

Projekt Zespołowy

Etap projektu – projektowanie  
rozwiązania na zadaną  
architekturę

Autorzy:  
Biernacka Kamila  
Kania Dominik  
Leśniak Mateusz  
Maziarz Wojciech

kwiecień 2021

## Streszczenie

Poniższe sprawozdanie jest wynikiem pracy na drugim etapie projektu zespołowego z implementacji metody indeksu w architekturach GPU. Przedstawiono w nim przygotowane przez zespół projekty i rysunki koncepcyjne wymaganych do zaimplementowania algorytmów.

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Oznaczenia</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Mnożenie modularne dużych liczb</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Poszukiwanie relacji i faktoryzacja w bazie</b>	<b>5</b>
3.1	Szybkie potęgowanie modularne . . . . .	5
3.2	Faktoryzacja w bazie . . . . .	7
3.3	Budowa relacji . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Eliminacja Gaussa w pierścieniu <math>\mathbb{Z}_{p-1}</math></b>	<b>13</b>
4.1	Algorytm Euklidesa . . . . .	13
4.2	Rozszerzony algorytm Euklidesa . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Eliminacja Gaussa</b>	<b>17</b>

## 1 Oznaczenia

Tablica 1: Oznaczenia funkcji i operatorów. *Źródło: opracowanie własne*

Symbol	Opis
<code>&gt;&gt;</code>	przesunięcie bitowe
<code>&amp;&amp;</code>	koniunkcja bitowa
<code>%</code>	reszta z dzielenia
<code>to_bin()</code>	zwraca postać binarną argumentu
<code>length()</code>	zwraca długość argumentu
<code>randomInt()</code>	zwraca losową liczbę całkowitą
<code>swap(a,b)</code>	zmiennej a przypisuje wartość zmiennej b i odwrotnie
<code>inversibleIndex(<math>A_i</math>)</code>	zwraca indeks elementu odwracalnego w danym wektorze

## 2 Mnożenie modularne dużych liczb

W celu wykonania mnożenia dużych liczb  $a, b \in \mathbb{F}_p$  wykorzystany zostanie algorytm 2. Pierwszym krokiem jest przedstawienie liczb  $a, b$  w postaci  $a = x_1 \cdot 2^{32} + y_1$  oraz  $b = x_2 \cdot 2^{32} + y_2$ .

Wtedy

$$r_p = r_p(ab) = r_p((x_1 \cdot 2^{32} + y_1)(x_2 \cdot 2^{32} + y_2)) = r_p(x_1 x_2 \cdot 2^{64}) +_p r_p(x_1 y_2 \cdot 2^{32}) +_p r_p(x_2 y_1 \cdot 2^{32}) +_p r_p(y_1 y_2).$$

Do wyznaczenia pośrednich wartości  $r_p$  wykorzystywany jest algorytm 1. Algorytm mnożenia pośredniego działa analogicznie do algorytmu 2. Różnicą jest przedstawienie czynników jako  $x \cdot 2^{16} + y$ .

---

### Algorithm 1: Mnożenie pośrednie, `halfMult`

---

**Input:**  $a, b$  - dwie liczby całkowite,  $p$  - modułnik

**Output:** *result* - wynik mnożenia

```

1  $x_1 \leftarrow a \gg 16$ 
2  $y_1 \leftarrow a \&\& 0xffff$ 
3  $x_2 \leftarrow b \gg 16$ 
4  $y_2 \leftarrow b \&\& 0xffff$ 
5  $half_a \leftarrow (((x_1 x_2) \% p) \cdot r_p(2^{32})) \% p$ 
6  $half_b \leftarrow (((x_1 y_2) \% p) \cdot r_p(2^{16})) \% p$ 
7  $half_c \leftarrow (((x_2 y_1) \% p) \cdot r_p(2^{16})) \% p$ 
8  $half_d \leftarrow (y_1 y_2) \% p$ 
9 return  $(half_a + half_b + half_c + half_d) \% p$ 
```

