Notas Breves de Integración Estocástica

Octubre 2016

Resumen

Probamos, con detalle, algunos de los teoremas básicos relativos a la construcción de la integral estocástica respecto al movimiento browniano estándar.

Índice

---

1 Introducción

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Queremos definir una "integral estocástica":

$$I_t(\omega) := \int_0^t X_s(\omega)\, dB_s(\omega), \qquad \forall \omega \in \Omega,\ \forall t \geqslant 0.$$

donde $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ es un proceso estocástico y $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ es un movimiento browniano estándar sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Una posibilidad es pensar trayectorialmente y definir esta integral como una integral de Riemann-Stieltjes

$$I_t(\omega) = \lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{t_i \in \mathcal{P}} X_{s_i}(\omega)(B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)),$$

donde $\mathcal{P} : 0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n = t$ es una partición del intervalo $[0, t]$, y $t_{i-1} \leqslant s_i \leqslant t_i$, para todo $i = 1, ..., n$.

Pero como sabemos, las trayectorias del movimiento browniano tienen variación total infinita, por lo que no contamos con criterios para determinar la existencia de esta integral. De modo que este método no es factible. Aquí presentamos un método probabilista para construir la integral estocástica.

La idea es construir la integral estocástica como un límite en L^2, para evitar las limitaciones trayectoriales de las que hablamos arriba. El método consiste en definir primero la integral para procesos *simples* (i.e. cuyas trayectorias son funciones escalonadas), de manera trayectorial. El siguiente paso es extender la integral como un límite en media cuadrática, de integrales de procesos simples.

Es necesario, desde luego, imponer algunas restricciones ideales para el proceso $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$, de tal manera que tal aproximación sea posible. Obviamente, la primera de ellas es una condición de integrabilidad de segundo orden. Pero ello no es suficiente.

Generalmente, la propiedad ideal que asumimos para la clase de procesos $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ es, o bien suponer que X es *separable*, o bien que es *progresivamente medible* relativo a la filtración natural del movimiento browniano (o alguna igualmente adecuada). Nosotros, asumiremos, como es también usual, simplemente que X es *adaptado* a la filtración natural del movimiento browniano estándar.

Aunque aquí presentamos un método ligeramente distinto a lo que tradicionalmente se hace en la mayoriía de los libros: La diferencia estriba en que nos apoyaremos en el concepto de *continuidad en media cuadrática*, y no en el método de *truncamiento* (ver por ejemplo Karatzas y Shreve [KS12] o también Mortes y Peres [MP10]).

Esta perspectiva también tiene la virtud de no requerir el uso de un lema típico para nada trivial: *Cualquier proceso adaptado tiene una versión progresivamente medible.* Ver K.L. Chung y R.J. Williams [CD65], y para un estudio de este resultado y una prueba elemental ver Kaden y Potthoff [KP04]. Hay otras construcciones dirigidas por este mismo sentido, ver por ejemplo el mismo Karatzas y Shreve [KS12], y H. H. Kuo [Kuo06] (donde además se expone la construcción de Itô).

En la sección siguiente revisamos los elementos de análisis que requeriremos para esta construcción. Las secciones subsiguientes están basadas en las notas de D. Nualart [Nua] y el libro de H.H. Kuo [Kuo06].

2 Preliminares

Enunciamos algunos teoremas clásicos, que se prueban en los cursos básicos de análisis.

Teorema 2.1. *Sea $T > 0$ y $1 \leqslant p < \infty$. El subespacio $C_0([0,T])$ de funciones continuas de $[0,T]$ a $\mathbb{R}$, es denso en $L^p([0,T])$. Esto es, si $f \in L^p([0,T])$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe una función $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ continua tal que*

$$\|f - g\|_p < \varepsilon.$$

La desigualdad triangular para los espacios L^p es también un resultado fundamental.

Teorema 2.2 (Desigualdad de Minkowski). *Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida y si f_1,...,f_n son funciones medibles, entonces para todo $1 \leqslant p < \infty$,*

$$\|f_1 + \cdots + f_n\|_p \leqslant \|f_1\|_p + \cdots + \|f_n\|_p$$

Consecuencia de la desigualdad triangular de Minkowski, se sigue una desigualdad que casi no se prueba en los cursos elementales, pero que es fundamental para nosotros.

Teorema 2.3 (Desigualdad integral de Minkowski, Hardy y Pólya [HLP52]). *Sea $T > 0$ y $h : [0, T] \times [0, T] \to \mathbb{R}$ medible. Entonces*

$$\left(\int_0^T \left(\int_0^T |h(s,t)| \, dt \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \int_0^T \left(\int_0^T |h(s,t)|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Demostración. Solo será necesario considerar funciones medibles $h \geqslant 0$ de la forma

$$h(s,t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(s) \mathbb{1}_{B_i}(t),$$

donde f_1,...,f_n son funciones medibles sobre $[0, T]$ no negativas, y B_1,...,B_n son subconjuntos medibles de $[0, T]$ ajenos.

Tenemos,

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T \left(\int_0^T \sum_{i=1}^{n} f_i(s) \mathbb{1}_{B_i}(t) \, dt \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_0^T \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(s) \lambda(B_i) \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^T \Big(f_i(s) \lambda(B_i) \Big)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^T \Big(f_i(s) \Big)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \lambda(B_i) \\
&= \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^T \Big(f_i(s) \Big)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{B_i}(t) \, dt \\
&= \int_0^T \left(\int_0^T \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(s) \mathbb{1}_{B_i}(t) \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} dt
\end{aligned}$$

□

Observación 2.1. De hecho, la desigualdad integral de Minkowski tiene una versión más general para producto de espacios σ-finitos. ▲

Desde luego, usaremos algunos otros resultados y desigualdades, como convergencia dominada de Lebesgue y la desigualdad de Jensen, que conocemos ya bastante bien.

3 Procesos medibles, progresivamente medibles y procesos adaptados

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$ un espacio de probabildad filtrado.

Definición 3.1. Un proceso estocástico $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es **medible** si la aplicación en dos variables $X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$X(t, \omega) = X_t(\omega), \qquad \forall (t, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega,$$

es $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$-medible.

