathbb{E}[B_t - B_0] = 0$$

y

$$\begin{aligned}
R(t,s) &= \mathrm{Cov}(B_t, B_s) = \mathbb{E}[B_t B_s] \\
&= \mathbb{E}[B_t B_s - B_s^2 + B_s^2] \\
&= \mathbb{E}[(B_t - B_s) B_s + B_s^2] \\
&= \mathbb{E}[B_t - B_s]\mathbb{E}[B_s] + \mathbb{E}[B_s^2] \\
&= \mathbb{E}[(B_s - B_0)^2] = s = \text{mín}(t,s), \text{ con } s < t
\end{aligned}$$

Ejemplo 32. Para $\lambda > 0$, el proceso $B_t^\lambda = \left\{ \frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t}, t \geq 0 \right\}$ es un movimiento browniano? Tenemos que,

$$\mathbb{E}[B_t^\lambda] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t}\right] = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[B_{\lambda^2 t}] = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[B_r] = 0$$

y

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(B_t^\lambda, B_s^\lambda) &= \mathbb{E}[B_t^\lambda B_s^\lambda] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t} \frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 s}\right] = \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}\left[B_{\lambda^2 t} B_{\lambda^2 s}\right] \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \text{mín}\left(\lambda^2 t, \lambda^2 s\right) = \frac{1}{\lambda^2} \lambda^2 \text{mín}\left(t, s\right) = \text{mín}(t,s)
\end{aligned}$$

Y tenemos que $(B_{\lambda^2 t_1}, ..., B_{\lambda^2 t_n})$ es gaussiano ya que B es un movimiento browniano.

El movimiento browniano definido en 29, cumple con las siguientes propiedades:

- *Autosimilitud.* Para toda $a > 0$, el proceso estocástico $\left(a^{-1/2}W_{at}\right)_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano.

- *Inversión en el tiempo.* El proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ definido por

$$X_t = \begin{cases} tW_{1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

  es un movimiento browniano.

3.2.1. La variación cuadrática del movimiento browniano

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función con valores en los reales definida sobre un intervalo $[a,b]$ y supongamos que $\Pi_n := \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ es una partición de $[a,b]$. Definimos la norma de la partición como

$$||\Pi_n|| := \max_{1\leq k\leq n}(t_k - t_{k-1}).$$

Entonces, para toda $p > 0$ sea

$$Q_p(f;a,b,\Pi_n) := \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|^p$$

y nuestra meta es conocer el comportamiento en el límite de $Q_p(B;a,b,\Pi_n)$ cuando B es un movimiento browniano.

Definición 33. Definimos la p-variación de f sobre un intervalo $[a,b]$ como

$$V_p(f;a,b) := \sup_{\Pi_n} Q_p(f;a,b,\Pi_n).$$

Si $V_p(f;a,b) < \infty$ decimos que f tiene p-variación finita sobre $[a,b]$.

Proposición 34. Sea $(\Pi_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de particiones sobre el intervalo $[0,T]$, entonces la sucesión $\left(\sum_{k=1}^{n}(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2\right)_{n\geq 1}$ converge en L^2 a una variable aleatoria determinista T, es decir,

$$\mathrm{L}^2(\Omega) - \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - T\right)^2\right] = 0.$$

Demostración. Para empezar, notemos que

$$\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) = T - 0$$

y sea

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n}(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - (T-0) = \sum_{k=1}^{n}\left[(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1})\right] = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

donde $X_k := (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1}) = (\Delta_k B)^2 - (\Delta_k t)$ y notemos que

$$Y_n^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n X_k X_j = \sum_{k=1}^n X_k^2 + 2\sum_{k<j} X_k X_j$$

Sabemos que los incrementos del movimiento browniano son independientes, entonces $\mathbb{E}[X_k X_j] = 0$ para $k \neq j$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_n^2] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k^2 + 2\sum_{k<j} X_k X_j\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\sum_{k<j} X_k X_j\right] \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k^2\right] + 2\sum_{k<j} \mathbb{E}\left[X_k X_j\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k^2\right].
\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_k^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left((\Delta_k B)^2 - \Delta_k t\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\Delta_k B)^4 - 2(\Delta_k B)^2 \Delta_k t + (\Delta_k t)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\Delta_k B)^4\right] - 2\Delta_k t \mathbb{E}\left[(\Delta_k B)^2\right] + (\Delta_k t)^2 \\
&= 3(\Delta_k t)^2 - 2(\Delta_k t)(\Delta_k t) + (\Delta_k t)^2 \\
&= 2(\Delta_k t)^2 = 2(t_k - t_{k-1})^2,
\end{aligned}$$

ya que el cuarto momento de una variable aleatoria gaussiana con media cero y varianza $(t_k - t_{k-1})$ es $3(\Delta_k t)^2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_n^2] &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k^2\right] = 2\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})^2 \\
&\leq 2||\Pi_n|| \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = 2T||\Pi_n|| \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.
\end{aligned}$$

■

Entonces la proposición anterior, junto con la continuidad de las trayectorias del movimiento browniano, nos lleva a que

$$\sup_n \sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| = \infty \quad \text{c.s.},$$

es decir, el movimiento browniano no es de variación finita. En efecto, ya que si suponemos que $\sup_n \sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| < \infty$. Entonces,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{k=1}^n (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 \\
&\leq \sup_k |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| \sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| \\
&\leq \sup_k |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| \sup_n \sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Entonces, $\sum_{k=1}^{n}(B_{t_k}-B_{t_{k-1}})^2=0$ casi seguramente, lo cual es una contradicción, ya que sabemos que la variación cuadrática es T.

3.2.2. Filtraciones

Cuando estudiamos un fenómeno aleatorio, se obtiene información a cada instante de tiempo. Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, y sea $X=(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico con valores en los reales.

Un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ puede ser visto como un sistema aleatorio que evoluciona en el tiempo, este sistema lleva con él cierta información. Más precisamente, si observamos las trayectorias de un proceso estocástico hasta un tiempo $t\geq 0$, somos capaces de decidir si un evento $A\in\sigma(X_s,s\leq t)$ ocurre (denotaremos por $\sigma(X_s,s\leq t)$ a la σ-álgebra más pequeña que hace que todas las variables aleatorias $\{(X_{t_1},\cdots,X_{t_n}),0\leq t_1\leq\cdots\leq t_n\leq t\}$ sean medibles).

Esta noción de información que lleva un proceso estocástico se modela por medio de las filtraciones.

Definición 35. Una filtración sobre un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ es una familia creciente $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de sub σ-álgebras de $\mathcal{F}$, tales que

$$\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t\subset\cdots\subset\mathcal{F},\ \text{para } 0\leq s\leq t.$$

Observación 36. Aquí $\mathcal{F}_t$ es una familia de eventos que pueden ocurrir hasta in instante t.

Un espacio de probabilidad dotado con una filtración se le conoce como espacio de probabilidad filtrado, y se denota por $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$.

Definición 37. Un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ definido sobre $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, decimos que es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si la variable aleatoria X_t es medible con respecto a $\mathcal{F}_t$, para toda $t\geq 0$.

Si $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico definido sobre $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, entonces

$$\mathcal{F}_t:=\sigma(X_s,0\leq s\leq t)$$

es una filtración, y es llamada la filtración natural o filtración canónica asociada a dicho proceso.

Observación 38. Todo proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ es adaptado a su filtración natural.

Supongamos que tenemos un movimiento browniano $(B_t)_{t\geq 0}$ definido sobre un espacio de probabilidad, entonces su filtración natural es

$$\mathcal{F}_t:=\sigma(B_s,s\leq t).$$

Intuitivamente, está σ-álgebra contiene a todos los eventos que involucran a las variables del movimiento browniano hasta el tiempo t. Es la información o la historia que dispone $(B_t)_{t\geq 0}$ al tiempo t.

3.2.3. Propiedad de martingala del movimiento browniano

El concepto de martingala fue introducido por Jean Ville en 1939. Más adelante, Paul Lévy inició el desarrollo de la teoría y Doob demostró algunos de los resultados más importantes. Esta teoría proporciona herramientas para el estudio del movimiento browniano, una de ellas es empleando el *cálculo estocástico*, como lo desarrollo Kiyoshi Itô.

Definición 39 (Martingala)**.** Decimos que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ es una martingala con respecto a $\mathcal{F}_t$, si se cumplen las siguientes propiedades:

(i) X_t es $\mathcal{F}_t$-medible, para toda $t \geq 0$.

(ii) $\mathbb{E}\left[|X_t|\right] < \infty$.

(iii) Si $s \leq t$, entonces $\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s$.

Cabe mencionar que, la propiedad (iii) puede expresarse como:

$$E[X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s] = 0,$$

es decir, la esperanza condicional de los incrementos de una martingala es cero.

Ejemplo 40. El movimiento browniano $(B_t)_{t\geq 0}$ es una martingala con respecto a la filtración natural $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$:

(i) B_t es $\mathcal{F}_t$-medible, para toda $t \geq 0$, lo cual se sigue de la definición de $\mathcal{F}_t$.

(ii) $\mathbb{E}\left[|B_t|\right] < \infty$, ya que para $f > 0$ medible, tenemos

$$\mathbb{E}\left[f(B_t)\right] = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{e^{-x^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} dt < \infty.$$

(iii) Si $s \leq t$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[B_t \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[B_s + (B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[B_s \mid \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s\right] \quad (\text{ya que } B_s \text{ es } \mathcal{F}_s - \text{medible}) \\
&= B_s + \mathbb{E}\left[B_t - B_s\right] \quad (\text{ya que } \sigma(B_t - B_s) \text{ es independiente de } \mathcal{F}_s) \\
&= B_s.
\end{aligned}$$

Esta propiedad nos dice que, conociendo la historia de B hasta un tiempo s, la mejor predicción del valor futuro de B en un tiempo posterior t es, simplemente, el valor actual B_s.

Ejemplo 41. $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ es una martingala.

(i) B_t^2 es $\mathcal{F}_t$-medible, para toda $t \geq 0$, y sumas constantes es medible.

(ii) $\mathbb{E}\left[|B_t^2 - t|\right] < \infty$, de manera análoga al anterior.

(iii) Si $s \leq t$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(B_s + (B_t - B_s))^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - t \\
&= \mathbb{E}\left[B_s^2 + 2B_s(B_t - B_s) + (B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - t \\
&= \mathbb{E}\left[B_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + 2\mathbb{E}\left[B_s(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - t \\
&= B_s^2 + 2B_s\mathbb{E}[B_t - B_s] + \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] - t \\
&= B_s^2 + (t - s) + t = B_s^2 - s,
\end{aligned}$$

ya que $B_t - B_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$, tenemos que $\mathbb{E}[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s]$ y que $\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = t - s$.

