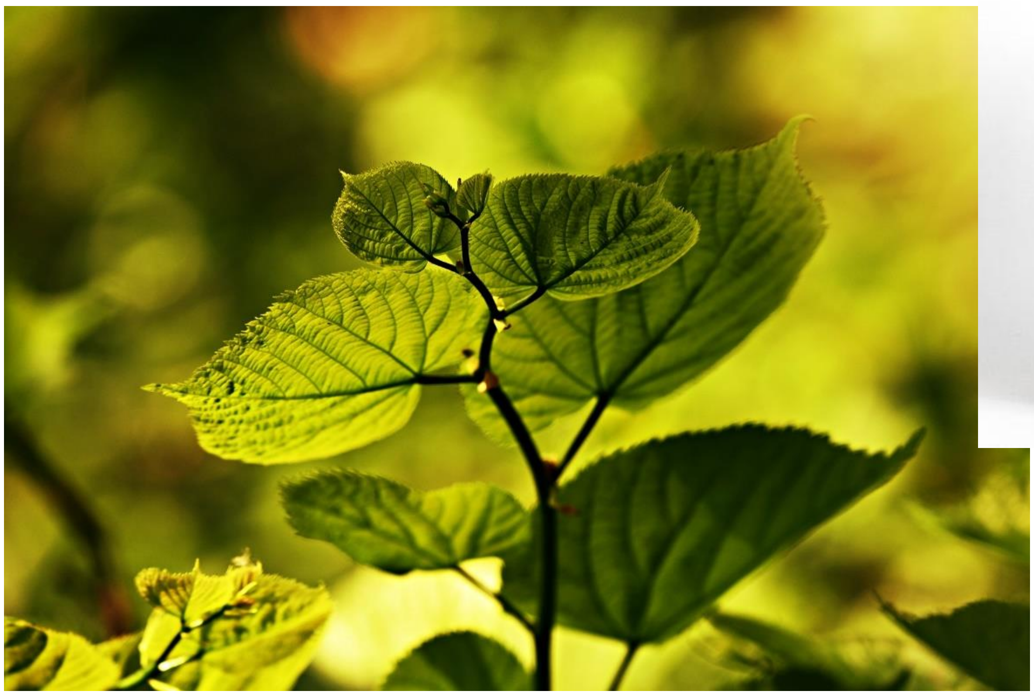
デザイン数学セミナー

― 黄金比の数理編―

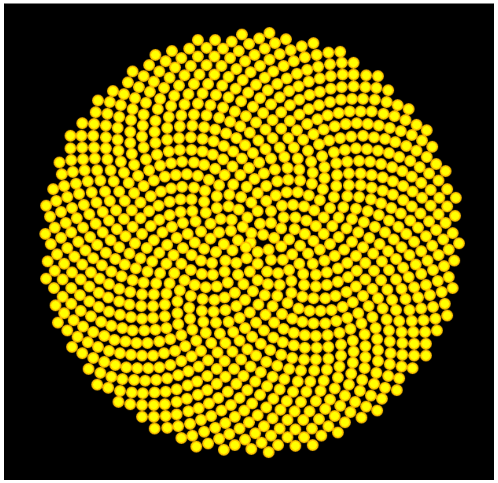
第2回

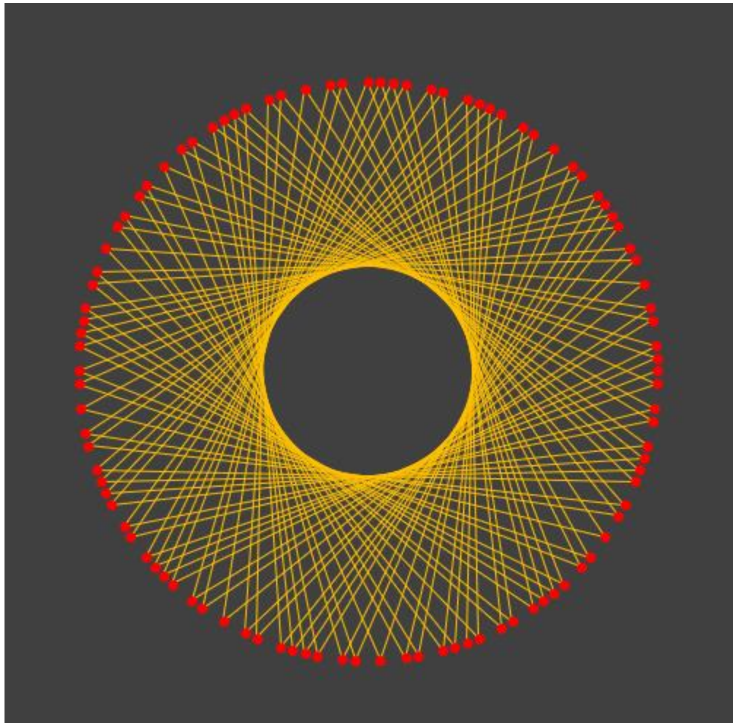
植物の世界と黄金比

黄金比のさらなる理解へ



Excelを使ったデザイン





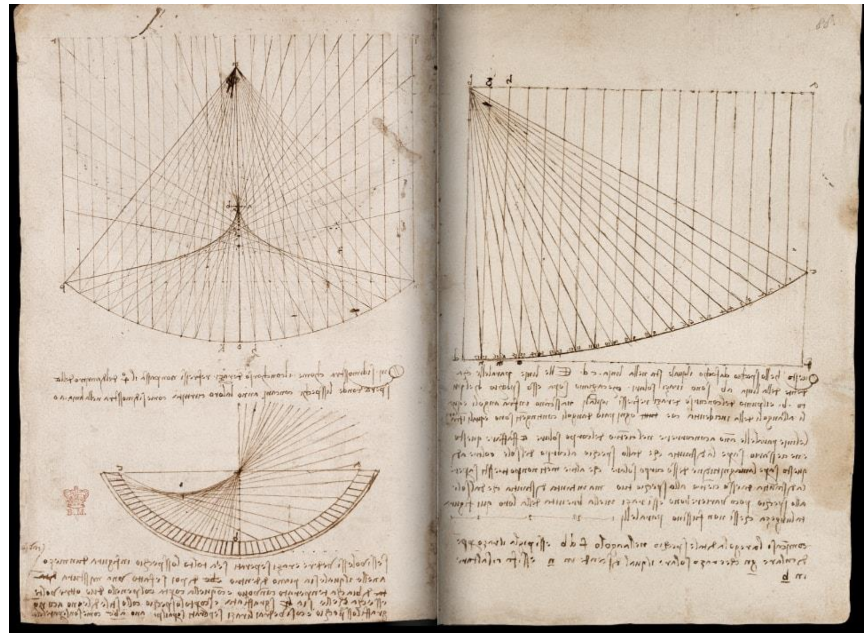
トピック

- 黄金比についておさらい
- さまざまなところで現れる黄金比
- 植物と黄金比
- Excelを使ったデザインを体験

黄金比（おさらい）

レオナルド・ダ・ヴィンチ

レオナルド･ダ･ヴィンチ
1452-1519

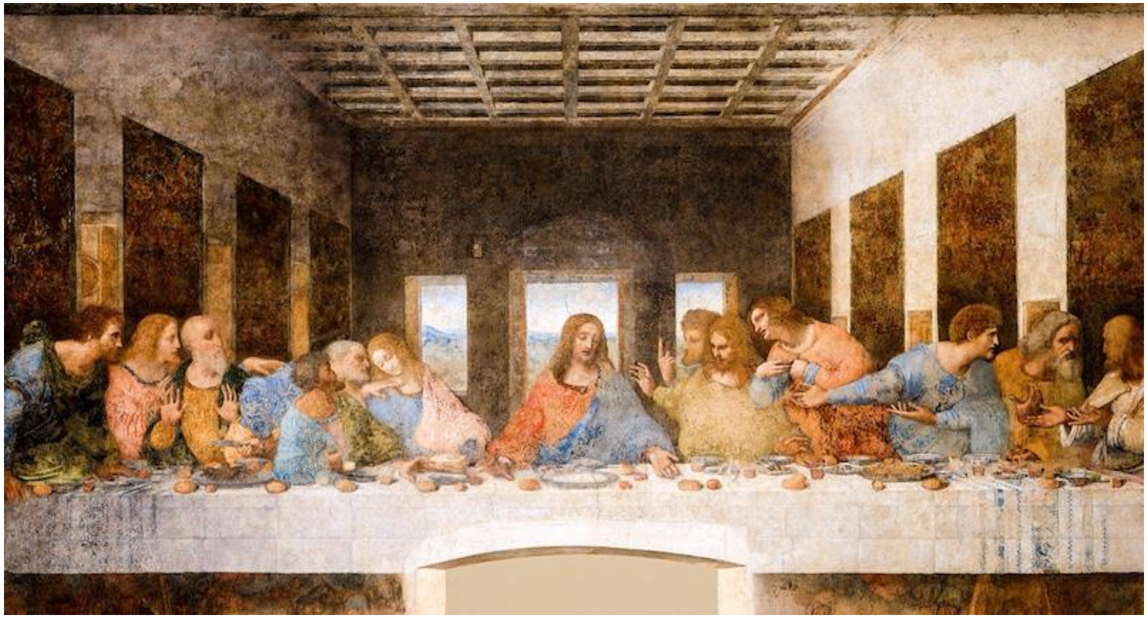


文字は数字以外鏡文字で記している

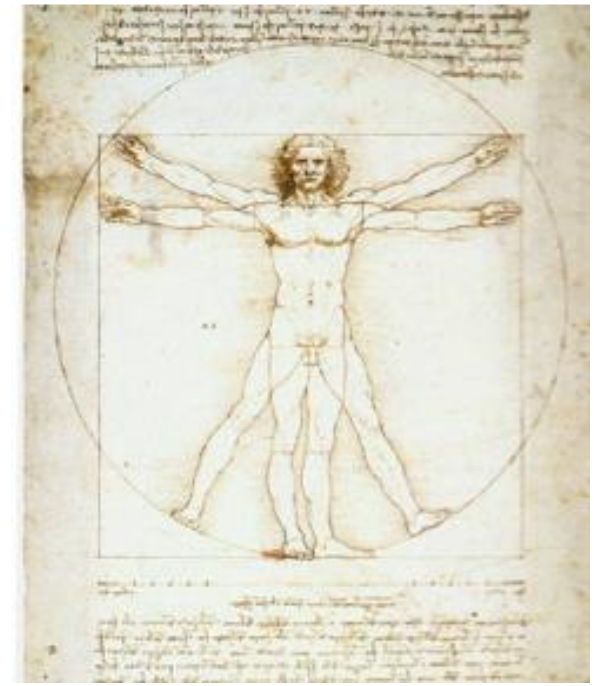
“万能の天才”

