Construcción del MB (26/Sept)

- Teorema de Kolmogorov

  Problema Las trayectorias no se sabe que son continuas

  Kolmogorov (Teo de continuidad)

  C. Tudor SMM

- P. Lévy

  Ventaja: Nos da un proceso con tray. continuas

$\boxed{\text{Teorema}}$ (P. Lévy) El MB existe.

Traducción: Se construye un ep $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un proceso $\{B(t) : t \geq 0\}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que

(1) $B(0) = 0$

(2) Incrementos indeps

(3) $B(t+h) - B(t) \sim \mathcal{N}(0, h) \;\; \forall \, t, h \geq 0$

(4) $\forall \, \omega \in \Omega$, $t \mapsto B(t)$ es continua en t

- Y. Peres y P. Mörters Brownian Motion. SLE
- Le Gall Funcional aditiva sobre $(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+), \mathcal{B}, \mathcal{W}_{\mathbb{R}})$
- Revuz-Yor Teo Kolmogorov. (*)
- G. Lawler Int. St. Proc.

Donsker

Dem. S.p.g se construye para $t \in [0,1]$.

$\boxed{\text{Paso 1}}$ Sea

$$D_n = \left\{ \frac{k}{2^n} : k = 0, 1, \dots, 2^n \right\} \qquad D_0 = \{0, 1\}, \; D_1 = \{0, \tfrac{1}{2}, 1\}$$

Nota $D_0 \subset D_1 \subset \dots$

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n \quad \text{(racionales diádicos)}.$$

<u>Teo de Kolmogorov</u>: $\exists\, (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ en donde es posible definir $\{Z_t : t \in D\}$ v.a.i $Z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\forall\, t \in D$.

(1) La existencia de la medida de Lebesgue ($\Rightarrow \exists\, \{U_t : t \in D\}$ v.a.i unif.)

(2) A través de la función de dist. generalizada. (inversa generalizada).

Construir $\{B(d) : d \in D_n\}$

(1) $\forall\ r < s < t$ en D_n $\quad B(t) - B(s) \sim N(0, t-s)$

$B(s) - B(r) \sim N(0, s-r)$ indeps.

(2) $\{B(d) : d \in D_n\} \perp\!\!\!\perp \{Z_t : t \in D \setminus D_n\}$

$n = 1$

Inducción

$n = 0 \quad B(0) = 0,\ B(1) = Z_1 \sim N(0,1)$

$$B\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{B(0) + B(1)}{2} + \frac{Z_{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$= \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{Z_0}{2}$$

$n-1 \rightsquigarrow n \quad \{B(d) : d \in D_{n-1}\}$ que satisface (1) y (2)

Para $d \in D_n \setminus D_{n-1}$

$$B(d) = \frac{B(d - 2^{-n}) + B(d + 2^{-n})}{2} + \frac{Z_d}{2^{\frac{n+1}{2}}}$$

Para $d \in D_n$

$B(d)$ están definidas en términos de $\{Z_t,\ t \in D_n\}$

$\{B(d) : d \in D_n\} \overset{\text{Ley}}{=} \{Z_t,\ t \in D_n\}$

inds $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 \ldots \qquad Z_1, Z_3, Z_5 \perp\!\!\!\perp Z_2, Z_4, Z_6$

Definanse

$$X_1 := \frac{B(d+2^{-n}) - B(d-2^{-n})}{2} \sim \mathcal{N}(0, 2^{-n-1})$$

$$X_2 := \frac{Z_d}{2^{\frac{n+1}{2}}} \sim \mathcal{N}(0, 2^{-n-1})$$

$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$

Ejercicio:

$(X_1 + X_2) \perp\!\!\!\perp (X_1 - X_2)$

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(0, 2^{-n})$$

$$X_1 - X_2 \sim \mathcal{N}(0, 2^{-n})$$

$\Rightarrow \quad B(d) - B(d-2^{-n}) \perp\!\!\!\perp B(d-2^{-n}) - B(d), \quad d \in D_n \setminus D_{n-1}$

$\Rightarrow \quad B(d) - B(d-2^{-n})$ indeps $d \in D_n \setminus \{0\}$

Son gaus (están dados en términos "c.l." de $\{Z_t, t \in D_n\}$)

Considere

$I_1 = [d_1 - 2^{-n}, d_1]$, $I_2 = [d_2 - 2^{-n}, d_2]$ $d_1, d_2 \in D_n \setminus \{0\}$ $d_1 < d_2$

Sea j mínimo $\ni$ I_1 e I_2 están separados por algún $d \in D_j$

$j = n$ el caso inducción

Sea $j < n$.

$$\Rightarrow I_1, I_2 \in \underbrace{[d - 2^{-j}, d] \cap [d + 2^{-j}, d]}_{K} \quad (\text{Ejercicio: ejemplo})$$

Por ind., los incrementos de B sobre K son indeps.

