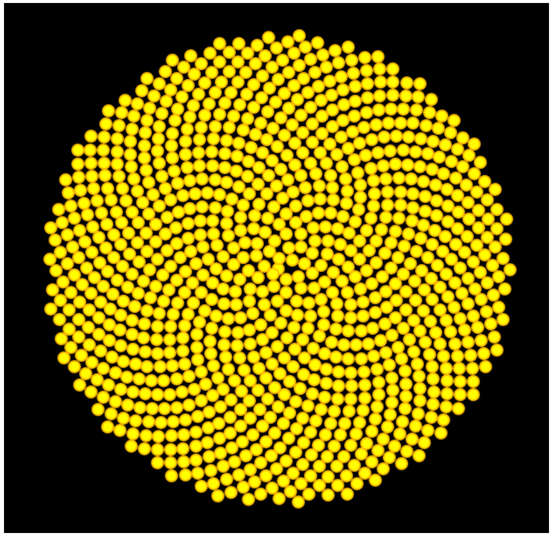
デザイン数学セミナー

― 黄金比の数理編―

第1回

黄金比の歴史と驚くべき性質

Excelを使ったシミュレーション



Golden Ratio

Golden ratio

パルテノン神殿
建設時の総監督

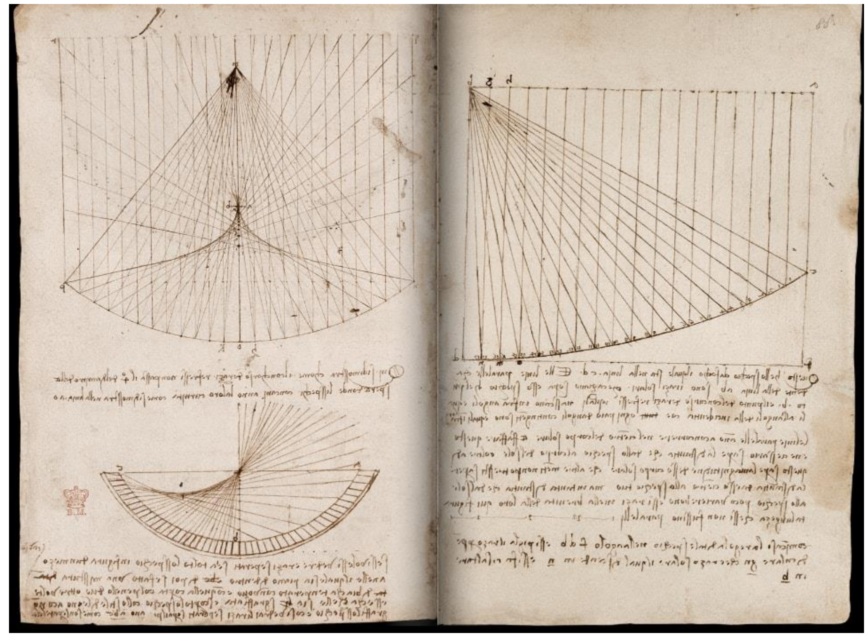
ペイディアス
BC490頃-BC430頃

初めて黄金比を使った人物とされている。

黄金比 φ はペイディアス（$\Phi\varepsilon\iota\delta\Omega\alpha\varsigma$）の頭文字

レオナルド・ダ・ヴィンチ

レオナルド･ダ･ヴィンチ
1452-1519

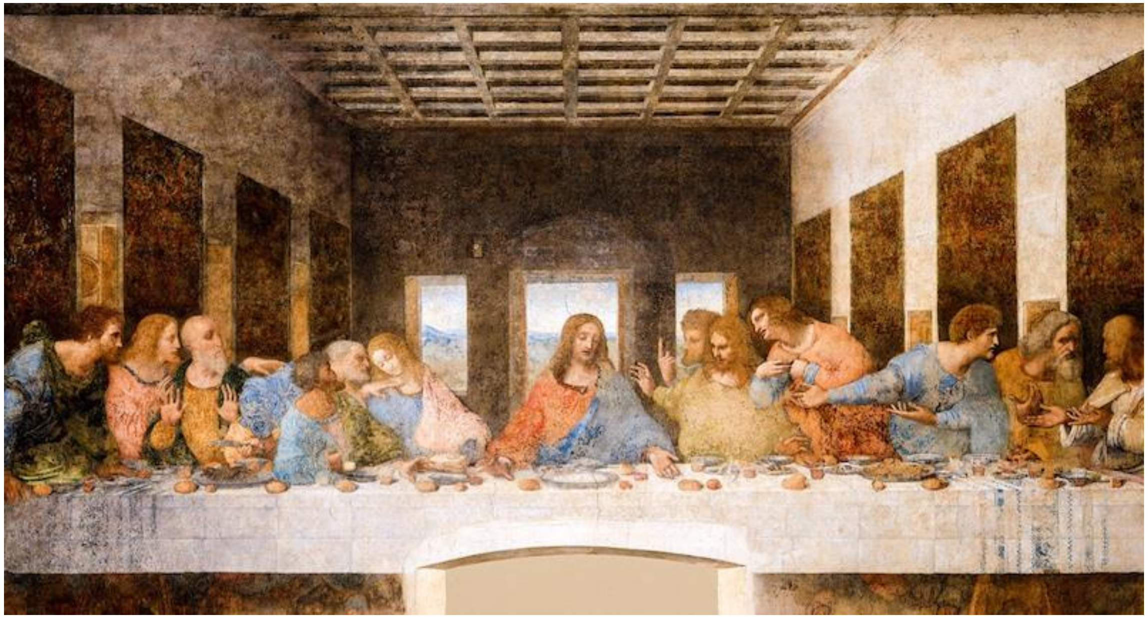


文字は数字以外鏡文字で記している

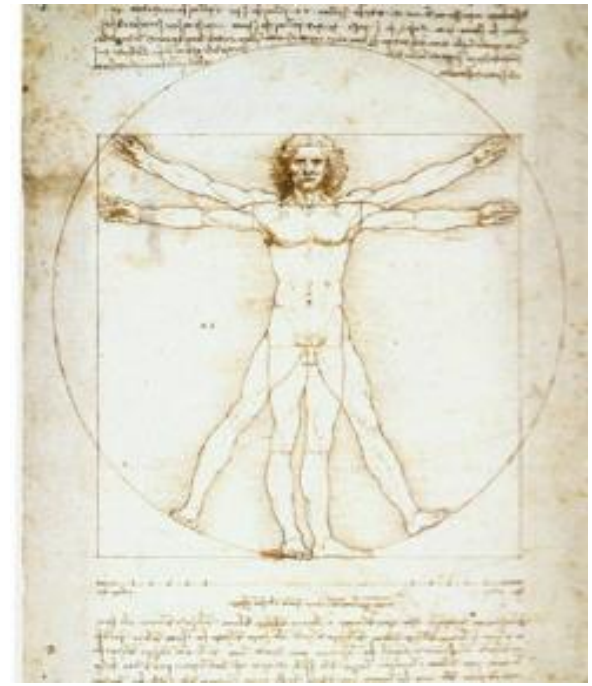
“万能の天才”