音楽、建築学、数学、幾何学、解剖学、動植物学、天文学、気象学、光学、物理学…

レオナルド・ダ・ヴィンチ



最後の晩餐



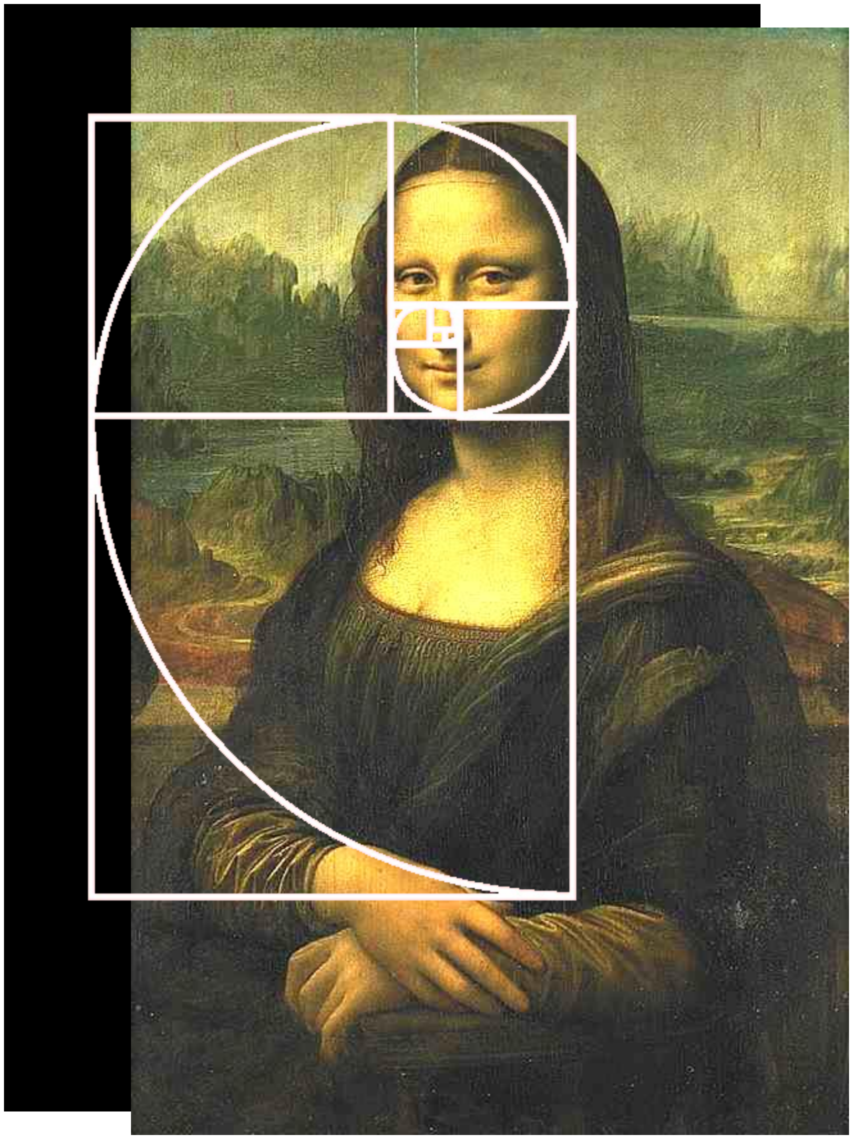
ウィトルウィウス的人体図

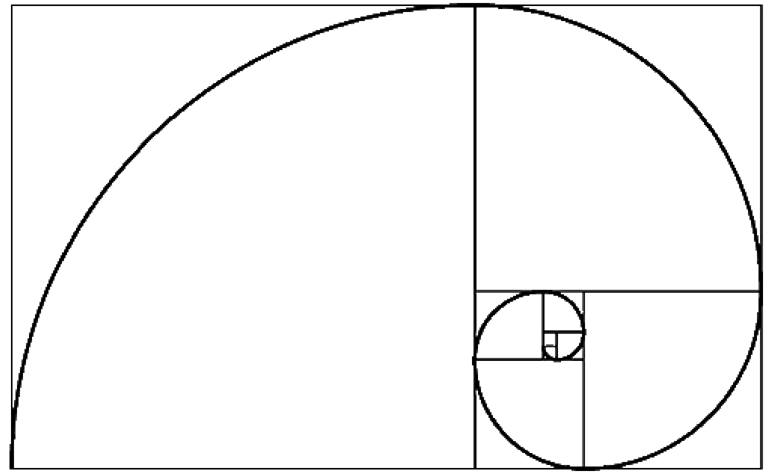
遠近法や作図的手法が用いられる

「神聖比」と呼ばれる比率を重要視した。

数学を積極的に芸術に取り入れたのは間違いない。

Golden ratio

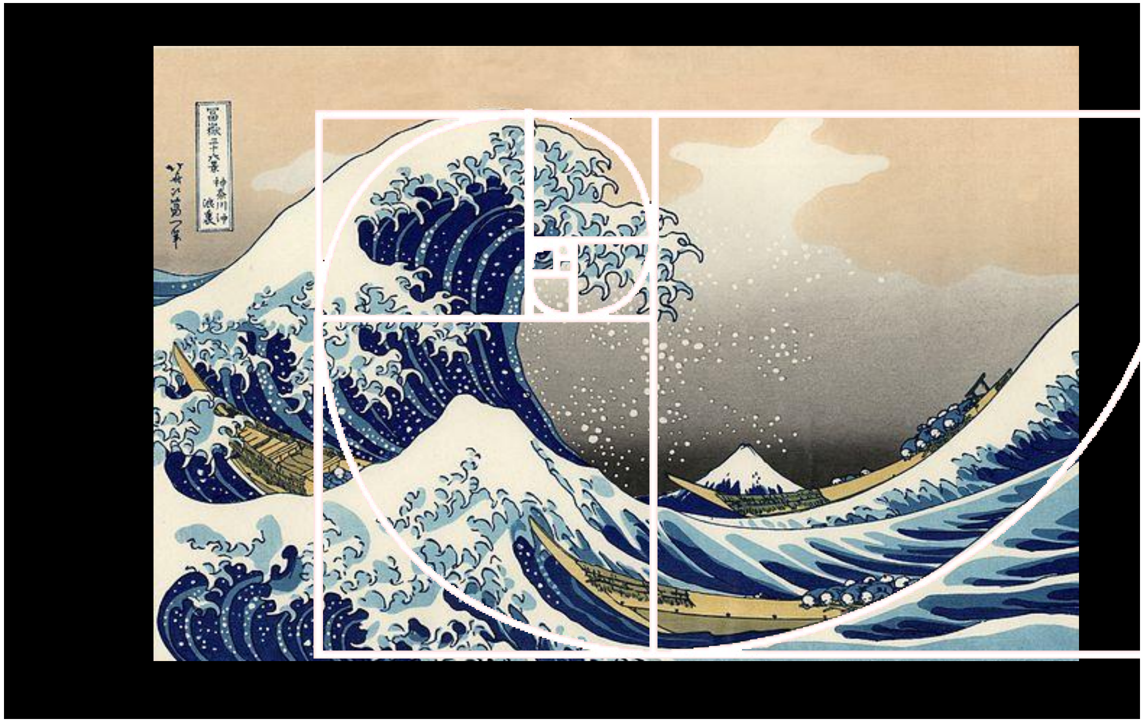


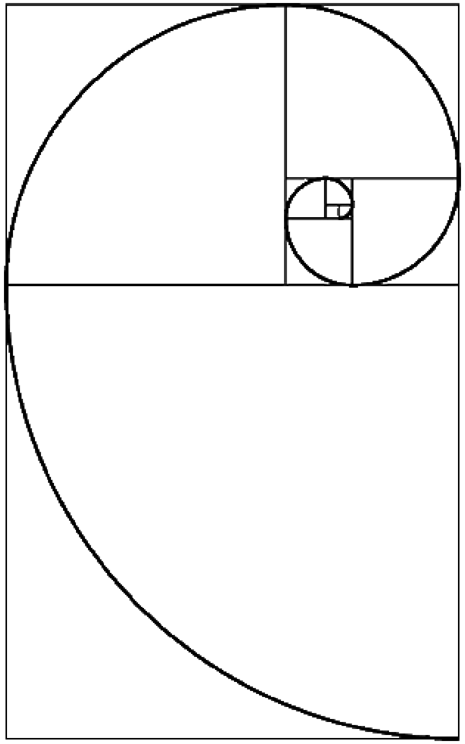


Mona Lisa

Da Vinci

Golden ratio

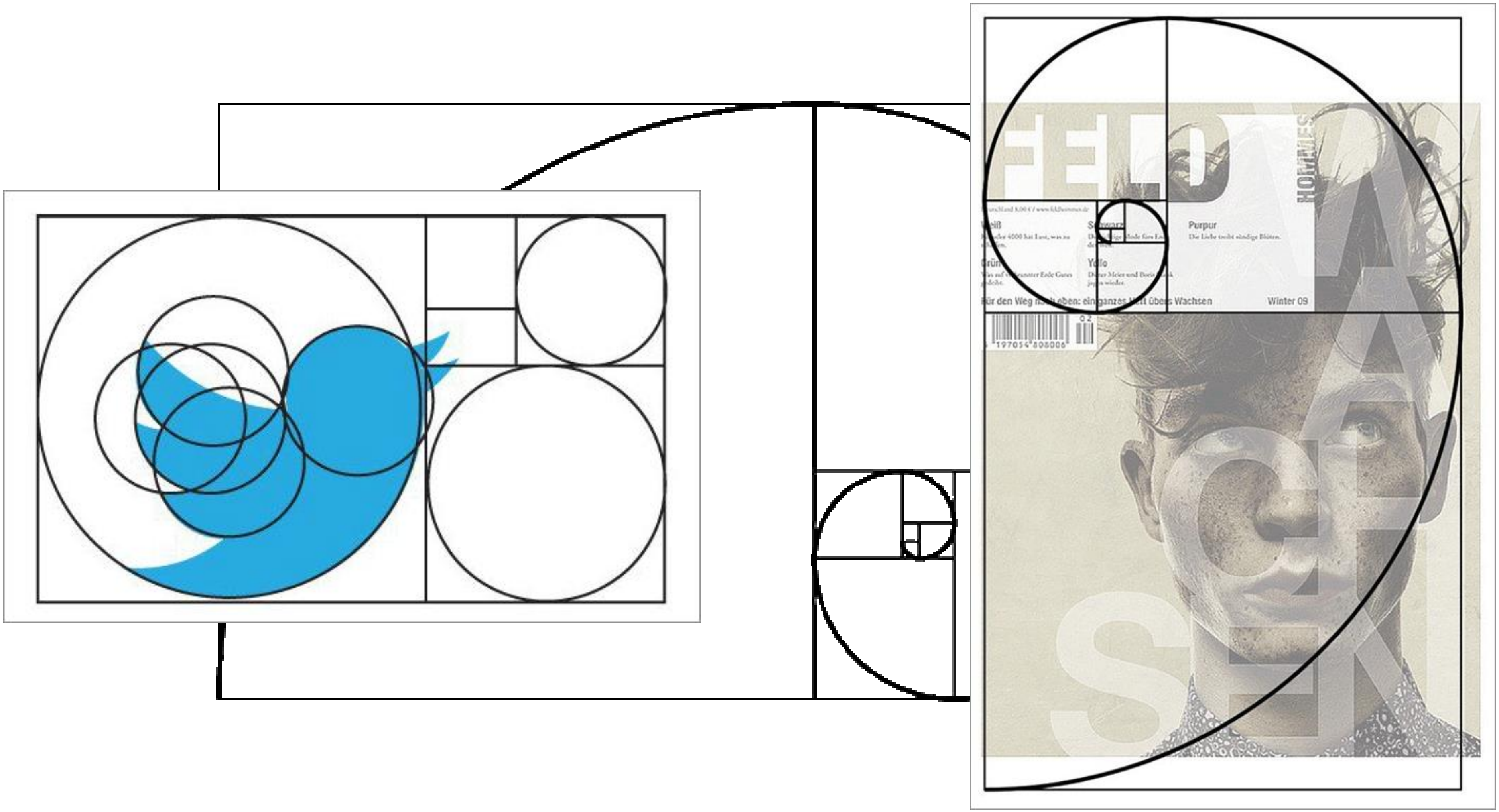