Decimos que el proceso $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ es **progresivamente medible** (rel. a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$) si para cada $t \geqslant 0$, la aplicación en dos variables $X : [0, t] \times \Omega \to \mathbb{R}$, dada por

$$X(s, \omega) = X_s(\omega), \quad \forall (s, \omega) \in: [0, t] \times \Omega,$$

es $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$-medible.

Decimos que $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ es adaptado (rel. a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$) si para cada t, la v.a. X_t es $\mathcal{F}_t$-medible. ▲

Lema 3.1. *Sea $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ una función medible y sean $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. Entonces*

$$\tilde{f}(s, \omega) = \begin{cases} f(\omega) & \text{si } b < s \leqslant c, \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

es una función $\mathcal{B}([a, d]) \otimes \mathcal{F}$-medible.

Demostración. Si $f \equiv \mathbb{1}_A$, con $A \in \mathcal{F}$, entonces

$$\tilde{f}(s, \omega) = \mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{1}_{(b,c]}(s).$$

Por lo que $\tilde{f}$ es $\mathcal{B}([a, b]) \otimes \mathcal{F}$-medible. El resto de la prueba se sigue por el *método usual.* □

Lema 3.2. *Si $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ es un proceso adaptado con trayectorias continuas por la derecha, o bien por la izquierda, entonces es progresivamente medible.*

Demostración. Asumimos que $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ es continuo por la derecha. Sea $t > 0$. Para cada entero $n > 0$ y $0 \leqslant s \leqslant t$, sea $X_n(0, \omega) = X_0(\omega)$, y

$$X_n(s, \omega) = X_{\frac{k+1}{2^n}t}(\omega), \qquad \text{para} \quad kt2^{-n} < s \leqslant (k + 1)t2^{-n},\ k = 0, ..., 2^{-n} - 1.$$

Por el lema anterior, el mapeo $(s, \omega) \mapsto X_n(s, \omega)$ es $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$-medible. Por continuidad por la derecha,

$$\lim_{n\to\infty} X_n(s, \omega) = X(s, \omega), \qquad \forall s \in [0, t],\ \omega \in \Omega.$$

Así que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ es progresivamente medible. □

Ejemplo 3.1. *Un movimiento browniano adaptado a alguna filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ (en particular, respecto a la filtración natural) es progresivamente medible.*

Proposición 3.1. *Un proceso $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ progresivamente medible es adaptado.*

Demostración. En efecto, si $t \in [0, T]$ es fija, entonces, por el teorema de Tonelli, la aplicación $\omega \mapsto X_t(\omega)$ de Ω a $\mathbb{R}$ es $\mathcal{F}_t$-medible. □

Ejemplo 3.2 (Scheutzow [Sch14]). *Sea $\mathcal{L}_{[0,1]}$ el σ-álgebra de Lebesgue sobre $[0, 1]$, y sea $\mathcal{L}^0_{[0,1]}$ el sub-σ-álgebra de todos los subconjuntos de $[0, 1]$ (medibles) de medida 0 ó 1. Sea el conjunto*

$$A = \left\{(x, x) : x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\} \subset [0, \infty) \times [0, 1].$$

Entonces $A \in \mathcal{B}_{[0,\infty)} \otimes \mathcal{L}_{[0,1]}$, pero para cada $t > 0$, $A \cap ([0, t] \times [0, 1]) \notin \mathcal{B}_{[0,\infty)} \otimes \mathcal{L}^0_{[0,1]}$, de lo contrario la proyección sobre $[0, 1]$ de esta intersección debería estar en $\mathcal{L}^0_{[0,1]}$, lo cual es imposible. De modo que si hacemos $\mathcal{F}_t = \mathcal{L}^0_{[0,1]}$ y $X_t = \mathbb{1}_A$, para todo $t \geqslant 0$, entonces $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ es un proceso medible y adaptado pero no progresivamente medible.

4 Integral estocástica de procesos elementales

Sea como antes $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$ un espacio de probabilidad filtrado, y sea $T > 0$ un número real.

Definición 4.1. Un proceso estocástico $H = (H_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ es **elemental** o **escalonado** o **simple**, relativo a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, si existe una partición

$$t_0 = 0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n = T$$

y algunas variables aleatorias A_i, $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-medibles y cuadrado integrables, $1 \leqslant i \leqslant n$, tales que

$$H_t = \sum_{i=1}^{n} A_i \mathbb{1}_{(t_{i-1}, t_i]}(t), \qquad \forall t \in [0, T].$$

▲

Proposición 4.1. *Un proceso elemental es progresivamente medible relativo a la misma filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Y para cada $0 \leqslant t \leqslant T$, la variable aleatoria H_t es cuadrado integrable, y la aplicación $(s, \omega) \mapsto H_s(\omega)$, con $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega$, es cuadrado integrable, rel. al espacio producto $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}, \lambda \otimes P)$ –λ la medida de Lebesgue–.*

Demostración. En efecto, para ver que es progresivamente medible, basta notar que para todo $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ y $\omega \in \Omega$,

$$H_s(\omega) = \sum_{i=1}^{n} A_i(\omega) \mathbb{1}_{(t_{i-1}\wedge t, t_i\wedge t]}(s),$$

y notar que cada sumando $A_i \mathbb{1}_{(t_{i-1} \wedge t, t_i \wedge t]}$ es $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ medible. También podemos argumentar simplemente que las trayectorias de los procesos elementales son continuas por la izquierda.

Por otro lado, para todo $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$,

$$E(H_s^2) = \sum_{i=1}^{n} E(A_{t_i}^2) \mathbb{1}_{(t_{i-1} \wedge t, t_i \wedge t]}(s) < \infty.$$

De donde

$$\int_0^t E(H_s^2)\, ds = \sum_{i=1}^{n} E(A_{t_i}^2)\, (t_i \wedge t - t_{i-1} \wedge t) < \infty.$$

□

A partir de este momento, vamos a considerar $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ como la filtración natural generada por un movimiento browniano $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Específicamente,

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s,\ 0 \leqslant s \leqslant t), \qquad \forall t \geqslant 0.$$

Se pueden agregar algunas restricciones más a esta filtración, generalmente muy útiles, como que sea completa o que satisfaga las "hipótesis usuales". También es importante decir que la eleección de esta filtración no es la única posible para construir la integral respecto al movimiento browniano, pero sí es suficiente. Más adelante en estas notas veremos con más detalle este comentario.