---

### Algorithm 2: Pełne mnożenie modularne dwóch liczb, `mult`

---

**Input:**  $a, b$  - dwie liczby całkowite,  $p$  - modułnik

**Output:** *result* - wynik mnożenia

```

1  $x_1 \leftarrow a \gg 32$ 
2  $y_1 \leftarrow a \&\& 0xffffffff$ 
3  $x_2 \leftarrow b \gg 32$ 
4  $y_2 \leftarrow b \&\& 0xffffffff$ 
5  $half_a \leftarrow (halfMult(x_1, x_2) \cdot r_p(2^{64})) \% p$ 
6  $half_b \leftarrow (halfMult(x_1, y_2) \cdot r_p(2^{32})) \% p$ 
7  $half_c \leftarrow (halfMult(x_2, y_1) \cdot r_p(2^{32})) \% p$ 
8  $half_d \leftarrow halfMult(y_1, y_2)$ 
9 return  $(half_a + half_b + half_c + half_d) \% p$ 
```

---

### 3 Poszukiwanie relacji i faktoryzacja w bazie

#### 3.1 Szybkie potęgowanie modularne

Metoda indeksu wymaga obliczenia wartości typu  $a^b \bmod n$ . Szybkie potęgowanie modularne jest prostym algorytmem pozwalającym zredukować liczbę mnożeń i dzielení modulo z  $b$  do  $O(\log b)$ .

---

**Algorithm 3:** Szybkie potęgowanie modularne, **fastPow**

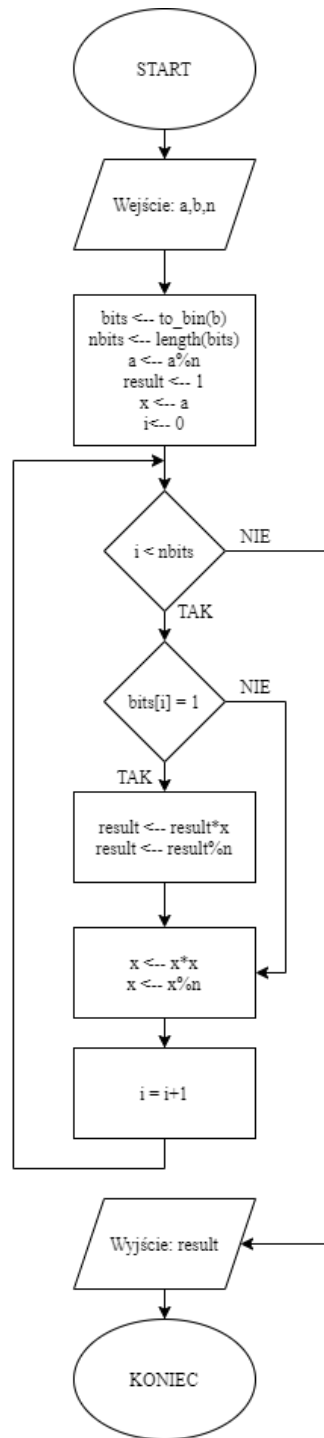
---

**Input** : podstawa potęgi  $a$ , wykładnik potęgi  $b$ , modułnik  $n$

**Output:**  $a^b \bmod n$

```
1  $bits \leftarrow to\_bin(b)$ 
2  $nbits \leftarrow length(bits)$ 
3  $a \leftarrow a \% n$ 
4  $result \leftarrow 1$ 
5  $x \leftarrow a$ 
6 for  $i \leftarrow 0$  to  $nbits$  do
7   if  $bits[i] == 1$  then
8      $result \leftarrow result * x$ 
9      $result \leftarrow result \% n$ 
10   $x \leftarrow x * x$ 
11   $x \leftarrow x \% n$ 
12 return  $result$ 
```

---



Rysunek 1: Schemat blokowy algorytmu 3

### 3.2 Faktoryzacja w bazie

Dana jest baza  $\mathcal{N} = \{2, 3, \dots, p_k\}$ , gdzie  $p_i \in \mathcal{P}$  i  $p_k$  jest największą liczbą pierwszą mniejszą  $B$ . W celu faktoryzacji wykorzystany zostanie algorytm 4.

