EXAMEN DU 13 JANVIER 2017

"*Calcul Stochastique*"

3 heures ; une synthèse de cours admise

Tous les processus sont définis sur un même espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ *(dont la filtration est complète et continue à droite), muni d'un* $(\mathscr{F}_t)$*-mouvement brownien standard* $(B_t, t \ge 0)$*. Toutes les variables aléatoires sont définies sur* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$*.*

Rappel : Soient $\alpha < \beta$ *des réels. Si* $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sont lipschitziennes et si* X *et* Y *sont continus adaptés tels que* $X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_1(X_s)\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t b_1(X_s)\,\mathrm{d}s$ *et* $Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma_2(Y_s)\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t b_2(Y_s)\,\mathrm{d}s$*,* $t \ge 0$*, avec* $X_0 = Y_0$ p.s.*, où* σ_1*,* σ_2*,* b_1*,* b_2 *sont des fonctions mesurables telles que* $\sigma_1(x) = \sigma_2(x) = \sigma(x)$*,* $b_1(x) = b_1(x) = b(x)$ *pour tout* $x \in [\alpha, \beta]$*, alors* $\mathbb{P}(X_{t\wedge T_X} = Y_{t\wedge T_Y}, \ \forall t \ge 0) = 1$ *où* $T_\xi := \inf\{t \ge 0 : \ \xi_t \notin]\alpha, \beta[\,\}$ *pour* $\xi := X$ *ou* Y*, avec* $\inf \varnothing := \infty$*.*

Exercice I (5 *point*)**.** Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

(i) Montrer que pour toute sous-martingale $(M_t, \ t \in [0, 1])$, on a $\sup_{t\in[0,1]} \mathbb{E}(|M_t|) < \infty$.

(ii) Soit $(N_t, \ t \ge 0)$ une martingale continue, à valeurs dans $[0, \infty[$. Soit $T := \inf\{t \ge 0 : \ N_t = 0\}$ (avec $\inf \varnothing := \infty$). Montrer que p.s. sur $\{T < \infty\}$, on a $N_t(\omega) = 0$, $\forall t \ge T(\omega)$.

(iii) Soit $(H_t, \ t \ge 0)$ un processus progressif. On suppose qu'il existe des constantes $0 < c \le C < \infty$ telles que $c \le H_t(\omega) \le C$ pour tout $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Montrer que pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty$, on a

$$\exp\Big(\frac{c^2}{2}\int_0^\infty f^2(t)\,\mathrm{d}t\Big) \le \mathbb{E}\Big\{\exp\Big(\int_0^\infty f(t)H_t\,\mathrm{d}B_t\Big)\Big\} \le \exp\Big(\frac{C^2}{2}\int_0^\infty f^2(t)\,\mathrm{d}t\Big).$$

(iv) Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité sur $\mathscr{F}_\infty$ telle que pour tout t, $\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_t} = \mathrm{e}^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t} \bullet \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_t}$. Soit τ un temps d'arrêt fini $\mathbb{P}$-p.s. Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\gamma B_\tau - \frac{\gamma^2}{2}\tau}) = 1$ si et seulement si $\tau < \infty$ $\mathbb{Q}$-p.s.

Exercice II (5 *points*)**.** Que pensez-vous de chacun des énoncés suivants ?

(a) Soient $X, X_1, X_2, \cdots$ des variables aléatoires réelles, telles que $X_n \to X$ p.s., et que $\sup_{n\ge1} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$. Aline dit : Alors $\mathbb{E}(|X_n - X|) \to 0$.

(b) Soit $(M_t,\, t \geq 0)$ une sous-martingale continue à droite telle que $M_t \to M_\infty$ p.s. Béatrice dit : Alors pour tout $t \geq 0$, on a $M_t \leq \mathbb{E}(M_\infty \,|\, \mathscr{F}_t)$ p.s.

(c) Soit $(M_s,\, s \geq 0)$ une martingale continue à droite telle que pour tout $t \geq 0$, $(M_s,\, s \in [0,\, t])$ est uniformément intégrable. Camille dit : Alors $(M_s,\, s \geq 0)$ est uniformément intégrable.