Definición 4.2. Si $H = (H_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ es elemental, definimos la **integral estocástica** de H respecto a B como la v.a.

$$\int_0^T H_s\, dB_s := \sum_{i=1}^{n} A_i \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right). \tag{1}$$

▲

Esta es una integral trayectorial de Riemann-Stieltjes para funciones escalanadas, por lo que las siguientes propiedades son inmediatas

Proposición 4.2. *Si $H = (H_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ y $\widetilde{H} = (\widetilde{H}_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ son elementales y $a \in \mathbb{R}$ es constante, entonces el proceso $\left(H_t + a\widetilde{H}_t\right)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ es elemental y*

$$\int_0^T \left(H_t + a\widetilde{H}_t\right) dB_t = \int_0^T H_t\, dB_t + a \int_0^T \widetilde{H}_t\, dB_t\,.$$

Corolario 4.1. *El valor de $\int_0^T H_s\, dB_s$ es independiente de la representación del proceso H.*

Ahora enunciamos las propiedades más elementales.

Proposición 4.3. *La integral estocástica $\int_0^T H_s\, dB_s$ es una v.a. $\mathcal{F}_T$-medible y de media 0.*

Demostración. Para todo $1 \leqslant i \leqslant n$, el producto $A_i\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)$ es una v.a. $\mathcal{F}_{t_i}$-medible y $\mathcal{F}_{t_i} \subset \mathcal{F}_T$. Así que $\int_0^T H_s\, dB_s$ es $\mathcal{F}_T$ medible. Más aún, por la *propiedad de Markov*, el incremento $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ es independiente de $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$, así que A_i y $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ son varaibles aleatorias independientes, para todo $1 \leqslant i \leqslant n$, en consecuencia,

$$E\left(\int_0^T H_s\, dB_s\right) = \sum_{i=1}^n E(A_i)\, E\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) = 0.$$

□

La siguiente propiedad de la integral será la clave para la construcción de la integral.

Proposición 4.4 (Isometría de Itô). *Si $H = (H_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ es elemental, entonces $\int_0^T H_s\, dB_s$ tiene varianza finita y de hecho*

$$E\left(\int_0^T H_t\, dB_t\right)^2 = E\left(\int_0^T H_t^2\, dt\right). \tag{2}$$

Demostración. Sea $\Delta B_i = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$, para todo $i = 1, ..., n$. Note que si $i < j$, entonces las v.a.'s

$$A_i A_j \Delta B_i \qquad \text{y} \qquad \Delta B_j$$

son independientes. En efecto, $A_i A_j \Delta B_i$ es $\mathcal{F}_{t_j}$-medible, y por la *propiedad de Markov*, ΔB_j es independiente de $\mathcal{F}_{t_j}$.

Y por otra parte, para todo $i = 1, ..., n$, nuevamente por la *propiedad de Markov*, $(\Delta B_i)^2$ es independiente de $\mathcal{F}_{t_i}$, y en consecuencia las v.a.'s

$$A_i^2 \qquad \text{y} \qquad (\Delta B_i)^2\,,$$

son independientes.

Luego,

$$E\left(A_i A_j \Delta B_i \Delta B_j\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j, \\ E\left(A_i^2\right)(t_i - t_{i-1}) & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

De manera que

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^T H_t\, dB_t\right)^2 &= \sum_{i,j=1}^n E\left(A_i A_j \Delta B_i \Delta B_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n E\left(A_i^2\right)(t_i - t_{i-1}) \\ &= E\left(\int_0^T H_t^2\, dt\right). \end{aligned}$$

□

Se sigue así, como consecuencia de la isometría de Itô, lo siguiente.

Proposición 4.5. *La clase* $\mathcal{H}^2_{0,T}(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$ *de todos los procesos elementales* $H = (H_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ *es un subespacio vectorial de* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *y el mapeo* $I : \mathcal{H}^2_{0,T} \to L^2$ *dado por*

$$I(H) = \int_0^T H_t \, dBt, \qquad \forall H = (H_t)_{0\leqslant t\leqslant T} \in \mathcal{H}^2_{0,T}$$

es una isometría (y por tanto continuo) lineal.

La prueba de estos hechos no representa muchas dificultadas, así que las omitimos para no distraernos de nuestro objetivo principal.

5 Procesos continuos en media cuadrática

Sea $T > 0$. Denotamos con $L^2_{\mathrm{a},T}$ la clase de todos los procesos $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ medibles y adaptados tales que

$$E\left(\int_0^T X_t^2 \, dt\right) < \infty. \tag{3}$$

Observación 5.1. Observe que la condición (3) signica que la función en dos variables $X(t, \omega) = X_t(\omega)$ pertenece al espacio (de Hilbert) $L^2(\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}, \lambda \otimes P)$. De hecho, si $X = (X_t)_{t\geqslant 0} \in L^2_{\mathrm{a},T}$, entonces equivalentemente X es medible, adaptado y por Fubini,

$$\int_0^T E|X_t|^2 \, dt < \infty.$$

▲

Observación 5.2. $L^2_{\mathrm{a},T}$ es un espacio vectorial y la clase de los procesos elementales es un subespacio. ▲

La idea es extender la definición de integral estocástica a procesos en $L^2_{\mathrm{a},T}$. Para ello vamos a requerir algunos hechos particulares sobre cierta clase de procesos que definimos a continuación.