3.2.4. Propiedad de Markov del movimiento browniano

La propiedad de Markov se refiere a la propiedad que tienen ciertos procesos estocásticos que *carecen de memoria*, es decir, cuando la distribución de probabilidad del valor futuro de una variable aleatoria únicamente depende de su valor presente, siendo independiente de la historia de dicha variable. Es decir, si conocemos un proceso estocástico $(X_u)_{u\geq 0}$ sobre el intervalo $[0, s]$, para la predicción del futuro de $(X_t)_{t\geq s}$ solo basta con conocerlo en el punto final X_s.

A los procesos que satisfacen esta condición se les conoce como procesos de Markov, y esté nombre se debe al matemático ruso Andrey Markov, quien desarrolló la teoría de las cadenas de Markov. Un ejemplo de un proceso de Markov, es el movimiento browniano.

Teorema 42 (Propiedad de Markov simple)**.** Supongamos que $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento browniano, y sea $s > 0$, entonces el proceso estocástico definido por

$$\widetilde{B}_t := \{B_{t+s} - B_s, t \geq 0\}$$

es un movimiento browniano que comienza en cero y que es independiente de la filtración

$$\mathcal{F}_s := \sigma(B_t, 0 \leq t \leq s).$$

Demostración. Por definición, para toda $t \geq 0$, el proceso $\widetilde{B}_t$ es un movimiento browniano con ley $\mathcal{N}(0, t + s - s) = \mathcal{N}(0, t)$.

Por otra parte, como los incrementos de $\widetilde{B}_t$ son los incrementos del proceso inicial $(B_t)_{t\geq 0}$, entonces podemos decir $\widetilde{B}_t$ tiene incrementos independientes.

Por último, la función $t \mapsto \widetilde{B}_t(\omega)$ es continua para casi todo ω, ya que: $s \mapsto B_s(\omega)$ es continua casi seguramente, y $t \mapsto B_{t+s}(\omega)$ es continua casi seguramente, por lo que diferencia de funciones continuas es continua. Por lo tanto $\widetilde{B}_t$ es un movimiento browniano.

Solo resta probar que $\widetilde{B}_t$ es independiente de la filtración $\mathcal{F}_s = \sigma(B_t, t \leq s)$.

Para mostrar esta independencia, debemos verificar la independencia de todos los vectores de $\widetilde{B}_t$ con todos los vectores de $(B_t)_{t\leq s}$.

Sean n y p dos enteros estrictamente positivos,

$$0 < t_1 < \cdots < t_n \;\text{ y }\; 0 < s_1 < \cdots < s_p < s.$$

Consideremos los vectores

$$V_n = (\widetilde{B}_{t_1}, \ldots, \widetilde{B}_{t_n}) = (B_{t_1+s} - B_s, \ldots, B_{t_n+s} - B_s)$$

y

$$V_p = \left(B_{s_1}, \ldots, B_{s_p}\right).$$

En conjunto, estos dos vectores forman un vector gaussiano (V_n, V_p), entonces la independencia de estos vectores es equivalente mostrar que la matriz de covarianzas de (V_n, V_p) es diagonal.

Recordemos que, si $\mathrm{N} = (\mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_d)$ es un vector aleatorio gaussiano. Para que las variables aleatorias $\mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_d$ sean independientes es necesario y suficiente que la matriz de covarianzas de N sea diagonal.

El resultado anterior, nos dice lo siguiente: si $(\mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_d, Y_1, \ldots, Y_n)$ es un vector aleatorio gaussiano, entonces $(\mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_d)$ y $(Y_1, \ldots, Y_n)$ son independientes si y sólo si $\mathrm{Cov}(\mathrm{N}_k, Y_l) = 0$, para $k = 1, \ldots, d$ y $l = 1, \ldots, n$.

Entonces, tenemos que, para $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, p$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(V_{t_i}, V_{s_j}\right) &= \mathbb{E}\left[V_{t_i} V_{s_j}\right] - \mathbb{E}\left[V_{t_i}\right] \mathbb{E}\left[V_{s_j}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(B_{t_i+s} - B_s\right) B_{s_j}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[B_{t_i+s} B_{s_j}\right] - \mathbb{E}\left[B_s B_{s_j}\right] \\
&= \text{mín}\{t_i + s, s_j\} - \text{mín}\{s, s_j\} \\
&= s_j - s_j \\
&= 0
\end{aligned}$$

Y decimos que V_n y V_p son independientes. Por lo tanto $\widetilde{B}_t$ es independiente de $\mathcal{F}_s$. ■

Heurísticamente, la propiedad de Markov fuerte afirma que el movimiento browniano comienza de nuevo en cada instante de tiempo determinado.

Es una propiedad importante del movimiento browniano ya que se cumple para una clase de tiempos aleatorios, los cuales reciben el nombre de tiempos de paro.

La idea es que dado un tiempo aleatorio T, vamos a decir que esté, es un tiempo de paro, si podemos decidir $\{T \leq t\}$ solo conociendo las trayectorias de un proceso estocástico hasta un tiempo t.

Definición 43. Sea $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtración sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea $T : \Omega \to [0, \infty]$ una variable aleatoria. Decimos que T es un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si para todo $t \geq 0$ se cumple la siguiente propiedad:

$$\{T \leq t\} = \{w \in \Omega : T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Es decir, podemos decidir si nos paramos o no antes de un instante t a partir de la información contenida en $\mathcal{F}_t$. Decimos que un tiempo de paro es finito si $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$.

Si T es un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, entonces la *$\sigma$-álgebra de los eventos anteriores a T* se define por:

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} : \text{para alguna } t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Teorema 44 (Propiedad de Markov fuerte)**.** Supongamos que $(B_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano y sea T un tiempo con respecto a la filtración natural $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, st \leq t)$. Supongamos que T es finito, entonces para $t \geq 0$, el proceso estocástico definido por

$$\widetilde{B}_t := \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} (B_{T+t} - B_T)$$

es un movimiento browniano independiente de $\mathcal{F}_T$.

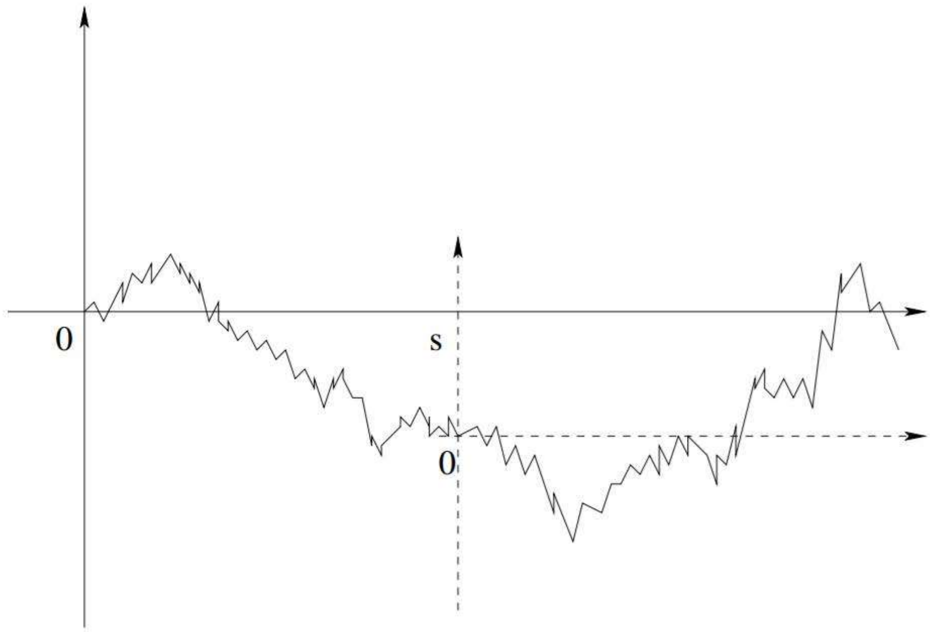


Figura 2: Propiedad de Markov fuerte

3.2.5. Principio de reflexión del movimiento browniano

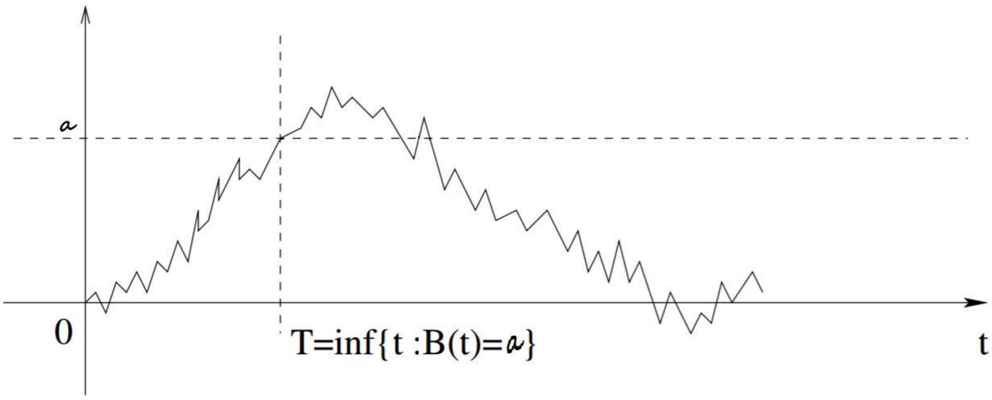
El *tiempo de llegada a un nivel a* del movimiento browniano $(B_t)_{t\geq 0}$ que es continuo y adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$:

$$T_a := \inf\{t \geq 0 : X_t = a\},$$

para $a \in \mathbb{R}$, es un tiempo de paro. En efecto,

$$\{T_a \leq t\} = \left\{ \sup_{0\leq s\leq t} X_s \geq a \right\} \in \mathcal{F}_t.$$

Si conocemos $(B_s)_{s\leq t}$, entonces sabemos si este movimiento browniano toma un valor antes que t o en t o si no lo toma. Entonces, así sabemos si $\{T_a \leq t\}$ ocurre o no, solo de observar el pasado antes del proceso $(B_s)_{s\leq t}$.



Teorema 45 (Principio de reflexión)**.** Sea T un tiempo de paro, sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento browniano estándar definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \geq 0$ y $b \leq a$. Para toda $t \geq 0$, denotemos por $S_t = \sup\limits_{0\leq s\leq t} B_s$. Entonces, se cumple

$$\mathbb{P}\left(S_t \geq a, B_t \leq b\right) = \mathbb{P}\left(B_t \geq 2a - b\right).$$

Demostración. Supongamos que $T_a < \infty$ casi seguramente.Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S_t \geq a, B_t \leq b\right) &= \mathbb{P}\left(T_a \leq t, B_t \leq b\right)\\ &= \mathbb{P}\left(T_a \leq t, W_{t-T_a} \leq b - a\right),\end{aligned}$$

donde $W_s := B_{T_a+s} - B_{T_a} = B_{T_a+s} - a$ es un movimiento browniano independiente de $\mathcal{F}_{T_a}$ (debido a la propiedad de Markov fuerte).