富嶽三十六景

Hokusai

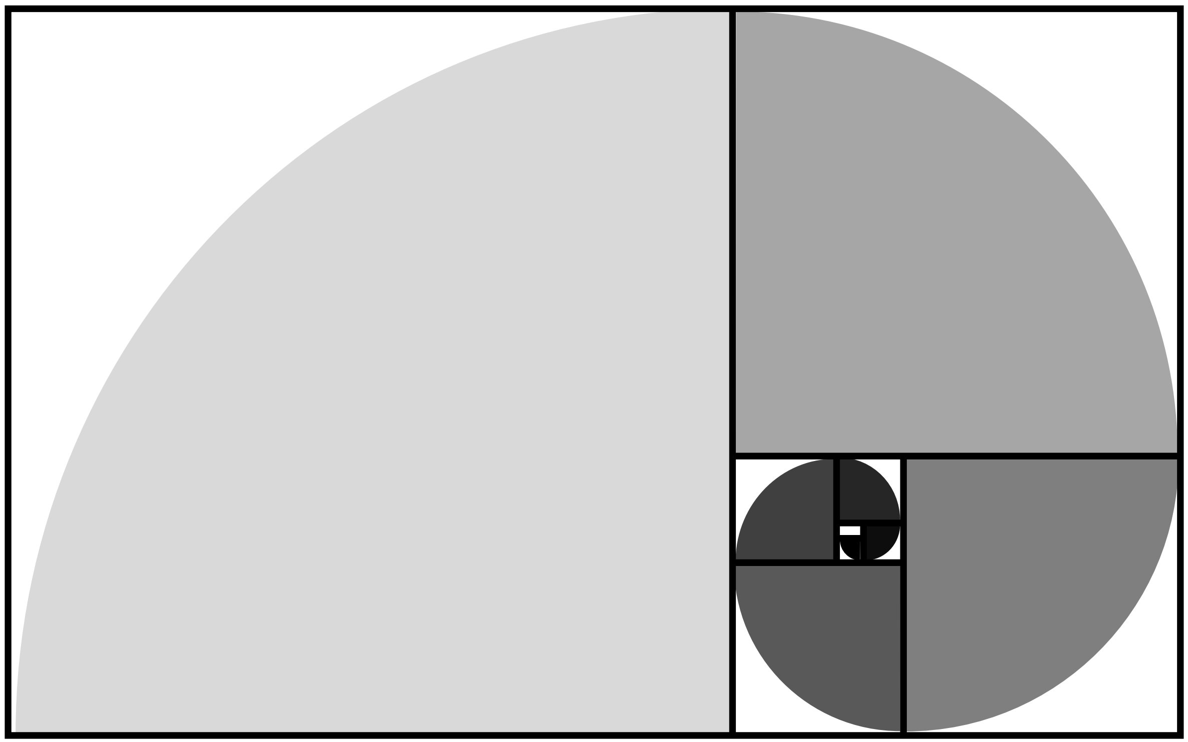
Golden ratio



Golden ratio

$$\mathbf{1.618}\cdots = \boldsymbol{\varphi}$$

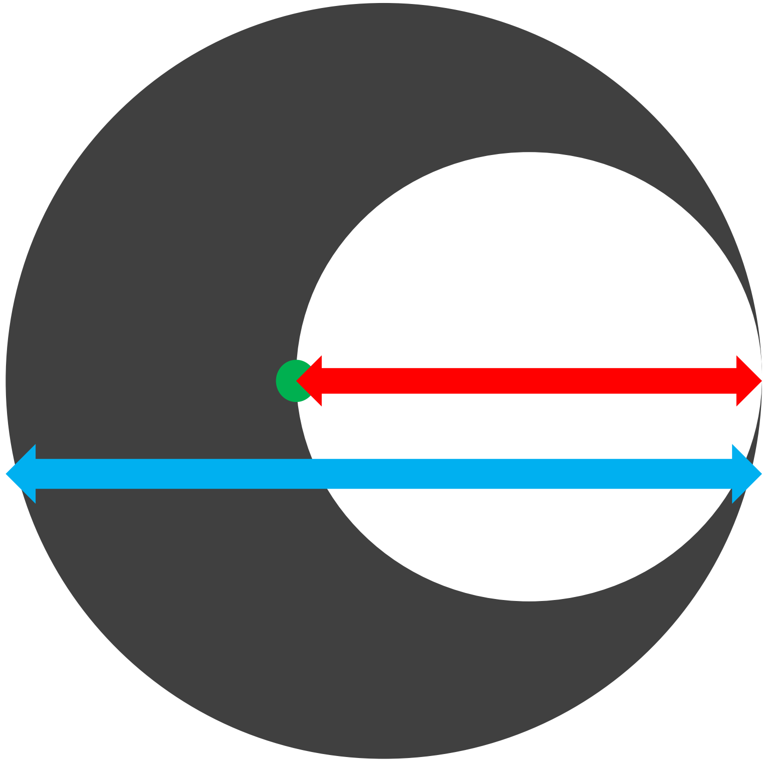
Golden ratio Theater



さまざまなところで黄金比

Question (Center of Crescent)

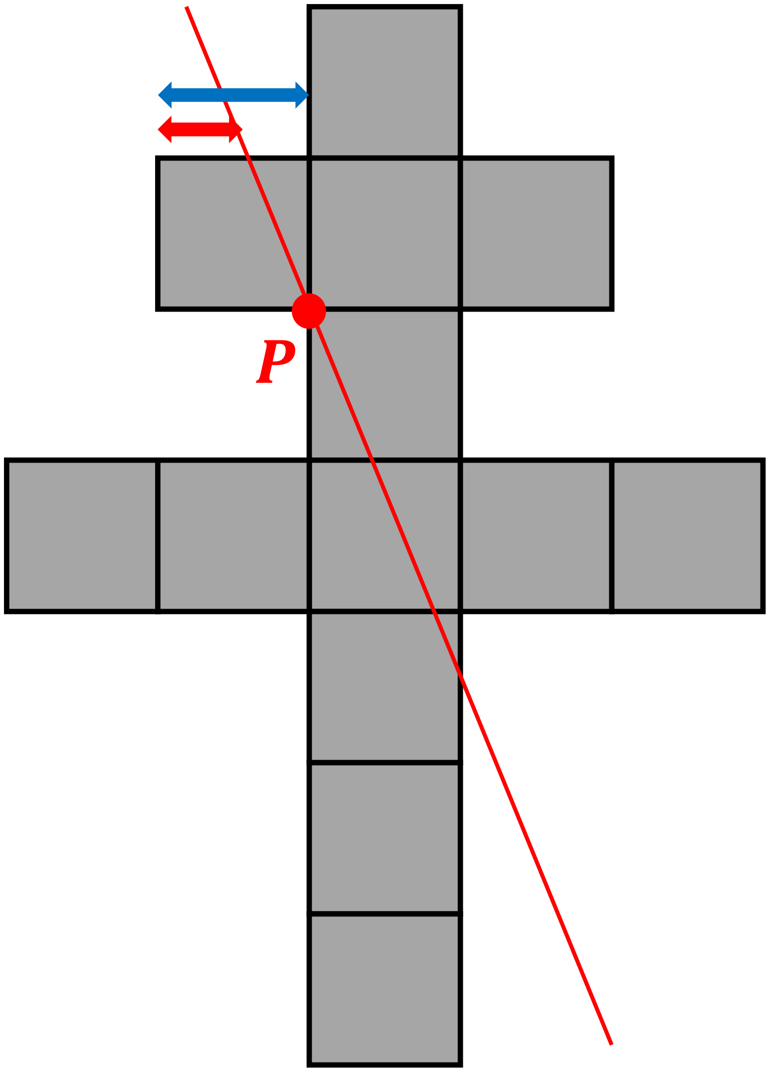
大きな円から内接する小さな円をくり出すことで三日月形を作る。この図形の重心が境界線上にある場合、2つの円の比率をどのようになるか。



Question (Cross of Lorraine)