音楽、建築学、数学、幾何学、解剖学、動植物学、天文学、気象学、光学、物理学…

レオナルド・ダ・ヴィンチ



最後の晩餐



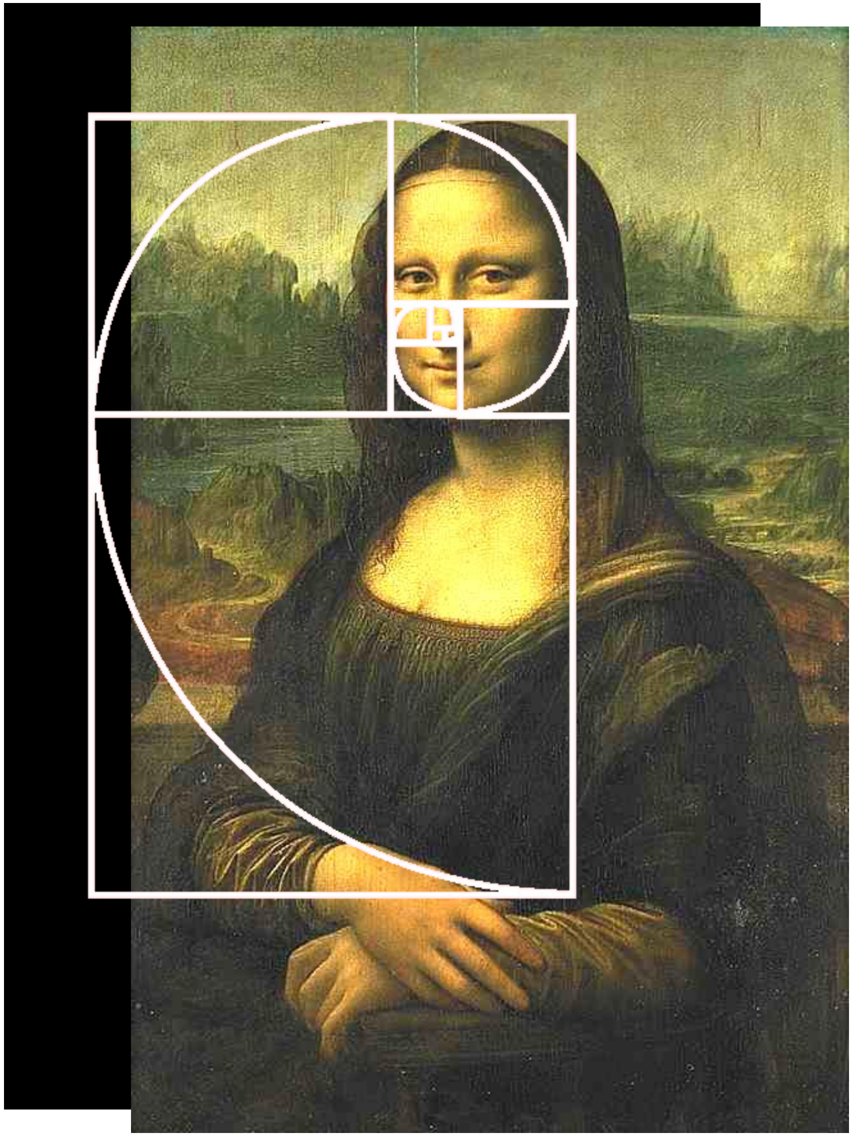
ウィトルウィウス的人体図

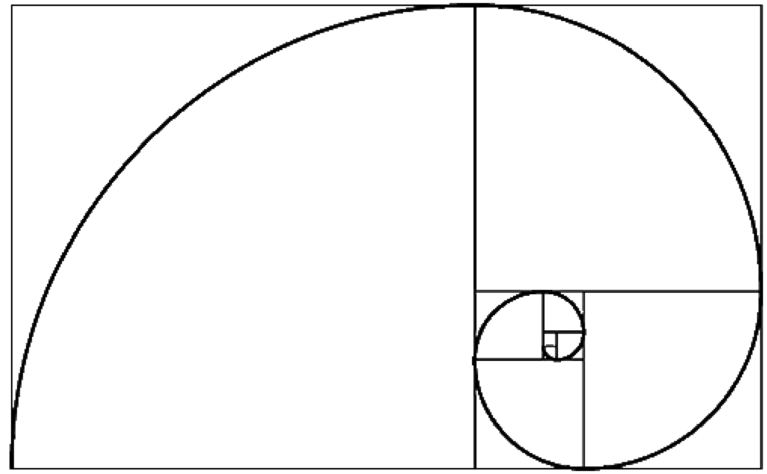
遠近法や作図的手法が用いられる

「神聖比」と呼ばれる比率を重要視した。

数学を積極的に芸術に取り入れたのは間違いない。

Goldenratio

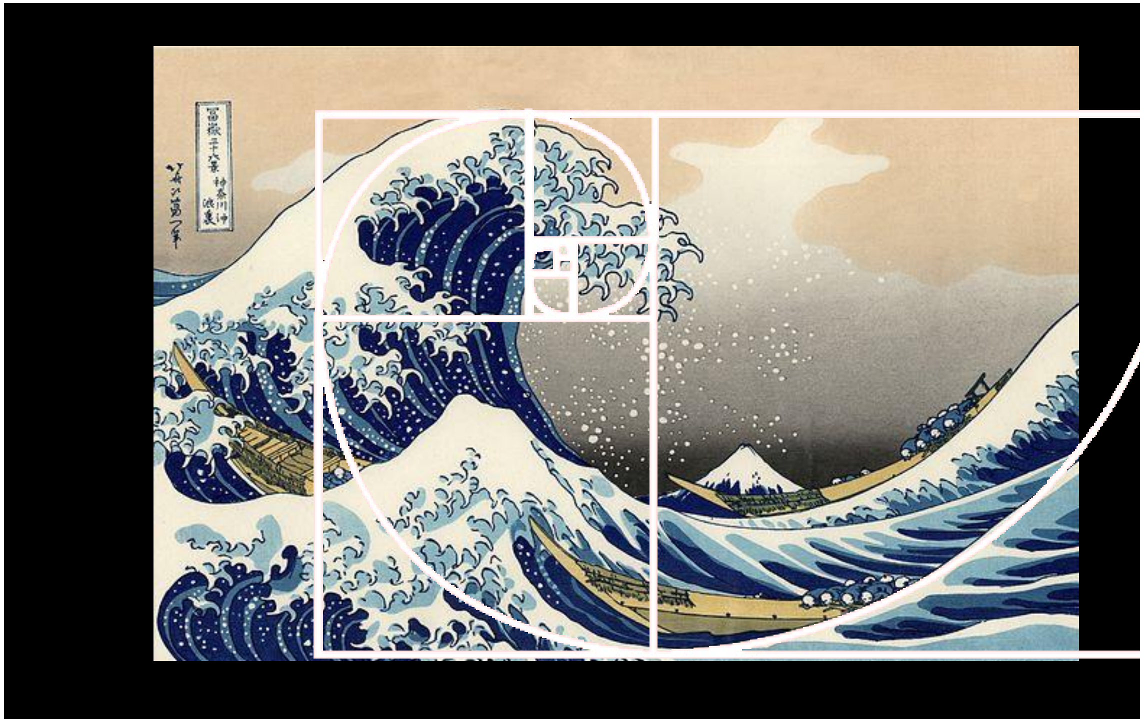


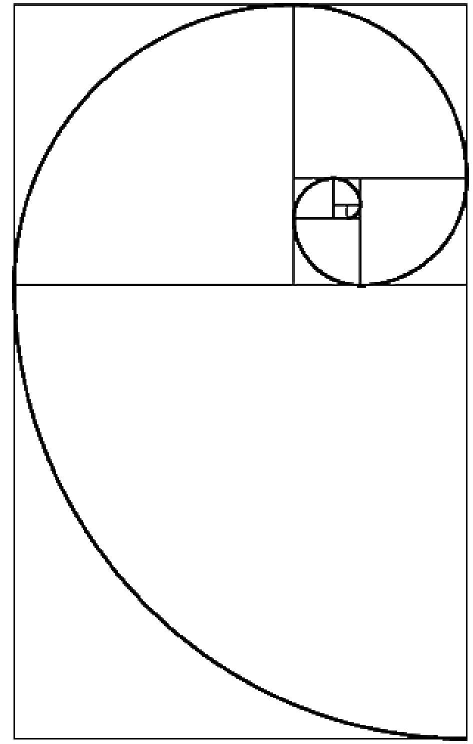


Mona Lisa

Da Vinci

Golden ratio

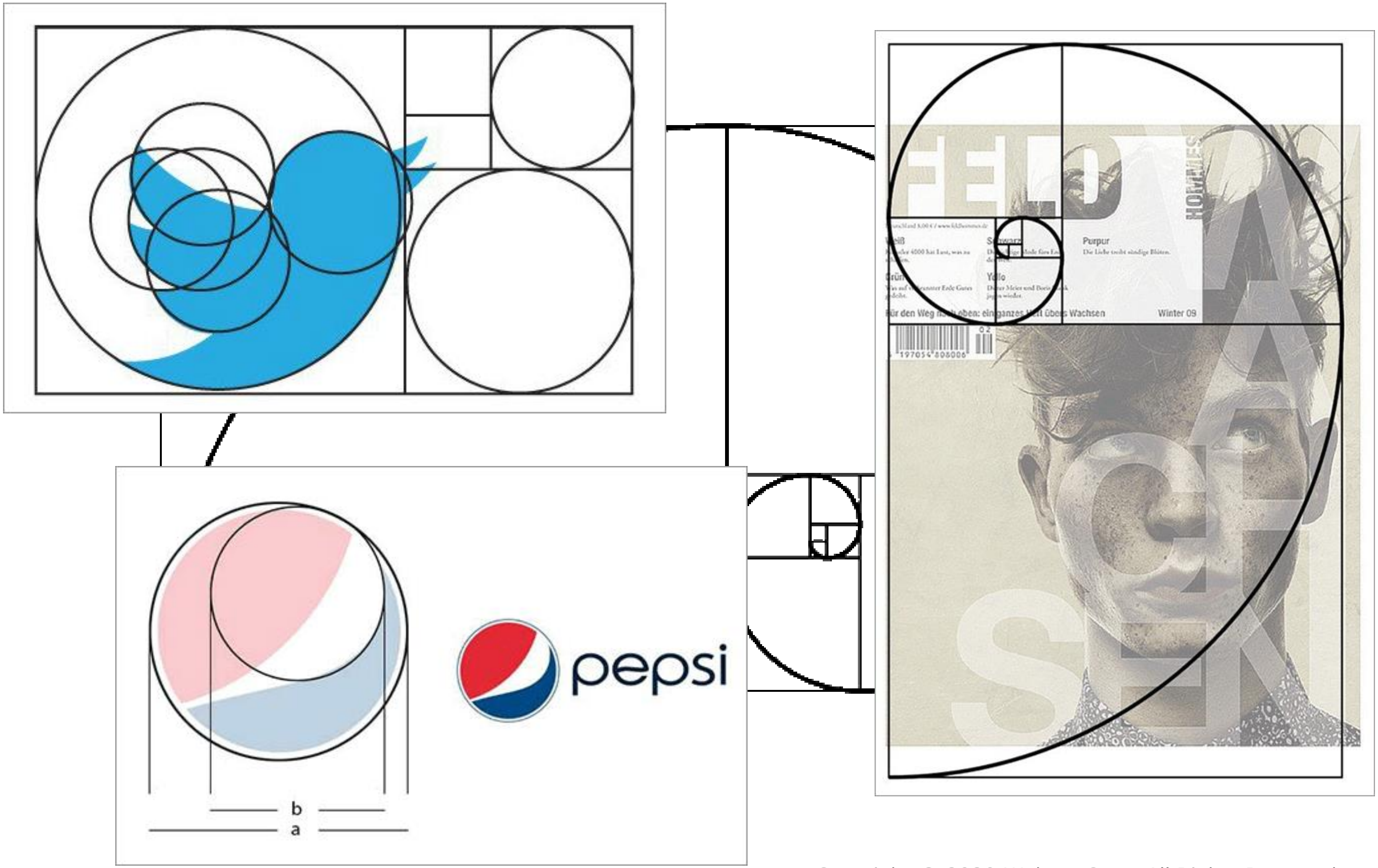




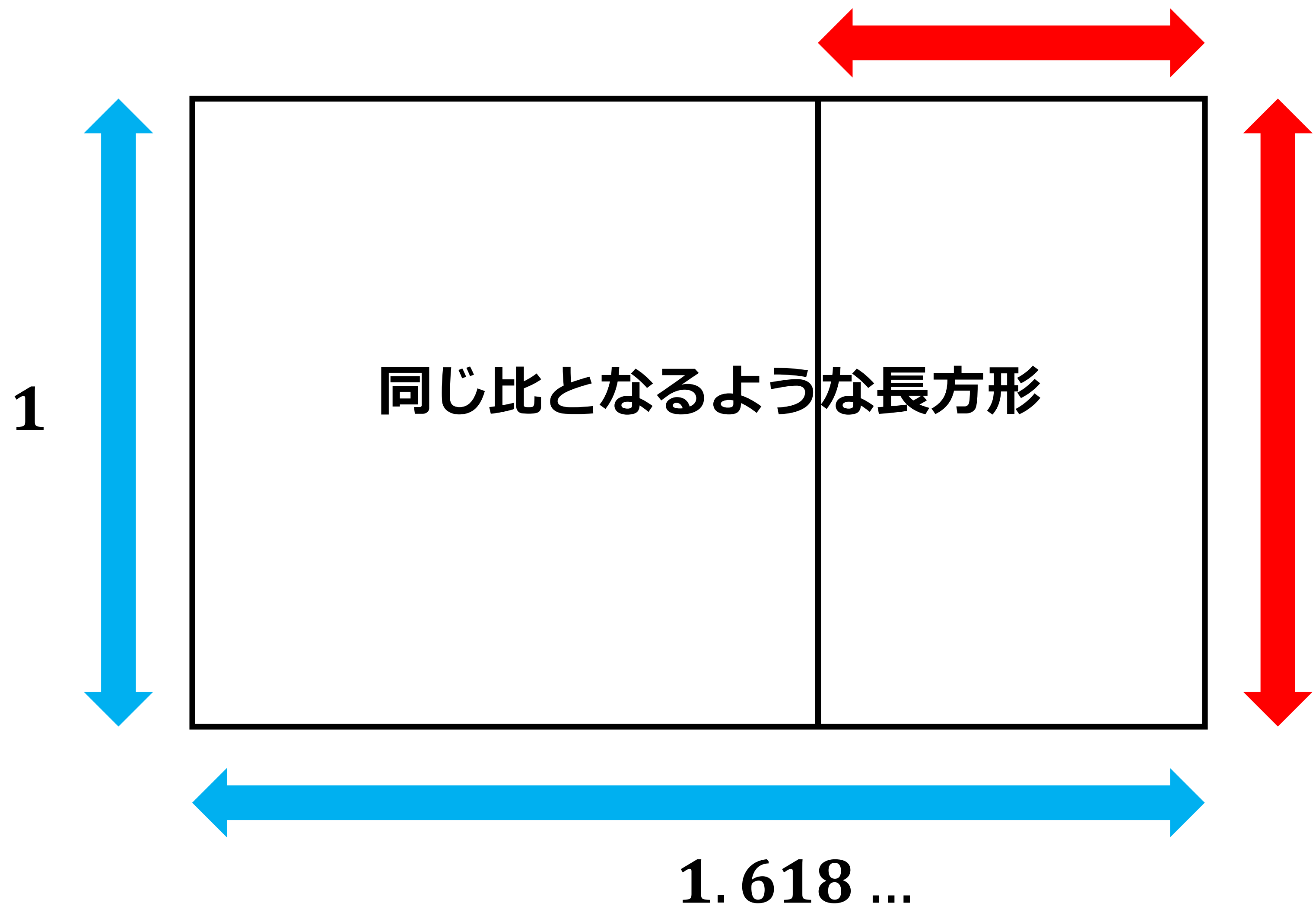
富嶽三十六景

Hokusai

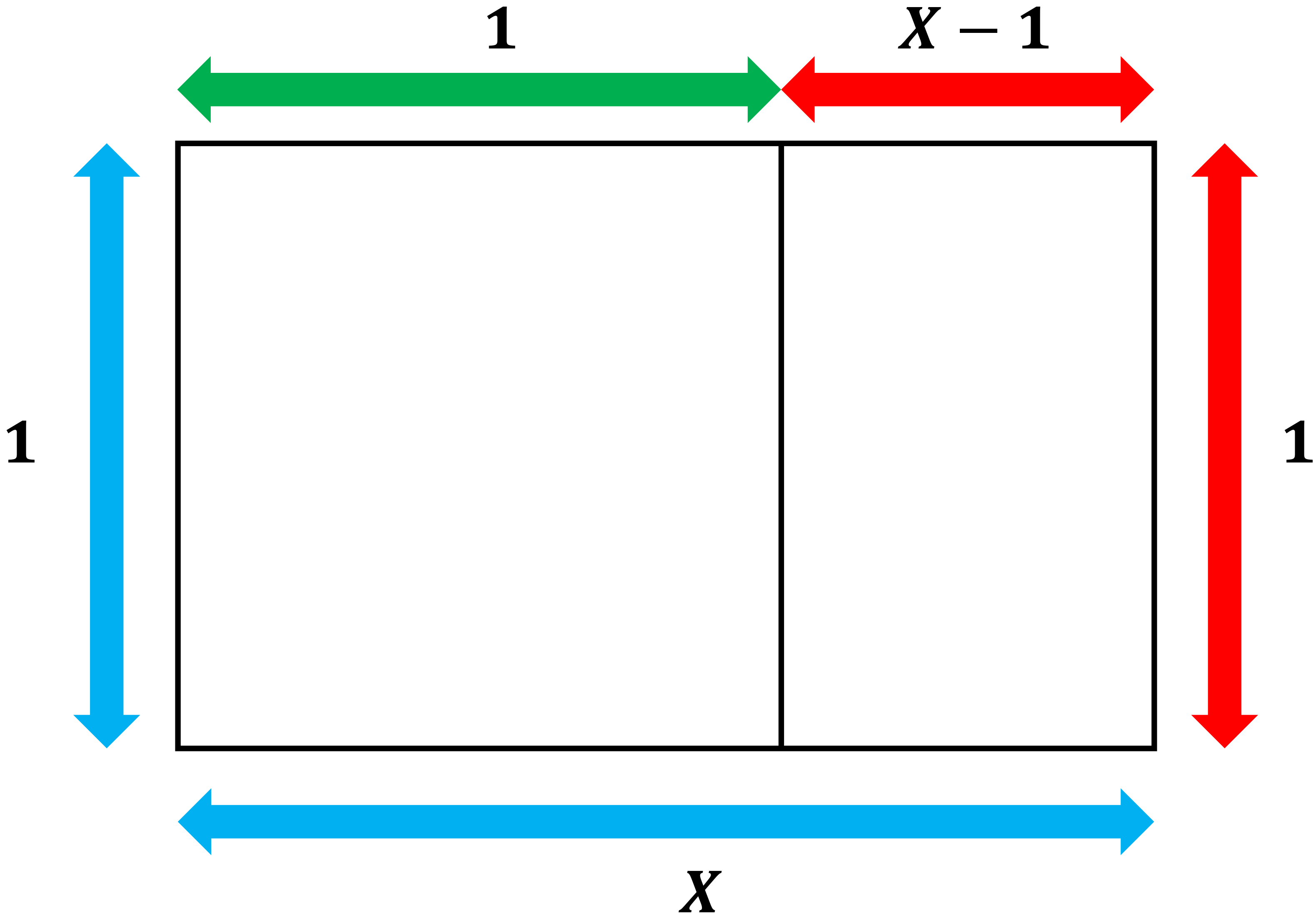
Golden ratio



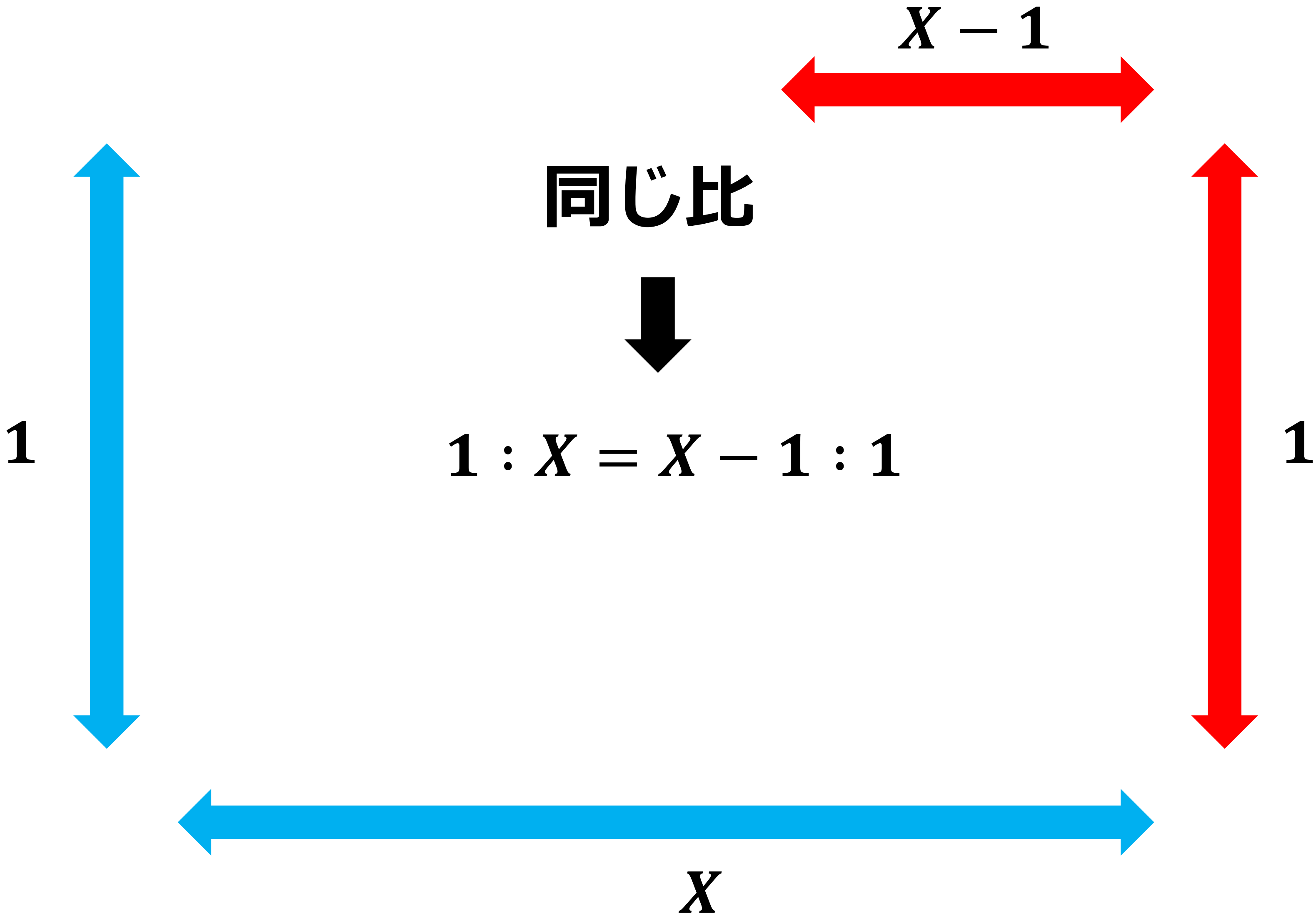
Golden ratio



Golden ratio



Golden ratio



Golden ratio

$X-1$

同じ比

$$1 \div X = X - 1 \div 1$$

1

1

X

Golden ratio

$X-1$

1

同じ比

$$\frac{1}{X}=\frac{X-1}{1}=X-1$$

1

両辺にを X 掛ける

X

Golden ratio

$X - 1$

同じ比

1

1

$$1 = X(X-1)$$

両辺にを X 掛ける

X

Golden ratio

$X - 1$

1 　　 同じ比 　　 1

⬇

$$X^2 - X - 1 = 0$$

“２次方程式”

X

$$X^2 - X - 1 = 0$$

方程式の解き方

“移行”

$$X - 1 = 3 + 1$$

||　“両辺に１を足す”ことと同じ

$$X - 1 + 1 = 3 + 1$$

$$X = 4$$

$X^2 - X - 1 = 0$

方程式の解き方

$$2X = 3$$

"両辺を２で割る"

$$X = \frac{3}{2}$$

$$X^2 - X - 1 = 0$$

方程式の解き方

２次方程式

$$X^2 = 4$$

⬇ **平方根（２乗して４になる数）を考える**

$$X = 2, -2$$

$$X^2 - X - 1 = 0$$

方程式の解き方

２次方程式

$$X^2 = 5$$

平方根（２乗して5になる数）を考える

$$X = ?$$

$$X^2 - X - 1 = 0$$

$$\sqrt{5}$$

「２乗して5になる数」を表す記号

$X^2 - X - 1 = 0$

クリストッフ・ルドルフ
1499-1545

ルートの記号（√）を導入したと伝えられている。

$$\surd$$

根（root）の頭文字「 r 」を変形したものであるという説がある

$$\sqrt{}$$

横線はルネ・デカルトによる

ルネ・デカルト
1596-1650

$X^2 - X - 1 = 0$

方程式の解き方

２次方程式

$$X^2 = 5$$

⬇

$$X = \pm\sqrt{5}$$

$$X^2 - X - 1 = 0$$

方程式の解き方

2次方程式

$$X^2 = 29$$

⬇

$$X = \pm\sqrt{29}$$

$X^2 - X - 1 = 0$

方程式の解き方

2次方程式

$$X^2 = 37$$

⬇

$$X = \pm\sqrt{37}$$

$X^2 - X - 1 = 0$

方程式の解き方

２次方程式

$$■^2 = ●$$ **の形だとうれしい。**

$X^2 - X - 1 = 0$

方程式の解き方

2次方程式

$$X^2 - X - 1 = 0$$

$$\blacksquare^2 = \bullet$$

の形にしたい

$X^2 - X - 1 = 0$

方程式の解き方

2次方程式

$$\boxed{X^2 - X} - 1 = 0$$

$$\|$$

$$\boxed{(X - 1/2)^2 - (1/2)^2}$$

$X^2 - X - 1 = 0$

方程式の解き方

2次方程式

$$X^2 - X - 1 = 0$$

$$\|$$

$$(X - 1/2)^2 - (1/2)^2 - 1 = 0$$

$$\|$$

$$(X - 1/2)^2 - 5/4 = 0$$

$$\|$$

$$(X - 1/2)^2 = 5/4$$

$$\blacksquare^2 = \bullet$$

の形になった！

$X^2 - X - 1 = 0$

方程式の解き方

２次方程式

$$X^2 - X - 1 = 0$$

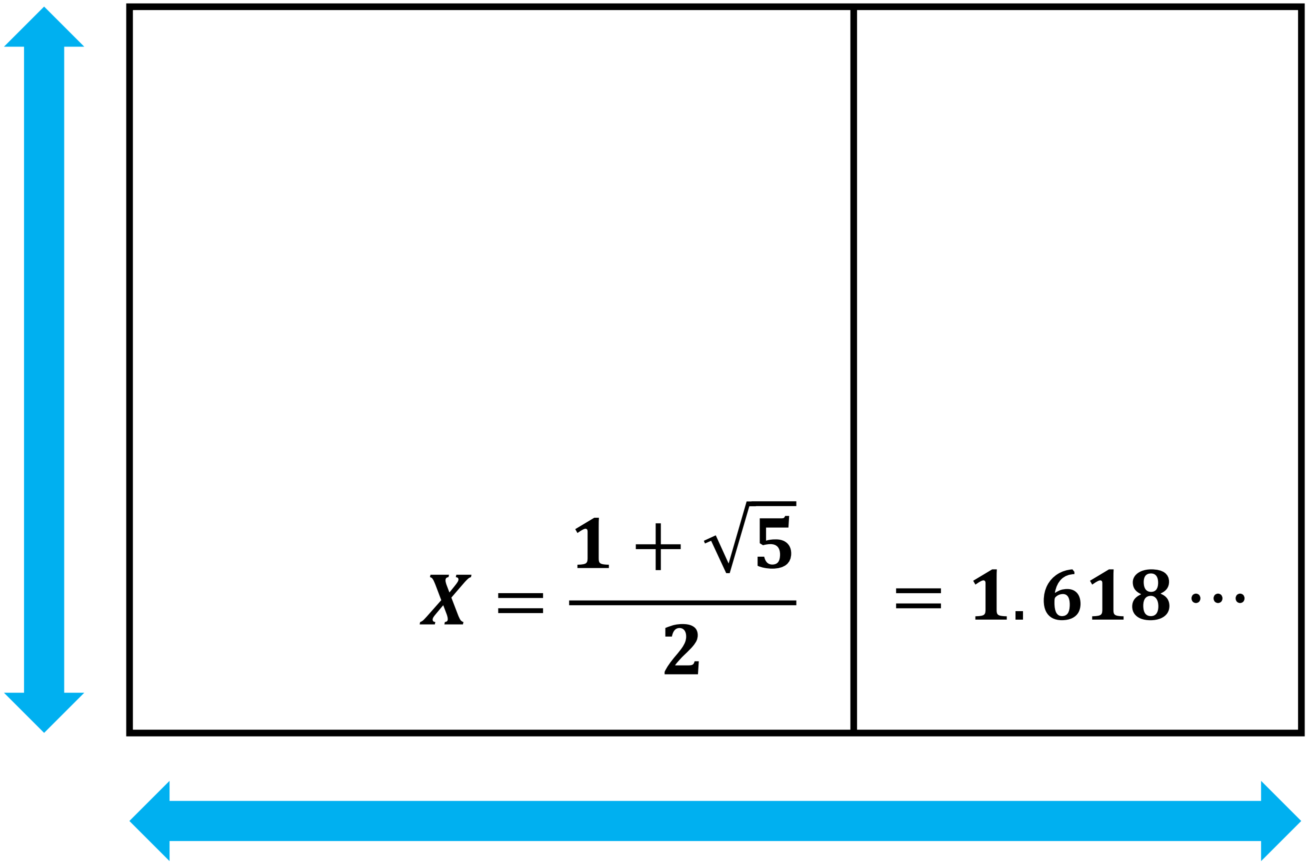
$$\parallel$$

$$(X - 1/2)^2 = 5/4$$

$$\Downarrow$$

$$X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Golden ratio

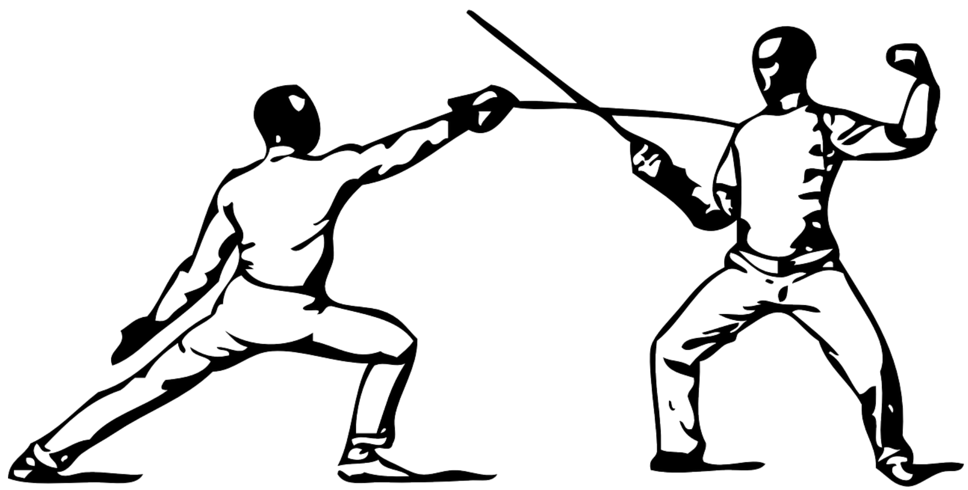


$$X = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\cdots = \varphi$$

ルネサンスと解の公式の歴史

15世紀のイタリア → ルネサンス（再生）の時代

アラビア数学が輸入され、イタリアでは当時**数学のブームが巻き起こっていた。**



数学の問題を出し合う“決闘”