Consideremos a T_a y W como variables aleatorias independientes, y con valores sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R})$ respectivamente. Sea

$$A := \left\{(u, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}) : u \in [0, t], x_u \leq b - a\right\}.$$

Entonces,

$$\mathbb{P}\left(S_t \geq a, B_t \leq b\right) = \mathbb{P}\left((T_a, W) \in A\right).$$

La independencia de T_a y W muestra que $(T_a, -W)$ tiene la misma ley que (T_a, W). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S_t \geq a, B_t \leq b\right) =& \mathbb{P}\left((T_a, -W) \in A\right)\\ =& \mathbb{P}\left(T_a \leq t, -W_{t-T_a} \leq b - a\right)\\ =& \mathbb{P}\left(T_a \leq t, -B_t + B_{T_a} \leq b - a\right)\\ =& \mathbb{P}\left(T_a \leq t, -B_t \leq b - 2a\right)\\ =& \mathbb{P}\left(T_a \leq t, B_t \geq 2a - b\right)\\ =& \mathbb{P}\left(B_t \geq 2a - b\right),\end{aligned}$$

ya que $\{B_t \geq 2a - b\} \subset \{T_a \leq t\}$. ■

Teorema 46. Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimeinto browniano estándar y sea

$$S_t = \sup_{0\leq s\leq t} B_s$$

Entonces $\mathbb{P}(S_t \geq a) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a)$

Demostración. Sea $T_a = \text{ínf}\{t \geq 0 : B_t = a\}$, entonces

$$\begin{aligned}\{S_t \geq a\} &= \{B_t \geq a\} \cup \{B_t < a, S_t \geq a\}\\ &= \{B_t \geq a\} \cup \{B_t \geq 2a - a\}\\ &= \{B_t \geq a\} \cup \{B_t \geq a\}\end{aligned}$$

Por lo que $\mathbb{P}(S_t \geq a) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a)$. ■

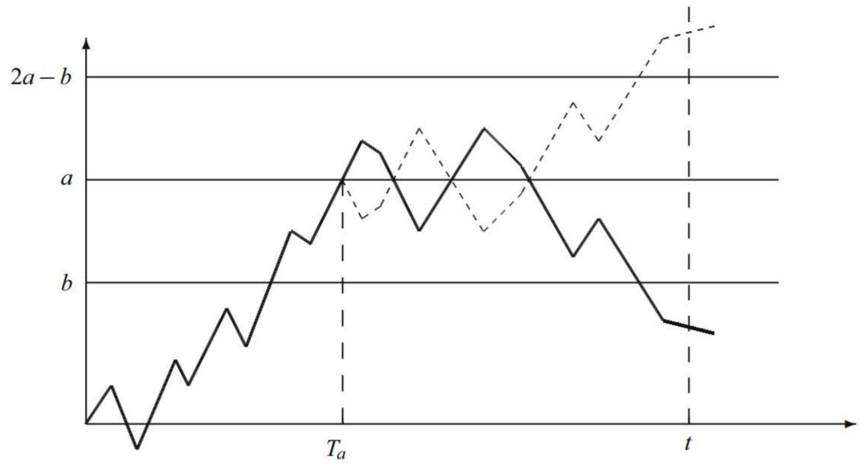


Figura 3: Principio de reflexión del MB

4. La integral estocástica

En la actualidad, la herramienta principal para el estudio del cálculo estocástico es el concepto de *semimartingala*, que por definición, es la suma de una martingala local (algo un poco más general que una martingala) y un proceso estocástico con trayectorias de variación acotada y adaptado (una condición de medibilidad). Las semimartingalas constituyen una clase general de procesos estocásticos con trayectorias continuas y con respecto a los cuales se pueden integrar procesos estocásticos.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $T > 0$ fijo. Queremos definir una *integral estocástica* del tipo

$$I(X_t) := \int_0^T X_t(\omega)\ \mathrm{d}B_t, \qquad \forall \omega \in \Omega,\ \forall t \geq 0.$$

donde $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico y $(B_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano estándar. Está definición depende de la noción de filtración. Como recordaremos, una filtración es una sucesión de σ-álgebras $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tal que

$$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s, \quad \forall \ \ t \leq s.$$

4.1. El espacio $L^2_{\mathrm{a},T}$

Sea $T > 0$ fijo. Denotaremos por $L^2_{\mathrm{a},T}$ al espacio de los procesos estocásticos $X = (X_t)_{t\geq 0}$ tal que

(1) X es conjuntamente medible (progresivamente medible) con respecto a $\mathscr{B}([0,T])\otimes\mathcal{F}$, es decir,

$$\begin{aligned} X : [0,T] \times \Omega &\to \mathbb{R} \\ (t,\omega) &\mapsto X(t,\omega) \end{aligned}$$

es $\mathscr{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}$-medible.

(2) X es adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, es decir, para toda $t \in [0,T]$

$$X_t : \Omega \to \mathbb{R}$$

es $\mathcal{F}_t$-medible.

(3) $\mathbb{E}\left[\int_0^T X_t^2\ \mathrm{d}t\right] < \infty$.

La idea es construir la integral estocástica como un límite en $\mathrm{L}^2(\Omega)$, y el método consiste en definir primero la integral para procesos *simples* (i.e. cuyas trayectorias son funciones escalonadas), de manera trayectorial, y el siguiente paso es extender la integral como un límite en media cuadrática, de integrales de procesos simples.

Sea $\mathcal{E}$ es el espacio de procesos simples o escalonados. Decimos que $X \in \mathcal{E}$ si

$$X_t(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)\mathbb{1}_{[t_{k-1},t_k)}(t),$$

donde $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ es una partición del intervalo $[0, T]$, X_k es una variable aleatoria, $\mathbb{E}\left[X_k^2\right] < \infty$ y X_k es $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-medible. Entonces, $\mathcal{E} \subset L^2_{\mathrm{a},T}$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T X_t^2(\omega)\ \mathrm{d}t\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\sum_{k=1}^n X_k^2(\omega)\mathbb{1}_{[t_{k-1},t_k)}(t)\right)\ \mathrm{d}t\right] \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k^2 \int_0^T \mathbb{1}_{[t_{k-1},t_k)}(t)\ \mathrm{d}t\right] \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k^2(t_k - t_{k-1})\right] \\
&= \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})\mathbb{E}\left[X_k^2\right] \\
&\leq \sup_{0\leq k\leq n} \mathbb{E}\left[X_k^2\right] T < \infty
\end{aligned}
$$

Ahora, para $X \in \mathcal{E}$, la integral estocástica está definida de manera natural mediante la fórmula

$$
I(X_t) = \int_0^T X_t(\omega)\ \mathrm{d}B_t := \sum_{k=1}^n X_k(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} \subset L^2_{\mathrm{a},T} &\to \mathrm{L}^2(\Omega) \\
X &\mapsto I(X)
\end{aligned}
$$

4.1.1. Propiedades de la integral estocástica para procesos simples

(1) La integral estocástica es una variable aleatoria centrada, es decir, $\mathbb{E}[I(X_t)] = 0$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[I(X_t)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\right] \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\right] \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k]\mathbb{E}\left[B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right] \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k] \times 0 = 0.
\end{aligned}
$$

(2) *Linealidad*: Si $X^{(1)}$ y $X^{(2)}$ son dos procesos simples y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $aX^{(1)} + bX^{(2)}$ es un proceso simple y se cumple

$$
\int_0^T \left(aX_t^{(1)} + bX_t^{(2)}\right)\ \mathrm{d}B_t = \int_0^T aX_t^{(1)}\ \mathrm{d}B_t + b\int_0^T X_t^{(2)}\ \mathrm{d}B_t.
$$

(3) *Isometría de Ito*:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X_t \ \mathrm{d}B_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T X_t^2 \ \mathrm{d}t\right].$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X_t \ \mathrm{d}B_t\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n X_k(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k^2(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 + 2\sum_{k<l} X_k X_l (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})(B_{t_l} - B_{t_{l-1}})\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k^2(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2\right] + 2\left[\sum_{k<l} X_k X_l (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})(B_{t_l} - B_{t_{l-1}})\right] \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k^2(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2\right] + 2\sum_{k<l} \mathbb{E}\left[X_k X_l (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})(B_{t_l} - B_{t_{l-1}})\right] \\
&= T_1 + T_2,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k^2(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k^2\right] \mathbb{E}\left[(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k^2\right] (t_k t_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k^2\right] \left(\int_0^T \mathbb{1}_{[t_{k-1},t_k)}(t) \ \mathrm{d}t\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\sum_{k=1}^n X_k^2 \mathbb{1}_{[t_{k-1},t_k)}(t)\right) \mathrm{d}t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T X_t^2 \ \mathrm{d}t\right],
\end{aligned}$$

y

$$T_2 = 2\sum_{k<l} \mathbb{E}\left[X_k X_l (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})(B_{t_l} - B_{t_{l-1}})\right] = 0,$$

ya que si $k < l$, tenemos que

$$\mathbb{E}\left[X_k X_l (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})(B_{t_l} - B_{t_{l-1}})\right] = \mathbb{E}\left[X_k X_l (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\right] \mathbb{E}\left[B_l - B_{t_{l-1}}\right] = 0,$$

debido a que $X_k X_l (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$ y $(B_{t_l} - B_{t_{l-1}})$ son independientes.

El siguiente paso consiste en identificar un conjunto mayor que $\mathcal{E}$ de procesos aleatorios, de modo que $\mathcal{E}$ sea denso en la norma $\mathrm{L}^2([0,T] \times \Omega)$. Este es en realidad el conjunto denotado antes por $L^2_{\mathrm{a},T}$. De hecho, tenemos el siguiente resultado que es un hecho crucial en la teoría de Ito.

Proposición 47. Para algún $X \in L^2_{\mathrm{a},T}$ existe una sucesión $(X^n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{E}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \mathbb{E}\left[(X_t^n - X_t)^2\right] dt = 0$$

Al utilizar el resultado de aproximación de la proposición anterior, podemos dar la siguiente definición.