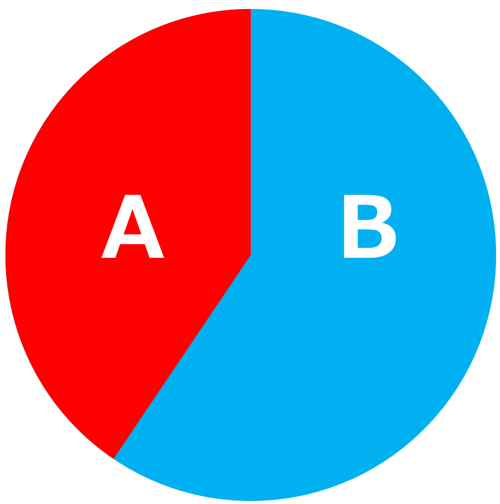
ロレーヌの十字架

13個の正方形で作られる十字架を、点 P を通る直線で面積を2等分したい。切り口の位置をどのように設定にすればいいか。

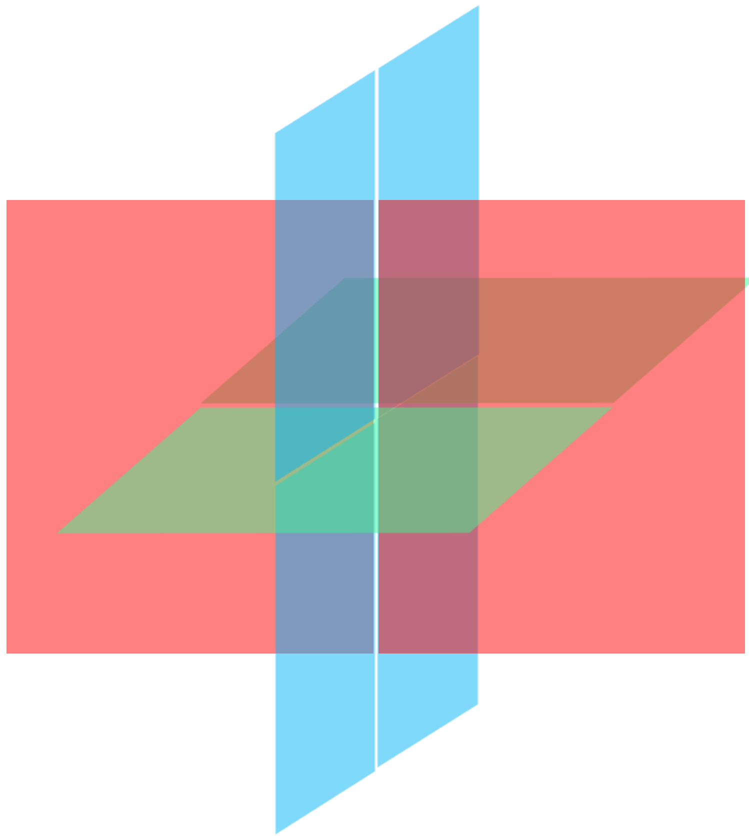


Question (Unfair Game)

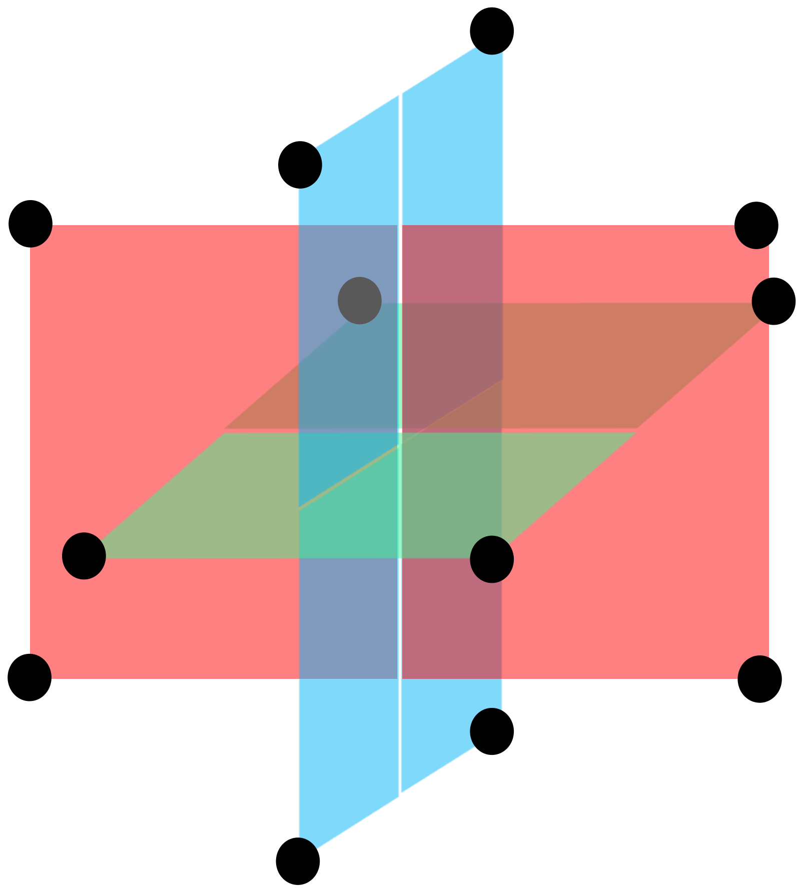
AとBが的当てゲームを行う。円形の的を2つのエリアに分けて、Aは『エリアA』、Bは残りの『エリアB』に当てることで成功とし、先に成功した方が勝利とする。先にAから実施する場合、公平なゲームにするにはエリアをどのような比率で分ければいいか？