$\therefore$ los incrementos sobre I_1 e I_2 son indeps.

$\boxed{\text{Paso 2}}$ Usamos el lema de Borel-Cantelli (Extensión continua a $[0,1]$)

Defínanse,

$$F_0(t) = Z_1 t \ , \ t \in [0,1]$$

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & t \in D_{n-1} \\ \dfrac{Z_t}{2^{\frac{n+1}{2}}} & t \in D_n \setminus D_{n-1} \end{cases}$$

Como vimos, $B(d) = \sum_{i=0}^{n} F_i(d) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(d)$

Ejercicio $\mathbb{P}(Z_d > x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x} e^{-\frac{x^2}{2}}$

B-C: Sea $c > 1$

$$\mathbb{P}(|Z_d| > c\sqrt{n}) = 2\mathbb{P}(Z_d > c\sqrt{n}) \leq 2e^{-\frac{c^2 n}{2}}$$

Ejercicio

Sea $c>1$

$$\mathbb{P}(|Z_d|>c\sqrt{n})=2\mathbb{P}(Z_d>c\sqrt{n})\leq 2e^{-\frac{c^2 n}{2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{d\in D_n}\{|Z_d|\geq c\sqrt{n}\}\Big)\leq\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{d\in D_n}\mathbb{P}(|Z_d|\geq c\sqrt{n})$$

$$\leq\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)\cdot 2e^{-\frac{c^2 n}{2}}<+\infty$$

$$c>\sqrt{2\log 2}$$

$$c>\sqrt{2\log 2}$$

B-C: $\exists\ \tilde{A}\subset\Omega \Rightarrow \mathbb{P}(\tilde{A})=1 \Rightarrow$

$\forall\ \omega\in\tilde{A}\ \ \exists\ N=N(\omega)<+\infty \Rightarrow \forall\ n\geq N \quad \|F_n(t)\|_{[0,1]}<C(n)$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}F_n(t)$ conv. unif $\forall\ t\in[0,1]$ Sea $B(t)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(t)$ (es continua).

$\boxed{\text{Paso 3}}$ $\{B(t) : t \geq 0\}$ incrementos indeps.

Sean $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1$ Obs $\overline{D} = [0,1]$

$\Rightarrow \exists\ t_{1,n} \leq \dots \leq t_{n,k} \in D \rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} t_{i,k} = t_i$

B es continuo

$$B(t_{i+1}) - B(t_i) \overset{\text{cont}}{=} \lim_{k\to\infty} \left(B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k}) \right)$$

$\Rightarrow \left(B(t_{1,k}) - B(t_{0,k}),\ B(t_{2,k}) - B(t_{1,k}),\ \dots,\ B(t_{n+1,k}) - B(t_{n,k}) \right)$ v. gauß

con v. medias 0

La cov entre cualesquiera 2 elts del vector, en el límite, es

$(t_{i+1} - t_i)\mathbb{1}_{\{i=j\}} \Rightarrow \left(B(t_1) - B(t_0), \dots, B(t_{n+1}) - B(t_n) \right)$ es v. gauß.

con media 0 y matriz de cov $(t_{i+1} - t_i)\mathbb{1}_{\{i=j\}}$.

$\boxed{\text{Paso 4}}$ Para $t \in [n, n+1]$

$$B(t) = B_n(t-n) + \sum_{i=0}^{n-1} B_i(1)$$

$\boxtimes$

$B_0 = B$

$B_1 = B$

$\vdots$

$B_n = B$

$\vdots$

$$\left.\begin{array}{l} B_0 = B \\ B_1 = B \\ \vdots \\ B_n = B \end{array}\right\}$$ Copias indeps del proceso $\{B(t) : t \in [0,1]\}$