Definición 5.1. Decimos que un proceso $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ es **continuo en media cuadrática** sobre $[0, T]$ si es cuadrado integrable, y para cada $t_0 \in [0, T]$,

$$\lim_{[0,T]\ni t\to t_0} E\left(X_t - X_{t_0}\right)^2 = 0.$$

▲

Lema 5.1 (Oksendal y Bernt [Oks13]). *Si* $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ *es continuo en media cuadrática sobre* $[0, T]$, *entonces*

$$\lim_{0<\delta\to 0} \sup_{\substack{|t-s|<\delta \\ 0\leqslant s,t\leqslant T}} E\left(X_t - X_s\right)^2 = 0.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que para todo $n \geqslant 1$, existen $s_n, t_n \in [0,T]$ tales que

$$|t_n - s_n| < \frac{1}{n}, \tag{4}$$

pero

$$E\left(X_{t_n} - X_{s_n}\right)^2 \geqslant \varepsilon. \tag{5}$$

Por compacidad del intervalo $[0,T]$, las sucesiones $(s_n)_{n\geqslant 1}$ y $(t_n)_{n\geqslant 1}$ tienen al menos una subsucesión convergente, digamos $(s_{n(m)})_{m\geqslant 1}$ y $(t_{n(m)})_{m\geqslant 1}$, a algunos puntos s_0 y t_0 de $[0,T]$, respectivamente. Por (4), de hecho, $s_0 = t_0$.

Pero por (5),

$$E\left(X_{t_{n(m)}} - X_{s_0}\right)^2 \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para una infinidad de } m\text{'s},$$

o bien

$$E\left(X_{s_{n(m)}} - X_{s_0}\right)^2 \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para una infinidad de } m\text{'s}.$$

Cualquiera que sea el caso es contradictorio con la hipótesis de continuidad en media cuadrada. □

Ahora probamos que cualquier proceso en $L^2_{\mathrm{a},T}$ continuo en media cuadrática es aproximado por procesos elementales, en media cuadrática (relativa al producto $\mathcal{B}([0,T])\otimes\mathcal{F}$).

Lema 5.2. *Sea $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ un proceso en $L^2_{\mathrm{a},T}$ continuo en media cuadrática sobre $[0,T]$. Existe una sucesión de procesos elementales $H^{(n)} = \left(H_t^{(n)}\right)_{t\in[0,T]}$, $n \geqslant 1$, tales que*

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^T \left(H_t - H_t^{(n)}\right)^2 dt\right) = 0.$$

Demostración. Para todo $t_0 \in [0,T]$,

$$\lim_{[0,T]\ni t\to t_0} E\left(H_t - H_{t_0}\right)^2 = 0.$$

Luego, para cada $n \geqslant 1$, definimos la partición de $[0,T]$

$$t_i = \frac{i}{n}T, \qquad i = 0, ..., n.$$

Y entonces definimos el proceso

$$H_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} H_{t_{i-1}} \mathbb{1}_{(t_{i-1},t_i]}(t), \qquad t \in [0,T].$$

Claramente $(H_t^{(n)})_{t\in[0,T]}$ es un proceso elemental. En tanto que para todo $t \in [0,T]$,

$$E\left(H_t - H_t^{(n)}\right)^2 \leqslant \sup_{|r-s|<\frac{T}{n}} E\left(H_r - H_s\right)^2,$$

de donde

$$E\left(\int_0^T \left(H_t - H_t^{(n)}\right)^2 dt\right) = \int_0^T E\left(H_t - H_t^{(n)}\right)^2 dt \leqslant T \sup_{|r-s|<\frac{T}{n}} E\left(H_r - H_s\right)^2.$$

Así que por el lema anterior,

$$E\left(\int_0^T \left(H_t - H_t^{(n)}\right)^2 dt\right) \to 0 \qquad \text{si } n \uparrow \infty.$$

□

Podemos extender el lema anterior para procesos arbitrarios en $L^2_{\mathrm{a},T}$. Para ello probamos un par de hechos previos. El primero de ellos es completamente trayectorial (no habla de objetos estocásticos).

Lema 5.3. *Sea $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ una función medible tal que*

$$\int_0^T |f(s)|^2 \, ds < \infty.$$

Definimos la sucesión de funciones continuas $g_n : [0,T] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$g_n(t) = n \int_{\left(t-\frac{1}{n}\right)\vee 0}^{t} f(s)\, ds, \qquad \forall 0 \leqslant t \leqslant T,\ \forall n \geqslant 1. \tag{6}$$

Entonces para toda $n \geqslant 1$,

$$\int_0^T |g_n(t)|^2 \, dt \leqslant \int_0^T |f(t)|^2 \, dt, \tag{7}$$

y además

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left(f(s) - g_n(s)\right)^2 ds = 0. \tag{8}$$

Demostración. (Avramidou [Avr05]) Probaremos la convergencia (8). Supongamos primero que f es continua (y por tanto acotada) sobre $[0,T]$. Sea $t \in [0,T]$. Para cada $n \geqslant 1$, por el teorema de valor medio, existe $c_n(t) \in \left(\left(t - \frac{1}{n}\right) \vee 0, t\right)$ tal que

$$g_n(t) = n\left(t - \left(t - \frac{1}{n}\right) \vee 0\right) f(c_n(t)).$$

De manera que

$$|f(t) - g_n(t)| \leqslant 2M,$$

donde M es una cota de f sobre $[0,T]$. En tanto que, por continuidad,

$$g_n(t) \to f(t) \qquad \text{cuando } n \to \infty,$$

ya que

$$c_n(t) \to t \quad \text{y} \quad n\left(t - \left(t - \frac{1}{n}\right) \vee 0\right) \to 1, \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Luego, por convergencia acotada,

$$\int_0^T \big(f(s) - g_n(s)\big)^2\, ds \to 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