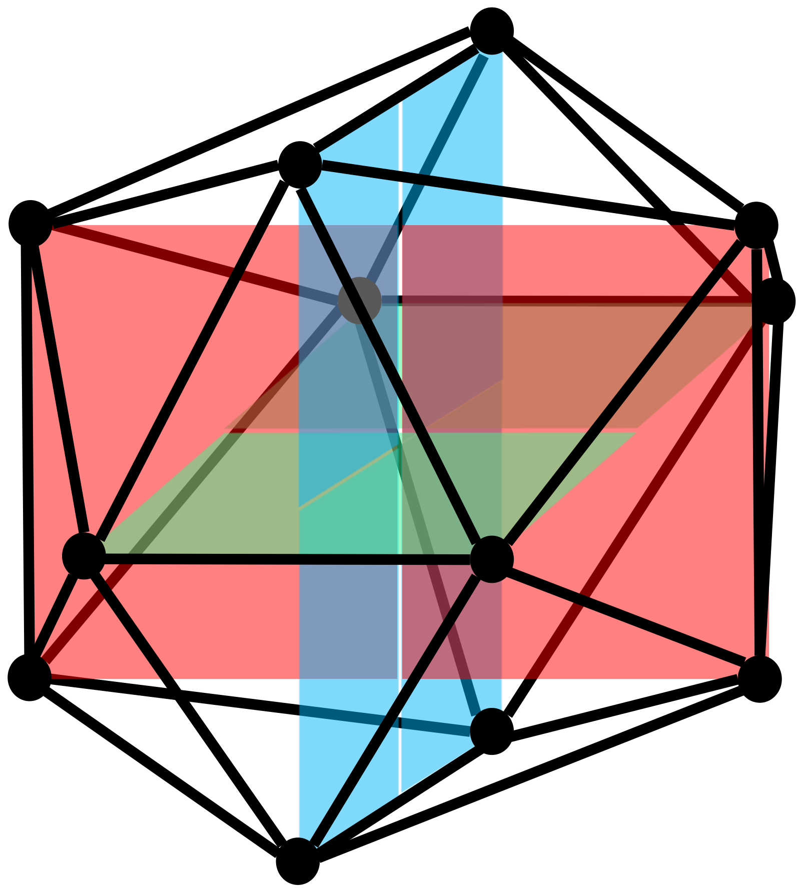
Regular icosahedron



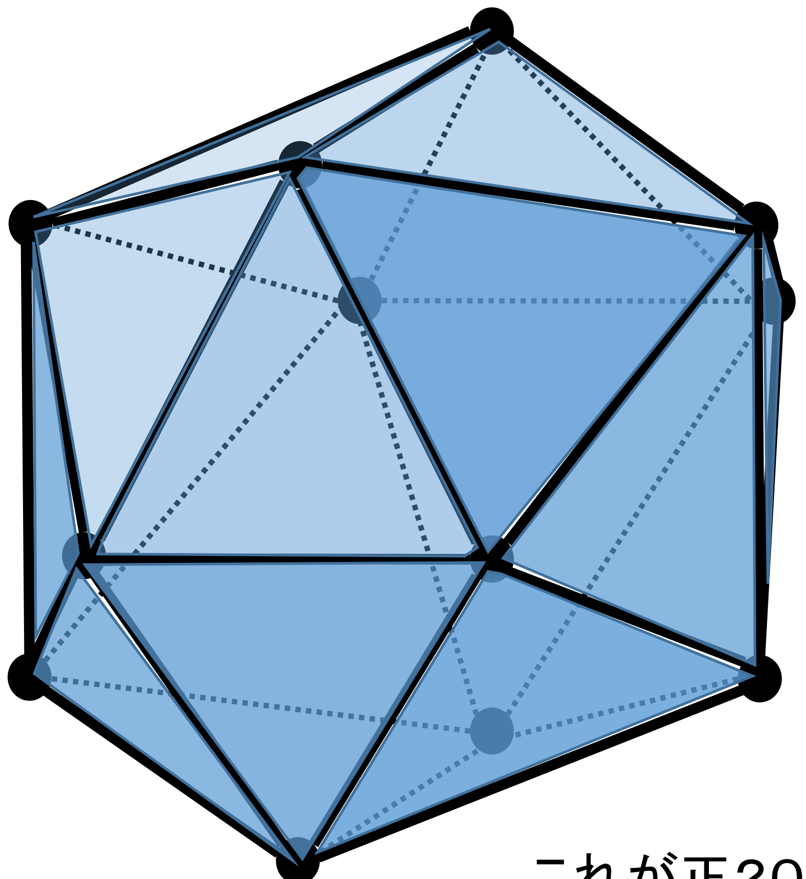
Regular icosahedron



Regular icosahedron



Regular icosahedron



A.黄金比

これが正20面体になるには長方形の縦
と横の比をどれぐらいにすればいいか？

フィボナッチ数

Fibonacci Numbers

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
数	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Fibonacci Numbers

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
数	1	1	**2**	3	5	8	13	21	34

Fibonacci Numbers

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
数	1	1	2	**3**	5	8	13	21	34

Fibonacci Numbers

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
数	1	1	2	3	**5**	8	13	21	34

Fibonacci Numbers

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
数	1	1	2	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	**8**	13	21	34

Fibonacci Numbers

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
数	1	1	2	3	5	8	**13**	21	34

Fibonacci Numbers

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
数	1	1	2	3	5	8	13	**21**	34

Fibonacci Numbers

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
数	1	1	2	3	5	8	13	21	**34**

フィボナッチ数

Fibonacci Numbers

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
数	1	1	2	3	5	8	13	21	34

フィボナッチ数

現在の情報 ⟶ $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

1つ前の情報　2つ前の情報

隣り合うフィボナッチ数の比を計算してみる。

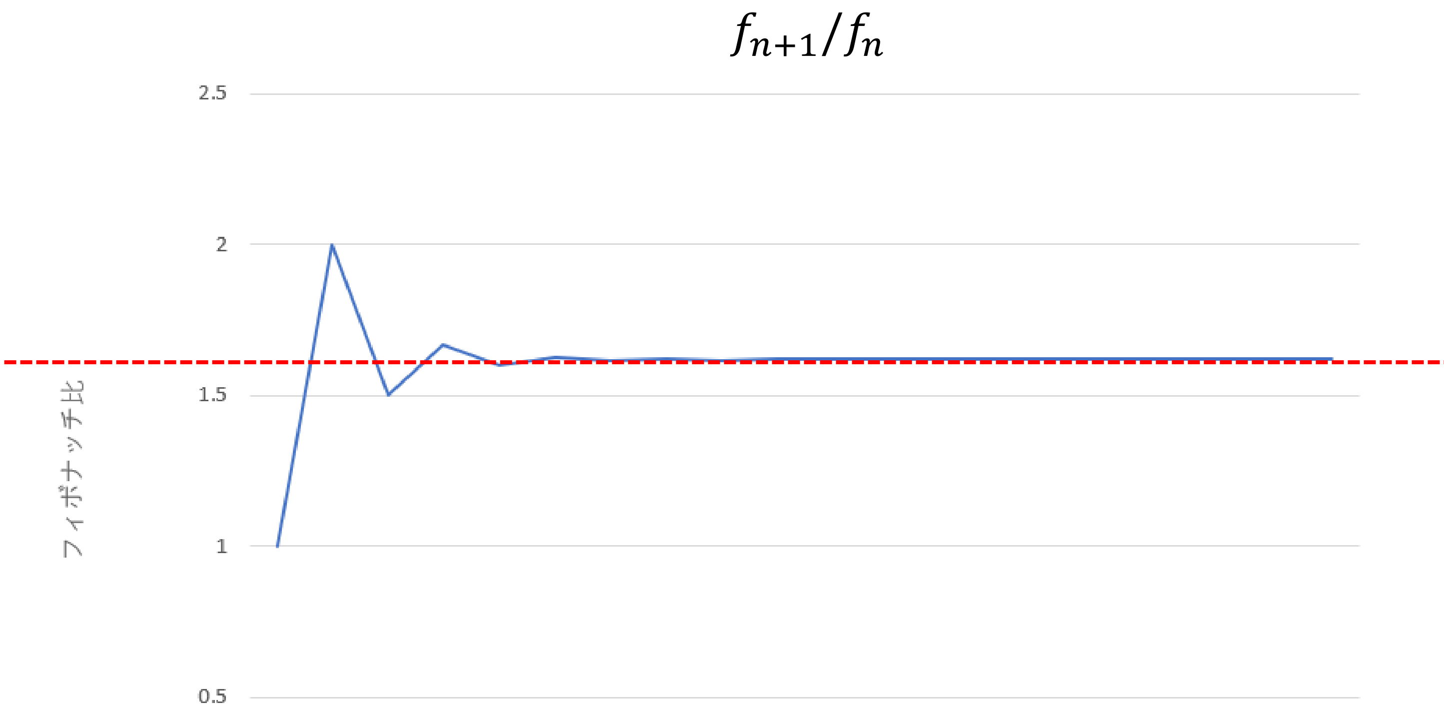
Fibonacci Numbers

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
数	1	1	2	3	5	8	13	21	34

隣り合うフィボナッチ数の比

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{f_{n+1}}{f_n}$	1/1	2/1	3/2	5/3	8/5	13/8	21/13	34/21	55/34
小数									