---

**Algorithm 4:** Faktoryzacja w bazie, **factor**

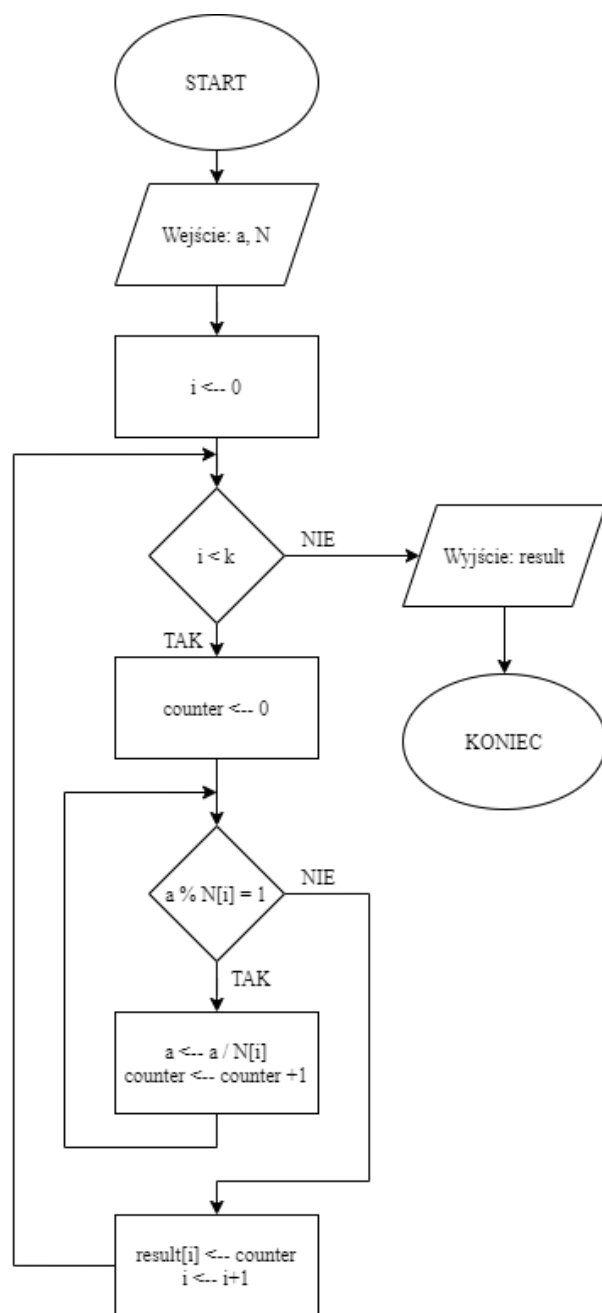
---

**Input:**  $a$  - faktoryzowana liczba,  $\mathcal{N}$  - baza rozkładu

**Output:**  $result = [e_1, e_2, \dots, e_k]$  - czynniki

```
1 for  $i \leftarrow 0$  to  $k$  do
2    $counter \leftarrow 0$ 
3   while  $a \% N[i]$  do
4      $a \leftarrow \frac{a}{N[i]}$ 
5      $counter \leftarrow counter + 1$ 
6   end
7    $result[i] \leftarrow counter$ 
8 end
9 return  $result$ 
```

