醉汉回家问题

ZYZ

January 10, 2019

1 问题描述

想象在东西南北格点化的街道中有一个醉汉，他每次从他当时所在的交叉路口随机选择四个方向之一，然后往前走，走到下一个路口又随机选择一次……如此下去，他可以回到原点吗？

上述问题可以抽象为一个随机游走（random walk）模型。

2 一维随机游走

2.1 问题重述

考虑在数轴原点的质点，每一步以 $\frac{1}{2}$ 的概率向左或者右移动一个单位长度，求它回到原点的概率。

2.2 模型构建

该问题对应一个齐次马氏链，下一步的位置只和当前位置相关。状态空间是整数集。

$$p_{00}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 2k-1 \\ \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{if } n = 2k \end{cases} \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(2n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \tag{2}$$

利用 Stirling's formula 化简近似

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1 \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(2n)} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = +\infty \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = 0 \tag{5}$$

综上可知，0 状态属于零常返。所有状态互通，故类型一致。

3 二维随机游走

3.1 问题重述

考虑在直角坐标系原点的质点，每一步以 $\frac{1}{4}$ 的概率向左、右、上、下移动一个单位长度，求它回到原点的概率。

3.2 模型构建

该问题对应一个齐次马氏链，下一步的位置只和当前位置相关。状态空间是直角坐标系上的整点集。向上走的步数和向下的相同，向左走的步数和向右的相同。

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(2n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i}\binom{2n-i}{n-i}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \tag{6}$$

$$p_{00}^{(2n)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{(i!)^2[(n-i)!]^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n}\binom{n}{i}^2\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \tag{7}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i}\binom{n}{i} = \binom{2n}{n} \tag{8}$$

$$p_{00}^{(2n)} = \frac{\binom{2n}{n}^2}{4^{2n}} \tag{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(2n)} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} = +\infty \tag{10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi n} = 0 \tag{11}$$

综上可知，$(0,0)$ 状态属于零常返。所有状态互通，故类型一致。

4 三维随机游走

4.1 问题重述

考虑在空间直角坐标系原点的质点，每一步以 $\frac{1}{6}$ 的概率向左、右、上、下、前、后移动一个单位长度，求它回到原点的概率。

4.2 模型构建

该问题对应一个齐次马氏链，下一步的位置只和当前位置相关。状态空间是空间直角坐标系上的整点集。向上走的步数和向下的相同，向左走的步数和向右的相同，向前走的步数和向后的相同。

$$
\begin{aligned}
p_{00}^{(2n)} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{2n}{i}\binom{2n-i}{j}\binom{2n-i-j}{n-i-j}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\left(\frac{1}{6}\right)^{2n} && (12)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{(2n)!}{(i!)^2(j!)^2[(n-i-j)!]^2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2n} && (13)\\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{2n}\binom{2n}{n}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}^2\binom{n-i}{j}^2 && (14)\\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{2n}\binom{2n}{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}^2 && (15)\\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{2n}\binom{2n}{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2\binom{2(n-i)}{n-i} && (16)\\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{2n}\binom{2n}{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2\binom{2i}{i} && (17)\\
&\le \left(\frac{1}{6}\right)^{2n}\binom{2n}{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 2^i && (18)\\
&\le \left(\frac{1}{6}\right)^{2n}\binom{2n}{n}\binom{n}{\frac{n}{2}}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i && (19)\\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{2n}\binom{2n}{n}\binom{n}{\frac{n}{2}}(1+2)^n && (20)
\end{aligned}
$$

通过 Stirling 公式近似可得

$$p_{00}^{(2n)} \approx \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\sqrt{2}}{\pi n} \tag{21}$$

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\sqrt{2}}{\pi n} \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3} < 1 \tag{22}$$

正项级数 $\{a_n\}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(2n)}$ 收敛，$(0,0,0)$ 状态属于非常返态。所有状态互通，故类型一致。