(d) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée avec $f(0) = 0$ telle que $(f(B_t),\, t \geq 0)$ est une martingale. Dominique dit : Alors $\int_0^\infty f(B_t)^2 \, \mathrm{d}t < \infty$ p.s.

Exercice III (10 *points*)**.** Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\sigma(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(1) Pour tous entiers $m \geq 1$ et $n \geq 2$, soit $b^{(m,n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne telle que $b^{(m,n)}(x) := \frac{1}{x}$, $\forall x \in [\frac{1}{m},\, n]$. Montrer que l'EDS $E_1(\sigma,\, b^{m,n})$ a une unique solution (notée $X^{(m,n)}$) associée à $(\Omega,\, \mathscr{F},\, (\mathscr{F}_t),\, \mathbb{P},\, B)$, et que cette solution est forte. [Rappel de notation : L'indice 1 dans $E_1(\sigma,\, b^{(m,n)})$ signifie que la valeur initiale est donnée par $X_0^{(m,n)} = 1$.]

(2) Posons $T_{m,n} := \inf\{t \geq 0 :\ X_t^{(m,n)} \leq \frac{1}{m}$ ou $X_t^{(m,n)} \geq n\}$, avec $\inf \varnothing := \infty$. En considérant l'EDS satisfaite par $X^{(m,n)}$, montrer que $\mathbb{E}(t \wedge T_{m,n}) \leq n(n-1)$ pour tout $t \geq 0$.

(3) Montrer que $\mathbb{E}(\frac{1}{X^{(m,n)}_{t\wedge T_{m,n}}}) = 1$ pour tout $t \geq 0$.

(4) Posons $T^-_{m,n} := \inf\{t \geq 0 :\ X_t^{(m,n)} \leq \frac{1}{m}\}$ et $T^+_{m,n} := \inf\{t \geq 0 :\ X_t^{(m,n)} \geq n\}$, avec $\inf \varnothing := \infty$. À l'aide de la question précédente, montrer que $\mathbb{P}(T^+_{m,n} < T^-_{m,n}) = \frac{m-1}{m-\frac{1}{n}}$.

(5) Posons $\tau_n := \lim_{m\to\infty} T_{m,n}$. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $X^{(m,n)}_{t\wedge T_{m,n}}$ converge p.s. (lorsque $m \to \infty$) vers une limite notée $X_t^{(n)}$. Montrer que $(X_t^{(n)},\, t \geq 0)$ est un processus continu, adapté par rapport à la filtration canonique de B, et que

$$X^{(n)}_{t\wedge\tau_n} = 1 + B_{t\wedge\tau_n} + \int_0^{t\wedge\tau_n} \frac{\mathrm{d}s}{X_s^{(n)}}, \qquad t \geq 0.$$

(6) Montrer que $\mathbb{E}[(X^{(n)}_{t\wedge\tau_n})^2] \leq 1 + 3t$ pour tout $t \geq 0$.

(7) Calculer $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty)$.

(8) Soit $b(x) := \frac{\mathbf{1}_{\{x\neq 0\}}}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une solution forte pour l'EDS $E_1(\sigma,\, b)$ associée à $(\Omega,\, \mathscr{F},\, (\mathscr{F}_t),\, \mathbb{P},\, B)$.

- fin -

Examen du 13 janvier 2017 : corrigé

"Calcul Stochastique"

Exercice I. (i) Comme $(M_t^+,\, t \ge [0,\,1])$ est une sous-martingale, on a $\mathbb{E}(M_t^+) \le \mathbb{E}(M_1^+)$ pour $t \in [0,\,1]$. D'autre part, $\mathbb{E}(M_t) \ge \mathbb{E}(M_0)$, ce qui implique que $\sup_{t\in[0,\,1]} \mathbb{E}(|M_t|) \le 2\mathbb{E}(M_1^+) - \mathbb{E}(M_0) < \infty$.