En general, dada f medible sobre $[0,T]$ cuadrado integrable y $\varepsilon > 0$, existe una función continua $\widetilde{f}$ sobre $[0,T]$ tal que

$$\left\| f - \widetilde{f} \right\|_{L^2([0,T],\lambda)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Y si definimos, para cada $n \geqslant 1$, $f_n : [0,T] \to \mathbb{R}$ como (6), y similarmente $\widetilde{g}_n : [0,T] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{g}_n(t) = n \int_{\left(t-\frac{1}{n}\right)\vee 0}^{t} \widetilde{f}(s)\, ds, \qquad \forall 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Entonces para n suficientemente grande,

$$\left\| \widetilde{f} - \widetilde{g}_n \right\|_{L^2([0,T],\lambda)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otra parte, si extendemos $f(s) = 0$ cuando $s < 0$, y análogamente $\tilde{f}(s) = 0$, cuando $s < 0$, entonces para toda $n \geqslant 1$ y toda $t \in [0,T]$,

$$g_n(t) = \int_0^T n \mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{n}\right]}(s) f(t-s) ds \qquad \text{y} \qquad \widetilde{g}_n(t) = \int_0^T n \mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{n}\right]}(s) \widetilde{f}(t-s) ds.$$

Así que, por la desigualdad integral de Minkowski,

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T \big(g_n(t) - \widetilde{g}_n(t)\big)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} &\leqslant \int_0^T \left(\int_0^T \left(n \mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{n}\right]}(s) \left\{ f(t-s) - \widetilde{f}(t-s) \right\}\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} ds \\
&= \int_0^T n \mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{n}\right]}(s) \left(\int_0^T \left(f(t-s) - \widetilde{f}(t-s)\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leqslant \left(\int_0^T n \mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{n}\right]}(s)\, ds\right) \left(\int_0^T \left|f(t) - \widetilde{f}(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

ya que

$$\left(\int_0^T \left(f(t-s) - \widetilde{f}(t-s)\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^T \left|f(t) - \widetilde{f}(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pero

$$\left(\int_0^T \left|f(t) - \widetilde{f}(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left\| f - \widetilde{f} \right\|_{L^2([0,T],\lambda)} \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

mientras que

$$\int_0^T n \mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{n}\right]}(s)\, ds \leqslant 1.$$

(La igualdad ocurre para valores de n suficientemente grandes).

En consecuencia, para n suficientemente grande,

$$\|f - g_n\|_{L^2([0,T],\lambda)} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Para probar (7), para cada $n \geqslant 1$ tomamos nuevamente la expresión

$$g_n(t) = \int_0^T n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(s) f(t-s) ds$$

con la convención de que $f(s) = 0$ si $s < 0$. Nuevamente, por la desigualdad integral de Minkowski,

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T |g_n(t)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} &\leqslant \int_0^T \left(\int_0^T n^2 \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(s) |f(t-s)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leqslant \int_0^T n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(s) \left(\int_0^T |f(t-s)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} ds \\
&\leqslant \left(\int_0^T n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(s) \, ds\right) \left(\int_0^T |f(t)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\int_0^T |f(t)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Lema 5.4. *Sea $H = (H_t)_{t \geqslant 0}$ un proceso en $L^2_{\mathrm{a},T}$. Existe una sucesión de procesos $G^{(n)} = \left(G_t^{(n)}\right)_{t \in [0,T]}$ en $L^2(\mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}, \lambda \times P)$ continuos en media cuadrática con trayectorias continuas (y si H es progresivamente medible, entonces los procesos $G^{(n)}$ son adaptados), tales que*

$$\lim_{n \to \infty} E\left(\int_0^T \left(H_t - G_t^{(n)}\right)^2 dt\right) = 0.$$

Demostración. Para cada $n \geqslant 1$, definimos el proceso

$$G_t^{(n)} = n \int_{\left(t - \frac{1}{n}\right) \vee 0}^t H_s \, ds = n \left(\int_0^t H_s \, ds - \int_0^t H_{s-\frac{1}{n}} \mathbb{1}_{s > \frac{1}{n}}\right) ds \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Note que los procesos $\left(G_t^{(n)}\right)_{t \in [0,T]}$ tienen trayectorias continuas y, de hecho, si $t, t_0 \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
E\left(G_t^{(n)} - G_{t_0}^{(n)}\right)^2 &= n^2 E\left(\int_{t_0}^t \left(H_s - H_{s-\frac{1}{n}} \mathbb{1}_{s > \frac{1}{n}}\right) ds\right)^2 \\
&\leqslant n^2 E\left(\int_{t_0}^t \left(H_s - H_{s-\frac{1}{n}} \mathbb{1}_{s > \frac{1}{n}}\right)^2 ds\right) && \text{(desigualdad de Jensen)} \\
&= n^2 \int_{t_0}^t E\left(H_s - H_{s-\frac{1}{n}} \mathbb{1}_{s > \frac{1}{n}}\right)^2 ds && \text{(Fubini)} \\
&\leqslant n^2 \, |t - t_0| \, 2M,
\end{aligned}$$

donde $M > \int_0^T E|H_s|^2\, ds$. Así que los procesos $\big(G_t^{(n)}\big)_{t\in[0,T]}$ son continuos en media cuadrática.

Es claro además, desde la defición, que si H es progresivamente medible, los procesos $G^{(n)}$ son adaptados.

El resultado se sigue ahora del lema anterior, usando convergencia dominada de Lebesgue, ya que

$$\int_0^T |G_t^{(n)}|^2\, dt \leqslant \int_0^T |H_t|^2\, dt < \infty.$$

□

Como ya dijimos, estos resultados tienen como consecuencia un hecho de lo más relevante que enunciamos a continuación.

Teorema 5.1. *Sea $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ un proceso en $L^2_{\mathrm{a},T}$. Existe una sucesión de procesos elementales $H^{(n)} = \big(H_t^{(n)}\big)_{t\in[0,T]}$ tales que*

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^T \left(H_t - H_t^{(n)}\right)^2 dt\right) = 0.$$

Demostración. Dada $n \geqslant 1$, sea $G^{(n)} = (G_t^{(n)})_{0\leqslant t\leqslant T}$ un proceso continuo en media cuadrática tal que

$$E\left(\int_0^T \left(H_t - G_t^{(n)}\right)^2 dt\right) < \frac{1}{4n}.$$

Y sea $H_n = (H_t^{(n)})_{o\leqslant t\leqslant T}$ un proceso elemental tal que

$$E\left(\int_0^T \left(G_t^{(n)} - H_t^{(n)})\right)^2 dt\right) < \frac{1}{4n}.$$