---



Rysunek 2: Schemat blokowy algorytmu 4



---

**Algorithm 5:** Sprawdzenie czy liczba faktoryzuje się w wybranej bazie,  
**IsFactored**

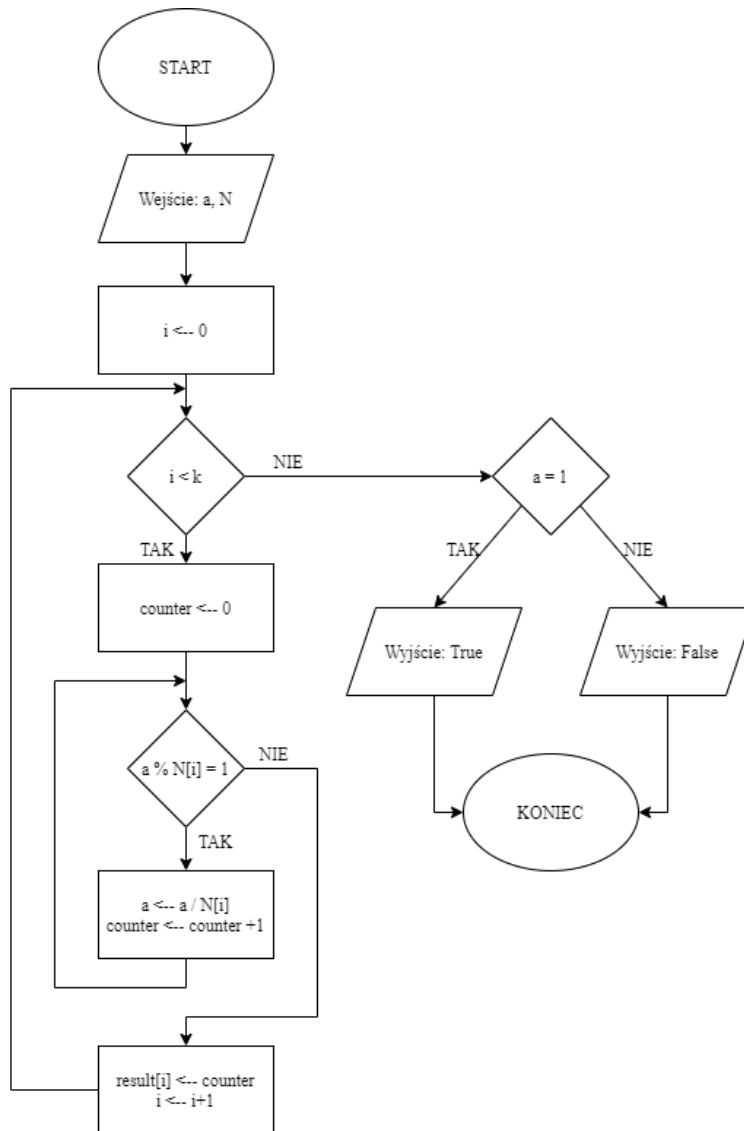
---

**Input:**  $a$  - faktoryzowana liczba,  $\mathcal{N}$  - baza rozkładu

**Output:**  $result = [e_1, e_2, \dots, e_k]$  - czynniki

```
1 for  $i \leftarrow 0$  to  $k$  do
2    $counter \leftarrow 0$ 
3   while  $a \% N[i]$  do
4      $a \leftarrow \frac{a}{N[i]}$ 
5      $counter \leftarrow counter + 1$ 
6   end
7    $result[i] \leftarrow counter$ 
8 end
9 if  $a == 1$  then
10  return True
11 end
12 else
13  return False
14 end
```

---



Rysunek 3: Schemat blokowy algorytmu 5

### 3.3 Budowa relacji

W celu zbudowania relacji  $\mathcal{R}$  generowanych jest  $l$  liczb losowych  $e_i$ . Następnie, przy wykorzystaniu algorytmu 3, wyznaczane są wartości  $a^{e_i}$ . Niech  $e$  będzie tablicą  $l$ -elementową, jako  $fastPow(a, e, p)$  rozumiane jest jednocześnie wykonanie  $fastPow(a, e_i, p)$  dla każdego elementu tablicy z wykorzystaniem procesora graficznego.