Definición 48. La integral estocástica de Ito de un proceso $X \in L^2_{\mathrm{a},T}$ es

$$\int_0^T X_t \, \mathrm{d}B_t := \mathrm{L}^2(\Omega) - \lim_{n\to\infty} \int_0^T X_t^n \, \mathrm{d}B_t.$$

Para que esta definición tenga sentido, es necesario asegurarse de que si el proceso X se aproxima mediante dos sucesiones diferentes, por ejemplo, $X^{n,1}$ y $X^{n,2}$, la definición de la integral estocástica, utilizando $X^{n,1}$ o $X^{n,2}$ coinciden. Esto se prueba utilizando la propiedad isometría. En efecto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X_t^{n,1} \, \mathrm{d}B_t - \int_0^T X_t^{n,2} \, \mathrm{d}B_t\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \left(X_t^{n,1} - X_t^{n,2}\right) \mathrm{d}B_t\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(X_t^{n,1} - X_t^{n,2}\right)^2 \mathrm{d}t\right] \\
&= \int_0^T \mathbb{E}\left[\left(X_t^{n,1} - X_t^{n,2}\right)^2\right] \mathrm{d}t \\
&\leq 2\int_0^T \mathbb{E}\left[\left(X_t^{n,1} - X_t\right)^2\right] \mathrm{d}t + 2\int_0^T \mathbb{E}\left[\left(X_t^{n,2} - X_t\right)^2\right] \mathrm{d}t \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

Por definición, la integral estocástica definida en la Definición 39 satisface también la propiedad de la isometría de Ito. Además,

(1) las integrales estocásticas son variables aleatorias centradas:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T X_t \, \mathrm{d}B_t\right] = 0,$$

(2) la integral estocástica es un operador lineal:

$$\int_0^T (aX_t + bY_t) \, \mathrm{d}B_t = \int_0^T aX_t \, \mathrm{d}B_t + b\int_0^T Y_t \, \mathrm{d}B_t.$$

Recordemos que estos hechos son verdaderos para los procesos en $\mathcal{E}$, como se mencionó anteriormente. La extensión a los procesos en $L^2_{\mathrm{a},T}$ se hace aplicando la Proposición 47. Solo probaremos (1) como sigue,

Consideremos una sucesión X^n en el sentido de la Proposición 47. Por la construcción de la integral estocástica $\displaystyle\int_0^T X_t \, \mathrm{d}B_t$, se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T X_t^n \, \mathrm{d}B_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T X_t \, \mathrm{d}B_t\right],$$

ya que $\mathbb{E}\left[\int_0^T X_t^n \, \mathrm{d}B_t\right] = 0$ para toda $n \geq 1$, tenemos que $\mathbb{E}\left[\int_0^T X_t \, \mathrm{d}B_t\right] = 0$.

Ejemplo 49 (Movimiento Browniano)**.** Para B un movimiento browniano, se cumple la siguiente formula:

$$\int_0^T B_t \, \mathrm{d}B_t = \frac{1}{2}(B_T^2 - T).$$

Observemos que podríamos esperar que $\int_0^T B_t \, \mathrm{d}B_t = \frac{1}{2}B_T^2$, por analogía con las reglas del cálculo determinista.

Para probar esta identidad, vamos a considerar en particular una sucesión de procesos simples aproximados, de la siguiente manera:

$$X_t^n = \sum_{k=1}^n B_{t_{k-1}} \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(t).$$

Tenemos que $X^n \in L^2_{\mathrm{a},T}$, y que

$$\begin{aligned}\int_0^T \mathbb{E}\left[(X_t^n - B_t)^2\right] \, \mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbb{E}\left[\left(B_{t_{k-1}} - B_t\right)^2\right] \, \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{T}{n} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{d}t = \frac{T^2}{n}.\end{aligned}$$

por lo tanto, $(X^n)_{n\geq 1}$ es una sucesión aproximada de B en la norma de $\mathrm{L}^2([0,T] \times \Omega)$. De acuerdo a la Definición 48, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^T B_t \, \mathrm{d}B_t &= \mathrm{L}^2(\Omega) - \lim_{n\to\infty} \int_0^T X_t^n \, \mathrm{d}B_t \\ &= \mathrm{L}^2(\Omega) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n B_{t_{k-1}} \left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right),\end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n B_{t_{k-1}} \left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(B_{t_k}^2 - B_{t_{k-1}}^2\right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}T.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^T B_t \, \mathrm{d}B_t = \frac{1}{2}(B_T^2 - T).$$

4.2. La integral estocástica de Ito como proceso estocástico

Ahora, consideremos un proceso $X = (X_t)_{t\geq 0}$ en $L^2_{\mathrm{a},T}$. Entonces, el proceso $X\mathbb{1}_{[0,t]}$ también pertenece a $L^2_{\mathrm{a},T}$, y por lo tanto se puede definir su integral:

$$\int_0^t X_s \, \mathrm{d}B_s := \int_0^T X_s \mathbb{1}_{[0,t]}(s) \, \mathrm{d}B_s, t \in [0,T].$$

Se ha definido un nuevo proceso estocástico

$$\left\{\int_0^t X_s dB_s,\ 0 \leq t \leq T\right\}$$

que es la integral estocástica indefinida del proceso X con respecto de B.

Obviamente, las propiedades de la integral mencionada en la sección anterior, como media cero, isometría, linealidad, también se mantienen para la integral indefinida.

Ahora, estudiaremos propiedades importantes del proceso estocástico dado por un una integral de Ito indefinida. Una de las propiedades importantes que nos interesa estudiar es la propiedad de martingala.

Proposición 50 (Propiedad de Martingala). El proceso

$$\left\{\int_0^t X_s dB_s,\ t \in [0,T]\right\}$$

es una martingala.

Demostración. Estableceremos la propiedad de martingala por aproximación. Sea

$$I_t^n = \int_0^t X_s^n \ \mathrm{d}B_s,\ t \in [0,T],$$

donde $X^n \to X$ en $\mathrm{L}^2(\Omega)$, y esto es suficiente ya que el límite en $\mathrm{L}^2(\Omega)$ de martingalas es una martingala.

Sea $X_t^n = \sum_{j=1}^{n} X_j \mathbb{1}_{[t_{j-1},t_j)}(t)$ para $t \in [0,T]$. Si fijamos $0 \leq s < t \leq T$ y supongamos que $s \leq t_{j-1} \leq t_j \leq t$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_t^n - I_s^n \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} X_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right] \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_j \mathbb{E}\left[B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right] \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_j \mathbb{E}\left[B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right] \mid \mathcal{F}_s\right] = 0
\end{aligned}$$

De esto, se obtiene que la diferencia I_t^n es una martingala. Y por aproximación, entonces $I_t = \lim_{n\to\infty} I_t^n$ también es una martingala. ■

Propiedades de la integral estocástica indefinida:

- Si $a \leq b \leq c$, entonces:

$$\int_a^b X_s \, \mathrm{d}B_s + \int_b^c X_s \, \mathrm{d}B_s = \int_a^c X_s \, \mathrm{d}B_s.$$

- Si $a < b$ y sea A un evento que pertenece a $\mathcal{F}_a$, entonces:

$$\int_a^b \mathbb{1}_A X_s \, \mathrm{d}B_s = \mathbb{1}_A \int_a^b X_s \, \mathrm{d}B_s,$$

  para $\mathbb{1}_A$ cualquier variable aleatoria acotada y $\mathcal{F}_a$-medible.

Una de las propiedades de las martingalas con trayectorias continuas es que, cumplen la desigualdad de Doob: para $(X_t)_{t\in[0,T]}$ una martingala, y para $p \geq 1$ y todo $\lambda > 0$, se cumple que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t| > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}\left[|X_T|^p\right].$$

Una de las consecuencias de la desigualdad de Doob, es que se puede demostrar que las integrales estocásticas indefinidas tienen trayectorias continuas.

Proposición 51. Supongamos que X es un proceso que pertenece a la clase $L^2_{\mathrm{a},T}$. Entonces la integral estocástica

$$\int_0^t X_s dB_s, t \in [0,T]$$

tiene una versión con trayectorias continuas.

Demostración. Consideremos una sucesión de procesos elementales $X^n = (X^n_t)_{t\geq 0}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|X_t - X^n_t\right|^2 \, \mathrm{d}t\right] = 0.$$

Si denotamos de la manera siguiente,

$$I(t) = \int_0^t X_s \, \mathrm{d}B_s \quad \text{ y } \quad I^n_t = \int_0^t X^n_s \, \mathrm{d}B_s.$$

Entones, el proceso I^n_t tiene trayectorias continuas y además es una martingala como se vio anteriormente. De esto, se obtiene que la diferencia $I^n_t - I^m_t$ será una martingala, así que podemos utilizar la desigualdad de Doob con $p = 2$, y obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |I^n_t - I^m_t| > \lambda\right) &\leq \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}\left[|I^n_T - I^m_T|^2\right] \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}\left[\int_0^T |X^n_t - X^m_t|^2 \, \mathrm{d}t\right].\end{aligned}$$

Ahora, tomando el límite cuando $n, m \to \infty$,

$$\frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}\left[\int_0^T |X^n_t - X^m_t|^2 \, \mathrm{d}t\right] \to 0.$$

Sea n_k una sucesión creciente de números naturales, $k = 1, 2, \ldots$ tal que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |I_t^{n_{k+1}} - I_t^{n_k}| > \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Se tiene que los siguientes eventos,

$$A_k := \left\{\sup_{0\leq t\leq T} |I_t^{n_{k+1}} - I_t^{n_k}| > \frac{1}{2^k}\right\}$$

son tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_k\right) < \infty.$$

El lema de Borel-Cantelli nos dice que la probabilidad de que ocurra un numero infinito de estos eventos es cero. Por lo tanto, existe un evento N con $\mathbb{P}(N) = 0$ tal que para todo $\omega \notin N$ podemos encontrar un instante $k_1(\omega)$ tal que si $k \geq k_1(\omega)$, se cumple

$$\sup_{0\leq t\leq T} |I_t^{n_{k+1}}(\omega) - I_t^{n_k}(\omega)| \leq \frac{1}{2^k}$$

Po lo tanto, si $\omega \notin N$, la sucesión $I_t^{n_k}(\omega)$ es uniformemente convergente en el intervalo $[0, T]$ hacia una función continua $J_t(\omega)$.

Por otra parte, por lo anterior, para cada $t \in [0, T]$, la sucesión $I_t^{n_k}(\omega)$ converge en media cuadrática hacia $\int_0^t X_s \, \mathrm{d}B_s$.

Por lo que $J_t(\omega) = \int_0^t X_s \, \mathrm{d}B_s$ casi seguramente, para toda $t \in [0, T]$, es decir, la integral estocástica indefinida admite una versión con trayectorias continuas. ■

La integral $X_t = \int_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s$ es una martingala con respecto a $\mathcal{F}_t$, y además, para toda $\lambda > 0$, se cumple

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t| > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}\left[\int_0^T H_t^2 \, \mathrm{d}t\right].$$

En efecto, ya que de la propiedad de martingala de las integrales estocásticas indefinidas $\int_0^t H_s^{(n)} \, \mathrm{d}B_s$ que se vio con anterioridad, se deduce la propiedad de martingala de $\int_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s$. Además, de utilizar la desigualdad de Doob y la propiedad de isometría.

Cabe mencionar que, las trayectorias de la integral estocástica son continuas, pero no son regulares, como las del movimiento browniano.

Una propiedad importante, es que las trayectorias de las integrales estocásticas indefinidas tienen variación cuadrática finita.

Proposición 52. Sea X un proceso de la clase $L^2_{\mathrm{a},T}$, entonces:

$$\mathrm{L}^1(\Omega) - \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} H_s \, \mathrm{d}B_s\right)^2 = \int_0^t H_s^2 \, \mathrm{d}s,$$

donde $t_j = tj/n$.

Demostración. Primero, observemos que si el proceso X es elemental, el resultado se sigue de la variación cuadrática del movimiento browniano.