Se sigue de la desigualdad triangular,

$$E\left(\int_0^T \left(H_t - H_t^{(n)}\right)^2 dt\right) \leqslant 4\frac{1}{4n} = \frac{1}{n}.$$

□

Observación 5.3. Lo que acabamos de probar es que el subespacio de los procesos elementales es denso en $L^2_{\mathrm{a},T}$. Por otra parte, no es difícil ver que la clase de los procesos continuos en media cuadrática es un subespacio de $L^2_{\mathrm{a},T}$, y por lo que probamos en esta sección, es también denso sobre $L^2_{\mathrm{a},T}$. ▲

6 Integral estocástica para procesos en $L^2_{\mathrm{a},T}$

Lema 6.1. *Si $H^{(n)} = (H_t^{(n)})_{t\in[0,T]}$ y $\widetilde{H}^{(n)} = (\widetilde{H}_t^{(n)})_{t\in[0,T]}$ son dos sucesiones de procesos elementales tales que*

$$E\left(\int_0^T \left(H_t^{(n)} - \widetilde{H}_t^{(m)}\right)^2 dt\right) \to 0 \quad \textit{cuando } n, m \to \infty,$$

entonces

$$E\left[\left(\int_0^T \left(H_t^{(n)} - \widetilde{H}_t^{(m)}\right) dB_t\right)^2\right] \to 0 \quad \textit{cuando } n, m \to \infty.$$

Demostración. Por la isometría de Itô (2), para todo $n, m \geqslant 1$,

$$E\left[\left(\int_0^T \left(H_t^{(n)} - \widetilde{H}_t^{(m)}\right) dB_t\right)^2\right] = E\left(\int_0^T \left(H_t^{(n)} - \widetilde{H}_t^{(m)}\right)^2 dt\right),$$

ya que $(H_t^{(n)} - \widetilde{H}_t^{(m)})_{0\leqslant t\leqslant T}$ son procesos elementales. De aquí es inmediato lo que se quiere probar. □

Teorema 6.1. *Sea $H = (H_t)_{t\in[0,T]}$ un proceso en $L^2_{\mathrm{a},T}$. Existe una variable aleatoria I_T, $\mathcal{F}_T$-medible, cuadrado integrable tal que si $H^{(n)} = (H_t^{(n)})_{t\in[0,T]}$ es una sucesión de procesos elementales tales que*

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^T \left(H_t^{(n)} - H(t)\right)^2 dt\right) = 0,$$

entonces

$$\int_0^T H_t^{(n)}\, dB_t \to I_T \quad \textit{cuando} \quad n \to \infty, \qquad \textit{en } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P).$$

Demostración. Sabemos que existe una sucesión $H^{(n)} = (H_t^{(n)})_{t\in[0,T]}$ de procesos elementales en $L^2_{\mathrm{a},T}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^T \left(H_t^{(n)} - H_t\right)^2 dt\right) = 0. \tag{9}$$

En consecuencia,

$$\lim_{n,m\to\infty} E\left(\int_0^T \left(H_t^{(n)} - H_t^{(m)}\right)^2 dt\right) \leqslant 2 \lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^T \left(H_t^{(n)} - H_t\right)^2 dt\right) + 2 \lim_{m\to\infty} E\left(\int_0^T \left(H_t^{(m)} - H_t\right)^2 dt\right),$$

y ambos límites de la derecha son cero. De manera que, por el lema anterior, la sucesión de variables aleatorias $\int_0^T H_t^{(n)}\, dB_t$ es de Cauchy en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Luego, existe una v.a. I_T en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que $\int_0^T H_t^{(n)}\, dB_t \to I_T$ en L^2.

Ahora, si $\widetilde{H}^{(n)} = (\widetilde{H}_t^{(n)})_{t\in[0,T]}$ es otra sucesión de procesos elementales en $L^2_{\mathrm{a},T}$ tales que satisface (9), entonces por un argumento análogo, usando el lema anterior, se tiene que

$$\lim_{n,m\to\infty} E\left(\int_0^T H_t^{(n)}\, dB_t - \int_0^T \widetilde{H}_t^{(m)}\, dB_t\right)^2 = \lim_{n,m\to\infty} E\left(\int_0^T \left(H_t^{(n)} - \widetilde{H}_t^{(m)}\right) dB_t\right)^2 = 0.$$

Por lo tanto $\int_0^T \widetilde{H}_t^{(n)}\, dB_t \to I_T$ en L^2. □

Definición 6.1. Si $H = (H_t)_{t\in[0,T]}$ es un proceso en $L^2_{\mathrm{a},T}$, definimos la **integral estocástica** de H respecto a B sobre $[0,T]$, como el límite en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\int_0^T H_t\, dB_t := \lim_{n\to\infty} \int_0^T H_t^{(n)}\, dB_t,$$

donde $H^{(n)} = (H_t^{(n)})_{t\in[0,T]}$ es una sucesión de procesos elementales que cumplen (9).

7 Propiedades de la integral estocástica

Proposición 7.1 (Isometría de Itô). *Si $H = (H_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ es un proceso en $L^2_{\mathrm{a},T}$, entonces*

$$E\left(\int_0^T H_t\, dB_t\right)^2 = E\left(\int_0^T H_t^2\, dt\right). \tag{10}$$

Demostración. Sea $H^{(n)} = (H_t^{(n)})_{t\in[0,T]}$ es una sucesión de procesos elementales que cumplen (9). Se sigue entonces, de la isometría de Itô (2),

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^T H_t^2\, dt\right) &= \lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^T (H_t^{(n)})^2\, dt\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^T H_t^{(n)}\, dB_t\right)^2 \\ &= E\left(\int_0^T H_t\, dB_t\right)^2. \end{aligned}$$

□

De forma análoga pueden probarse las siguientes dos propiedades.

Proposición 7.2. *Si $H = (H_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ es un proceso en $L^2_{\mathrm{a},T}$, entonces*

$$E\left(\int_0^T H_t\, dB_t\right) = 0$$

Proposición 7.3 (Linealidad). *Si $H = (H_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ y $\widetilde{H} = (\widetilde{H}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ son procesos en $L^2_{\mathrm{a},T}$, y a, b son constantes, entonces*

$$\int_0^T \left(aH_t + b\widetilde{H}\right) dB_t = a\int_0^T H_t\, dB_t + b\int_0^T \widetilde{H}\, dB_t\, .$$

8 Ejemplos

Ver libro de Kuo [Kuo06].