(ii) Fixons $n \ge 1$. On applique le théorème d'arrêt à la martingale continue et **uniformément intégrable** $(N_{t\wedge n},\, t \ge 0)$ et au couple de temps d'arrêt T et $T+t$, pour voir que $\mathbb{E}(N_{(T+t)\wedge n} \,|\, \mathscr{F}_T) = N_{T\wedge n}$. On fait $n \to \infty$. Par le lemme de Fatou (version conditionnelle), cela donne $\mathbb{E}(N_{T+t} \,|\, \mathscr{F}_T) \le N_T$ p.s., et donc $\mathbb{E}(N_{T+t}\, \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \,|\, \mathscr{F}_T) \le N_T\, \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} = 0$ p.s. En particulier, $\mathbb{E}(N_{T+t}\, \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}) = 0$. D'où $N_{T+t}\, \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} = 0$ p.s., c'est-à-dire que $N_{T+t} = 0$ p.s. sur $\{T < \infty\}$. On déduit que p.s. sur $\{T < \infty\}$, on a $N_{T+t} = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$. La continuité de N entraîne que l'on peut enlever la restriction $t \in \mathbb{Q}$.

(iii) Considérons la martingale locale $(L_t := \int_0^t f(s) H_s \,\mathrm{d}B_s,\, t \ge 0)$. On a $\langle L\rangle_\infty = \int_0^\infty f^2(t) H_t^2 \,\mathrm{d}t \le C^2 \int_0^\infty f^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty$; donc $\mathbb{E}[\exp(\frac12 \langle L\rangle_\infty)] < \infty$. D'après le théorème de Novikov, $\mathscr{E}(L)$ est une martingale uniformément intégrable. En particulier, $1 = \mathbb{E}[\mathscr{E}(L)_\infty] = \mathbb{E}[\exp(\int_0^\infty f(t) H_t \,\mathrm{d}B_t - \frac12 \langle L\rangle_\infty)]$. Puisque $c^2 \int_0^\infty f^2(t)\,\mathrm{d}t \le \langle L\rangle_\infty \le C^2 \int_0^\infty f^2(t)\,\mathrm{d}t$, les inégalités cherchées s'en suivent.

[Attention : On ne saura comparer $\int_0^\infty f(t) H_t \,\mathrm{d}B_t$ avec $\int_0^\infty c\, f(t)\,\mathrm{d}B_t$ ou $\int_0^\infty C\, f(t)\,\mathrm{d}B_t$.]

(iv) Soit $t \ge 0$. Comme $\{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t$, on a $\mathbb{Q}(\tau \le t) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau\le t\}} \mathrm{e}^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2} t}]$, que l'on peut écrire sous la forme $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau\le t\}} \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2} t} \,|\, \mathscr{F}_{\tau\wedge t})]$ (car $\{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_{\tau\wedge t}$). Appliquons le théorème d'arrêt à la martingale continue $(\mathrm{e}^{\gamma B_s - \frac{\gamma^2}{2} s},\, s \ge 0)$ et aux temps d'arrêt **bornés** $\tau\wedge t$ et t, on a $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2} t} \,|\, \mathscr{F}_{\tau\wedge t}) = \mathrm{e}^{\gamma B_{\tau\wedge t} - \frac{\gamma^2}{2}(\tau\wedge t)}$, qui est égal à $\mathrm{e}^{\gamma B_\tau - \frac{\gamma^2}{2}\tau}$ pour $\omega \in \{\tau \le t\}$. Ainsi, $\mathbb{Q}(\tau \le t) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau\le t\}} \mathrm{e}^{\gamma B_\tau - \frac{\gamma^2}{2}\tau}]$.

On fait $t \uparrow \infty$. À gauche, $\mathbb{Q}(\tau \le t) \uparrow \mathbb{Q}(\bigcup_{n=1}^\infty \{\tau \le n\}) = \mathbb{Q}(\tau < \infty)$. À droite, par convergence monotone, $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau\le t\}} \mathrm{e}^{\gamma B_\tau - \frac{\gamma^2}{2}\tau}] \uparrow \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\gamma B_\tau - \frac{\gamma^2}{2}\tau}]$ (car $\tau < \infty$ $\mathbb{P}$-p.s.). D'où l'identité cherchée. □

Exercice II. (a) Aline se trompe. Un contre-exemple : une martingale $(X_n,\, n \ge 0)$ positive (qui converge donc p.s. et $\sup_{n\ge1} \mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}(X_1) < \infty$) qui n'est pas uniformément intégrable (par exemple, $X_n := \mathrm{e}^{B_n - n/2}$).