「負けた方が夕飯おごり」

数学の決闘

決闘のカギとなる問題が当時未解決問題だった**「3次方程式」**。

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

どんな方法でもいいので、期日までに解を求め提出する。

→ 代入し、いかに正確な解か競うという、**謎の競技**。

歴史が変わった闘い

アントニオ・フィオーレ

師匠（数学者デル・フェロ）から“秘伝の術”を教わり、当時無敗記録で名を轟かせていた。

VS

ニコロ・フォンターナ（タルタリア）

苦労をしながらも独学で数学を学び、街で評判になっていた数学教師。（自信あり）

互いに3次方程式の問題を出し合った。

二人の決着は…

数学者デル・フェロ

3次方程式の解の公式を発見。

デル・フェロ
1465-1526

死に際に“秘伝の術”として、弟子のアントニオ・フィオーレに継承

⬇

弟子のアントニオ・フィオーレ、**ギャンブルに利用**する。

⬇

タルタリアとの決戦

タルタリアは当初余裕を見せていたが、フィオーレの噂を聞き、
決死の覚悟で3次方程式を考察。

⬇

期日8日前に自力で3次方程式の解の公式を発見。

タルタリア
1500-1557

カルダノという男

アントニオ・フィオーレ

タルタリアの巧妙な課題に苦戦し解けず。

ニコロ・フォンターナ（タルタリア）

自力で見つけた公式に当てはめ、無事回答。

タルタリアの勝利

この闘いを人一倍じっくり眺めていた男がいた。

数学者ジロラモ・カルダノ。（医者でもあり、賭博師でもあった）

効率のいいイカサマの方法について数学的に考察

➡ 確率理論の構築に大きく貢献

「サイコロあそびについて」という本を出版

ギャンブラーにとっては、
全くギャンブルをしないことが最大の利益となる。

ジロラモ・カルダノ
1501-1576.9.21

カルダノという男

カルダノは出版予定の本に「3次方程式の解法」を載せたくてたまらなかった。

カルダノ「教えてください（懇願）」

タルタリア「断固拒否」

カルダノ「お願いします（懇願）」

タルタリア「誰にも見せないのなら…」

タルタリアは市長に会うこともなく、カルダノに解法を教えてしまった。

カルダノはデル・フェロの噂を聞き、彼の実家へ。
彼が最初の発見者だと確認し、タルタリアの約束を破り勝手に出版してしまう…。

ジロラモ・カルダノ
1501-1576.9.21

アルス・マグナの出版

弟子のフェラーリ(超天才)はタルタリアの解法をもとに4次方程式の解法を発見。

ヨーロッパ中に広まり、代数学の研究は飛躍的に進んだ

ヨーロッパ数学の発展に大きく影響を及ぼした。

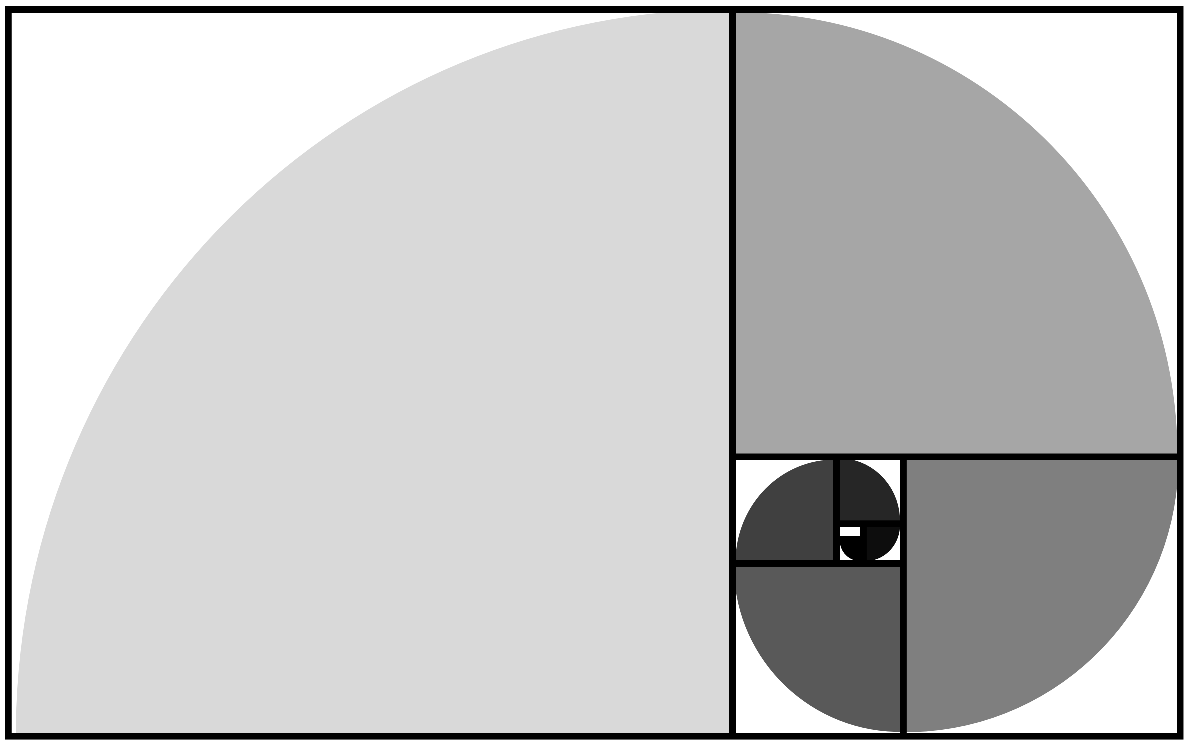
ルドヴィゴ・フェラーリ
1522-1565

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

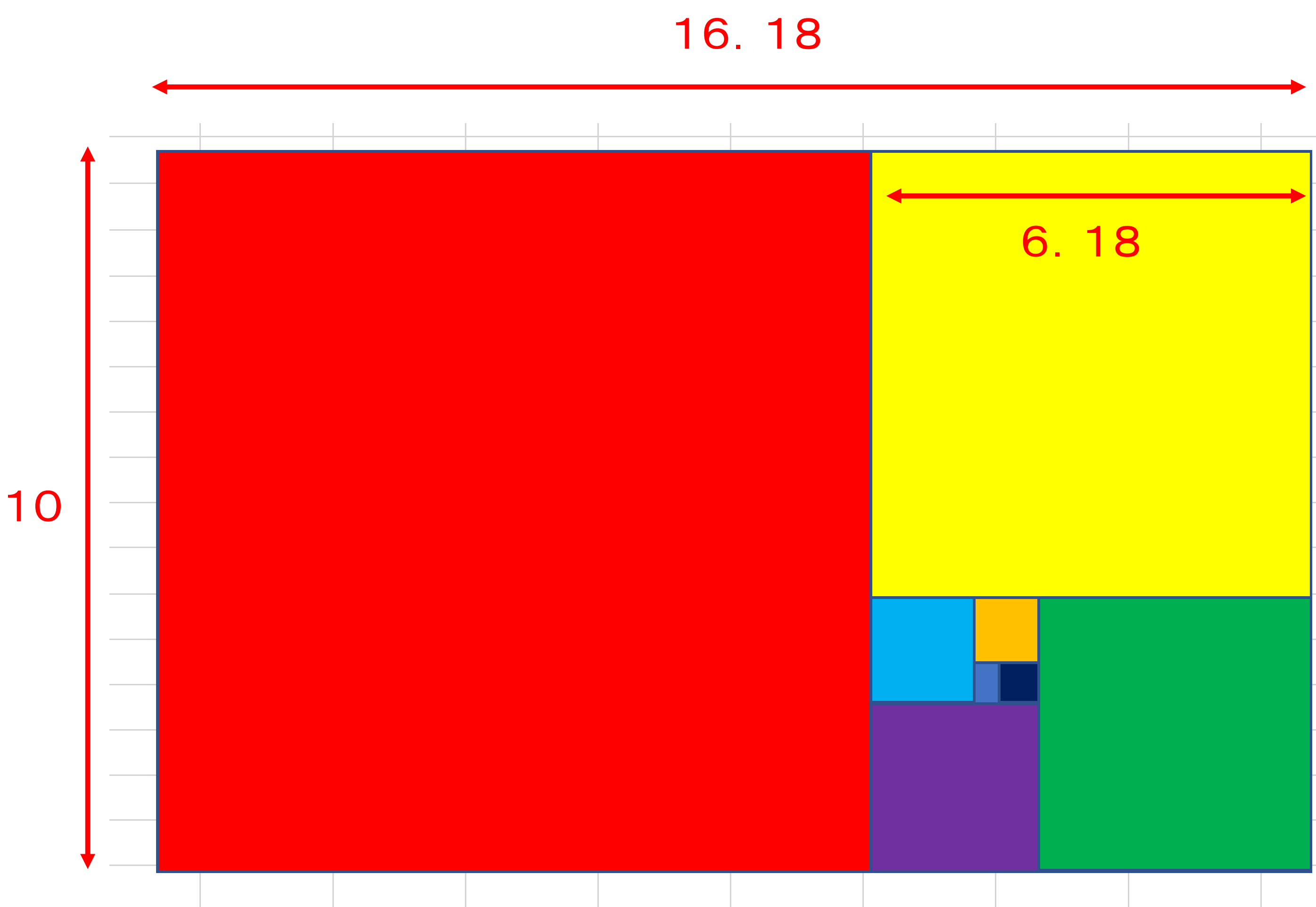
偉大なる術“アルス・マグナ”

ジロラモ・カルダノ
1501-1576.9.21

Golden ratio Theater



Excelでデザイン



①1 : 1.618の長方形を作る

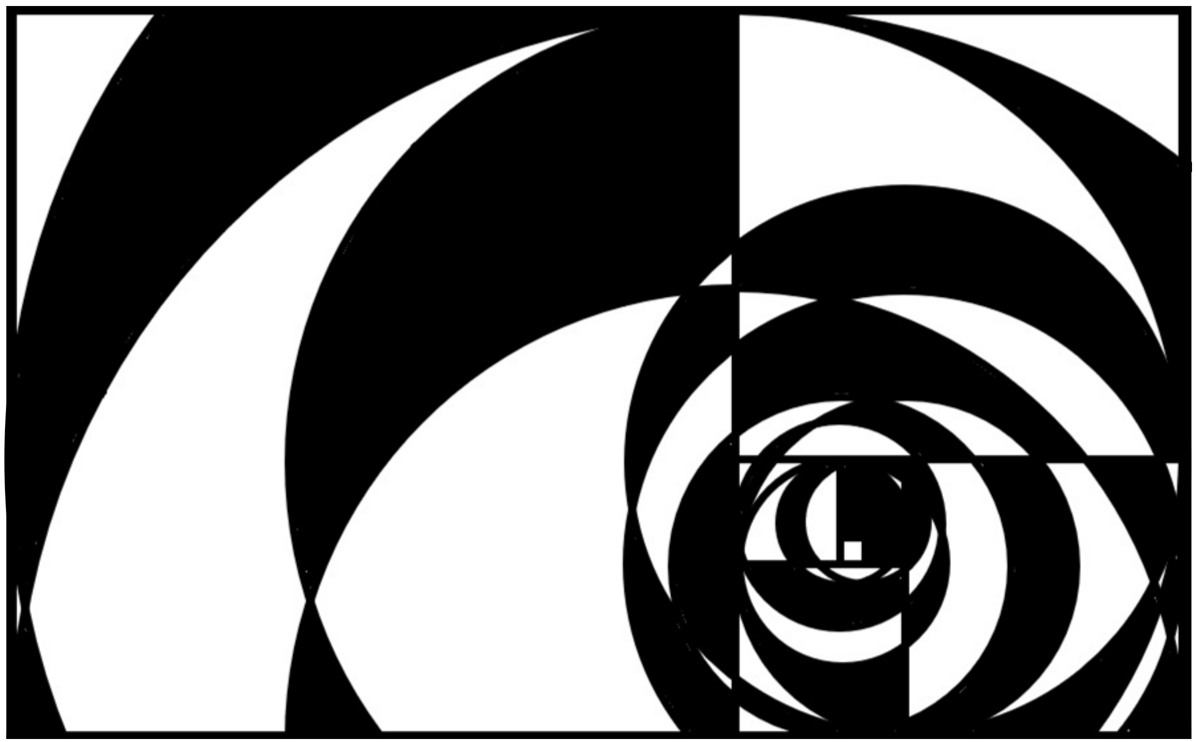
phi'	length
1.618	16.18
	10
	6.18
	3.82
	2.36
	1.46
	0.9
	0.56

②上の数値の差をとる

③同じ操作を繰り返す

Golden ratio Theater

切り絵作品へと昇華

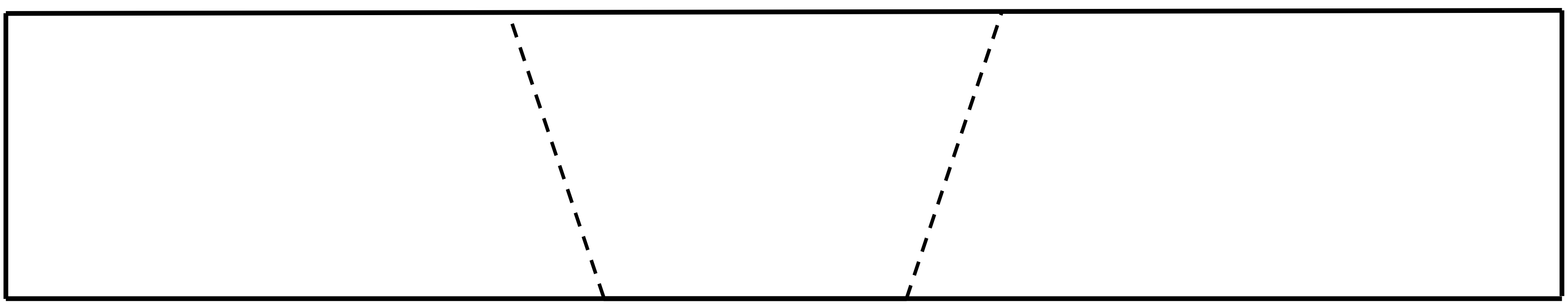


切り絵作品

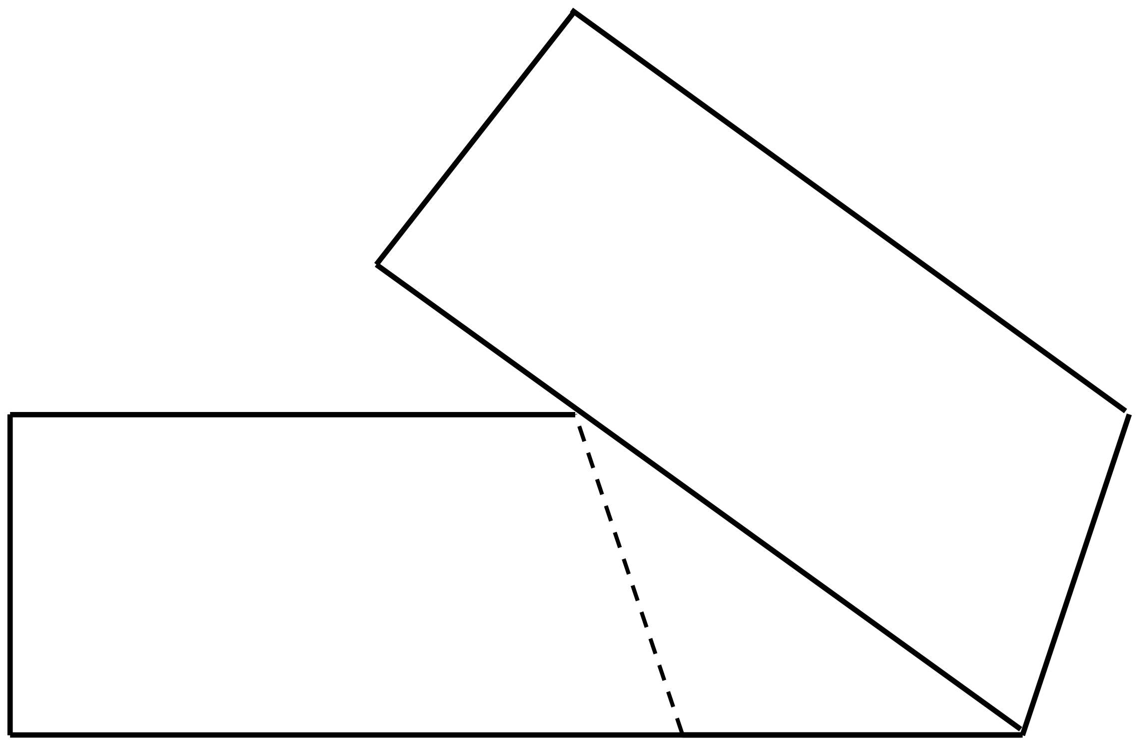
Beauty (2020)