Proposición 8.1. *Si $T > 0$ y $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ es un movimiento browniano (estándar),*

$$\int_0^T B_t\, dB_t = \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}T. \tag{11}$$

Vamos a necesitar un par de hechos sobre el movimiento browniano.

Lema 8.1. *Si $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ es un movimiento browniano (estándar), para todo $s, t \geqslant 0$,*

$$E\left(B_t - B_s\right)^4 = 3(t-s)^2. \tag{12}$$

Demostración. El incremento $B_t - B_s$ tiene ley $N(0, |t-s|)$, de manera que para todo $k \geqslant 0$,

$$E\left(B_t - B_s\right)^{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}|t-s|^k \tag{13}$$

La fórmula (12) se sigue cuando $k = 2$. □

Lema 8.2. *Sea $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ un movimiento browniano (estándar) y $0 \leqslant a \leqslant b$ números reales. Si $\Pi_n : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, $n \geqslant 1$, es una sucesión de particiones del intervalo $[a, b]$ tal que $\|\Pi_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 \xrightarrow{L^2} b - a, \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Demostración. Sea $X_i = \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 - (t_i - t_{i-1})$, para $1 \leqslant i \leqslant n$, y sea

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Notamos que, por independencia de los incrementos del movimiento browniano,

$$E(X_i X_j) = 0 \qquad \text{si } i \neq j.$$

En tanto que

$$\begin{aligned}
E\left(X_i^2\right) &= E\left[\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^4 - 2(t_i - t_{i-1})\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 + (t_i - t_{i-1})^2\right] \\
&= 3\left(t_i - t_{i-1}\right)^2 - 2\left(t_i - t_{i-1}\right)^2 + \left(t_i - t_{i-1}\right)^2 \\
&= 2\left(t_i - t_{i-1}\right)^2 \\
&\leqslant 2\|\Pi_n\|\left(t_i - t_{i-1}\right).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$E\left(Y_n^2\right) = \sum_{i,j=1}^{n} E\left(X_i X_j\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^2\right) \leqslant 2\|\Pi_n\| \sum_{i=1}^{n} \left(t_i - t_{i-1}\right) = 2(b-a)\|\Pi_n\|$$

De quí es inmediato lo que desamos probar. □

Prueba de la Proposicion 8.1. El movimiento browniano es continuo en media cuadrática, ya que para todo y $t > 0$ y $0 \leqslant |h| \leqslant t$,

$$E\left(B_{t+h} - B_t\right)^2 = |h|.$$

Podemos entonces elegir la sucesión aproximadora

$$H_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} B_{\frac{(i-1)T}{n}} \mathbb{1}_{\left(\frac{(i-1)T}{n}, \frac{iT}{n}\right]}(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,\ n \geqslant 1.$$

En tal caso tenemos,

$$\begin{aligned}\int_0^T H_t^{(n)}\, dB_t &= \sum_{i=1}^{n} B_{\frac{(i-1)T}{n}} \left(B_{\frac{iT}{n}} - B_{\frac{(i-1)T}{n}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(B^2_{\frac{iT}{n}} - B^2_{\frac{(i-1)T}{n}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(B_{\frac{iT}{n}} - B_{\frac{(i-1)T}{n}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} B_T^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(B_{\frac{iT}{n}} - B_{\frac{(i-1)T}{n}} \right)^2 .\end{aligned}$$

La fórmula (11) se sigue entonces en virtud del lema anterior. □

Recordemos que, según las reglas de integración usual,

$$\int_0^T x\, dx = \frac{1}{2} T^2,$$

y en general, si $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ es una función real de variable real diferenciable, entonces

$$\int_0^T x_t\, dx_t = \int_0^T x_t x_t'\, dt = \frac{1}{2} \left(x_T^2 - x_0^2 \right).$$

Esta propiedad de la integral usual resalta las diferencias con la integral estocástica (11), debido a la presencia del factor $-\frac{1}{2}T$.

Hacemos otras observaciones importantes

Observación 8.1 (La integral de Fisk-Stratonovich)**.** (Ver C. Tudor [Tud94] o bien Oksendal y Bernt [Oks13]). Se puede probar con argumentos totalmente análogos que

$$\sum_{i=1}^{n} B_{\frac{iT}{n}} \left(B_{\frac{iT}{n}} - B_{\frac{(i-1)T}{n}} \right) \xrightarrow{L^2} \frac{1}{2} B_T^2 + \frac{1}{2} T.$$

La integral estocástica, a diferencia de la integral usual, es sensible a la partición *etiquetada* usada en la aproximación.

En general, si $0 \leqslant a \leqslant T$, y para cada $1 \leqslant i \leqslant n$ escogemos el punto intermedio

$$\tau_i = (T - a) \frac{(i-1)}{n} + a \frac{i}{n} \in \left[\frac{(i-1)}{n} T, \frac{i}{n} T \right],$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n} B_{\tau_i} \left(B_{\frac{iT}{n}} - B_{\frac{(i-1)T}{n}} \right) \xrightarrow{L^2} \frac{1}{2} B_T^2 + \left(a - \frac{1}{2} T \right).$$

Definimos entonces la *integral de Fisk-Stratonovich* como

$$(a)\int_0^T B_t\,dB_t := \frac{1}{2}B_T^2 + \left(a - \frac{1}{2}T\right).$$

En particular, si $a = \frac{T}{2}$, entonces

$$\left(\frac{T}{2}\right)\int_0^T B_t\,dB_t = \frac{1}{2}B_T^2.$$

Esta fórmula corresponde a las reglas de la integral usual. Pero no produce procesos adaptados, con lo que pierde también la propiedad de procesos que sean martingala, a diferencia de la integral de Itô. ▲

Proposición 8.2. *Si $T > 0$ y $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ es un movimiento browniano (estándar),*

$$\int_0^T B_t^2\,dB_t = \frac{1}{3}B_T^3 - \int_0^T B_t\,dt\,. \tag{14}$$

Vamos a probar primero que $B^2 = (B_t^2)_{t\geqslant 0}$ es continuo en media cuadrática.