En efecto, en cada intervalo $(a, b]$ donde el proceso X toma el valor contante φ es del siguiente tipo:

$$\varphi^2 \sum_{a \leq t_{j-1} \leq t_j \leq b} (\Delta B_j)^2 \to \varphi^2 (b-a).$$

Ahora, supongamos que X es un proceso arbitrario de la clase $L^2_{\mathrm{a},T}$. Entonces, existe una sucesión X^k de procesos elementales tal que

$$\lim_{k \to \infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t - X_t^k| \, \mathrm{d}t\right] = 0.$$

Denotemos

$$V_n(X) = \sum_{j=1}^n \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} X_s \, \mathrm{d}B_s\right)^2,$$

entonces tenemos,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|V_n(X) - \int_0^t X_s^2 \, \mathrm{d}s\right|\right] &\leq \mathbb{E}\left[|V_n(X) - V_n(X^k)|\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\left|V_n(X^k) - \int_0^t (X_s^k)^2 \, \mathrm{d}s\right|\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t (X_s^k)^2 \, \mathrm{d}s - \int_0^t X_s^2 \, \mathrm{d}s\right|\right]. \end{aligned}$$

Para el primer sumando de la desigualdad anterior, tenemos

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[|V_n(X) - V_n(X^k)|\right] \\ &\quad = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(X_s + X_s^k\right) \mathrm{d}B_s\right)\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(X_s - X_s^k\right) \mathrm{d}B_s\right)\right] \\ &\quad \leq \left(\mathbb{E}\left[V_n(X + X^k)\right] \mathbb{E}\left[V_n(X - X^k)\right]\right)^{1/2} \\ &\quad = \left(\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(X_s + X_s^k\right)^2 \mathrm{d}s\right] \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(X_s - X_s^k\right)^2 \mathrm{d}s\right]\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

el cual no depende de n, por lo que converge a cero cuando $k \to \infty$.

Por lo tanto, si tomamos $\varepsilon > 0$ fija, entonces existe k_0 tal que

$$\mathbb{E}\left[\left|V_n(X) - \int_0^t X_s^2 \, \mathrm{d}s\right|\right] \leq \varepsilon + \mathbb{E}\left[\left|V_n(X^k) - \int_0^t \left(X_s^k\right)^2 \mathrm{d}s\right|\right]$$

para toda $k \geq k_0$ y para toda n. Finalmente, tomando el límite cuando $n \to \infty$, se tiene el resultado. ■

4.3. La fórmula de Ito

Queremos definir integrales del siguiente tipo

$$\int X_t dH_t$$

donde H_t es un proceso de Ito, el cual puede ser representado de la siguiente manera

$$H_t = H_0 + \int_0^t u_s \, \mathrm{d}B_s + \int_0^t v_s \, \mathrm{d}s, \;\; t \in [0, T], \tag{1}$$

donde H_0 es una variable aleatoria, $(B_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano y u_s y v_s son dos procesos adaptados a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tales que

- $\{u_t, t \in [0, T]\} \in L^2_{\mathrm{a},T}$ adaptado tal que $\displaystyle\int_0^T u_t^2 dt < \infty$
- $\{v_t, t \in [0, T]\}$ adaptado tal que $\displaystyle\int_0^T |v_t| dt < \infty$

En forma diferencial, tenemos que la ecuación (1) se puede escribir como

$$dH_t = v_t dt + u_t dB_t$$

Ejemplo 53. El movimiento browniano $(B_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Ito. En efecto, sea $(u_t = 1)_{t\geq 0}$ y $(v_t = 0)_{t\geq 0}$, entonces

$$B_t = B_0 + \int_0^t u_s dB_s + \int_0^t v_s ds.$$

Teorema 54 (Fórmula de Ito)**.** Si H es un proceso de Ito, y sea $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^{1,2}$, es decir, una vez diferenciable en la variable t y dos veces diferenciable en la variable x. Entonces

$$\begin{aligned} f(t, H_t) = f(0, H_0) &+ \int_0^t \partial_s f(s, H_s) ds + \int_0^t \partial_x f(s, H_s) u_s dH_s \\ &+ \int_0^t \partial_x f(s, H_s) v_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t \partial^2_{xx} f(s, H_s) u_s^2 ds \end{aligned}$$

Ejemplo 55. $\displaystyle\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$

Ejemplo 56. $(B_t^2)_{t\geq 0}$ es un proceso de Ito? Para ver esto, vamos a aplicar la fórmula de Ito a $(B_t^2)_{t\geq 0}$: sea $f(t, x) = x^2 \in \mathcal{C}^2$. Entonces

$$\partial_t f(t, X) = 0, \quad \partial_x f(t, x) = 2x, \;\; \partial^2_{xx} f(t, x) = 2$$

5. Black-Scholes Model

With Itô's stochastic calculus as the main tool we obtain the formula that is a solution to the Black-Scholes model [?], and we will introduce this model to solve problems of valuation and hedge of European options considering the prices in a continuous market, this model is given by a stochastic differential equation.

This model assesses the price of a European option through the values of five variables: the price of the underlying asset at current date, the maturity time, the strike price, the risk free interest rate and the volatility. Almost all these values can be taken from the prices of the options observed in the market data, an exception of the volatility, that turns out to be the indicator that gave us an idea of the behavior that will have the value of the option in the future.

5.1. Black-Scholes model

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a probability space, let $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ a filtration on $(\Omega, \mathcal{F})$ and let $[0, T]$ a time interval. We consider a financial market with two stocks.

First, we consider the *asset price* or a *bank account* at time t given by:

$$S_t^0 = e^{rt}, \;\; t \geq 0, r > 0,$$

where r is the instantaneous interest rate, and we can note that the process $(S_t^0)_{t\geq 0}$ can be writing in differential form

$$\begin{cases} dS_t^0 = rS_t^0 dt \\ S_0^0 = 1 \end{cases}$$

since the unique solution to this differential equation is $S_t^0 = e^{rt}$.

Now, we consider a stochastic process, named *stock price* $(S_t)_{t\geq 0}$ given by the following stochastic differential equation

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{2}$$

where $\mu \in \mathbb{R}$ is the drift, $\sigma > 0$ is the volatility (we assume that σ is constant) and $(W_t)_{t\geq 0}$ is a standard Brownian motion adapted to the filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. The unique solution to this stochastic differential equation is given by

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right), \quad t \geq 0 \tag{3}$$

in this case we say that $(S_t)_{t\geq 0}$ follows a *geometric Brownian motion*, as we can see in the figure 4.

We rewrite the equation 3 in integral form, we obtain

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_u du + \int_0^t \mu S_u dB_u,$$

them we can be solved it applying Ito's formula to the Itô's process $(S_t)_{t\geq 0}$ with $v_t = \mu S_t$ and $u_t = \sigma S_t$, as follows. First, we consider a function $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $f(t, S_t) = \log(S_t)$

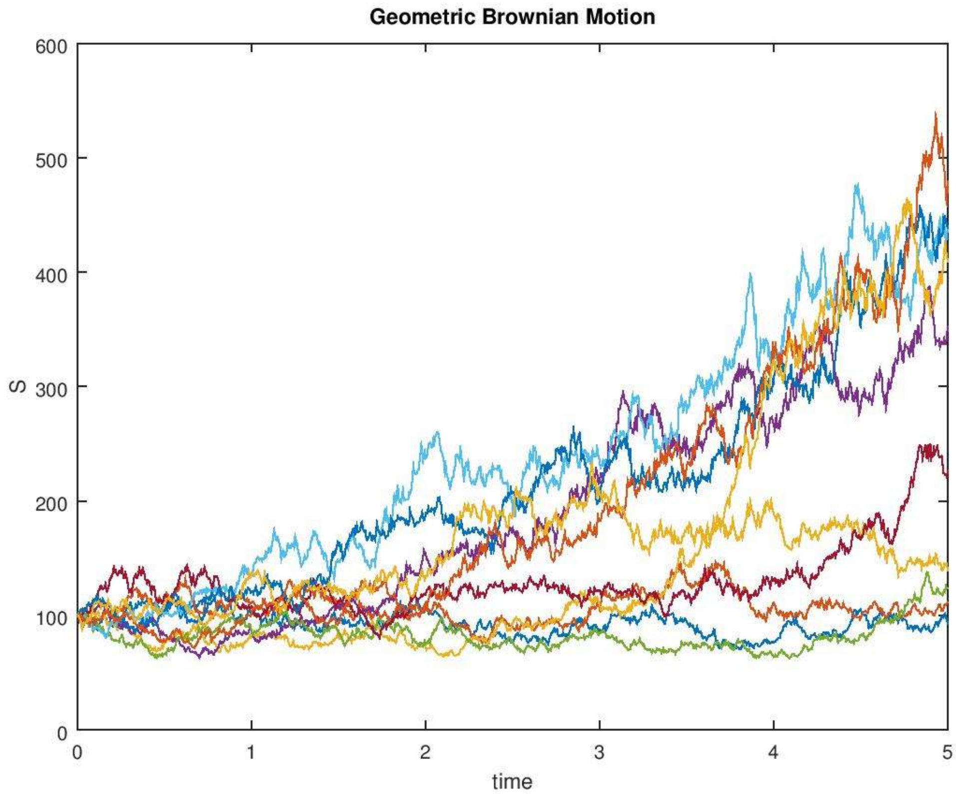


Figura 4: We plot 10 sample paths of GBM with $S_0 = 100$, $\mu = 0{,}2$ and $\sigma = 0{,}3$ on interval $[0, 5]$.

with $f(t, x) = \log(x)$, then we have the following derivatives:

$$\partial_t f(t, S_t) = 0$$
$$\partial_x f(t, S_t) = \frac{1}{S_t}$$
$$\partial^2_{xx} f(t, S_t) = -\frac{1}{S_t^2}$$

Now, we apply Ito's formula to obtain

$$\begin{aligned}\log(S_t) &= f(0, S_0) + \int_0^t \partial_x f(u, S_u) u_u dW_u + \int_0^t \partial_x f(u, S_u) v_u du + \frac{1}{2}\int_0^t \partial^2_{xx} f(u, S_u) u_u^2 du \\ &= \int_0^t \frac{1}{S_u}\sigma S_u dW_u + \int_0^t \frac{1}{S_u}\mu S_u du - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{S_u}\sigma^2 S_u^2 du \\ &= \int_0^t \sigma dW_u + \int_0^t \mu du - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 S_u du.\end{aligned}$$

Then,

$$d\log(S_t) = \sigma dW_t + \mu dt - \frac{1}{\sigma^2} dt = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t.$$

Equivalently, we have

$$\int_0^t d\log(S_t) = \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) du + \int_0^t \sigma dW_u = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma(W_t - W_0),$$

hence

$$\log(S_t) - \log(S_0) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t,$$

since $W_0 = 0$. Finally, we apply exponential in both side to obtain

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right), \quad t \geq 0.$$

We have the following properties.

Teorema 57. Let $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ and $(S_t)_{t\geq 0}$ be a stochastic process such that

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \qquad S_0 = S_t^0$$

then S_t is a log-normal random variable.