Fibonacci Numbers



1.61803⋯

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

黄金比

隣り合うフィボナッチ数の比は黄金比に近づく。

演習問題１（フィボナッチ数）

演習問題１

（１）フィボナッチ数{F_n}を作成してみましょう。

（２）フィボナッチ数の比を表にまとめ、折れ線グラフを作成しましょう。

n	フィボナッチ数 F_n	比　F_{n+1}/F_n
1	1	
2	1	
3		
4		
5		
6		
7		
8		

=C11+C12

コピー

演習問題１（フィボナッチ数）

演習問題１

（１）フィボナッチ数{F_n}を作成してみましょう。

（２）フィボナッチ数の比を表にまとめ、折れ線グラフを作成しましょう。

n	フィボナッチ数 F_n	比　F_{n+1}/F_n
1	1	
2	1	
3	2	
4	3	
5	5	
6	8	
7	13	
8	21	

=C12/C11

コピー

演習問題２（フィボナッチ数生成）

演習問題２

（1）黄金比 φ を数値で求めてみましょう。

（2）適当な番号のフィボナッチ数を出力する「**フィボナッチ・マシーン**」を体感しましょう。

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

黄金比	

=(1+SQRT(5))/2

ド・モアブ=ビネの公式

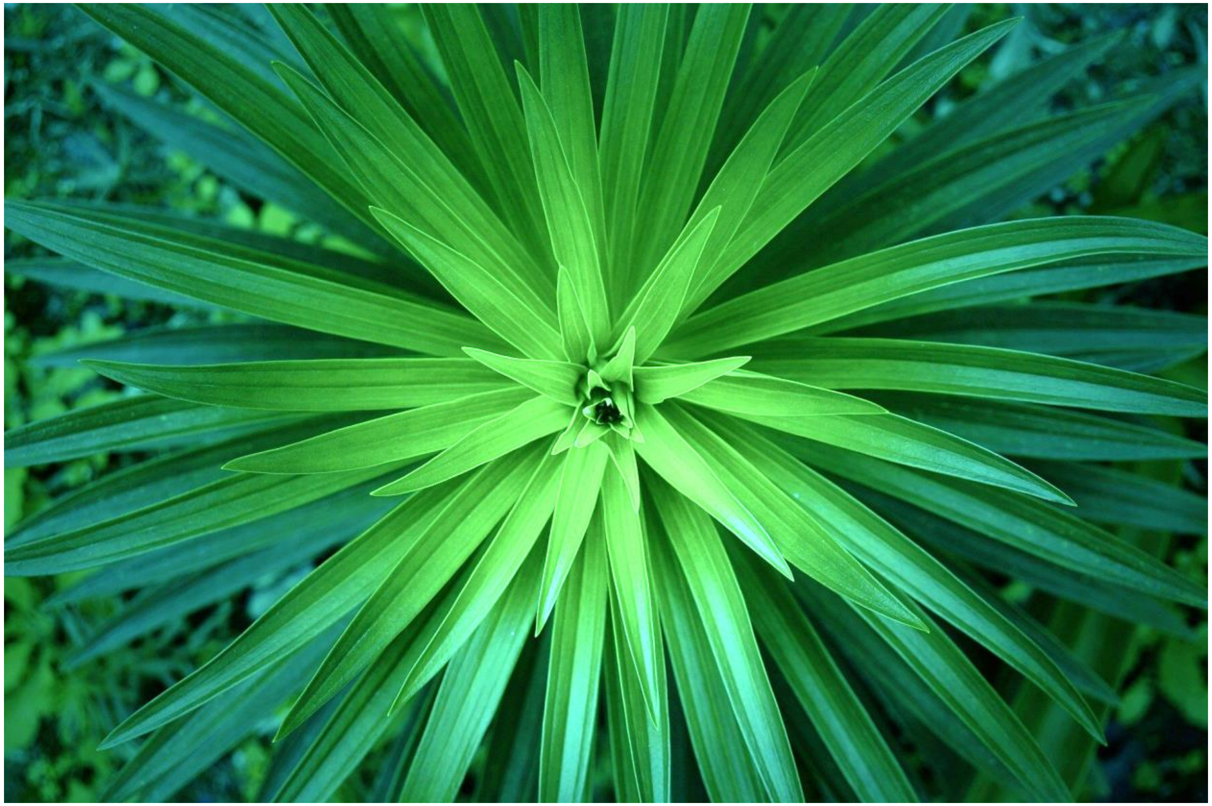
$$F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