(b) Béatrice dit une bêtise. Un contre-exemple $M_t := \mathrm{e}^{B_t - t/2}$, qui converge p.s. vers 0.

(c) Camille a tort. Un contre-exemple avec la martingale $M_s := \mathrm{e}^{B_s - s/2}$, $s \ge 0$ (donc $(M_s,\, s \in [0,\,t])$ est uniformément intégrable pour tout t, comme toute martingale), qui n'est pas uniformément intégrable.

(d) La martingale $(f(B_t),\, t \ge 0)$, étant bornée, converge p.s., ce qui n'est possible que si f est une constante (pour tout réel a, $\sup\{t \ge 0 : B_t = a\} = \infty$ p.s. ; donc s'il existait des réels $a \ne b$ telle que $f(a) \ne f(b)$, alors la continuité de f impliquerait que $f(B_t)$ admettraient deux limites p.s. distinctes le long de deux sous-suites). Comme $f(0) = 0$, la fonction f s'annule partout. En particulier, $\int_0^\infty f(B_t)^2 \,\mathrm{d}t < \infty$: Dominique a raison. □

Exercice III. (1) Comme σ et $b^{(m,n)}$ sont lipschitziennes, le théorème du cours pour les EDS à coefficients nous donne la conclusion cherchée.

(2) Soit $t \ge 0$. Par définition, $X^{(m,n)}_{t\wedge T_{m,n}} = 1 + B_{t\wedge T_{m,n}} + \int_0^{t\wedge T_{m,n}} b^{(m,n)}(X^{(m,n)}_s)\,\mathrm{d}s$. On constate que $\int_0^{t\wedge T_{m,n}} b^{(m,n)}(X^{(m,n)}_s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{t\wedge T_{m,n}} \mathbf{1}_{[0,\, t\wedge T_{m,n}]}(s)\, \frac{1}{X^{(m,n)}_s}\,\mathrm{d}s = \int_0^{t\wedge T_{m,n}} \frac{1}{X^{(m,n)}_s}\,\mathrm{d}s$. Ainsi,

$$(*) \qquad X^{(m,n)}_{t\wedge T_{m,n}} = 1 + B_{t\wedge T_{m,n}} + \int_0^{t\wedge T_{m,n}} \frac{1}{X^{(m,n)}_s}\,\mathrm{d}s\,.$$

Comme $X^{(m,n)}_s \le n$ pour $s \in [0,\, t\wedge T_{m,n}]$, on a $X^{(m,n)}_{t\wedge T_{m,n}} \le n$ et $\int_0^{t\wedge T_{m,n}} \frac{1}{X^{(m,n)}_s}\,\mathrm{d}s \ge \frac{t\wedge T_{m,n}}{n}$. Donc $n \ge 1 + B_{t\wedge T_{m,n}} + \frac{t\wedge T_{m,n}}{n}$.

On prend l'espérance dans les deux côtés de l'inégalités. Comme $t \wedge T_{m,n}$ est un temps d'arrêt **borné**, le théorème d'arrêt donne $\mathbb{E}(B_{t\wedge T_{m,n}}) = 0$. D'où $n \geq 1 + \mathbb{E}(\frac{t\wedge T_{m,n}}{n})$, c'est-à-dire $\mathbb{E}(t \wedge T^{(m,n)}) \leq n(n-1)$.

(3) On fait $t \uparrow \infty$ dans l'inégalité $\mathbb{E}(t \wedge T^{(m,n)}) \leq n(n-1)$. Par convergence monotone, cela donne $\mathbb{E}(T^{(m,n)}) \leq n(n-1)$. A fortiori, $T^{(m,n)} < \infty$ p.s.