どうすれば黄金比を手に入れることができるか

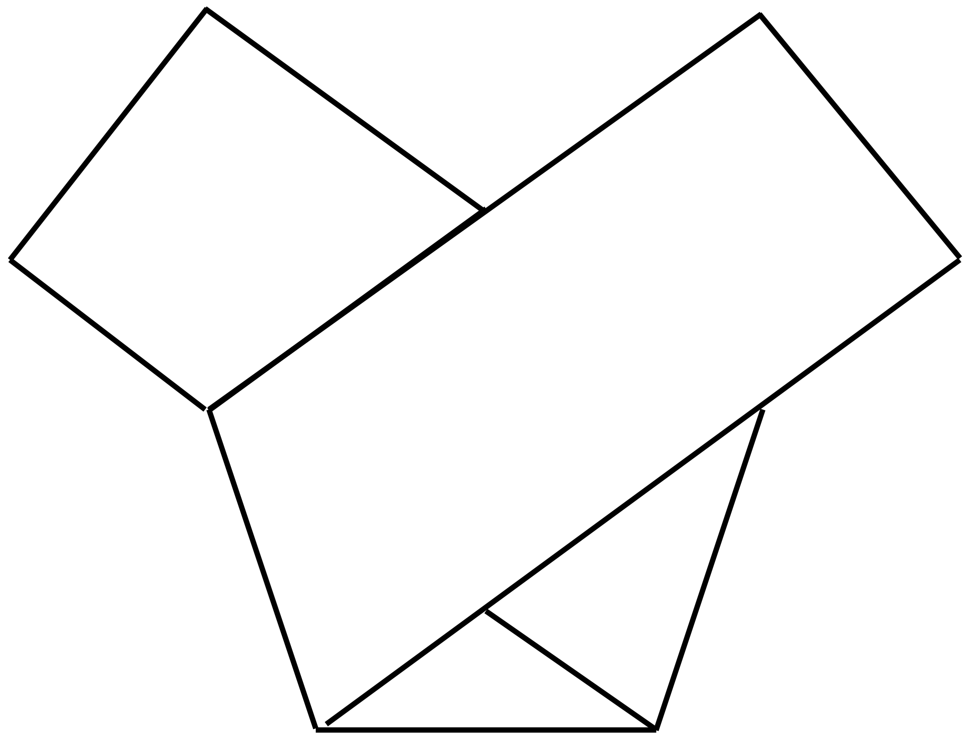
Folding Paper



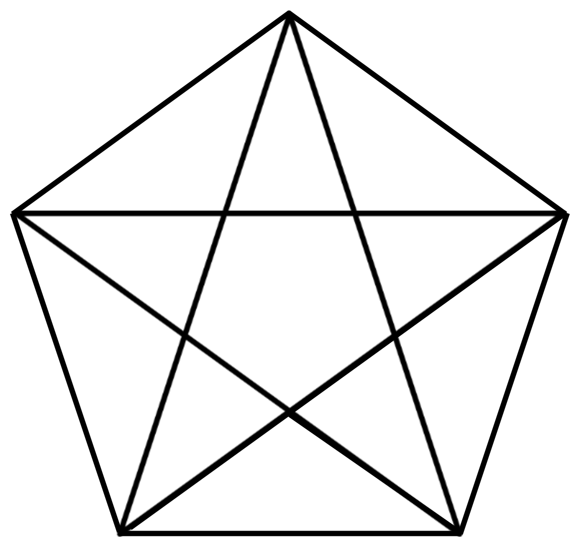
Folding Paper



Folding Paper



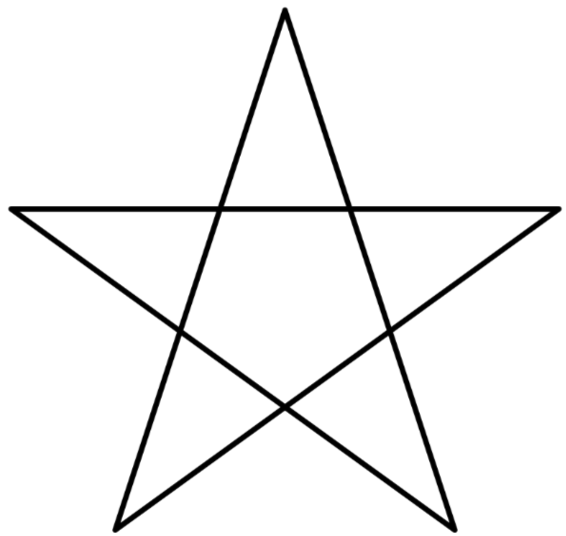
Folding Paper



Pythagoras Philosophy

ピタゴラス
BC582-BC496

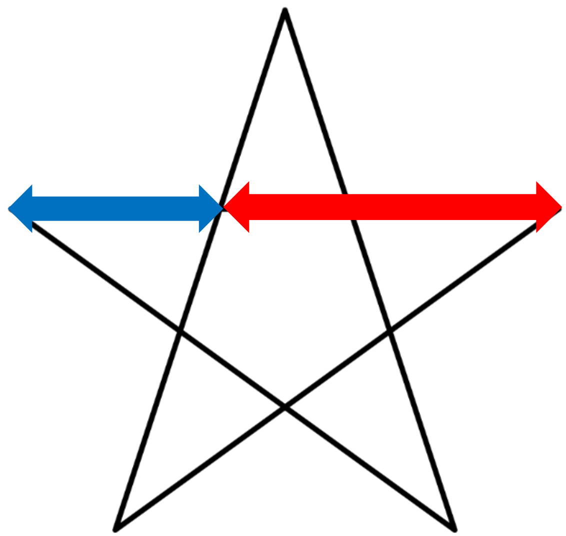
“万物は数なり”