黄金比	1.618033989
n	1
F_n	1

←数字を変えてみましょう。

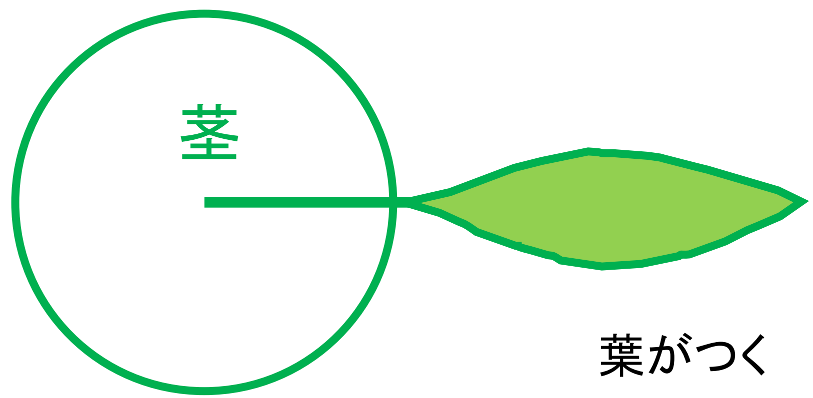
植物と黄金角度

植物と黄金比



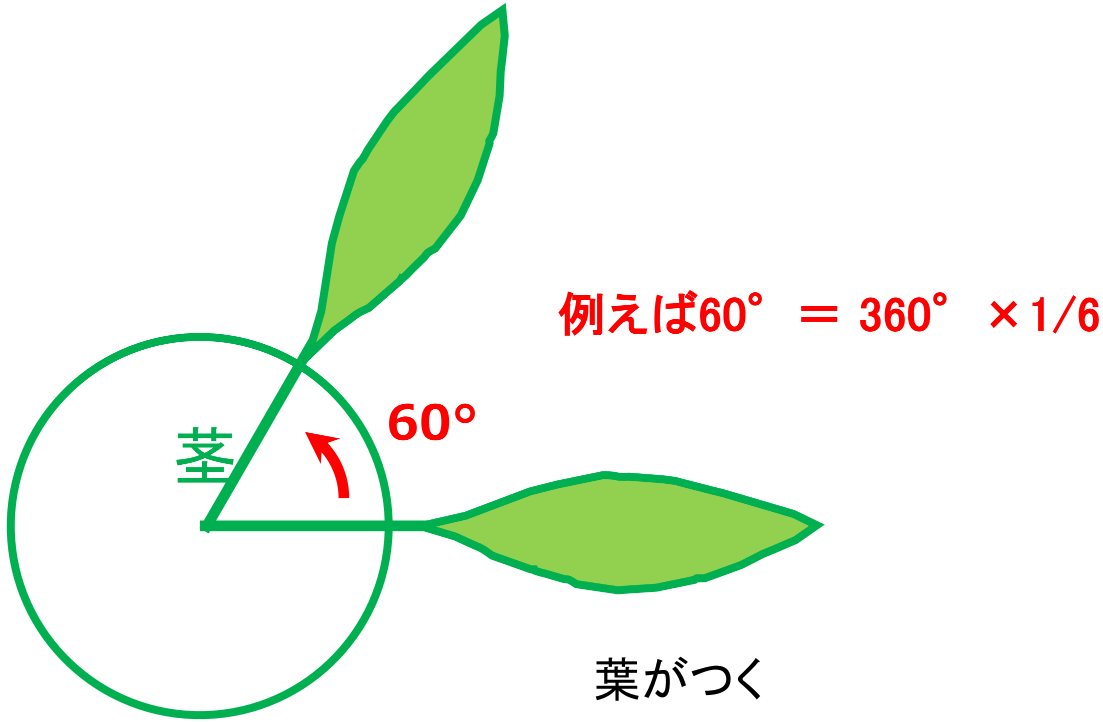
葉のつき方にはどのような規則があるか

植物と黄金比