---

**Algorithm 6:** Budowa relacji, `relationBuild`

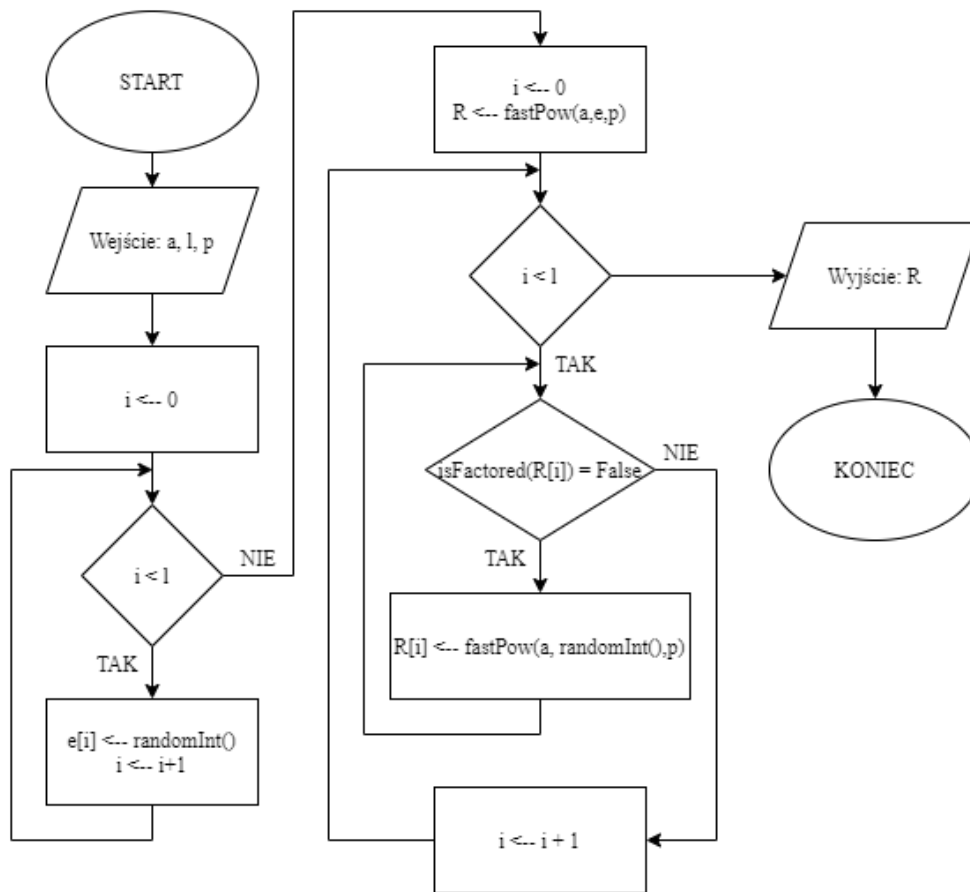
---

**Input:**  $a$  - generator,  $l$  - wielkość zbioru relacji,  $p$  - modułnik

**Output:**  $R$  - zbiór relacji

```
1 for  $i \leftarrow 0$  to  $l$  do
2    $e[i] \leftarrow randomInt()$ 
3 end
4  $R \leftarrow fastPow(a, e, p)$ 
5 for  $i \leftarrow 0$  to  $l$  do
6   while not isFactored( $R[i]$ ) do
7      $R[i] \leftarrow fastPow(a, randomInt(), p)$ 
8   end
9 end
10 return  $R$ 
```

---



Rysunek 4: Schemat blokowy algorytmu 6

## 4 Eliminacja Gaussa w pierścieniu $\mathbb{Z}_{p-1}$

### 4.1 Algorytm Euklidesa

Poniższy schemat wykorzystuje algorytm Euklidesa do sprawdzenia, czy podane na wejściu dwie liczby są względnie pierwsze.

---

**Algorithm 7:** Algorytm Euklidesa, `isInversible`

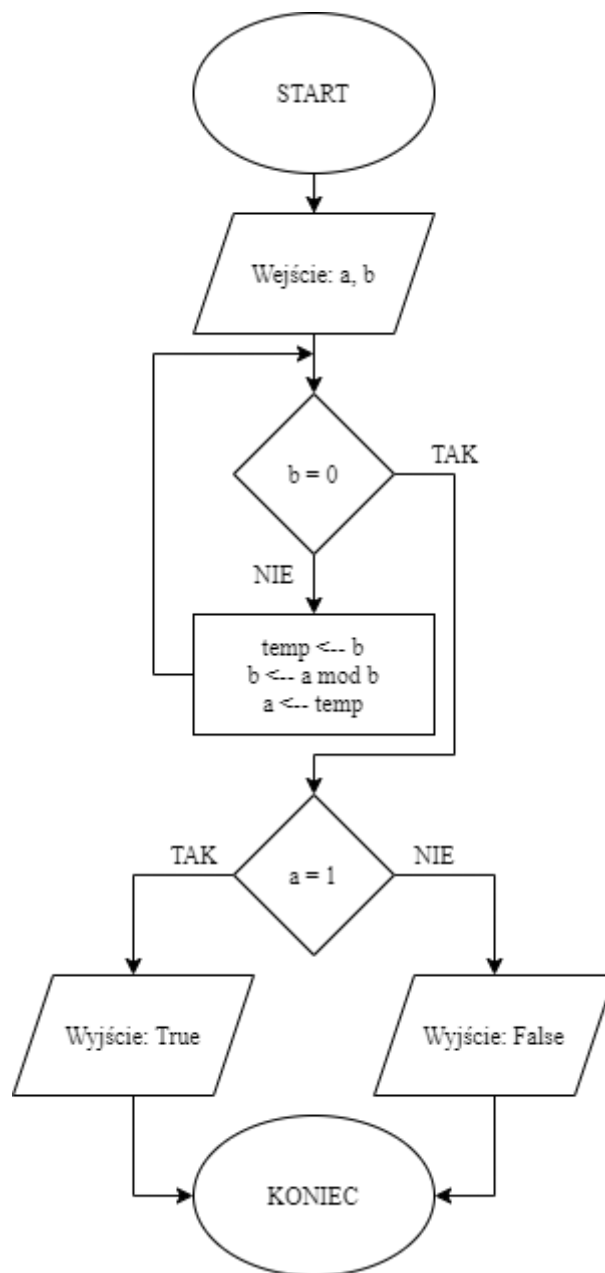
---

**Input:**  $a, b$  - liczby naturalne

**Output:** `True`, jeśli  $\gcd(a, b) == 1$ , `False` w przeciwnym przypadku.

```
1 while  $b \neq 0$  do
2   |  $temp \leftarrow b$ 
3   |  $b \leftarrow a \bmod b$ 
4   |  $a \leftarrow temp$ 
5 if  $a == 1$  then
6   | return True
7 else
8   | return False
```