教団のシンボルマークは「五芒星」

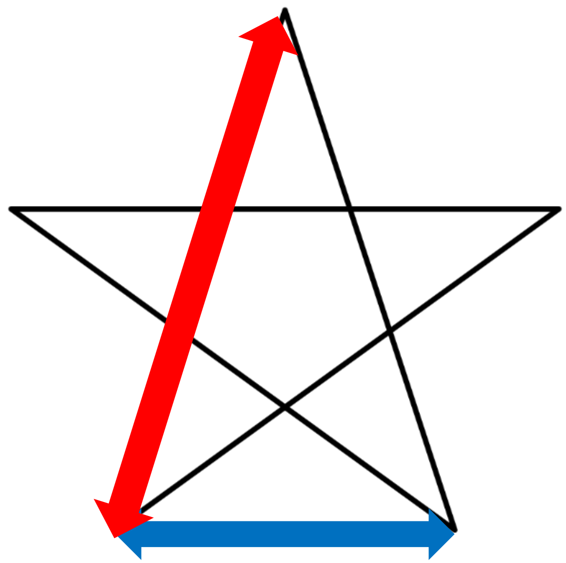
「ピタゴラス学派」

Pythagoras Philosophy



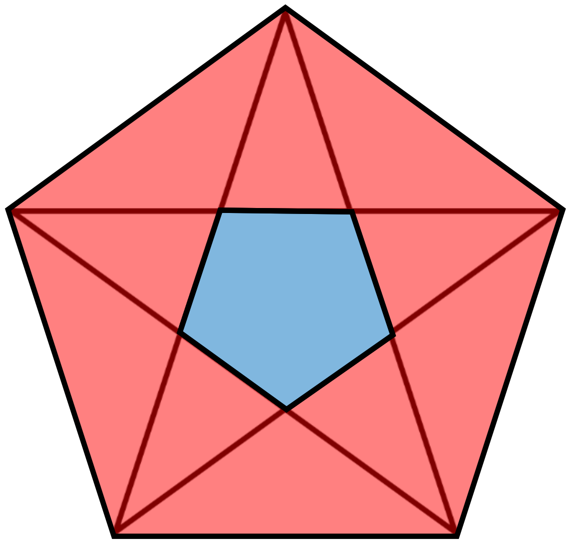
$1 : \varphi$

Pythagoras Philosophy



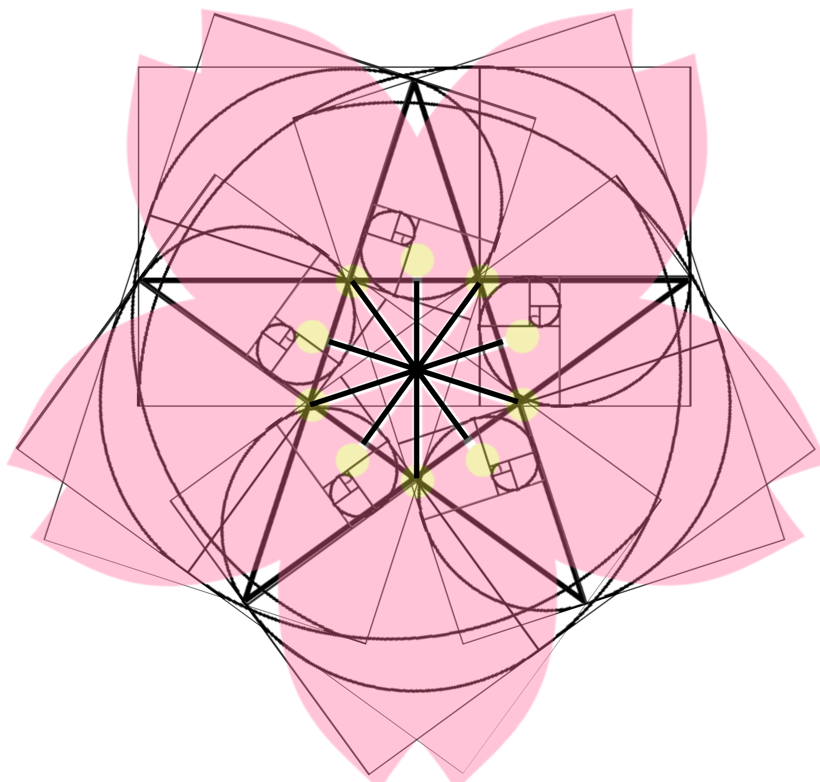
$1 : \varphi$

Pythagoras Philosophy



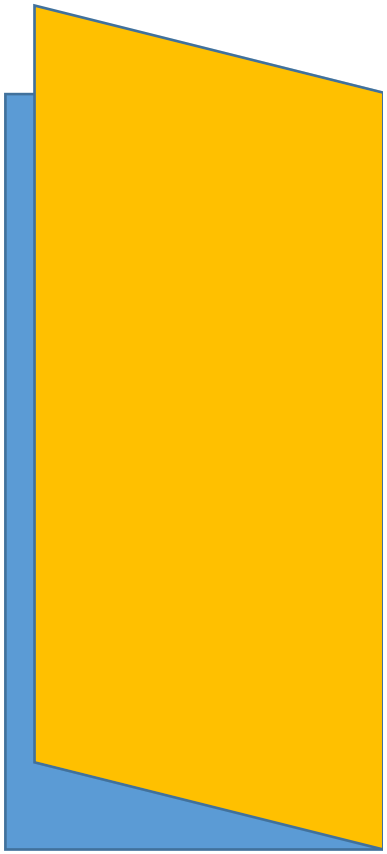
面積比＝$1:\varphi^2$

Pentagram × Art

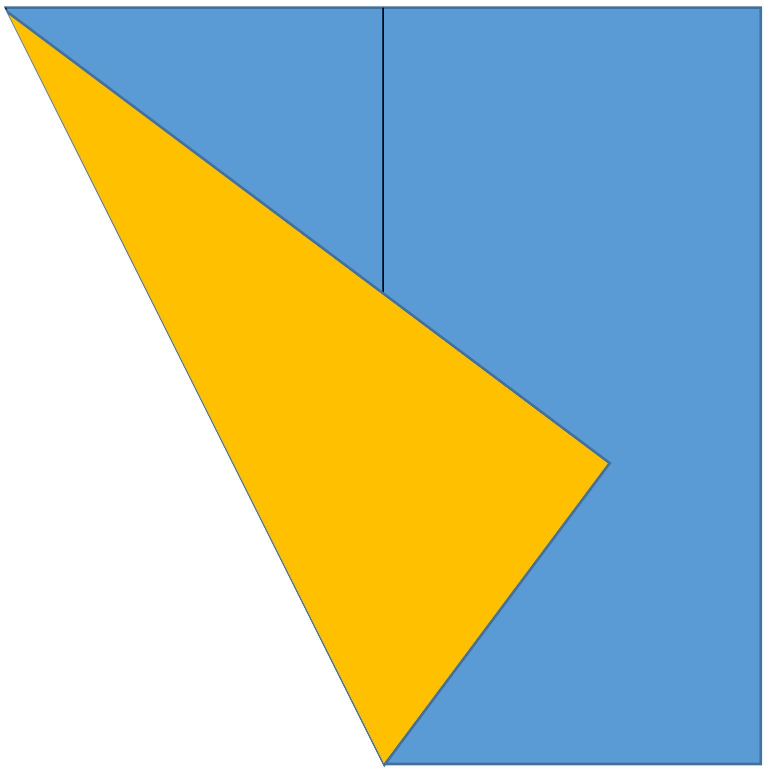


折り紙から黄金長方形を作り出す方法

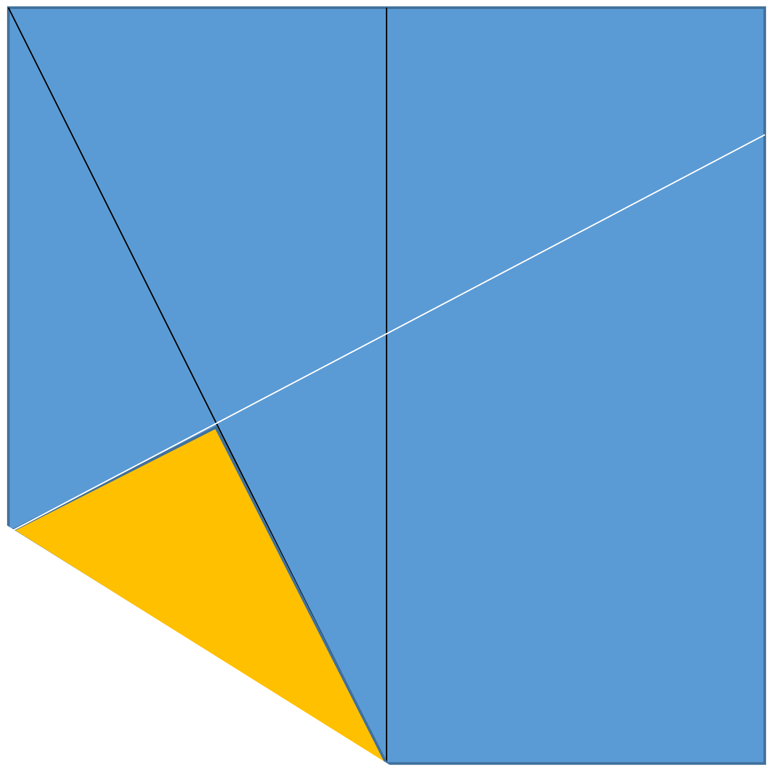
Folding paper 2



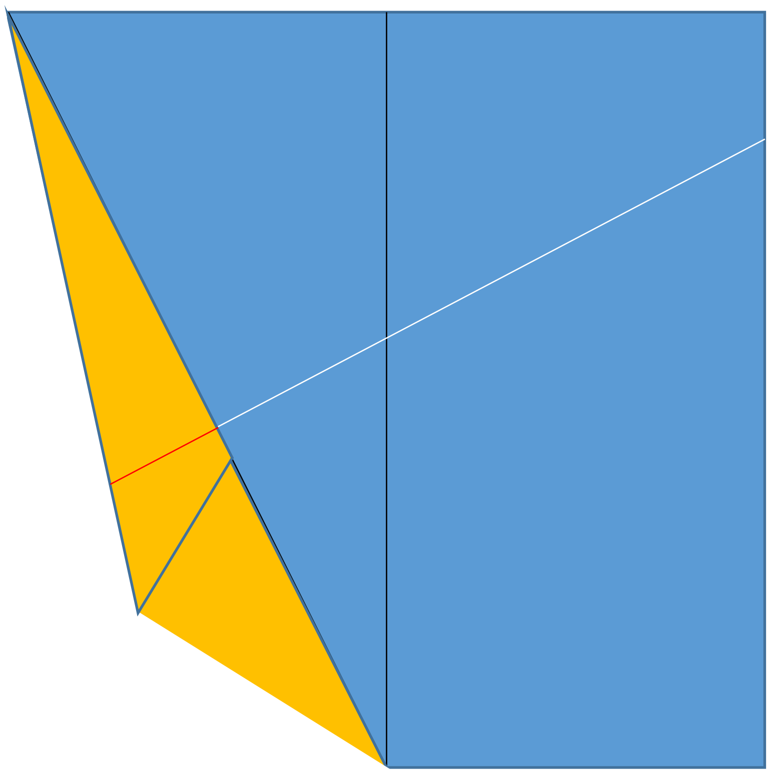
Folding paper 2



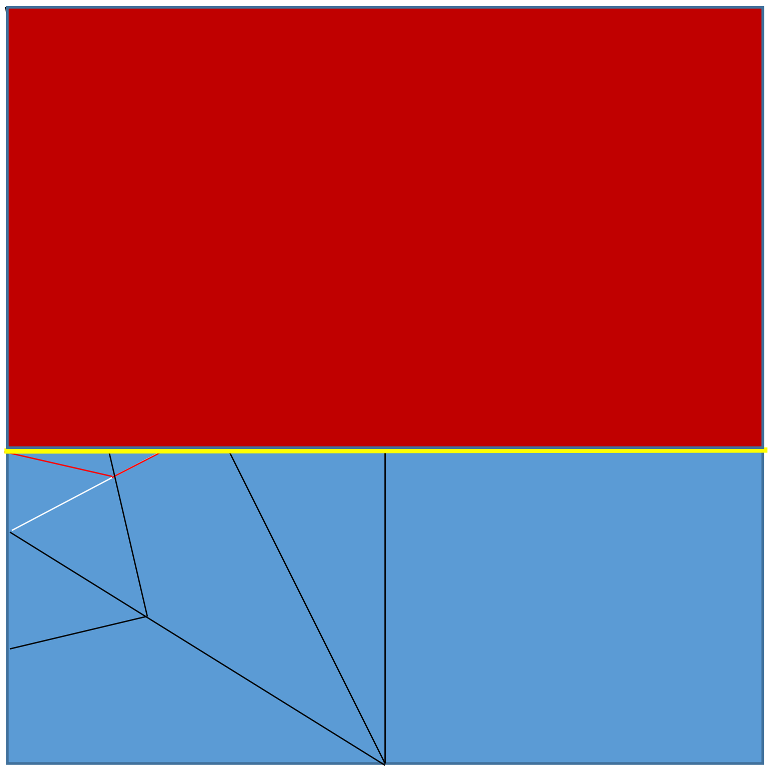
Folding paper 2



Folding paper 2

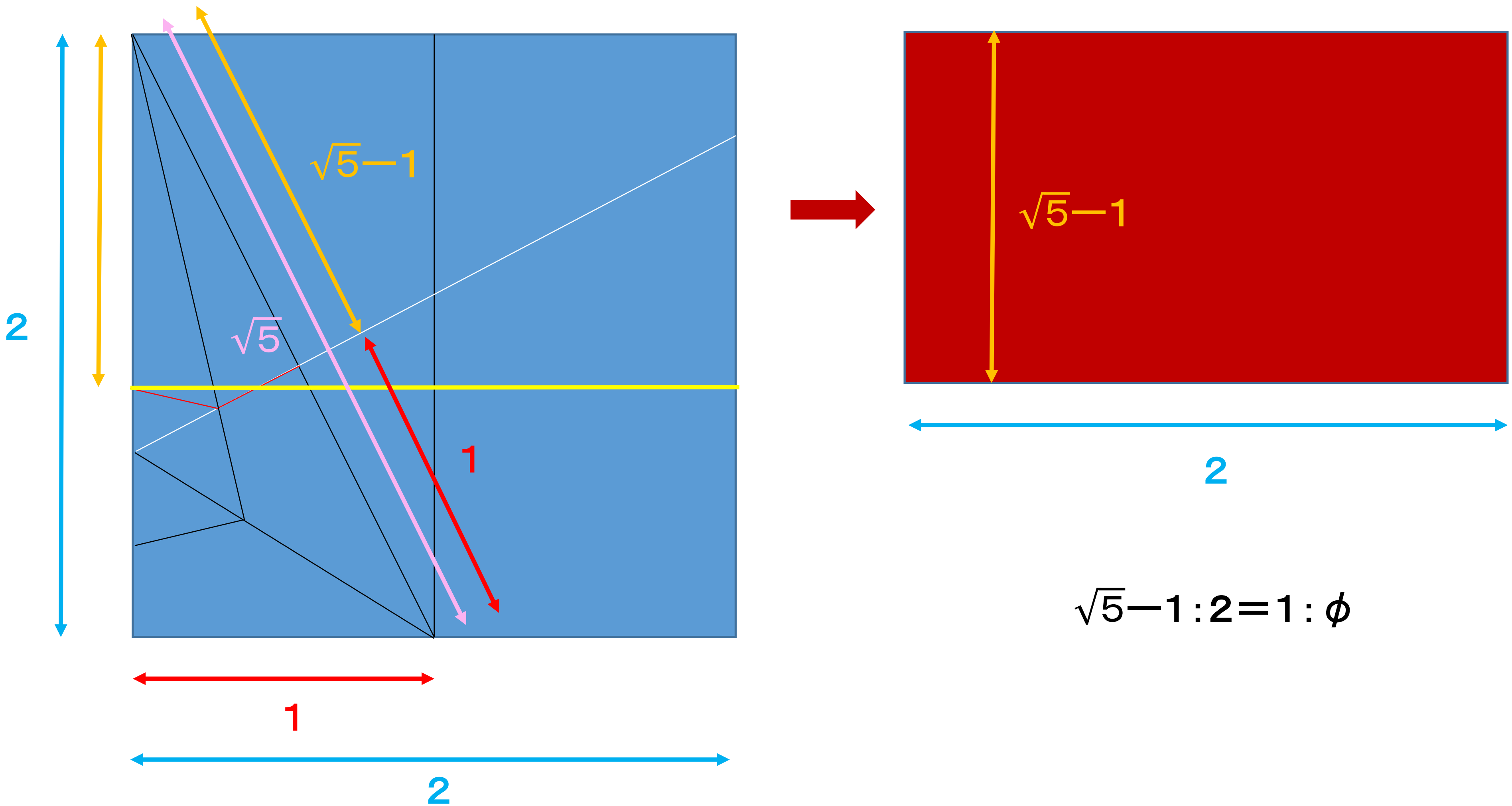


Folding paper 2



→ 黄金長方形

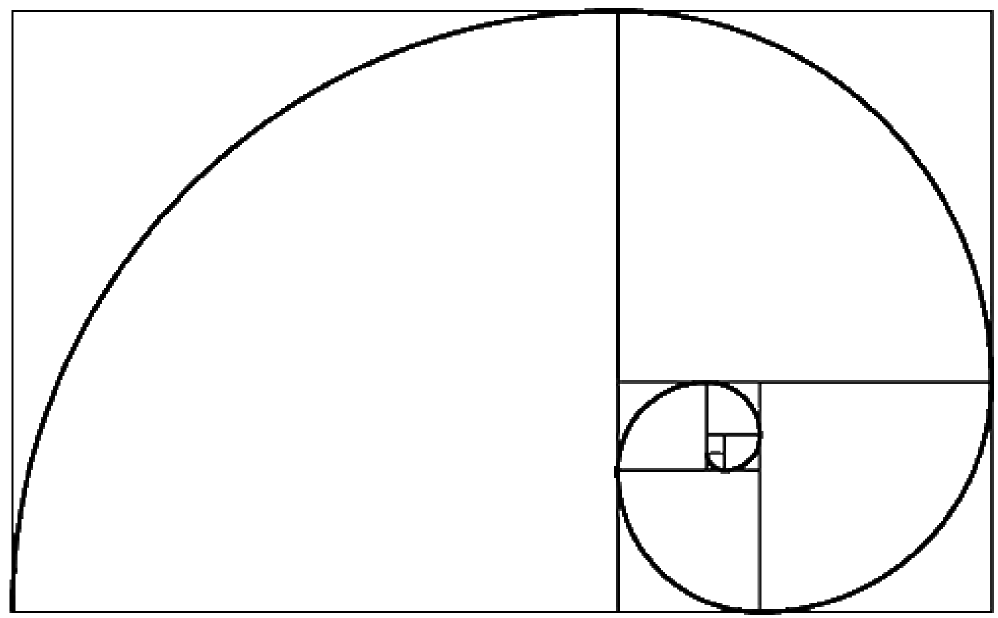
Folding paper 2



$$\sqrt{5}-1:2=1:\phi$$

黄金長方形をまねる

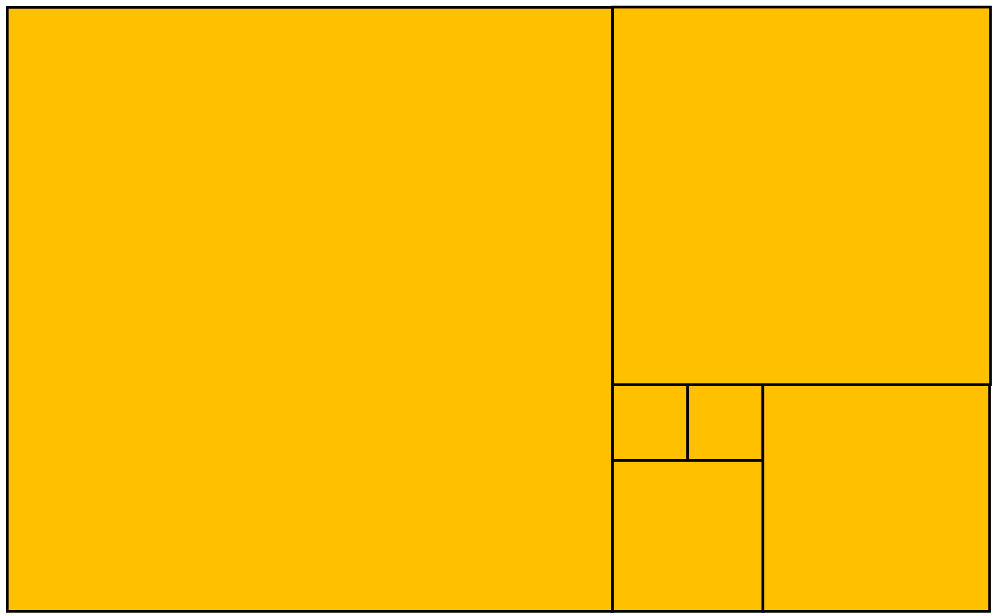
どんどん小さい正方形ができていく



黄金長方形をまねる

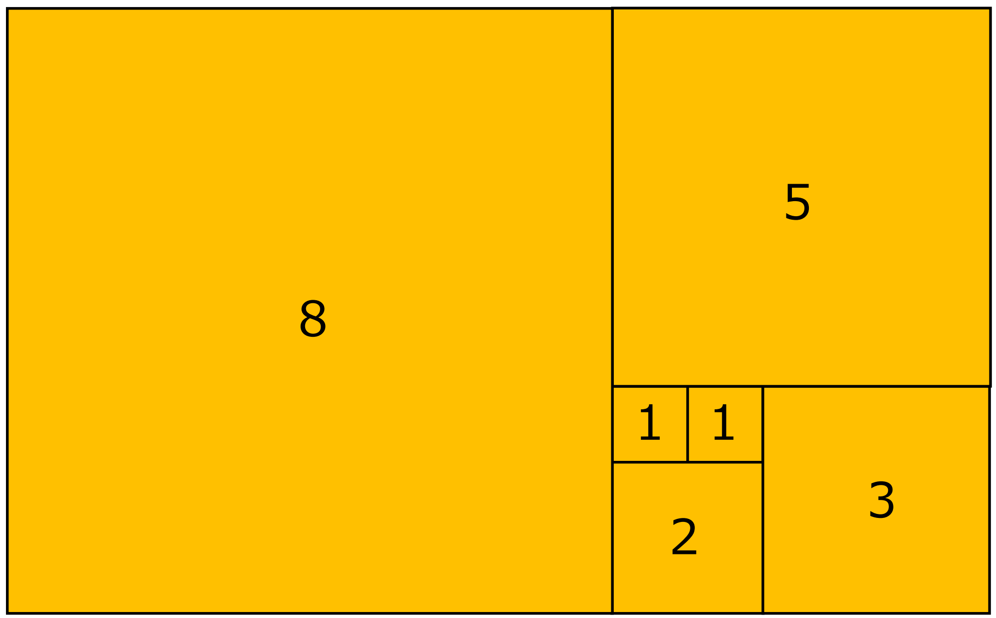
どんどん小さい正方形ができていく

どんどん大きい正方形を作っていく



最初の正方形の1辺の長さを1とすると、どのように正方形は大きくなるでしょう？

ある数列の出現



Fibonacci Numbers

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
数	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Fibonacci Numbers

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
数	1	1	**2**	3	5	8	13	21	34

Fibonacci Numbers

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
数	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Fibonacci Numbers

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
数	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Fibonacci Numbers

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
数	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Fibonacci Numbers