Lema 8.3. *Si $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ es un movimiento browniano (estándar),*

$$E\left(B_t^2 B_s^2\right) = ts + 2s^2, \qquad \forall t \geqslant s \geqslant 0.$$

En consecuencia, $B^2 = (B_t^2)_{t\geqslant 0}$ es continuo en media cuadrática.

Demostración. Tenemos,

$$\begin{aligned}
E\left(B_t^2 B_s^2\right) &= E\left[\left((B_t - B_s) + B_s\right)^2 B_s^2\right] \\
&= E\left[\left((B_t - B_s)^2 + 2B_s\left(B_t - B_s\right) + B_s^2\right) B_s^2\right] \\
&= (t-s)s + 3s^2 \\
&= ts + 2s^2.
\end{aligned}$$

De donde se deduce fácilmente que $E\left(B_t^2 - B_s^2\right)^2$ es una función continua de t y s, y en consecuencia $B^2 = (B_t^2)_{t\geqslant 0}$ es un proceso continuo en media cuadrática. □

Y ahora necesitamos un par de hechos más sobre el movimiento browniano.

Lema 8.4. *Para todo $s, t \geqslant 0$,*

$$E\left(B_t - B_s\right)^6 = 15|t-s|^3.$$

Demostración. Fórmula (13) con $k = 3$. □

Lema 8.5. *Hipótesis y notación como en el Lema 8.2.*

$$\sum_{i=1}^{n} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^3 \xrightarrow{L^2} 0 \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} B_{t_{i-1}} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 \xrightarrow{L^2} \int_a^b B_t \, dt, \tag{16}$$

Demostración. Dado que el movimiento browniano tiene incrementos independientes normalmente distribuidos de media cero, si $i \neq j$, dentonces

$$E\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^3 \left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)^3 = 0.$$

Mientras que

$$E\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^6 = 15(t_i - t_{i-1})^3 \leqslant 15\|\Pi_n\|^2(t_i - t_{i-1}).$$

Se sigue,

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^{n} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^3\right)^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^3 \left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)^3 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^6 \\ &\leqslant 15\|\Pi_n\|^2(b-a). \end{aligned}$$

Lo que prueba el límite (15).

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} B_{t_{i-1}} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} B_{t_{i-1}}(t_i - t_{i-1})\right)^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} B_{t_{i-1}} B_{t_{j-1}} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 \left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)^2 \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{n} B_{t_{i-1}} B_{t_{j-1}} (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) \\ &\quad - 2\sum_{i,j=1}^{n} B_{t_{i-1}} B_{t_{j-1}} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 (t_j - t_{j-1}). \end{aligned}$$

Puede verse fácilmente que, por medio de argumentos análogos a los que usamos para la prueba de la isometría de Itô 2, se sigue que la esperanza del término izquierdo de la igualdad anterior es igual a

$$2\sum_{i=1}^{n} t_{i-1}(t_i - t_{i-1})^2.$$

Pero

$$2\sum_{i=1}^{n} t_{i-1}(t_i - t_{i-1})^2 \leqslant 2b(b-a)\|\Pi_n\| \to 0, \qquad \text{cuando} \;\; n \to \infty.$$

Por una aplicación de convergencia dominada, se sigue la convergencia (16). $\square$

Lema 8.6. *Hipótesis y notación del Lema 8.2.*

$$\sum_{i=1}^{n} B_{t_{i-1}}^2 \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) \xrightarrow{L^2} \frac{1}{3}\left(B_b^3 - B_a^3\right) - \int_a^b B_t \, dt \,. \tag{17}$$

Demostración. Tenemos,

$$3\sum_{i=1}^{n} B_{t_i}^2 \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) = B_b^3 - B_a^3 - 3\sum_{i=1}^{n} B_{t_{i-1}} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^3 .$$

La convergencia (17) es ahora inmediata de las convergencias del Lema 8.5. □

Finalmente.

Prueba de la Proposición 8.2. Como $B^2 = (B_t^2)_{t\geqslant 0}$ es un proceso continuo en media cuadrática, elegimos (analogo al ejemplo anterior) la sucesión aproximadora

$$H_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} B^2_{\frac{(i-1)T}{n}} \mathbb{1}_{\left(\frac{(i-1)T}{n}, \frac{iT}{n}\right]}(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \ n \geqslant 1.$$

Del Lema 8.6 anterior, con $a = 0$ y $b = T$, se sigue (14). □

Referencias

[Avr05] Parthena Avramidou. Convolution operators induced by approximate identities and pointwise convergence in l_p spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 133(1):175–184, 2005.

[CD65] Kai Lai Chung and Joseph Leo Doob. Fields, optionality and measurability. *American Journal of Mathematics*, 87(2):397–424, 1965.

[HLP52] Godfrey Harold Hardy, John Edensor Littlewood, and George Pólya. *Inequalities*. Cambridge university press, 1952.

[KP04] Svenja Kaden and Jürgen Potthoff. Progressive stochastic processes and an application to the itô integral. *Stochastic analysis and applications*, 22(4):843–865, 2004.

[KS12] Ioannis Karatzas and Steven Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113. Springer Science & Business Media, 2012.

[Kuo06] Hui-Hsiung Kuo. *Introduction to stochastic integration*. Springer, 2006.

[MP10] Peter Mörters and Yuval Peres. *Brownian motion*, volume 30. Cambridge University Press, 2010.

[Nua] David Nualart. *Cálculo Estocástico*. https://www.math.ku.edu/~nualart/.

[Oks13] Bernt Oksendal. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media, 2013.

[Sch14] Michael Scheutzow. Stochastic processes ii. `http://page.math.tu-berlin.de/~scheutzow/`, September 2014.

[Tud94] Constantin Tudor. *Procesos estocásticos*, volume 2. Sociedad Matematica Mexicana, 1994.