---



Rysunek 5: Schemat blokowy algorytmu 7

## 4.2 Rozszerzony algorytm Euklidesa

Tożsamość Bezout mówi, że liczby  $a$  i  $p$  są względnie pierwsze i wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby  $s$  i  $t$ , że

$$ps + at = 1,$$

Wówczas, po zredukowaniu tej równości modulo  $p$ , otrzymuje się

$$at \equiv 1 \pmod{p},$$

czyli  $t$  jest elementem odwrotnym  $a$  w pierścieniu  $Z_p$ .

Wykorzystując poniższy algorytm możemy znaleźć odwrotność w dowolnym pierścieniu liczbowym.

---

**Algorithm 8:** Rozszerzony Algorytm Euklidesa, *inverse*

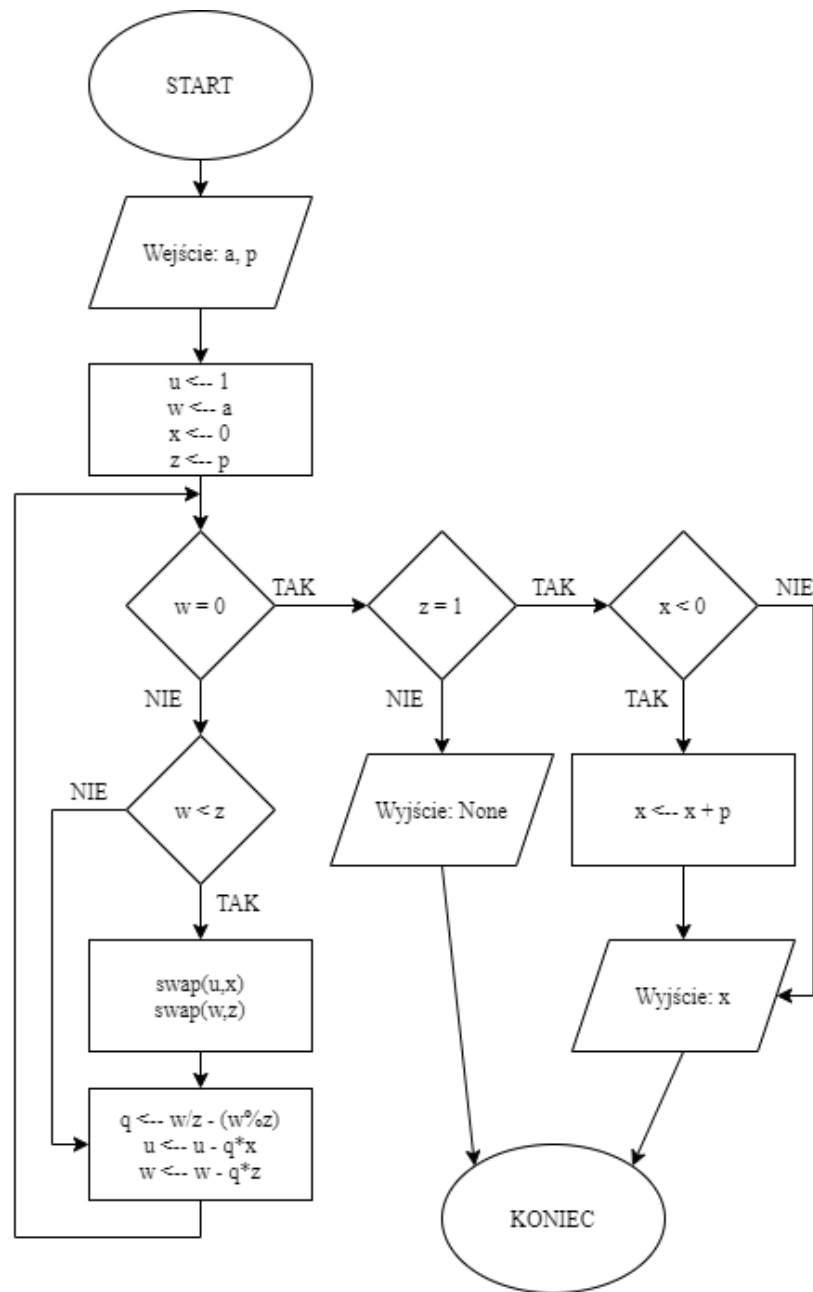
---

**Input:**  $a, p$  - liczby naturalne

**Output:**  $x = a^{-1} \pmod{p}$  lub informacja, że taka liczba nie istnieje

```
1  $u \leftarrow 1, w \leftarrow a, x \leftarrow 0, z \leftarrow p$ 
2 while  $w \neq 0$  do
3   if  $w < z$  then
4      $\text{swap}(u, x)$ 
5      $\text{swap}(w, z)$ 
6    $q \leftarrow w/z - (w \% z)$ 
7    $u \leftarrow u - q \cdot x$   $w \leftarrow w - q \cdot z$ 
8 if  $z \neq 1$  then
9   return None
10 if  $x < 0$  then
11    $x \leftarrow x + p$ 
12 return  $x$ 
```

---



Rysunek 6: Schemat blokowy algorytmu 8



## 5 Eliminacja Gaussa

Niech

$$\mathbb{A}_{l,k} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,k} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l,0} & a_{l,1} & \cdots & a_{l,k} \end{bmatrix}.$$

Jako  $\mathbb{A}_i = [a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,k}]$  rozumiany jest  $i$ -wiersz macierzy. Wtedy, następujący zapis  $\mathbb{C} = \mathbb{A}_n - \mathbb{A}_m$ , gdzie  $\mathbb{C} = [c_0, c_1, \dots, c_k]$  oznacza jednoczesne wykonanie działania  $c_j = \mathbb{A}_{n,j} - \mathbb{A}_{m,j}$  dla każdego elementu wiersza z wykorzystaniem procesora graficznego. Natomiast  $\mathbb{C} = \text{mult}(\mathbb{A}_m, b)$  rozumiany jest jako jednoczesne wykonanie  $\text{mult}(a_{m,j}, b)$ . Zapis  $\mathbb{A}_{l+1,k} \leftarrow \frac{\mathbb{A}_{l,k}}{\text{vector}}$  oznacza dopisanie wiersza *vector* jako ostatni wiersz macierzy.

---

**Algorithm 9:** Algorytm eliminacji Gaussa, Gauss

---

**Input:**  $\mathbb{A}_{l,k} = \mathbb{A}_{l-1,k} \parallel \mathbb{E}_{1,k}$   
**Output:**  $\mathbb{X}_{1,k}$

```

1  for  $j \leftarrow 0$  to  $l$  do
2      for  $i \leftarrow 0$  to  $k$  do
3          if  $i \neq j$  then
4               $\text{inversibleIdx} \leftarrow \text{inversibleIndex}(\mathbb{A}_i)$ 
5              while  $\text{inversibleIdx} == -1$  and not  $\text{isInversible}(a_{j,j})$  do
6                   $\mathbb{A}_{l+1,k} \leftarrow \frac{\mathbb{A}_{l,k}}{\text{relationBuild}(a_{1,p})}$ 
7                   $l \leftarrow l + 1$ 
8                   $\text{inversibleIdx} \leftarrow \text{inversibleIndex}(\mathbb{A}_i)$ 
9                   $\text{swap}(\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_{\text{inversibleIdx}})$ 
10             end
11              $b \leftarrow \text{mult}(a_{i,j}, \text{inverse}(a_{j,j}, p-1), p-1)$ 
12              $\text{tmp} \leftarrow \text{mult}(\mathbb{A}_i, b, p-1)$ 
13              $\mathbb{A}_i \leftarrow \mathbb{A}_i - \text{tmp}$ 
14         end
15     end
16 end
17 for  $i \leftarrow 0$  to  $k$  do
18      $b \leftarrow \text{inverse}(a_{i,i}, p-1)$ 
19      $\mathbb{A}_i \leftarrow \text{mult}(\mathbb{A}_i, b, p-1)$ 
20 end
21 return  $\mathbb{A}_k$ 

```

---