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
数	1	1	2	3	5	8	**13**	21	34

Fibonacci Numbers

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
数	1	1	2	3	5	8	13	**21**	34

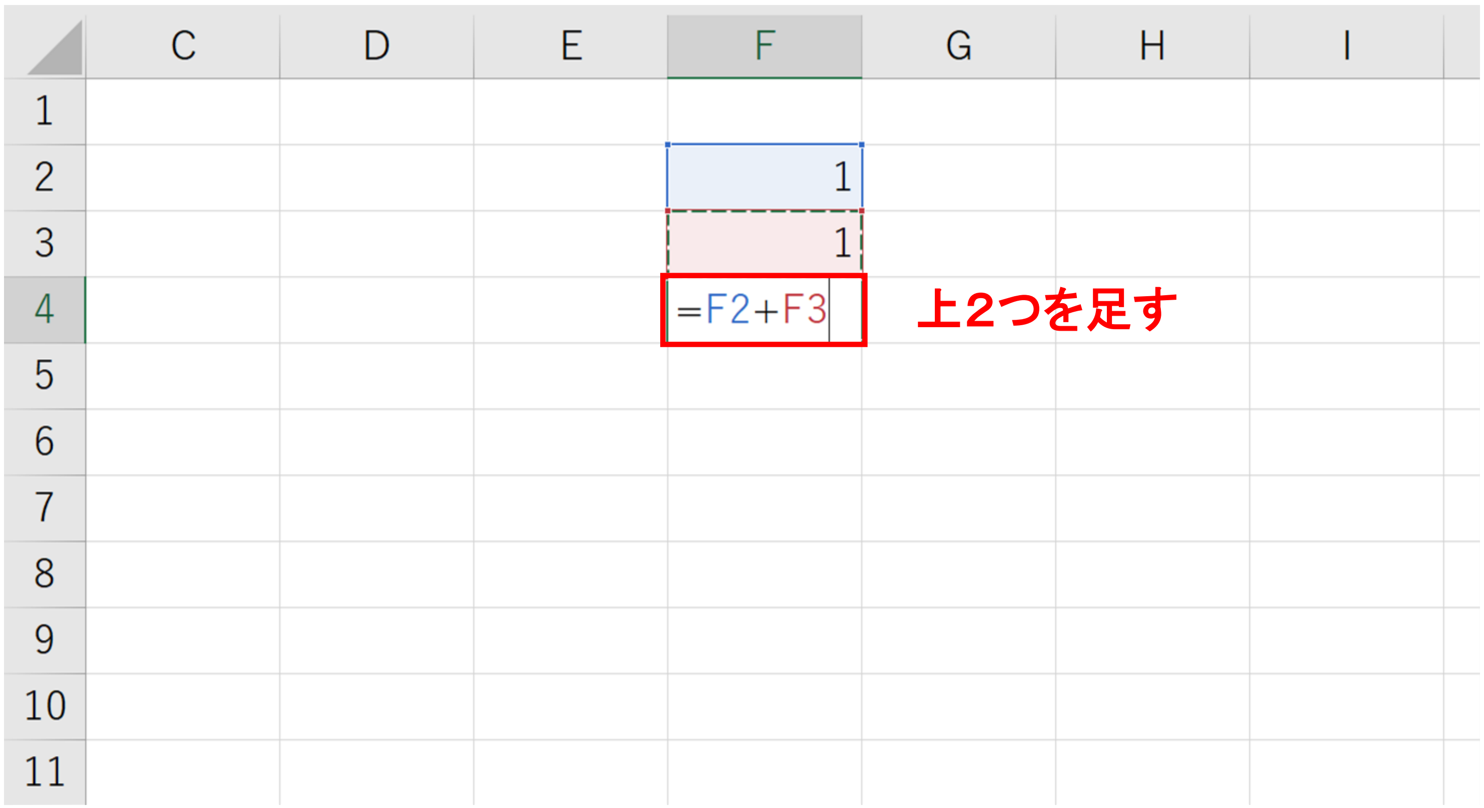
Fibonacci Numbers

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
数	1	1	2	3	5	8	13	21	34

フィボナッチ数

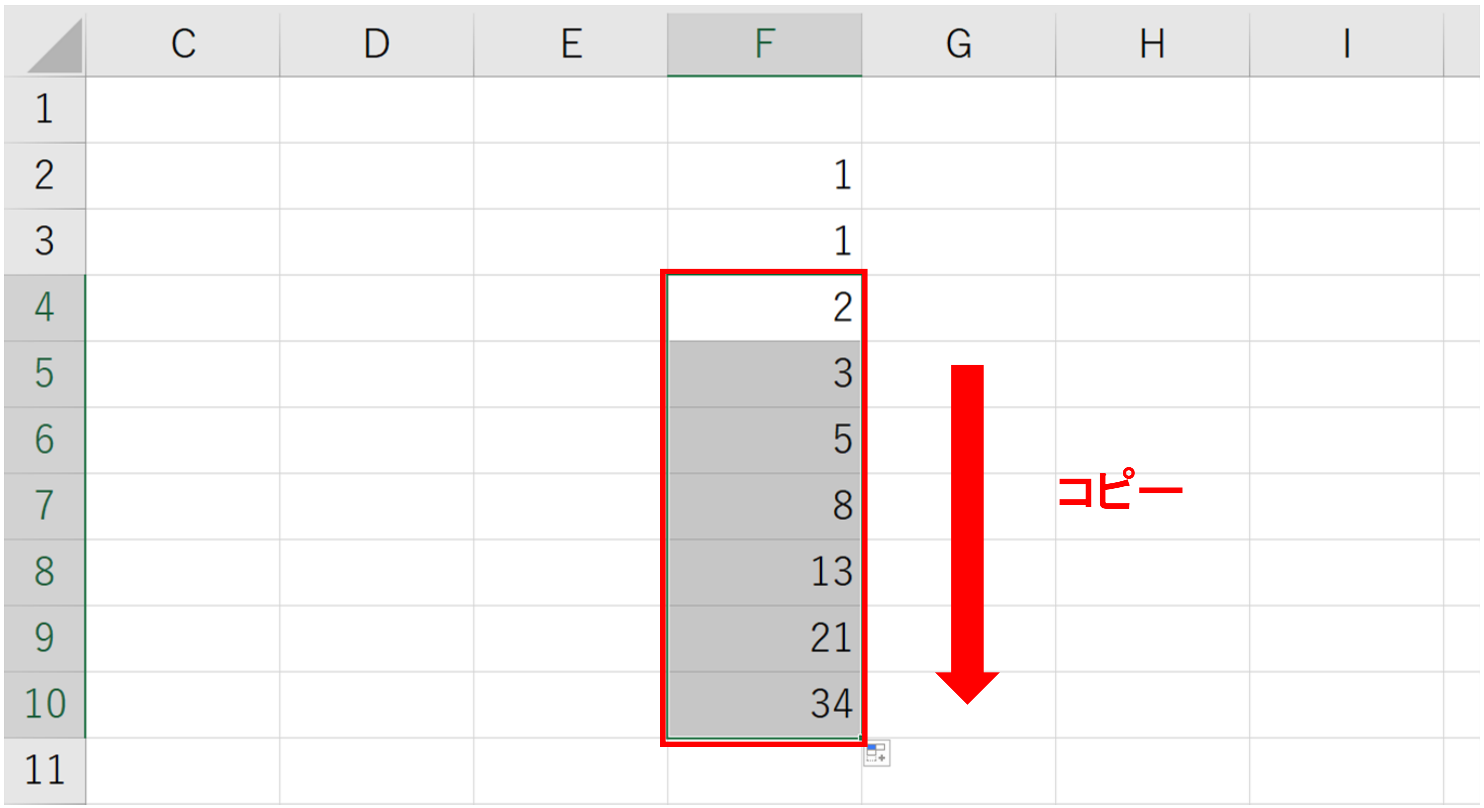
Excelでフィボナッチ数を出力

Excelでフィボナッチ数を出力



上2つを足す

Excelでフィボナッチ数を出力



Fibonacci Numbers

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
数	1	1	2	3	5	8	13	21	34

フィボナッチ数

現在の情報 ⟶ $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

1つ前の情報 **2つ前の情報**

隣り合うフィボナッチ数の比を計算してみる。

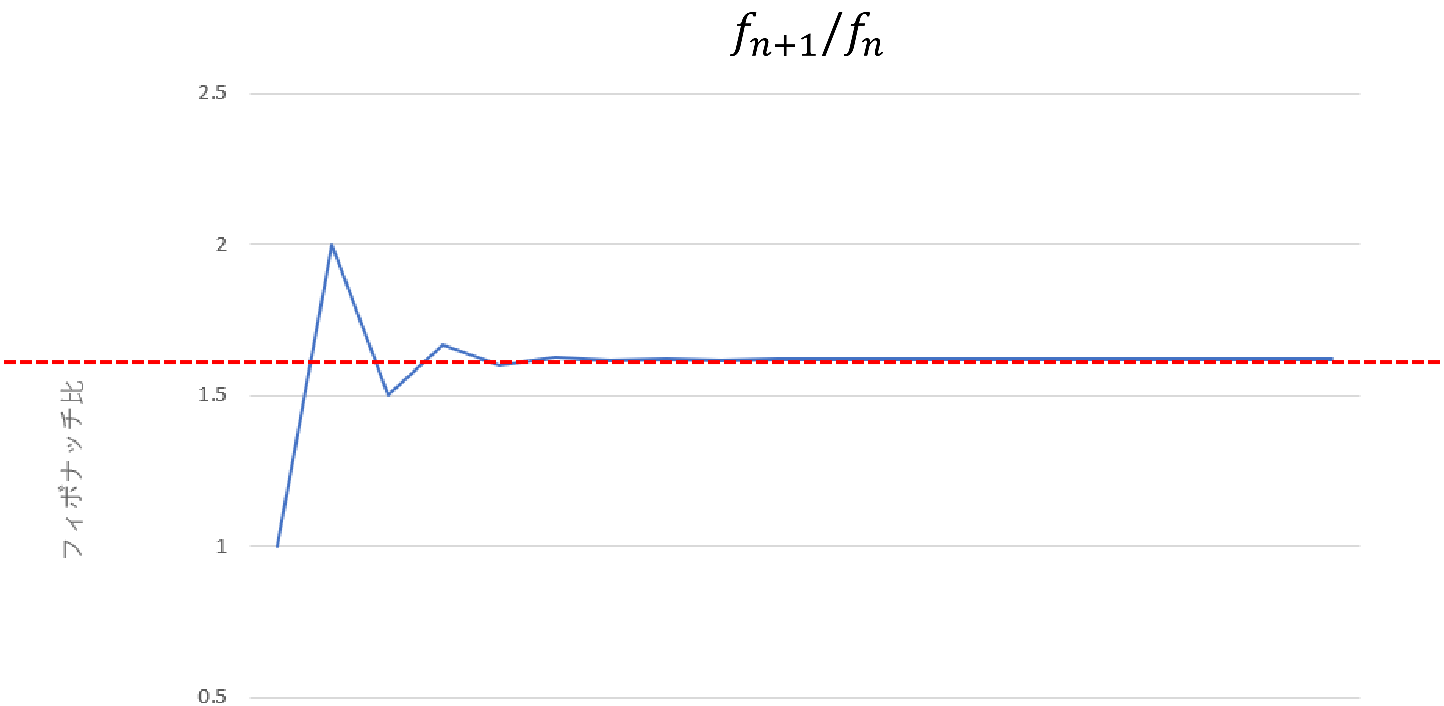
Fibonacci Numbers

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
数	1	1	2	3	5	8	13	21	34

隣り合うフィボナッチ数の比

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{f_{n+1}}{f_n}$	1/1	2/1	3/2	5/3	8/5	13/8	21/13	34/21	55/34
小数									

Fibonacci Numbers



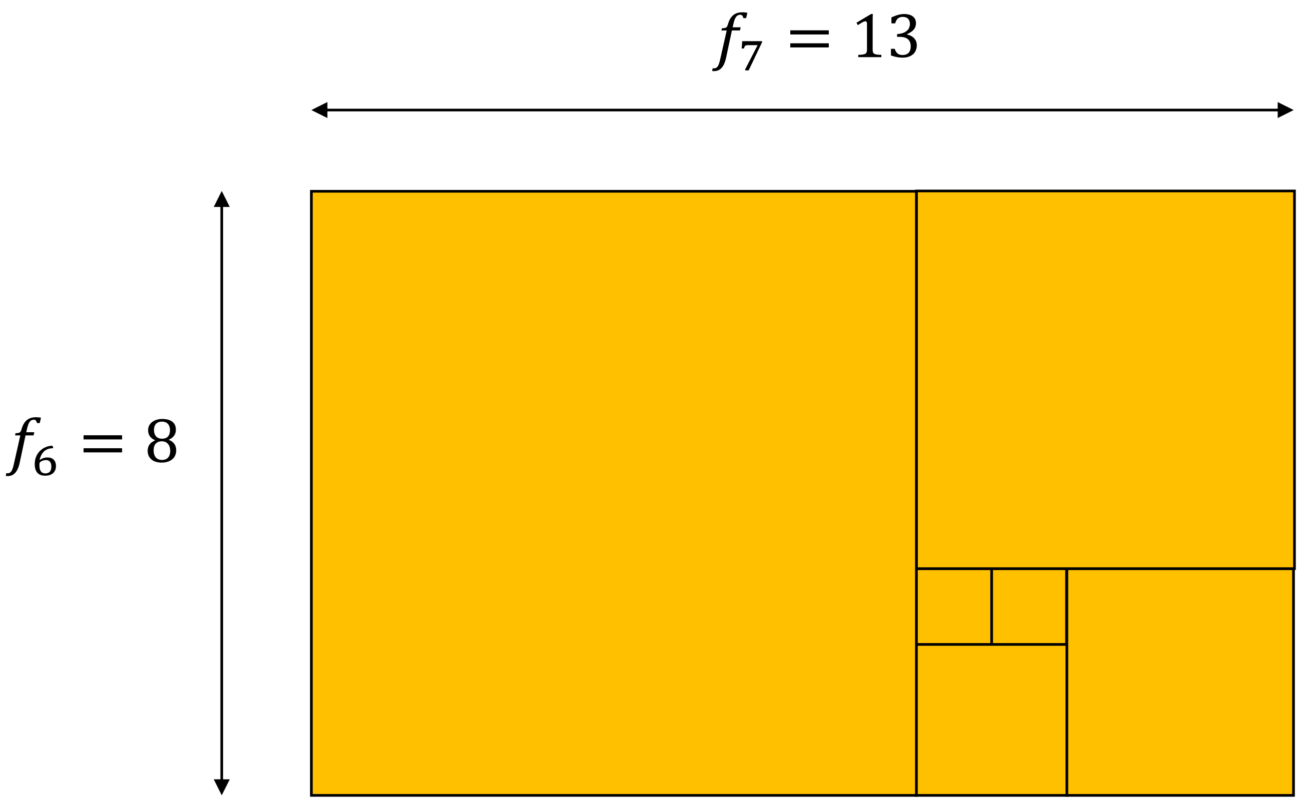
1.61803…

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

黄金比

隣り合うフィボナッチ数の比は黄金比に近づく。

黄金長方形に近づく！



$$
\begin{aligned}
f_6 : f_7 &= 8 : 13 \\
&= 1 : 13/8 \\
&= 1 : 1.625
\end{aligned}
$$

Leonardo “Fibonacci”

フィボナッチ
1170頃-1250頃

本名はレオナルド・ダ・ピサ

父・グリエルモのニックネーム「ボナッチ（「単純」の意）」

「フィボナッチ」＝「フィ」＋「ボナッチ」（「ボナッチの息子」の意）

死後の授けられた贈り名

・アラビア数字のシステムをヨーロッパに広めた

・「うさぎの出生率」に関する数学的考察

Fibonacci Rabbits

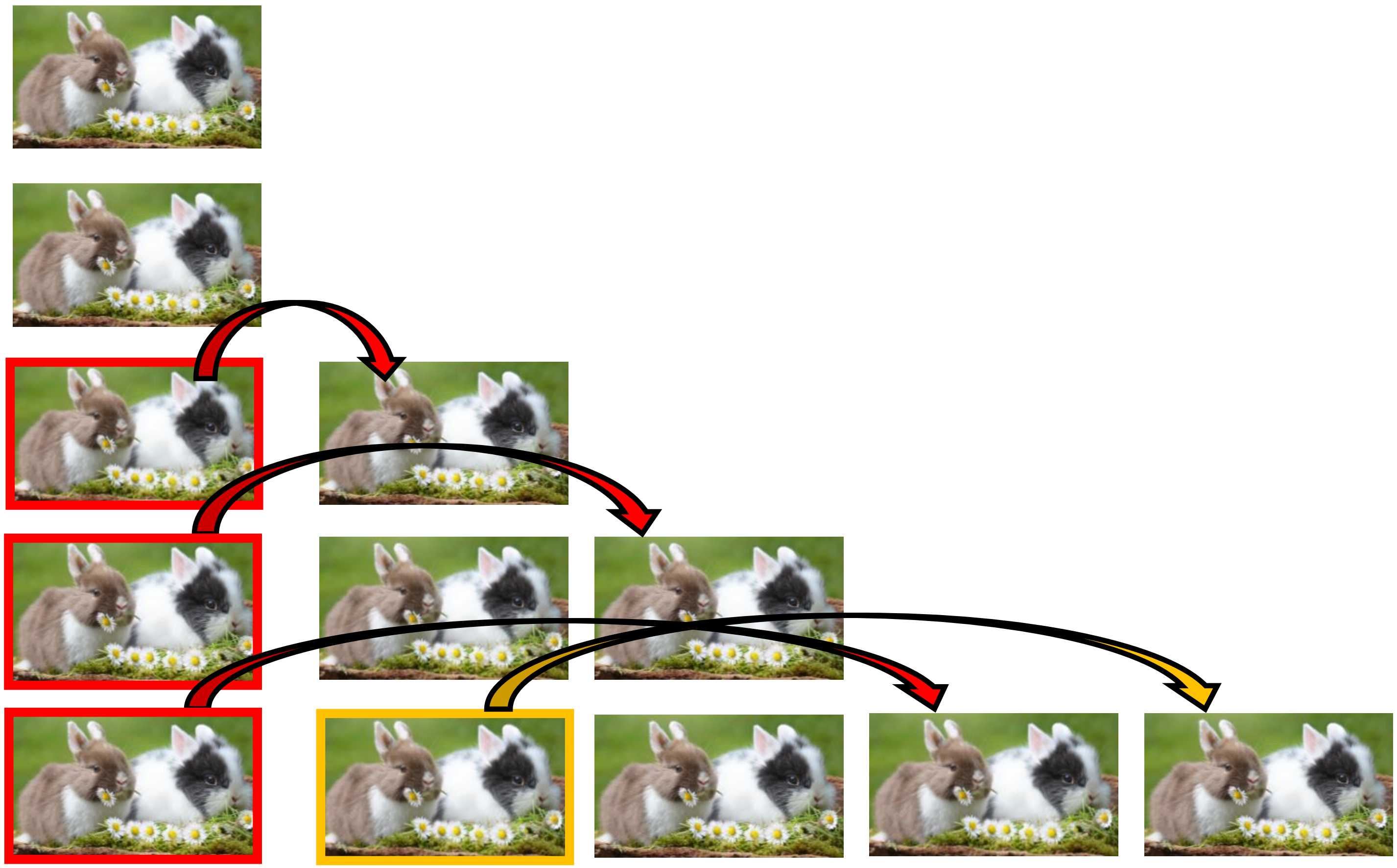
うさぎ（システム）の問題

生後間もないうさぎが1つがいいる。
次の条件の下で、うさぎはどのような増え方をするか？

（条件1）1つがいのうさぎは生後2か月後から1か月に1つがいずつうさぎを産む

（条件2）うさぎは死なないとする　←！？

Fibonacci Rabbits



	つがい数
0か月	1
1か月	1
2か月	2
3か月	3
4か月	5

Fibonacci Rabbits

つがい数

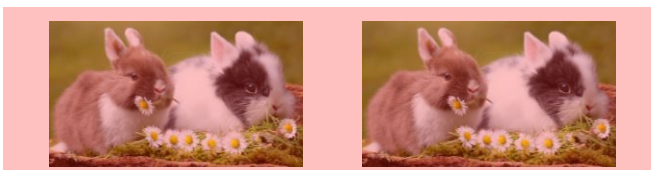
0か月  1

2か月前のつがい数＋1か月前のつがい数

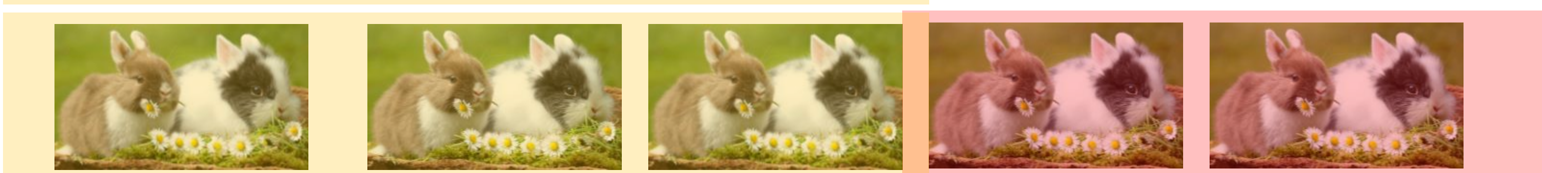
↓

現在のつがい数

1か月  1

2か月  2

3か月  3

4か月  5

Fibonacci Numbers

2つ前の情報

現在の情報 ⟶ $f_n = \boxed{f_{n-1}} + \boxed{f_{n-2}}$

1つ前の情報

最初と2番目の情報があれば再現できる

$f_1 = f_2 = 1$ のとき f_n をフィボナッチ数と呼ぶ

フィボナッチ数が織りなす様々な結論の美しさ

フィボナッチ数と黄金比

ド・モアブル-ビネの公式

$$f_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

n番目のフィボナッチ数は黄金比を使って表すことができる。

2乗和の公式

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \cdots + f_{n-1}^2 + f_n^2 = f_{n+1} \times f_n$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 40$$

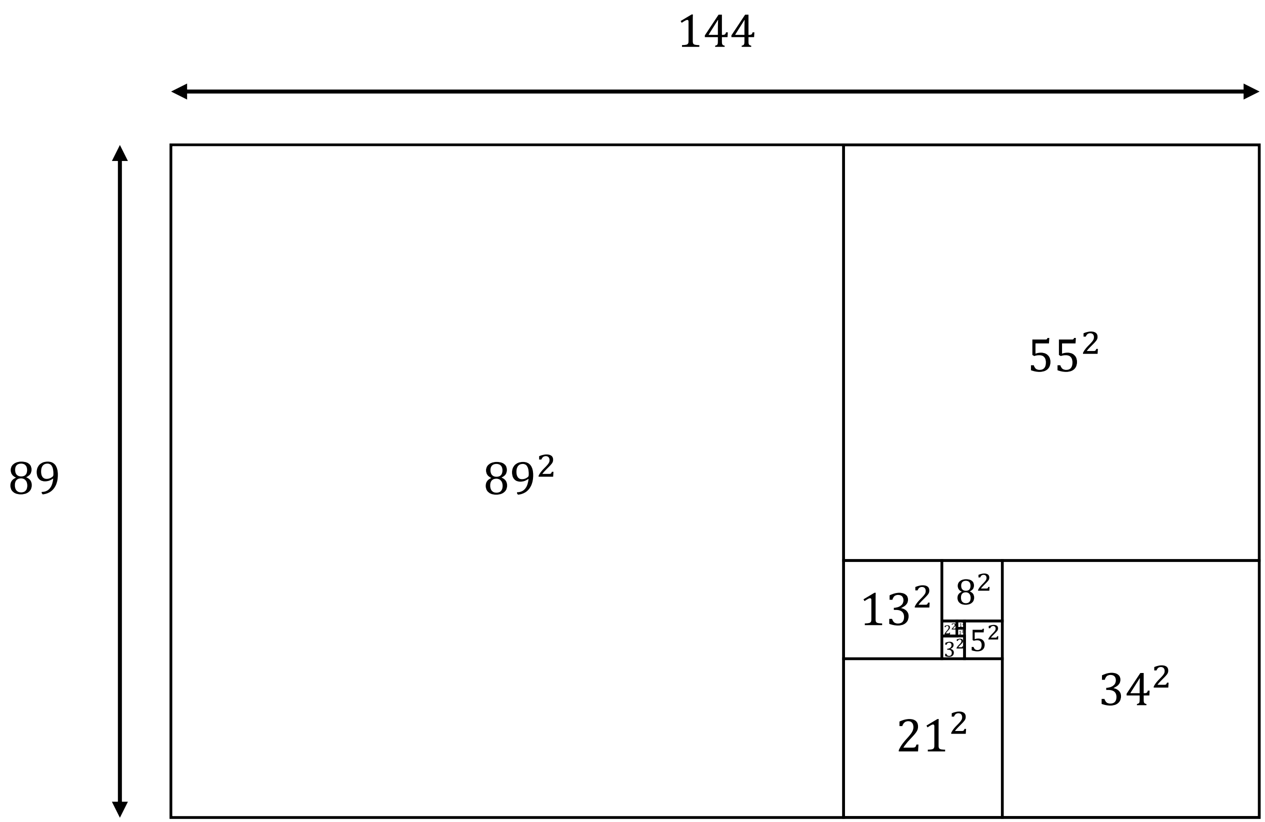
$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 104$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 = 273$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2 = 714$$