Le processus $(X_{t\wedge T^{(m,n)}},\, t \geq 0)$ étant à valeurs dans $]0, \infty[$, et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant de classe C^2 sur $]0, \infty[$, on peut appliquer la formule d'Itô, pour voir que

$$\frac{1}{X_{t\wedge T^{(m,n)}}} = 1 - \int_0^{t\wedge T^{(m,n)}} \frac{\mathrm{d}X_s^{(m,n)}}{(X_s^{(m,n)})^2} + \int_0^{t\wedge T^{(m,n)}} \frac{\mathrm{d}\langle X^{(m,n)}\rangle_s}{(X_s^{(m,n)})^3} = 1 - \int_0^{t\wedge T^{(m,n)}} \frac{\mathrm{d}B_s}{(X_s^{(m,n)})^2}.$$

On prend l'espérance dans les deux côtés. La martingales locale $(M_u := \int_0^{u\wedge T^{(m,n)}} \frac{\mathrm{d}B_s}{(X_s^{(m,n)})^2},\, u \geq 0)$ étant telle que $\langle M\rangle_u = \int_0^{u\wedge T^{(m,n)}} \frac{\mathrm{d}s}{(X_s^{(m,n)})^4} \leq m^4 u$ (car $X_s^{(m,n)} \geq \frac{1}{m}$ si $s \leq u \wedge T^{(m,n)}$), on a $\mathbb{E}(\langle M\rangle_u) < \infty$, $\forall u \geq 0$. Donc M est une martingale ; en particulier, $\mathbb{E}(M_t) = 0$. D'où $\mathbb{E}(\frac{1}{X_{t\wedge T_{m,n}}^{(m,n)}}) = 1 - \mathbb{E}(M_t) = 1$.

(4) On fait $t \to \infty$ dans l'identité $\mathbb{E}(\frac{1}{X_{t\wedge T_{m,n}}^{(m,n)}}) = 1$: Par convergence dominée (car pour tout t, $\frac{1}{X_{t\wedge T_{m,n}}^{(m,n)}} \leq m$ qui est $\mathbb{P}$-intégrable, et $\frac{1}{X_{t\wedge T_{m,n}}^{(m,n)}} \to \frac{1}{X_{T_{m,n}}^{(m,n)}}$ p.s. vu que $T_{m,n} < \infty$ p.s.), $\mathbb{E}(\frac{1}{X_{t\wedge T_{m,n}}^{(m,n)}}) \to \mathbb{E}(\frac{1}{X_{T_{m,n}}^{(m,n)}})$. Donc $\mathbb{E}(\frac{1}{X_{T_{m,n}}^{(m,n)}}) = 1$.

En écrivant $T_{m,n} = T_{m,n}^- \wedge T_{m,n}^+$, on obtient $1 = \mathbb{E}(\frac{1}{X_{T_{m,n}}^{(m,n)}}) = m\, \mathbb{P}(T_{m,n}^- < T_{m,n}^+) + \frac{1}{n}\, \mathbb{P}(T_{m,n}^- > T_{m,n}^+) = m - (m - \frac{1}{n})\, \mathbb{P}(T_{m,n}^- > T_{m,n}^+)$. D'où l'identité désirée.

(5) Rappelons que $\mathbb{E}(T_{m,n}) \leq n(n-1)$. Soit $\tau_n := \lim_{m\to\infty} \uparrow T_{m,n}$. Par convergence monotone, cela donne $\mathbb{E}(\tau_n) \leq n(n-1)$. En particulier, $\tau_n < \infty$ p.s.

Soient $m' > m$, et soit $T_{m',m,n} := \inf\{t \geq 0 : X_t^{(m',n)} \leq \frac{1}{m} \text{ ou } X_t^{(m',n)} \geq n\}$, avec $\inf \varnothing := \infty$. D'après le rappel, les processus $(X_{t\wedge T_{m',m,n}}^{(m',n)},\, t \geq 0)$ et $(X_{t\wedge T_{m,n}}^{(m,n)},\, t \geq 0)$ sont p.s. identiques. On peut donc définir un processus $(Y_t^{(n)},\, t \geq 0)$ tel que $Y_t^{(n)} = X_t^{(m,n)}$ si $t \leq T_{m,n}$ pour tout entier $m \geq 1$. [Il suffit : $Y_t^{(n)} := X_t^{(m,n)}$ si $T_{m-1,n} < t \leq T_{m,n}$ (avec $Y_0^{(n)} := 0$) ; la valeur de $Y_t^{(n)}$ pour $t > \tau_n$ n'intervient pas. Le processus Y_n est choisi continu et adapté par rapport à la filtration canonique de B.]