Demostración. Since the unique solution to

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \qquad S_0 = S_t^0$$

is given by the equation (3), then if we if we take logarithm in both sides of this equation, we obtain that

$$\log(S_t) = \log(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t,$$

where $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$. Then, we can say that

$$\log(S_t) \sim \mathcal{N}\left(\log(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t, \sigma^2 t\right).$$

This means that S_t has a log-normal distribution with mean $\log(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t$ and variance $\sigma^2 t$. ■

From the properties of log-normal distribution, we have that

$$\mathbb{E}\left[S_t\right] = S_0 \exp(\mu t)$$

and that

$$\mathrm{Var}\left(S_t\right) = (S_0)^2 \exp(2\mu t)\left(\exp(\sigma^2 t) - 1\right).$$

Proposición 58. Let $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ and $(S_t)_{t\geq 0}$ a stochastic process such that

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad S_0 = S_t^0$$

then, $\log(S_t)$ is a Brownian motion, no necessarily standard.

Demostración. It is sufficient to prove that $(\log(S_t))_{t\geq 0}$ satisfies the following properties:

- Continuity of sample paths:
  Since $(W_t)_{t\geq 0}$ is continuous with respect t, we have that $\log(S_t) = \log(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t$ is continuous with respect t.

- Independent increments:
  We want to prove that, if $u \leq t$ then $\log(S_t) - \log(S_u) = \log\left(\frac{S_t}{S_u}\right)$ is independent of $\sigma\left(\log(S_v), v \leq u\right)$. This is equivalent to prove that if $u \leq t$, then $\frac{S_t}{S_u}$ or the relative increments $\frac{S_t - S_u}{S_u}$ are independent of $\sigma\left(S_v, v \leq u\right)$. Since,

$$\frac{S_t}{S_u} = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-u) + \sigma(W_t - W_u)\right)$$

  and since we know that $(W_t - W_u)$ is independent of $\sigma\left(W_v, v \leq u\right)$, then $\frac{S_t}{S_u}$ is independent of $\sigma\left(S_v, v \leq u\right)$.

- Stationary increments:
  We want to prove that for $u \leq t$, the law of $\ln\left(\frac{S_t}{S_u}\right)$ is the same that the law of $\ln\left(\frac{S_{t-u}}{S_0}\right)$. Or, equivalently to prove that the relative increments of $(S_t)_{t\geq 0}$ are stationary, that is, if $u \leq t$, then the distribution of $\frac{S_t - S_u}{S_u}$ is identically equal to $\frac{S_{t-u} - S_0}{S_0}$. For this, let $z \in \mathbb{R}_+$, then

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{S_t}{S_u} < z\right) &= \mathbb{P}\left(\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-u) + \sigma(W_t - W_u)\right) < z\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-u) + \sigma W_{t-u}\right) < z\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{S_{t-u}}{S_0} < z\right).
\end{aligned}$$

  Therefore, the law of $\frac{S_t}{S_u}$ and $\frac{S_{t-u}}{S_0}$ are the same.

$\blacksquare$

5.2. Self-financing strategies

Let ϕ_t^0 and ϕ_t^1 be the quantities invested at time t, respectively in the assets S_t^0 and S_t. A *strategy* is a stochastic process

$$\phi = (\phi_t)_{t\geq 0} = \left(\phi_t^0, \phi_t^1\right)_{t\geq 0}$$

whit real values and such that is adapted to the filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ of Brownian motion.

Definición 59. The value of portfolio at time t for the strategy ϕ is given by

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t^1 S_t, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{4}$$

Definición 60. A self-financing strategy ϕ is a pair of adapted processes $(\phi_t^0)_{t\geq 0}$ and $(\phi_t^1)_{t\geq 0}$ such that

1. $\displaystyle\int_0^T |\phi_t^0|dt + \int_0^T (\phi_t^1)^2 dt < \infty \;\; \mathbb{P}-\text{a.s.}$

2. $\displaystyle V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \phi_u^0 dS_u^0 + \int_0^t \phi_u^1 dS_u, \;\; 0 \leq t \leq T.$

The condition 1 guarantee that the integrals in condition 2 are well-defined. That is,

$$\int_0^T |\phi_u^0|du < \infty \;\; \text{implies that} \;\; \int_0^T \phi_u^0 dS_u^0 = \int_0^T \phi_u^0 r e^{ru} du < \infty$$

and

$$\int_0^T (\phi_t^1)^2 dt < \infty \;\; \text{implies that} \;\; \int_0^T \phi_u^1 dS_u = \int_0^T \phi_u^1 \mu S_u du + \int_0^T \phi_u^1 \sigma S_u dW_u < \infty.$$

Proposición 61. Let ϕ be a strategy with value in portfolio given as equation (4). The strategy ϕ is a self-financing strategy if and only if

$$\tilde{V}_t(\phi) = \tilde{V}_0(\phi) + \int_0^t \phi_u^1 d\tilde{S}_u, \quad t \geq 0, \tag{5}$$

where $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ is the discounted value.

Demostración. We suppose that ϕ is a self-financing strategy. We note that in the previous definition, condition 2 can be write in differential form and in the case of Black-Scholes model, we have

$$dV_t(\phi) = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t^1 S_t(\mu dt + \sigma dW_t),$$

so, if we substitute the value of dS_t^0, we obtain

$$\begin{aligned} dV_t(\phi) &= \phi_t^0 r S_t^0 dt + \mu \phi_t^1 S_t dt + \sigma \phi_t^1 S_t dW_t \\ &= r(\phi_t^0 S_t^0 + \phi_t^1 S_t)dt + (\mu - r)\phi_t^1 S_t dt + \sigma \phi_t^1 S_t dW_t \\ &= rV_t dt + (\mu - r)\phi_t^1 S_t dt + \sigma \phi_t^1 S_t dW_t, \end{aligned}$$

now, we multiply by e^{-rt} in both sides

$$e^{-rt} dV_t(\phi) = re^{-rt}V_t dt + (\mu - r)e^{-rt}\phi_t^1 S_t dt + \sigma e^{-rt}\phi_t^1 S_t dW_t$$

since $d\tilde{V}_t = -re^{-rt}V_t dt + e^{-rt}dV_t$, then

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= -re^{-rt}V_t dt + re^{-rt}V_t dt + (\mu - r)e^{-rt}\phi_t^1 S_t dt + \sigma e^{-rt}\phi_t^1 S_t dW_t \\ &= (\mu - r)\phi_t^1 \tilde{S}_t dt + \phi_t^1 \sigma \tilde{S}_t dW_t \\ &= \phi_t^1 \left((\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dW_t \right) \\ &= \phi_t^1 d\tilde{S}_t. \end{aligned}$$

Finally, we integrate in both sides,

$$\tilde{V}_t - \tilde{V}_0 = \int_0^t \phi_u^1 d\tilde{S}_u, \quad 0 \leq t \leq T.$$

For the converse, we suppose that $d\tilde{V}_t = \phi_t^1 d\tilde{S}_t$, and since $V_t = e^{rt}\tilde{V}_t$, then

$$\begin{aligned}
dV_t(\phi) &= re^{rt}\tilde{V}_t dt + e^{rt} d\tilde{V}_t \\
&= re^{rt}\tilde{V}_t dt + e^{rt}\phi_t^1 d\tilde{S}_t \\
&= rV_t dt + e^{rt}\phi_t^1 d\tilde{S}_t \\
&= rV_t dt + e^{rt}\phi_t^1 \left((\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dW_t\right) \\
&= rV_t dt + \phi_t^1(\mu - r)S_t dt + \sigma \phi_t^1 S_t dW_t \\
&= rV_t dt - r\phi_t^1 S_t dt + \phi_t^1 \left(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t\right) \\
&= \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t^1 dS_t.
\end{aligned}$$

If we integrate both sides, we obtain

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \phi_u^0 dS_u^0 + \int_0^t \phi_u^1 dS_u, \quad t \geq 0,$$

which satisfies the definition of self-financing strategy. ■

We note that according to (5), the self-financing portfolio price V_t can be written as

$$V_t = e^{rt}V_0 + (\mu - r)\int_0^t e^{r(t-u)}\phi_u^1 S_u du + \sigma \int_0^t e^{r(t-u)}\phi_u^1 S_u dW_u, \quad t \geq 0.$$

5.3. Arbitrage and risk neutral probability measure

If we put additional restrictions in self-financing strategies, we obtain the admissible strategies whose total value V_t remains nonnegative for all times $t \in [0, T]$.

Definición 62. A strategy $\phi = \left(\phi_t^0, \phi_t^1\right)_{t\geq 0}$ is admissible if it is self-financing and its discounted value

$$\tilde{V}_t(\phi) = \phi_t^0 + \phi_t^1 S_t \geq 0,$$

for all t.

Definición 63. An arbitrage is an admissible strategy ϕ such that satisfies

(i) $V_0(\phi) = 0$,

(ii) $V_t(\phi) \geq 0$ for all $0 \leq \leq T$,

(iii) $\mathbb{P}(V_T(\phi) > 0) > 0$.

The condition (i) means that the investor starts with zero capital or even with a debt, the condition (ii) means that he wants no loss and (iii) means that he wishes to sometimes make a strictly positive gain.

5.3.1. Existence of a risk neutral measure

We want to find a risk neutral probability measure under which the discounted price process

$$(\tilde{S}_t)_{t\geq 0} = (e^{-rt}S_t)_{t\geq 0}$$

is a martingale.

For this, we need to introduce the Girsanov theorem and some topics related with it, to try to find this probability measure.

5.3.2. Change of measure and Girsanov theorem

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a probability space and let Z be a nonnegative random variable with $\mathbb{E}[Z] = 1$. For $A \in \mathcal{F}$, we define

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A Z(w)d\mathbb{P}(\omega).$$

Then, $\mathbb{Q}$ is a probability measure.

A probability measure $\mathbb{Q}$ on a measure space $(\Omega, \mathcal{F})$ is *absolutely continuous* with respect to $\mathbb{P}$ (or we say that $\mathbb{Q}$ is *equivalent* to $\mathbb{P}$) if

$$\mathbb{P}(A) = 0 \text{ if and only if } \mathbb{Q}(A) = 0. \tag{6}$$

for all $A \in \mathcal{F}$.

Now, let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ be a filtered probability space and $(W_t)_{t\geq 0}$ be a standard Brownian motion $\mathcal{F}_t$-measurable. Girsanov theorem describes how we can change a probability measure by an equivalent probability measure. For the proof of the theorem, see [KARATZAS].

Teorema 64. Let $(\theta_t)_{t\geq 0}$ be an adapted process satisfying $\int_0^T \theta_t^2 dt < \infty$ almost surely and such that the process $(L_t)_{t\geq 0}$ defined by

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$$

is martingale. Then, under the probability $\mathbb{P}^L$ with density L_T with respect to $\mathbb{P}$, the process $(B_t)_{t\geq 0}$ defined by

$$B_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds$$

is a standard Brownian motion $\mathcal{F}_t$-measurable.

5.3.3. Risk neutral probability measure

Proposición 65. In Black-Scholes model there exists a probability measure equivalent to $\mathbb{P}$, under which $(\tilde{S}_t)_{t\geq 0}$ are martingale.