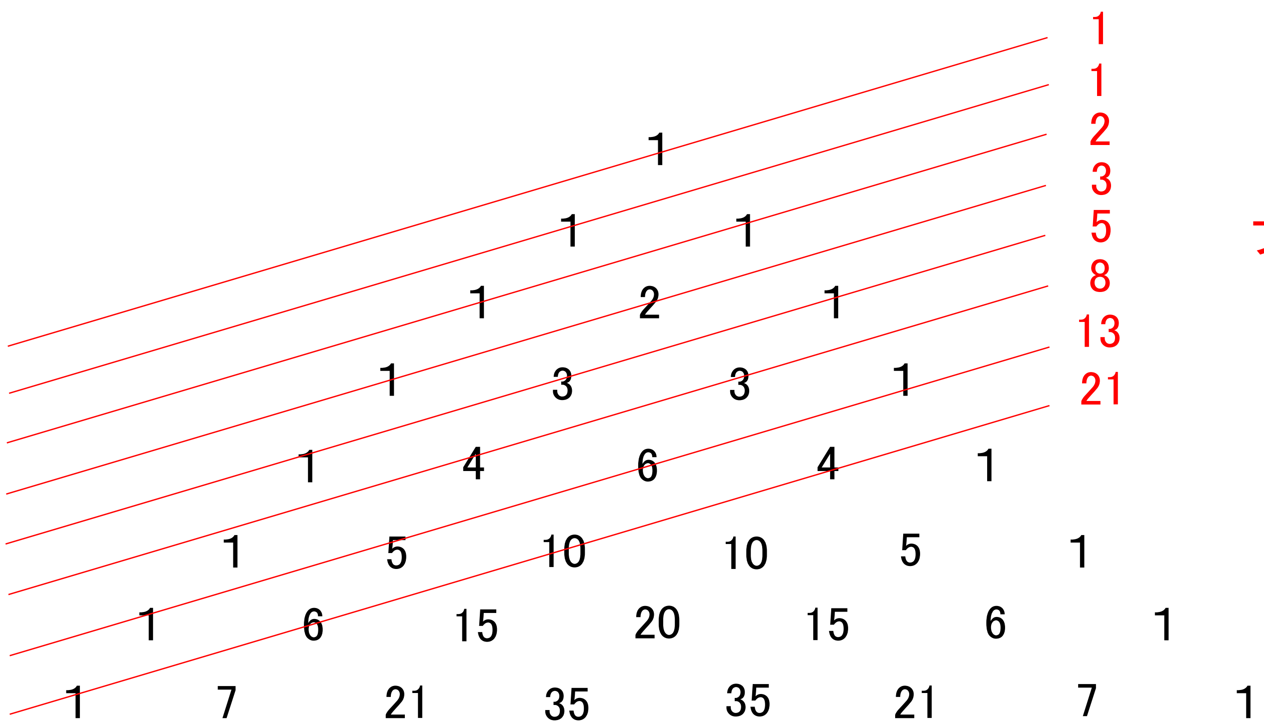
$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2 + 34^2 = 1870$$

図を用いた証明



$$f_{n+1} \times f_n = f_n^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-2}^2 + \cdots + f_2^2 + f_1^2$$

フィボナッチ数を探せ！



フィボナッチ数

Zeckendorf's Theorem

ゼッケンドルフの定理

どんな自然数も隣り合わない異なるフィボナッチ数の和で一意的に表すことができる。

Zeckendorf’s Theorem

ゼッケンドルフの定理

どんな自然数も隣り合わない異なるフィボナッチ数の和で一意的に表すことができる。

1	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**

Zeckendorf’s Theorem

ゼッケンドルフの定理

どんな自然数も隣り合わない異なるフィボナッチ数の和で一意的に表すことができる。

1	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**

例　69　＝

Zeckendorf’s Theorem

ゼッケンドルフの定理

どんな自然数も隣り合わない異なるフィボナッチ数の和で一意的に表すことができる。

1	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**

例　69 = 55

Zeckendorf’s Theorem

ゼッケンドルフの定理

どんな自然数も隣り合わない異なるフィボナッチ数の和で一意的に表すことができる。

1	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**

例　$69 = 55 + 13$

Zeckendorf’s Theorem

ゼッケンドルフの定理

どんな自然数も隣り合わない異なるフィボナッチ数の和で一意的に表すことができる。

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

例　$69 = 55 + 13 + 1$

Zeckendorf’s Theorem

ゼッケンドルフの定理

どんな自然数も隣り合わない異なるフィボナッチ数の和で一意的に表すことができる。

1	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**

例　41 ＝

Zeckendorf’s Theorem

ゼッケンドルフの定理

どんな自然数も隣り合わない異なるフィボナッチ数の和で一意的に表すことができる。

1	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**

例　41 ＝ 34

Zeckendorf’s Theorem

ゼッケンドルフの定理

どんな自然数も隣り合わない異なるフィボナッチ数の和で一意的に表すことができる。

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

例　41 ＝ 34 ＋ 5

Zeckendorf's Theorem

ゼッケンドルフの定理

どんな自然数も隣り合わない異なるフィボナッチ数の和で一意的に表すことができる。

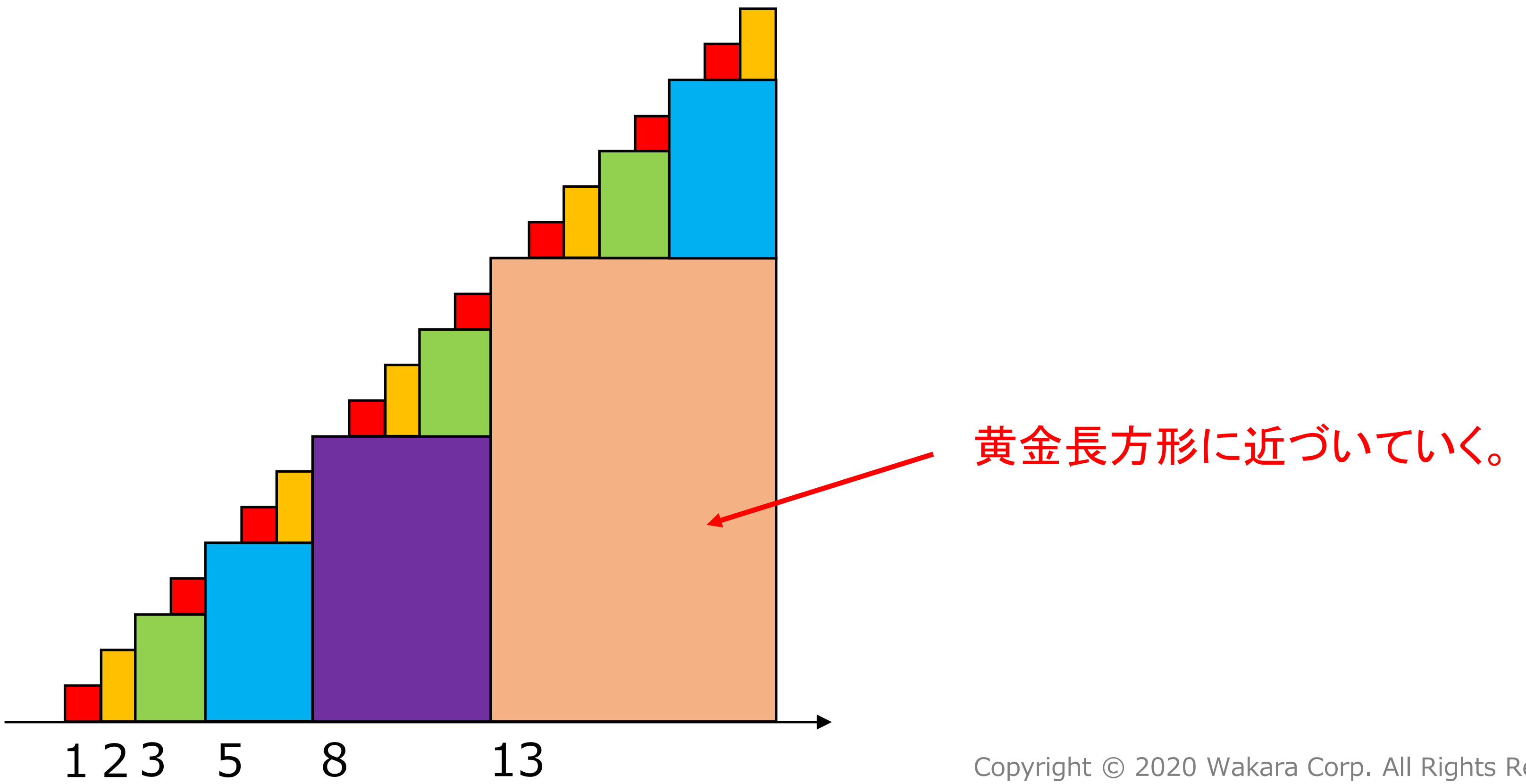
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

例　41 ＝ 34 ＋ 5 ＋ 2

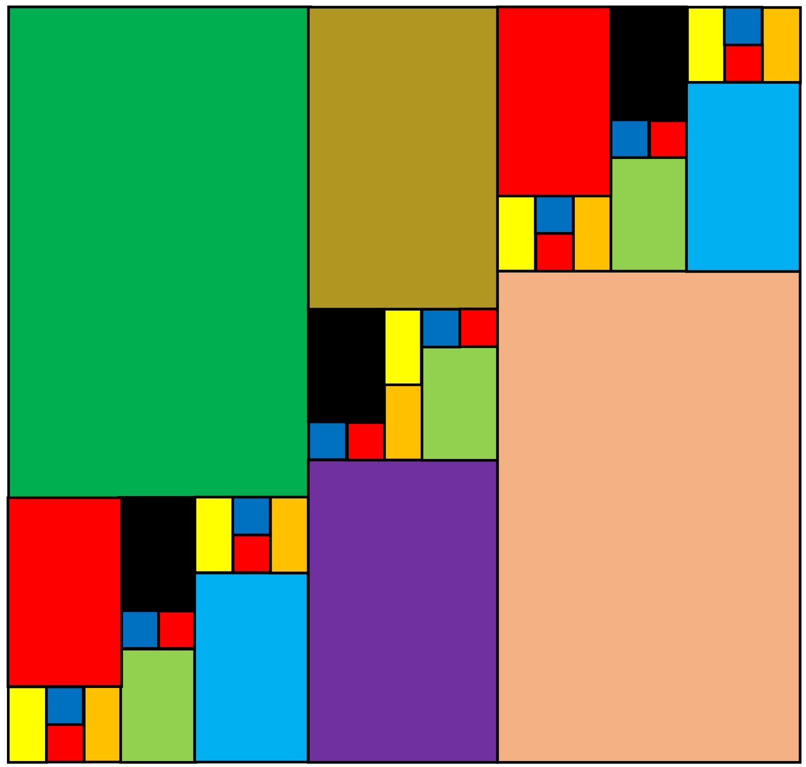
Zeckendorf’s Theorem

ゼッケンドルフの定理

どんな自然数も隣り合わない異なるフィボナッチ数の和で一意的に表すことができる。



Zeckendorf design



植物の世界へ

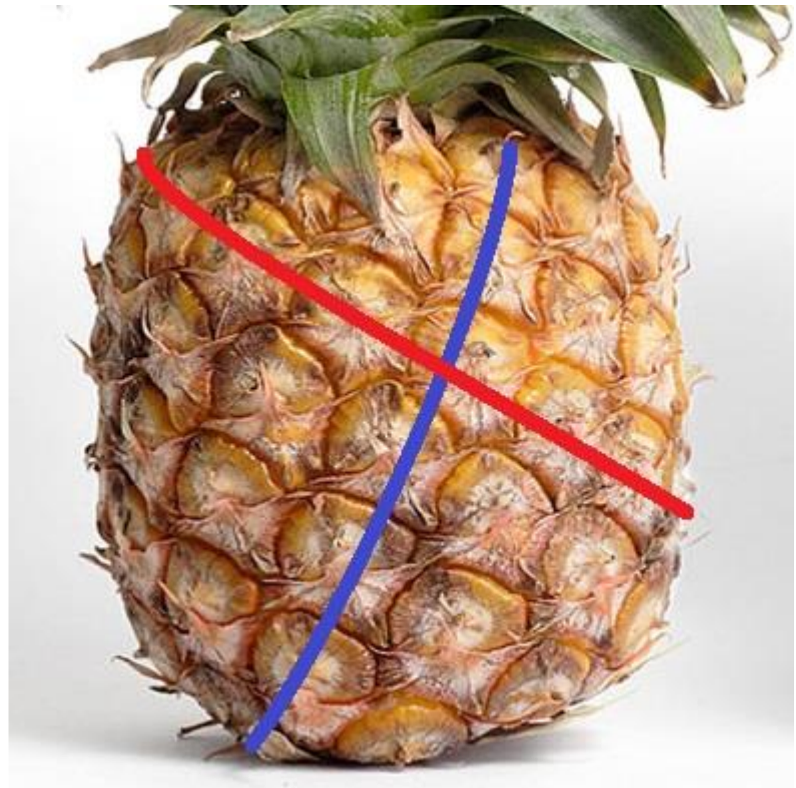
Fibonacci world

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

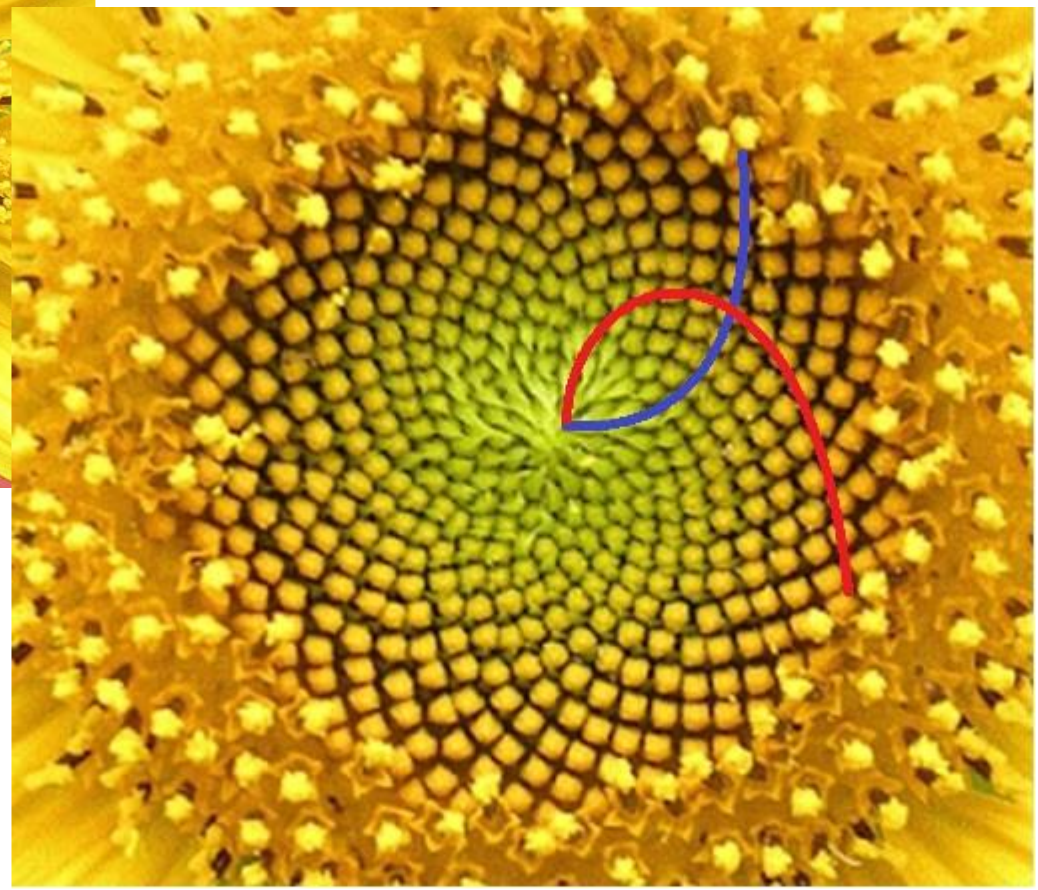
Fibonacci × Pineapple

赤螺旋 ： 8本

青螺旋 ：13本



Fibonacci × Soleil



赤螺旋　：21本

青螺旋　：34本

Fibonacci World

(21, 34)

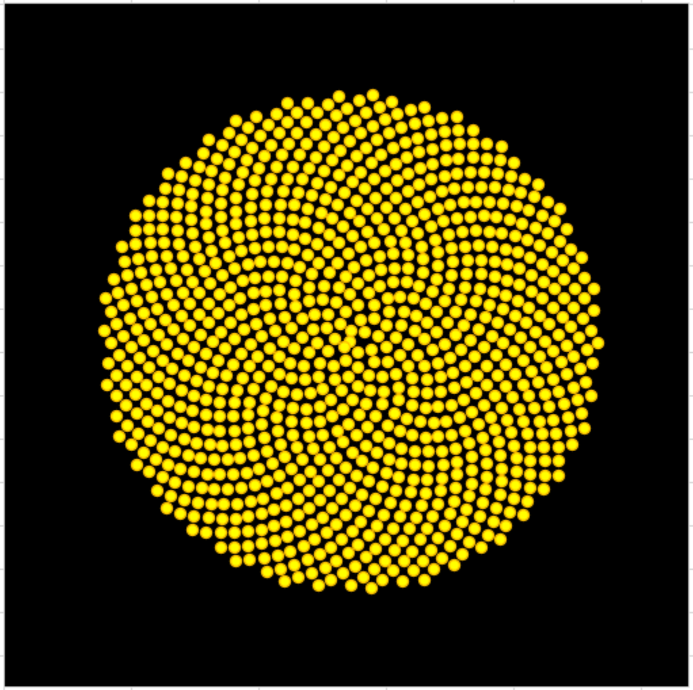
(8, 13)