Soit $t \geq 0$. Par définition, $X_{t\wedge T_{m,n}}^{(m,n)} = Y_{t\wedge T_{m,n}}^{(n)}$, qui converge p.s. vers $Y_{t\wedge\tau_n}^{(n)} =: X_t^{(n)}$ quand $m \to \infty$. Le fait que $Y^{(n)}$ est continu et adapté par rapport à la filtration de B entraîne que $X^{(n)}$ l'est également.

Comme $X_s^{(n)} = X_s^{(m,n)}$ pour tout $s \in [0, T_{m,n}]$, l'équation $(*)$ peut s'écrire de la façon suivante : $X_{t\wedge T_{m,n}}^{(m,n)} = 1 + B_{t\wedge T_{m,n}} + \int_0^{t\wedge T_{m,n}} \frac{1}{X_s^{(n)}}\,\mathrm{d}s$. On fait $m \uparrow \infty$. À gauche, $X_{t\wedge T_{m,n}}^{(m,n)} \to X_t^{(n)} = X_{t\wedge\tau_n}^{(n)}$ par la définition de $X^{(n)}$. À droite, $B_{t\wedge T_{m,n}} \to B_{t\wedge\tau_n}$ p.s. (continuité de B), et $\int_0^{t\wedge T_{m,n}} \frac{1}{X_s^{(n)}}\,\mathrm{d}s \uparrow \int_0^{t\wedge\tau_n} \frac{1}{X_s^{(n)}}\,\mathrm{d}s$ p.s. (définition de τ_n). D'où l'identité cherchée (d'abord p.s. pour chaque t fixé, ensuite p.s. simultanément pour tout t grâce à la continuité des trajectoires).

(6) L'identité dans la question précédente nous dit que $(Z_t := X_{t\wedge\tau_n}^{(n)},\, t \geq 0)$ est une semimartingale continue. En appliquant la formule d'Itô à cette semimartingale et à la fonction $x \mapsto x^2$ qui est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on a $Z_t^2 = 1 + 2\int_0^t Z_s\,\mathrm{d}Z_s + \langle Z\rangle_t = 1 + 2\int_0^{t\wedge\tau_n} Z_s\,\mathrm{d}B_s + 3(t\wedge\tau_n)$. Comme $Z_s \leq n$ pour tout s, on a $\int_0^{t\wedge\tau_n} Z_s^2\,\mathrm{d}s \leq n^2 t$ et donc $(\int_0^{t\wedge\tau_n} Z_s\,\mathrm{d}B_s,\, t \geq 0)$ est une martingale (de carré-intégrable, son crochet à tout instant t étant intégrable), et a ainsi pour espérance nulle. D'où $\mathbb{E}(Z_t^2) = 1 + 3\mathbb{E}(t\wedge\tau_n) \leq 1 + 3t$.

(7) Puisque $\mathbb{E}[(X_{t\wedge\tau_n}^{(n)})^2] \geq \mathbb{E}[(X_{t\wedge\tau_n}^{(n)})^2\, \mathbf{1}_{\{\tau_n \leq t\}}]$, qui est $n^2\, \mathbb{P}(\tau_n \leq t)$ d'après la question (4), il résulte de l'inégalité de la question précédente que $\mathbb{P}(\tau_n \leq t) \leq \frac{1+3t}{n^2}$. On fait $n \uparrow \infty$. Comme $n \mapsto \tau_n$ est croissante, cela donne $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \tau_n < \infty) \leq 0$, donc $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty) = 1$. [Autrement dit, $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ p.s.]

(8) Exactement comme dans la question (5), on peut poser $X_t := \lim_{n\to\infty} X_{t\wedge\tau_n}^{(n)}$ qui est bien définie p.s., et est une solution forte de $E_1(\sigma, b)$, la seule différence étant que le rôle de m dans la question (5) est maintenant joué par n, et celui de $T_{m,n}$ (resp. τ_n) par τ_n (resp. ∞). □