Demostración. First, from the stochastic differential equation (7) satisfied by S_t, we have

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= d(e^{-rt}S_t) \\ &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t \\ &= -r\tilde{S}_t dt + e^{-rt}\left(S_t(\mu dt + \sigma dW_t)\right) \\ &= -r\tilde{S}_t dt + e^{-rt}S_t\mu dt + e^{-rt}S_t\sigma dW_t \\ &= -r\tilde{S}_t dt + \tilde{S}_t\mu dt + \tilde{S}_t\sigma dW_t \\ &= \tilde{S}_t\left((\mu - r)dt + \sigma dW_t\right) \\ &= \sigma\tilde{S}_t\left(\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)dt + dW_t\right), \end{aligned}$$

where $(W_t)_{t\geq 0}$ is a standard Brownian motion. Let

$$B_t = W_t + \int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) dt,$$

then

$$dB_t = dW_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) dt.$$

Therefore, we have that $d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t dB_t$. By Girsanov's theorem, we have that under probability measure $\mathbb{P}^*$, the stochastic process $(B_t)_{t\geq 0}$ is a Brownian motion. For this, let $\theta_t = \dfrac{\mu - r}{\sigma}$, i.e., $(\theta_t)_{t\geq 0}$ is a constant process, then $\displaystyle\int_0^T \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 ds < \infty$, and if we define

$$\begin{aligned} L_t &= \exp\left(-\int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 ds\right) \\ &= \exp\left(-\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 t\right). \end{aligned}$$

Then, L_t is a martingale under $\mathbb{P}$. By Girsanov's theorem , we have that under $\mathbb{P}^{L_T}$ the process $(Bt)_{t\geq 0}$ is a Brownian motion.

Then, the stochastic differential equation $d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t dB_t$ has a unique solution given by

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t\right)$$

which is a martingale under $\mathbb{P}^{L_T}$.

Finally, we need to prove that $\mathbb{P}$ is equivalent to $\mathbb{P}^{L_T}$, i.e., we need to prove the following:

- $\mathbb{P}^{L_T} \ll \mathbb{P}$: Let $A \in \mathcal{F}$ such that $\mathbb{P}(A) = 0$, then

$$\mathbb{P}^{L_t}(A) = \int_A L_T d\mathbb{P} = 0.$$

- $\mathbb{P} \ll \mathbb{P}^{L_T}$: Let $A \in \mathcal{F}$ such that $\mathbb{P}^{L_T}(A) = 0$, then

$$\mathbb{P}(A) = \int_A d\mathbb{P} = \int_A \frac{L_T}{L_T} d\mathbb{P} = \int_A \frac{1}{L_T} L_T d\mathbb{P} = \int_A \frac{1}{L_T} d\mathbb{P}^{L_T} = 0.$$

■

In the following, we will denote by $\mathbb{P}^*$ the probability measure equivalent to $\mathbb{P}$. Then, under $\mathbb{P}^*$ we can write

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right),$$

where $(W_t)_{t\geq 0}$ is a $\mathbb{P}^*$ Brownian motion.

5.3.4. Absence of arbitrage and completeness

For the notion of absence of arbitrage, it is sufficient the existence of a risk neutral probability measure $\mathbb{P}^*$ to have a model without arbitrage and complete. Then, we have the following result.

Teorema 66. The Black-Scholes model is free of arbitrage.

Demostración. We know that under $\mathbb{P}^*$, $(\tilde{S}_t)$ is a martingale. If we consider an admissible strategy ϕ with zero initial value, we have

$$\begin{aligned}\tilde{V}(\phi) &= \int_0^t \phi_u^1 d\tilde{S}_u \\ &= \int_0^t \phi_u^1 \sigma \tilde{S}_u dW_t > 0.\end{aligned}$$

So, $\tilde{V}(\phi)$ is a local martingale, that is, there exists an increasing sequence of stopping times $(\tau_n)_{n\geq 0}$ with respect to $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ with $\tau_n \uparrow \infty$ such that for n fixed, $(\tilde{V}_{t\wedge\tau_n})_{t\geq 0}$ is a $\mathbb{P}^*$ martingale for all $n \geq 0$. Then we have

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\tilde{V}_{t\wedge\tau_n}(\phi)\right] = 0.$$

Since $\tilde{V}_{t\wedge\tau_n}(\phi) \geq 0$, we obtain that $\tilde{V}_{t\wedge\tau_n}(\phi) = 0$ $\mathbb{P}^*$-almost surely for all $n \geq 0$. Consequently,

$$\tilde{V}_T(\phi) = \lim_{n\to\infty} \tilde{V}_{t\wedge\tau_n}(\phi) = 0 \quad \mathbb{P}^* - a.s.$$

Finally, since $\mathbb{P}^*$ is equivalent to $\mathbb{P}$, we obtain that $\tilde{V}_T(\phi) = 0$ $\mathbb{P}$-a.s. So, no arbitrage is possible. ■

The next result is the second fundamental theorem of asset pricing in continuous time.

Teorema 67. A market model free of arbitrage is complete if and only it admits a unique risk neutral probability measure $\mathbb{P}^*$.

For the proof, see [**?**].

In Black Scholes model, we proved the existence of a unique risk neutral probability measure, hence the model is complete.

6. Option Pricing and Implied Volatility

In Black-Scholes model we assume that the stock price $(S_t)_{t\geq 0}$ follows a geometric Brownian motion, which has constant volatility. But, this model ignores possible behaviors, one interesting case is when we have changes in volatility. However the financial market still uses the Black-Scholes formula in order to price an option.

This leads us to ask the following question: which value of volatility we should include in Black-Scholes formula in order to obtain the right option price?. To try to answer this, we will introduce the concept of *implied volatility*, since volatility is the most important parameter in the Black-Scholes model. The implied volatility of options of different maturities has an interesting characteristic. There is a pattern that implied volatility is not constant for different strike prices, and this is called volatility smile or volatility skew.

6.1. Option pricing in Black-Scholes model

We can use $(S_t)_{t\geq 0}$ to price an option with maturity time T and initial time t, strike price K, risk free interest rate r, current stock price S_0 and volatility σ. Only we will focus on European options.

Definición 68. An European option is a contract that gives you the right, but not the obligation, to get a payoff X at maturity T, where X is a non-negative F_T-measurable random variable. Then, we say that:

- A call option is an European option that gives the right but not the obligation, to buy one unit of a underlying asset for a predetermined strike price K and maturity time T. If S_T is the price of the underlying asset at maturity time T, then the value of this contract at maturity is:

$$h(S_T) = (S_T - K)_+ = \begin{cases} S_T - K & \text{if } \ S_T > K, \\ 0 & \text{if } \ S_T \leq K. \end{cases}$$

- A put option is an European option that gives the right but not the obligation, to sell a unit of a underlying asset for a strike price K at the maturity date T. This payoff is:

$$h(S_T) = (K - S_T)_+ = \begin{cases} K - S_T & \text{if } \ S_T < K, \\ 0 & \text{if } \ S_T \geq K. \end{cases}$$

The price of this call option at time T under the risk neutral probability $\mathbb{P}^*$ is the discounted expected value to the initial time,

$$C_T = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+|\mathcal{F}_t\right],$$

by definition of a call option and properties of expectation, we have

$$\begin{aligned} C_T &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[S_T\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}|\mathcal{F}_t\right] - Ke^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}|\mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{-r(T-t)}S_t\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{S_T}{S_t}\mathbb{1}_{\left\{\frac{S_T}{S_t}>\frac{K}{S_t}\right\}}|\mathcal{F}_t\right] - Ke^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\mathbb{1}_{\left\{\frac{S_T}{S_t}>\frac{K}{S_t}\right\}}|\mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{-r(T-t)}S_t\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{S_T}{S_t}\mathbb{1}_{\left\{\frac{S_T}{S_t}>\frac{K}{x}\right\}}\right]_{x=S_t} - Ke^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\mathbb{1}_{\left\{\frac{S_T}{S_t}>\frac{K}{x}\right\}}\right]_{x=S_t}. \end{aligned}$$

First, we know that

$$S_t = S_0\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right),$$

and that

$$\frac{S_T}{S_t} = \exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\right),$$

since $W_T - W_t = W_{T-t}$ in law, for the first term, we have

$$\begin{aligned} &e^{-r(T-t)}S_t\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{S_T}{S_t}\mathbb{1}_{\left\{\frac{S_T}{S_t}>\frac{K}{x}\right\}}\right]_{x=S_t} \\ &= e^{-r(T-t)}S_t\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma W_{T-t}\right)\mathbb{1}_{\left\{\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma W_{T-t}\right)>\frac{K}{x}\right\}}\right] \\ &= e^{-r(T-t)}S_t\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[e^{r(T-t)}\exp\left(\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma W_{T-t}\right)\mathbb{1}_{\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma W_{T-t}>\log\left(\frac{K}{x}\right)\right\}}\right] \\ &= S_t\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\exp\left(\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma W_{T-t}\right)\mathbb{1}_{\left\{\sigma W_{T-t}>\log\left(\frac{K}{x}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right\}}\right] \\ &= S_t\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\exp\left(\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}Y\right)\mathbb{1}_{\left\{\sigma\sqrt{T-t}Y>\log\left(\frac{K}{x}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right\}}\right] \\ &= S_t\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\exp\left(\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}Y\right)\mathbb{1}_{\left\{Y<\frac{\log\left(\frac{x}{K}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}}\right] \end{aligned}$$

we denote

$$Z = \frac{\log\left(\frac{x}{K}\right) - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Since S_t follows a standard Gaussian law, we have

$$\begin{aligned} &e^{-r(T-t)}S_t\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{S_T}{S_t}\mathbb{1}_{\left\{\frac{S_T}{S_t}>\frac{K}{x}\right\}}\right]_{x=S_t} \\ &= S_t\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{Z}\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y\right)\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy \\ &= S_t\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{Z}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sigma\sqrt{T-t}+y\right)^2\right)dy \\ &= S_t\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{Z}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du \\ &= S_tN(d_1) \end{aligned}$$

For the second summand, we have

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\mathbb{1}_{\left\{\frac{S_T}{S_t}>\frac{K}{x}\right\}}\right]_{x=S_t} = \mathbb{P}^*\left(\frac{S_T}{S_t} > \frac{K}{x}\right),$$

and if we take logarithm, we obtain

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^*\left(\log\frac{S_T}{S_t} > \log\left(\frac{K}{x}\right)\right) &= \mathbb{P}^*\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma(W_T-W_t) > \log\left(\frac{K}{x}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}^*\left(\sigma(W_T-W_t) > \log\left(\frac{K}{x}\right) - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right) \\
&= \mathbb{P}^*\left(\frac{W_T-W_t}{\sqrt{T-t}} > \frac{\log\left(\frac{K}{x}\right) - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) = N(d_2).
\end{aligned}$$

Therefore,

$$C_T = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2).$$

In other words, the price of a European call option at time t and for an observed risky asset price S_0 is given by the *Black-Scholes formula*:

$$\mathrm{C_{BS}}(S_0, K, r, T, t, \sigma) = S_0 N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{7}$$

where

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\log(S_0/K) + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\log(S_0/K) + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
\end{aligned}$$

and

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-y^2/2}dy$$

is the standard Gaussian cumulative distribution function.