どちらも隣り合うフィボナッチ数のペア

ひまわりの種の配置を再現

phi	1.618
N	100
fib_ratio	1.61803
p	0.5

n	theta	r	x	y
0	0	0	0	0
1	3.88322	1	-0.73737	-0.67549
2	7.76644	1.41421	0.12364	1.4088
3	11.6497	1.73205	1.05385	-1.37456
4	15.5329	2	-1.96943	0.34836
5	19.4161	2.23607	1.88669	1.20016
6	23.2993	2.44949	-0.6359	-2.36551
7	27.1826	2.64575	-1.21945	2.34797
8	31.0658	2.82843	2.6568	-0.97026
9	34.949	3	-2.77304	-1.14467
10	38.8322	3.16228	1.34032	2.86418
11	42.7154	3.31662	0.99261	-3.1646
12	46.5987	3.4641	-2.99718	1.73693
13	50.4819	3.60555	3.52145	0.77418
14	54.3651	3.74166	-2.15194	-3.06091
15	58.2483	3.87298	-0.49772	3.84087

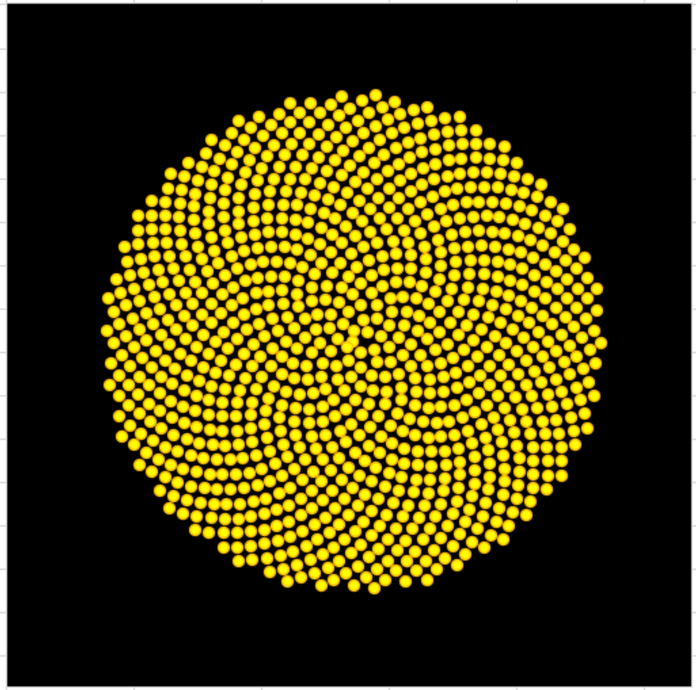


ひまわりの種の配置を再現

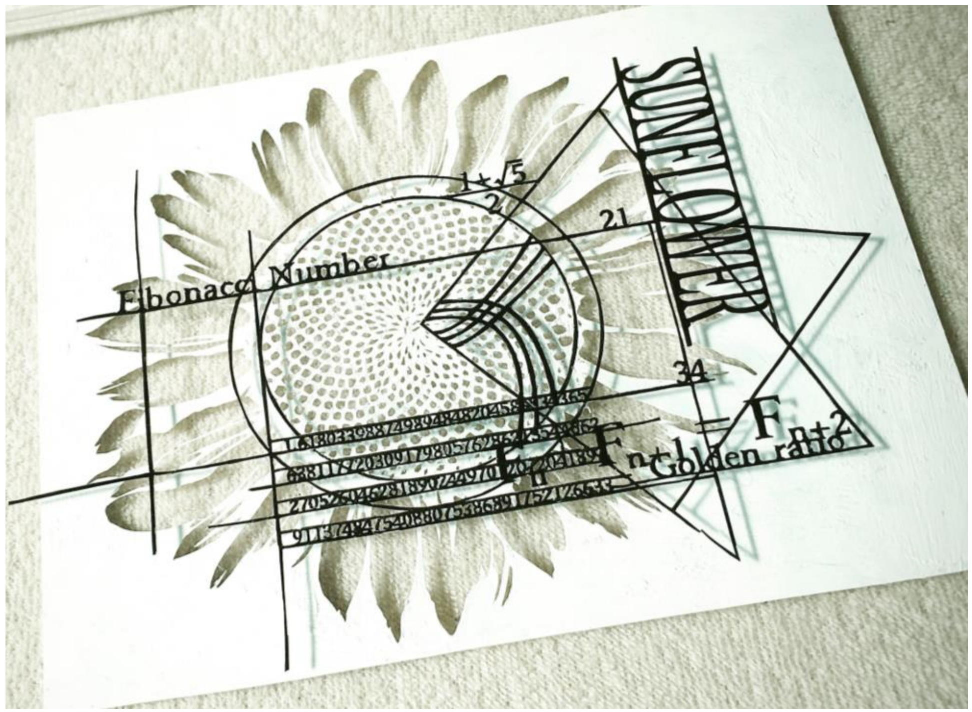
phi	1.618
N	100
fib_ratio	1.61803
p	0.5

N+1番目とN番目のフィボナッチ数の比 $\frac{f_{N+1}}{f_N}$

n	theta	r	x	y
0	0	0	0	0
1	3.88322	1	-0.73737	-0.67549
2	7.76644	1.41421	0.12364	1.4088
3	11.6497	1.73205	1.05385	-1.37456
4	15.5329	2	-1.96943	0.34836
5	19.4161	2.23607	1.88669	1.20016
6	23.2993	2.44949	-0.6359	-2.36551
7	27.1826	2.64575	-1.21945	2.34797
8	31.0658	2.82843	2.6568	-0.97026
9	34.949	3	-2.77304	-1.14467
10	38.8322	3.16228	1.34032	2.86418
11	42.7154	3.31662	0.99261	-3.1646
12	46.5987	3.4641	-2.99718	1.73693
13	50.4819	3.60555	3.52145	0.77418
14	54.3651	3.74166	-2.15194	-3.06091
15	58.2483	3.87298	-0.49772	3.84087



切り絵作品

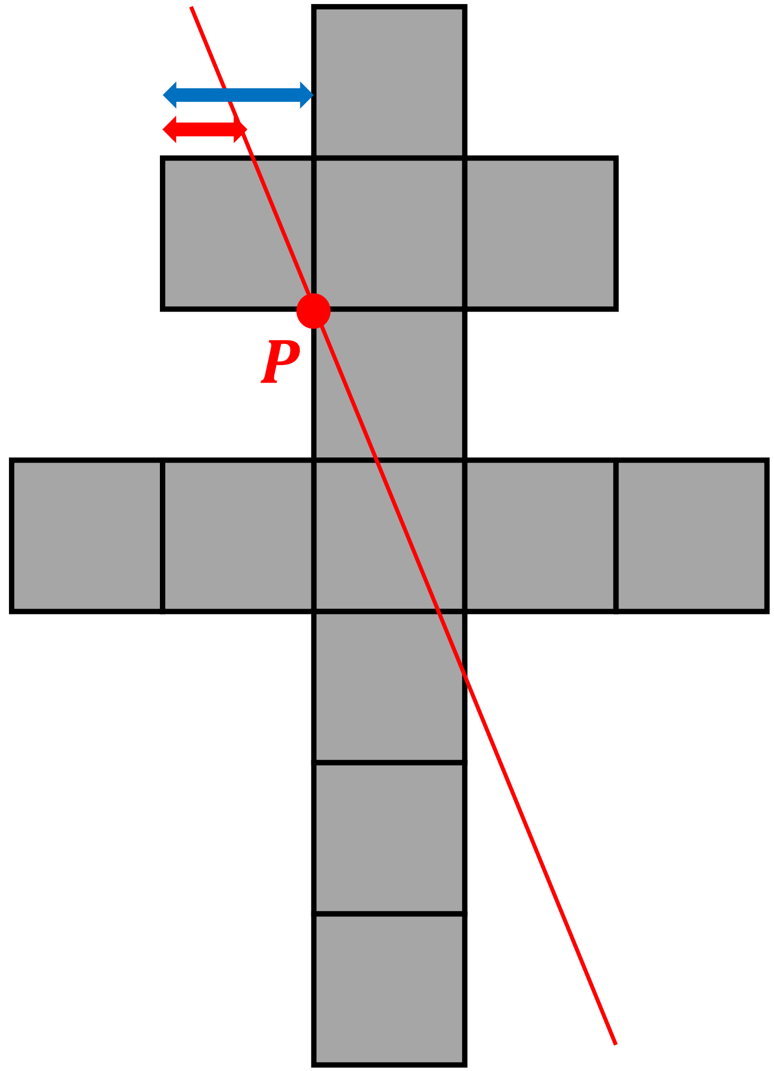


Sunflower (2018)

Question (Cross of Lorraine)

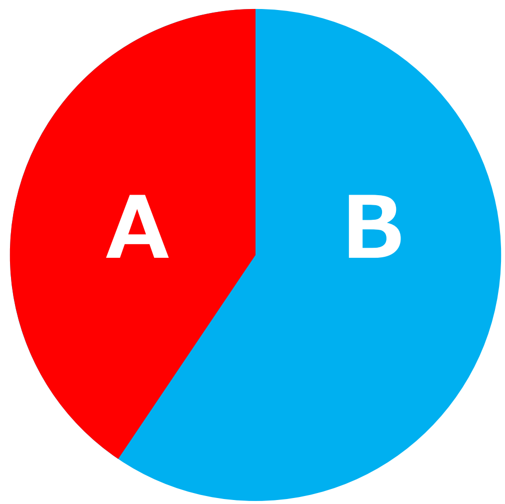
ロレーヌの十字架

13個の正方形で作られる十字架を、点 P を通る直線で面積を2等分したい。切り口の位置をどのように設定にすればいいか。

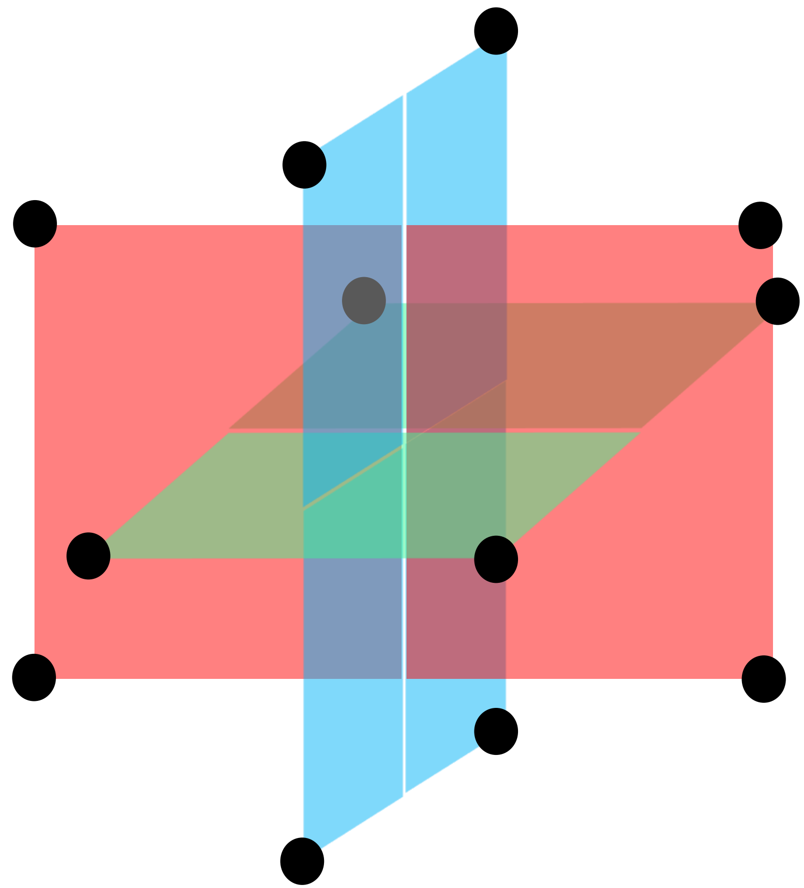


Question (Unfair Game)

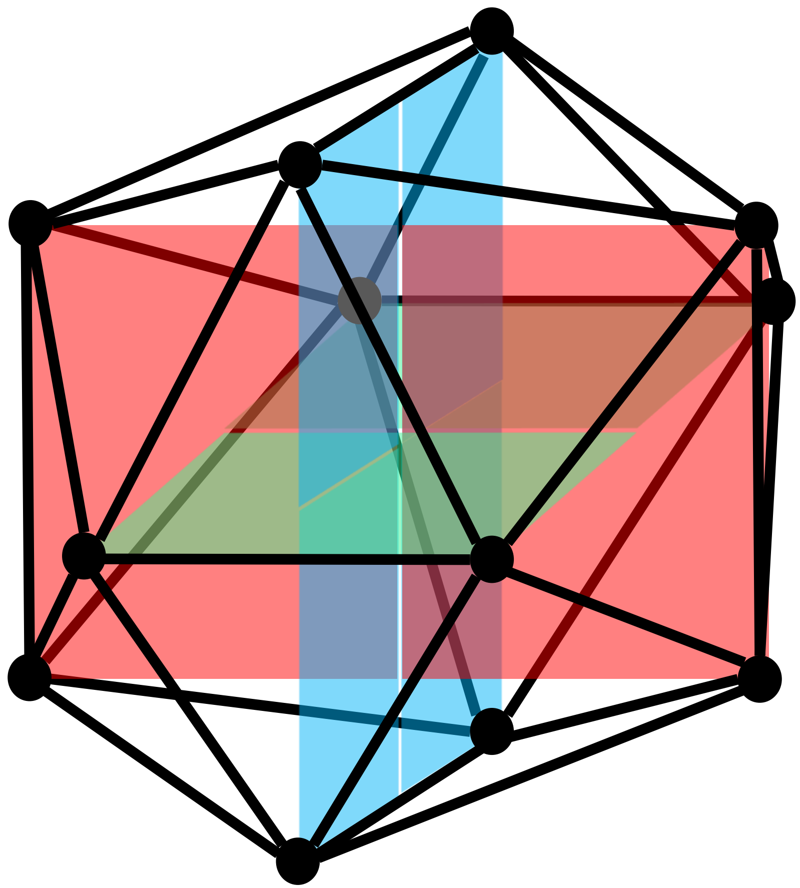
AとBが的当てゲームを行う。円形の的を2つのエリアに分けて、Aは『エリアA』、Bは残りの『エリアB』に当てることで成功とし、先に成功した方が勝利とする。先にAから実施する場合、公平なゲームにするにはエリアをどのような比率で分ければいいか？



Regular icosahedron

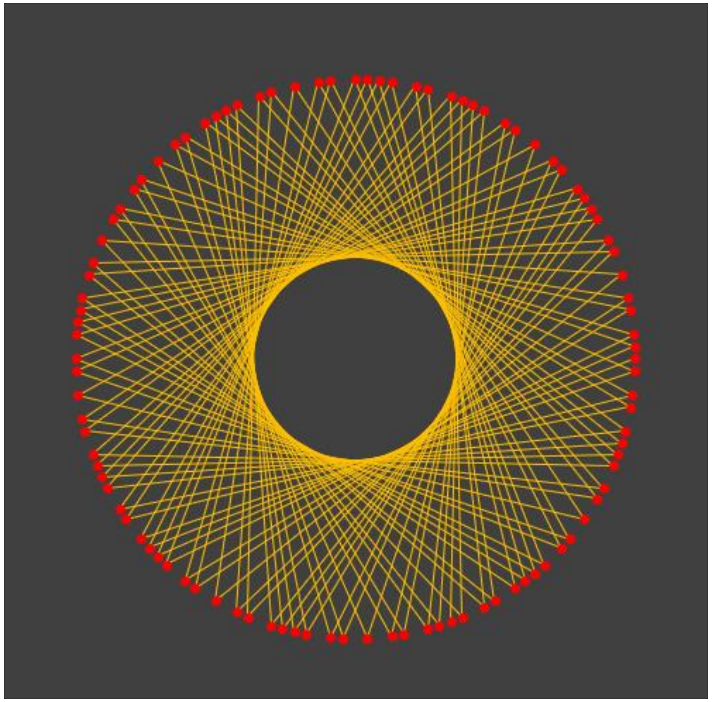


Regular icosahedron



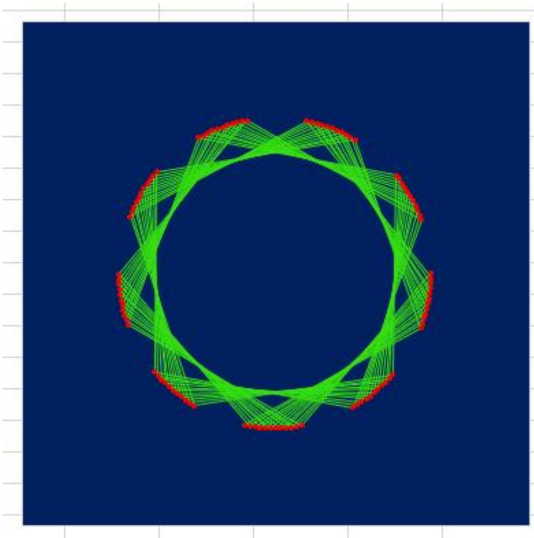
ストリングアートと黄金比

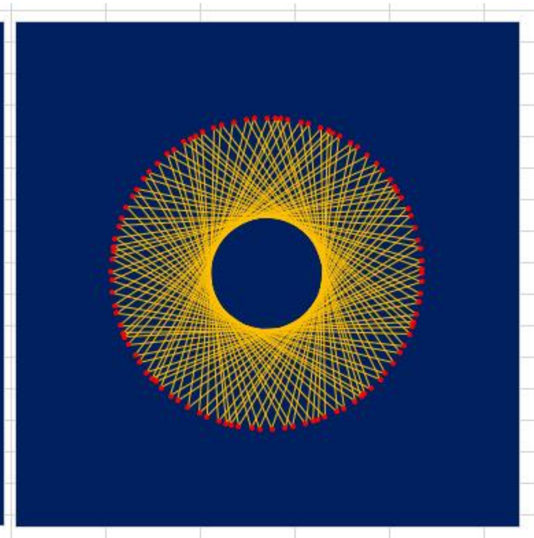
Excelを用いた“黄金角ストリングアート”。



黄金比を用いた間隔で頂点を設置するので、実際の釘を使ったストリングアートではほぼ不可能な模様が作成可能。

植物の葉の広がりシミュレーション





非黄金角	黄金角
葉の分布が偏ってしまう	散らばる 光合成の効率がいい