6.2. Implied Volatility

In Black-Scholes model the unique parameter which cannot be observed in financial market is the volatility, since the values of the parameters S_0, K, r, T, t used to price an option via the Black-Scholes formula can be observed. Estimate the volatility coefficient σ can be a more difficult task, and several estimation methods are considered. Almost always, the inversion of the Black-Scholes formula to get the implied volatility is done with some sort of solver method, for example, the Newton-Raphson method.

We assume that stock price S follows a geometric Brownian motion and that interest rate is constant, then given a constant volatility, and put $\tau = T - t$, we know that Black-Scholes formula is given by

$$\mathrm{C_{BS}}(S,K,r,\tau,\sigma) := SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2),$$

where

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{and} \quad d_2 = \frac{\log(S/K) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Since

$$\text{vega} := \frac{\partial\,\mathrm{C_{BS}}(S,K,r,\tau,\sigma)}{\partial\sigma} = \frac{S\exp(-d_1^2/2)\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} = S_0\sqrt{\tau}N(d_1)$$

is positive, then $\mathrm{C_{BS}}(S,K,r,\tau,\sigma)$ is strictly increasing on σ. In addition, we have

$$\begin{aligned}
&\lim_{\sigma\to 0} \mathrm{C_{BS}}(S,K,r,\tau,\sigma) = (S - Ke^{-r\tau})_+,\\
&\lim_{\sigma\to \infty} \mathrm{C_{BS}}(S,K,r,\tau,\sigma) = S.
\end{aligned}$$

We want to mention that vega of an option is the sensitive of the option price to a change in volatility.

From properties of European option, we have that the price of a call option satisfies

$$(S - Ke^{-r\tau})_+ \leq C(K,\tau,S) \leq S.$$

independent of the model. Therefore, for any price $C^*(K,\tau,S)$ observed in the market for a European call option with maturity time τ and strike price K, there exists a unique solution $\sigma^{imp}(K,\tau,S)$ such that

$$\mathrm{C_{BS}}(S,K,r,\tau,\sigma^{imp}) = C^*(K,\tau,S),$$

where $\sigma^{imp}(K,\tau,S)$ is called the *implied volatility.*

Knowing S, the implied volatility σ^{imp} is a function of τ and K. If Black-Scholes model is true, σ^{imp} must be a constant function, however this is not compatible with the data.

The Black-Scholes model implies that σ^{imp} of all options on the same S must be the same. However, when calculating σ^{imp} from prices of different options observed in the market, we find that

- The implied volatility is always higher than the volatility of S.
- The volatilities implied by different options on the same underlying depend on their strikes and maturities.

To obtain the value of implied volatility σ^{imp} we must to find the volatility that equals the theoretical price of B-S model with the real market price C^*,since the other parameters are given. As this volatility can not be obtained directly from the Black-Scholes formula we must apply numerical methods to find roots, the method that we will present below is a iterative methods that allow us to approximate the solution of an equation of type:

$$f(\sigma) = \mathrm{C_{BS}}(S,K,r,\tau,\sigma) - C^* = 0.$$

There exists a lot of methods to approximate the roots of a function. For calculate the volatility, we can use Newton-Raphson method, Bisection method, Secant method, etc. In our case, we used only the first to estimate the implied volatility.

7. Complementary Octave codes

Geometric Brownian motion

Listing 1: Geometric Brownian motion sample paths in Octave

```
function GBM(S0,mu,sigma,T,N,M)
% This function plot M sample paths of Geometric Brownian motion
% where N is the number of subintervals
X  = zeros(M,N+1);
X(:,1) = S0;
dt = T/N;
t=0:dt:T;  %Time
drift = (mu-0.5*sigma^2)*dt;  % Calculation of the drift term.
diff = sigma*sqrt(dt);  % Calculation of the diffusion term.
for i=1:M
   for j=1:N
      X(i,j+1) = X(i,j)*exp(drift+diff*randn);
   end
end
%Plot Sample Paths
plot(t,X);
title('Geometric Brownian Motion')
xlabel('time')
ylabel('S')
```

Implied volatility

Listing 2: Black-Scholes formula in Octave

```
function [Call] = BS_price(S0,K,r,T,sigma)
%% This function compute the value of a European option
if T > 0
d1 = (log(S0./abs(K)) + (r+sigma.^2./2).*T)./(sigma.*sqrt(T));
d2 = d1-sigma.*sqrt(T);
N1 = 0.5.*(1+erf(d1./sqrt(2)));
```

```
N2 =  0.5.*(1+erf(d2./sqrt(2)));
Call = S0.*N1-K.*exp(-r.*T).*N2;
else
Call = max(S0-K,0);
end
```

Listing 3: Function vega in Octave

```
function [vega] = Vega(S0,K,r,T,sigma)
%% This function compute the vega in BS
d1 = (log(S0./abs(K)) + (r+sigma.^2/2)*T)./(sigma.*sqrt(T));
N1 = exp(-0.5*d1.^2)./sqrt(2*pi);
vega = S0*sqrt(T).*N1;
```

Listing 4: Implied volatility calculated by means Newton-Raphson method in Octave

```
function [ImpVol] = BS_ImpVol(S0,K,r,T,C)
%% This function compute the implied volatility (Newton-Raphson method)
%INPUTS:
%S0 : stock price
%K : strike price
%r : risk free interest rate
%T : time to maturity
%C : value of a European Call Option
%sigma0 : initial value for the implied volatility
n = 20; %number of iterations
tol=0.001; %tolerance
sigma0 = 0.2; % initial iteration
f = 'BS_price';
df = 'Vega';
for i=1:n-1
   sigma1=sigma0-(((feval(f,S0,K,r,T,sigma0))-C)/(feval(df,S0,K,r,T,sigma0)));
   if(abs((feval(f,S0,K,r,T,sigma0))-C)<tol)
        break
   end
sigma0=sigma1;
end
ImpVol = sigma0;
```

Volatilty smile

Listing 5: Function to plot volatility smile by Hull-White formula in uncorrelated case in Octave

```
clc
clear all
%%%%%%%%%%INPUTS OU %%%%%%%%%%%%%%%%%%
a = 0.5; b = 1.5; X0 = 1;
%%%%%%%%%%INPUTS BS %%%%%%%%%%%%%%%%%%
S0 = 100; K = 20; r = 0;  T = 0.5; t0 = 0; %initial time
%%%%%%%%%%INPUTS HW %%%%%%%%%%%%%%%%%%
N = 1000; %%Number of time steps per path
M = 50; %%Number of paths that we simulate
%Time step
dt = ((T-t0)/N); t = t0:dt:T;
%% Generate random numbers
X = zeros(M,N);          X(:,1) = X0; %initial condition
sigma = zeros(M,N);    sigma(:,1) = 0; %initial condition
dW = sqrt(dt)*randn(M,N);
%Simulation of N-step trajectories for the OU process
for i=1:N
    X(:,i+1) = X(:,i) - a*X(:,i)*dt + b*dW(:,i);
    X_square(:,i) = X(:,i).^2;
end
%We use numerical integration (trapezoidal rule) to compute the integral
sigma = (1/2*X_square(:,1) + 1/2*X_square(:,end)
                              + sum(X_square(:,2:end-1),2))*dt/T;
sigma_bar = sqrt(sigma);
%We create the strikes prices vector
for l=1:K
  Strike(l) = 90+((l-1));
end
%We apply B-S formula
for l=1:K
  price(l)=0;
  for j=1:M
    Call(j,l) = BS_price(S0,Strike(l),r,T,sigma_bar(j));
    price(l) = price(l)+Call(j,l)./M;
  end
ImpVol(l)=BS_ImpVol(S0,Strike(l),r,T,price(l));
end
for l=1:K
  ImpVol(l);
end
```

```
plot(ImpVol)
title('Volatility Smile')
xlabel('Strike');
ylabel('Implied Volatilities');
```

Volatilty skew

Listing 6: Function to plot volatility skew by extended Hull-White formula in correlated case in Octave

```
clc
clear all
%% % % % % % % % %INPUTS HW WITH CORRELATION % % % % % % % % % % % %
a = 0.5; b = 1.5; X0 = 1; S0 = 100; K = 20; r = 0;  T = 1; t0 = 0;
N = 1000; % %Number of time steps per path
M = 10; % %Number of paths that we simulate
rho = 0.2; %Correlation between [-1,1]
%Time step
dt = ((T-t0)/N); t = t0:dt:T;
%% Generate random numbers
X = zeros(M,N);          X(:,1) = X0; %initial condition
sigma = zeros(M,N);     sigma(:,1) = 0; %initial condition
dW = sqrt(dt)*randn(M,N);
%% Simulation of N-step trajectories for the OU process
for i=1:N
  X(:,i+1) = X(:,i) - a*X(:,i)*dt + b*dW(:,i);
  X_square(:,i) = X(:,i).^2;
end
%% We use numerical integration (trapezoidal rule) to compute the integral
sigma = (1/2*X_square(:,1) + 1/2*X_square(:,end)
                              + sum(X_square(:,2:end-1),2))*dt/T;
sigma_bar = sqrt(sigma*(1-rho^2)); %we multiply by (1-rho^2)
%% We compute the stochastic integral in extension H-W formula
Stoch_Int = sum(X(:,2:end).*dW,2); %Stochastic Integral
S = S0*exp((rho*Stoch_Int)-(0.5*(rho^2)*sigma)); %New Stock Price
%% We create the vector strikes
for l=1:K
  Strike(l) = 90+((l-1));
end
%% We apply B-S formula
for l=1:K
```

```
    Price(l) = 0;
    for j=1:M
        Call(j,l) = BS_price(S(j),Strike(l),r,T,sigma_bar(j));
        Price(l) = Price(l) + Call(j,l)./M;
        ImpVol(l) = BS_ImpVol(S(j),Strike(l),r,T,Price(l));
    end
end
for l=1:K
    ImpVol(l);
end
plot(ImpVol)
title('Volatility Skew')
ylabel('Implied Volatilities');
xlabel('Strike');
```

Listing 7: Fractional Brownian motion sample paths in Octave

```
function FBM(H)
%We plot a fractional Brownian motion on interval [0,1]
% with Hurst index H in (0,1)
n = 2^10; % number of point
r = nan(n+1,1); r(1) = 1;
for k=1:n
r(k+1) = 0.5*((k+1)^(2*H) - 2*k^(2*H) + (k-1)^(2*H));
end
r = [r; r(end-1:-1:2)]; % First row of a circular matrix
lambda = real(fft(r))/(2*n); % Eigenvalues
B = fft(sqrt(lambda).*complex(randn(2*n,1),randn(2*n,1)));
B = n^(-H)*cumsum(real(B(1:n+1))); % Rescaling
plot((0:n)/n,B);
```