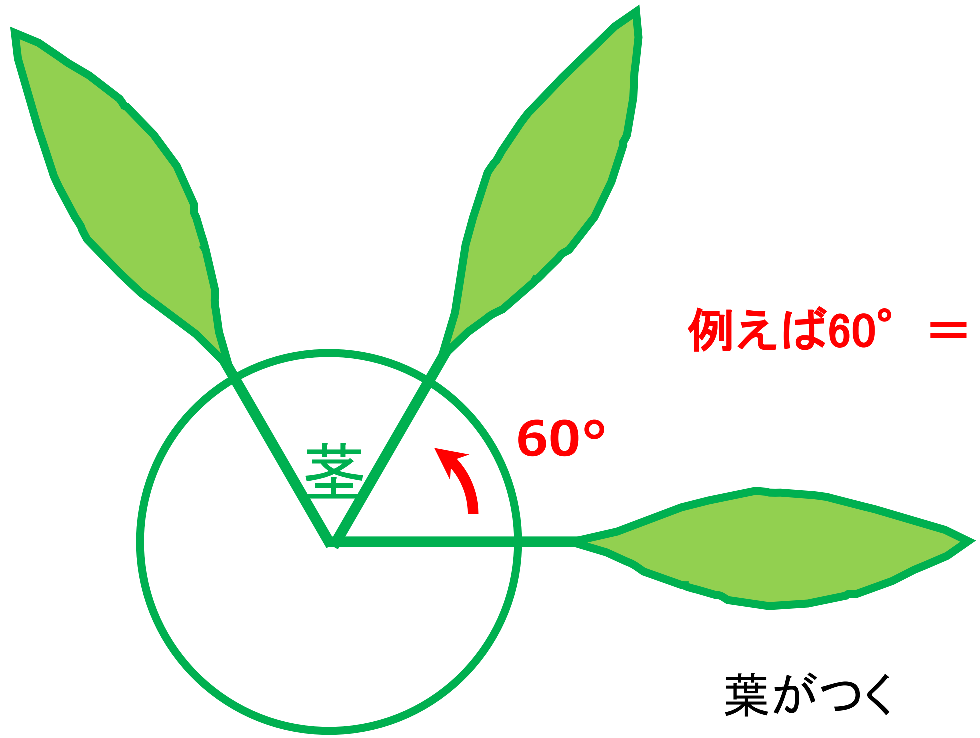


以降、どんな規則で生えるか？

植物と黄金比



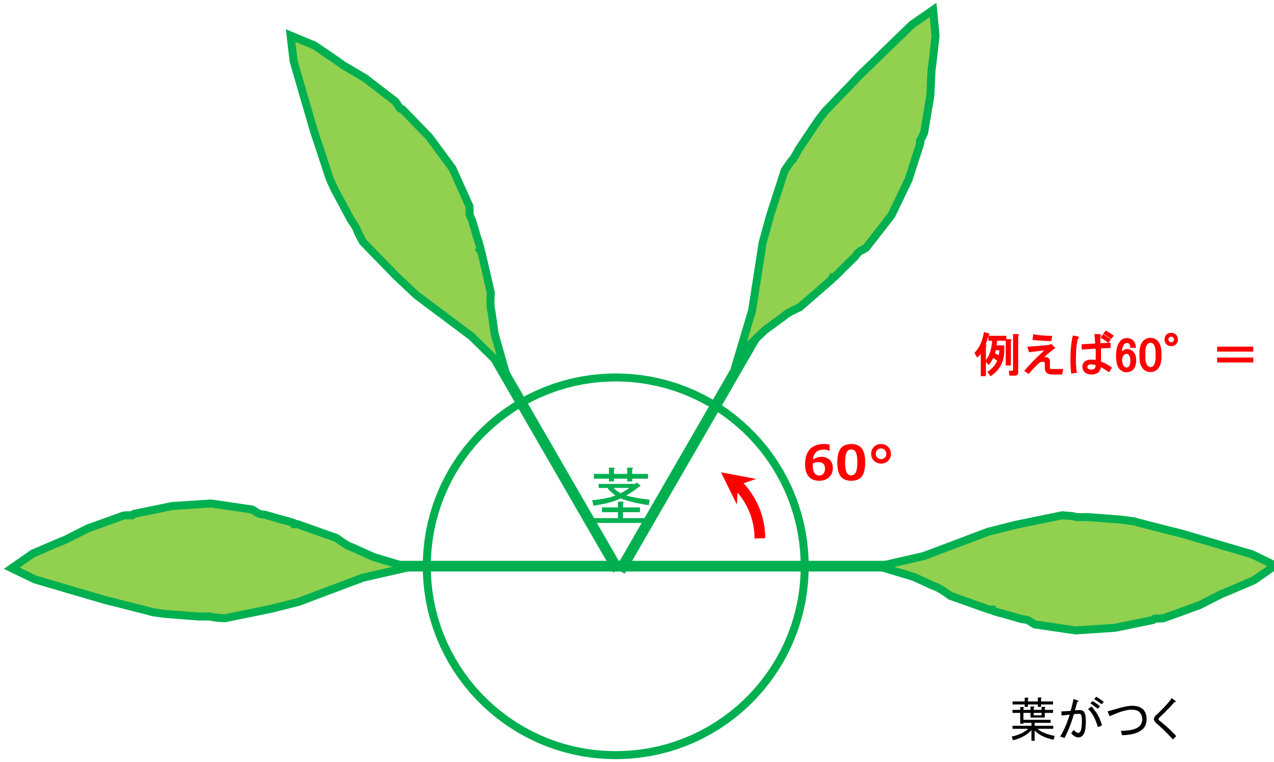
植物と黄金比



例えば60° ＝ 360° ×1/6

葉がつく

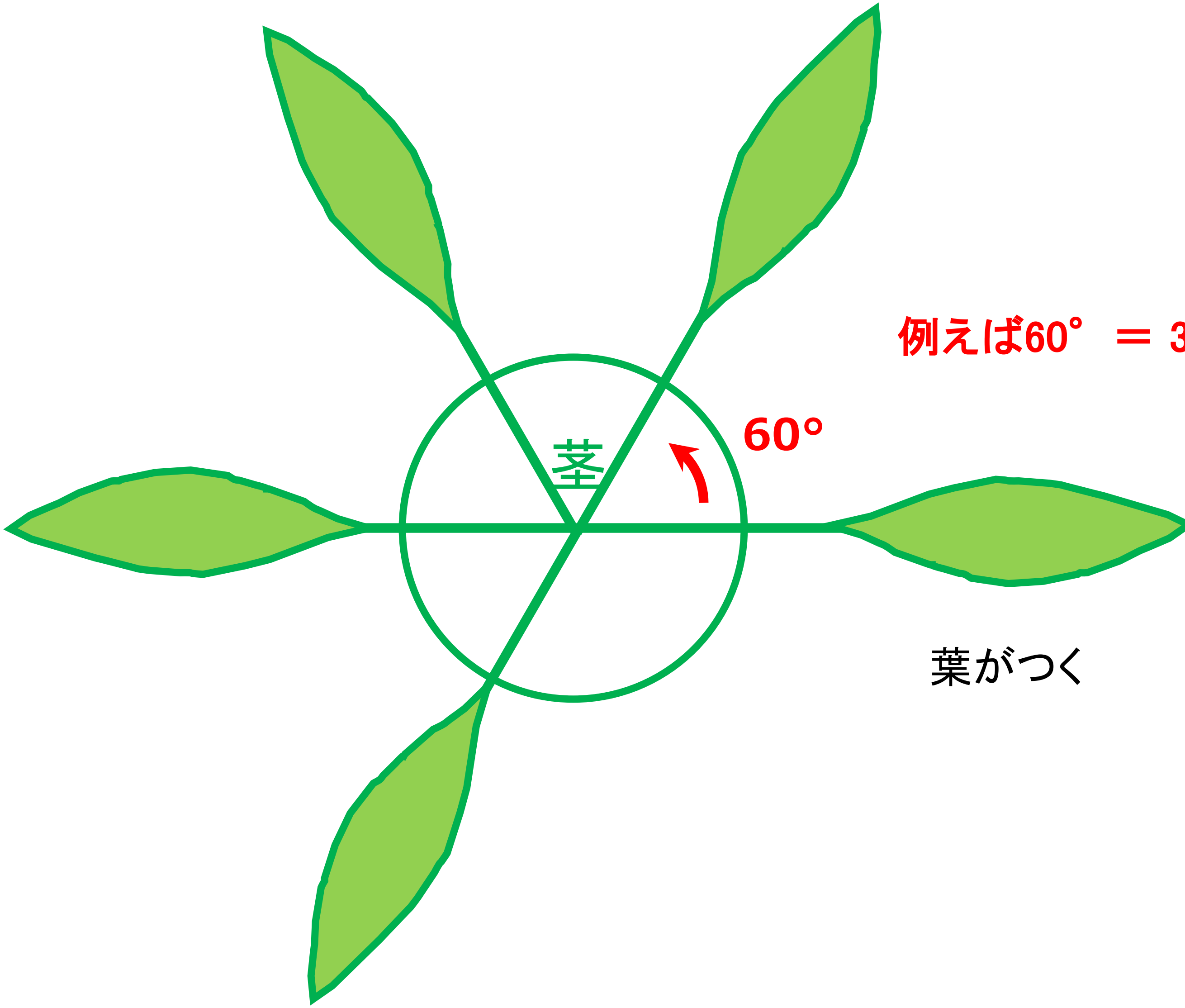
植物と黄金比



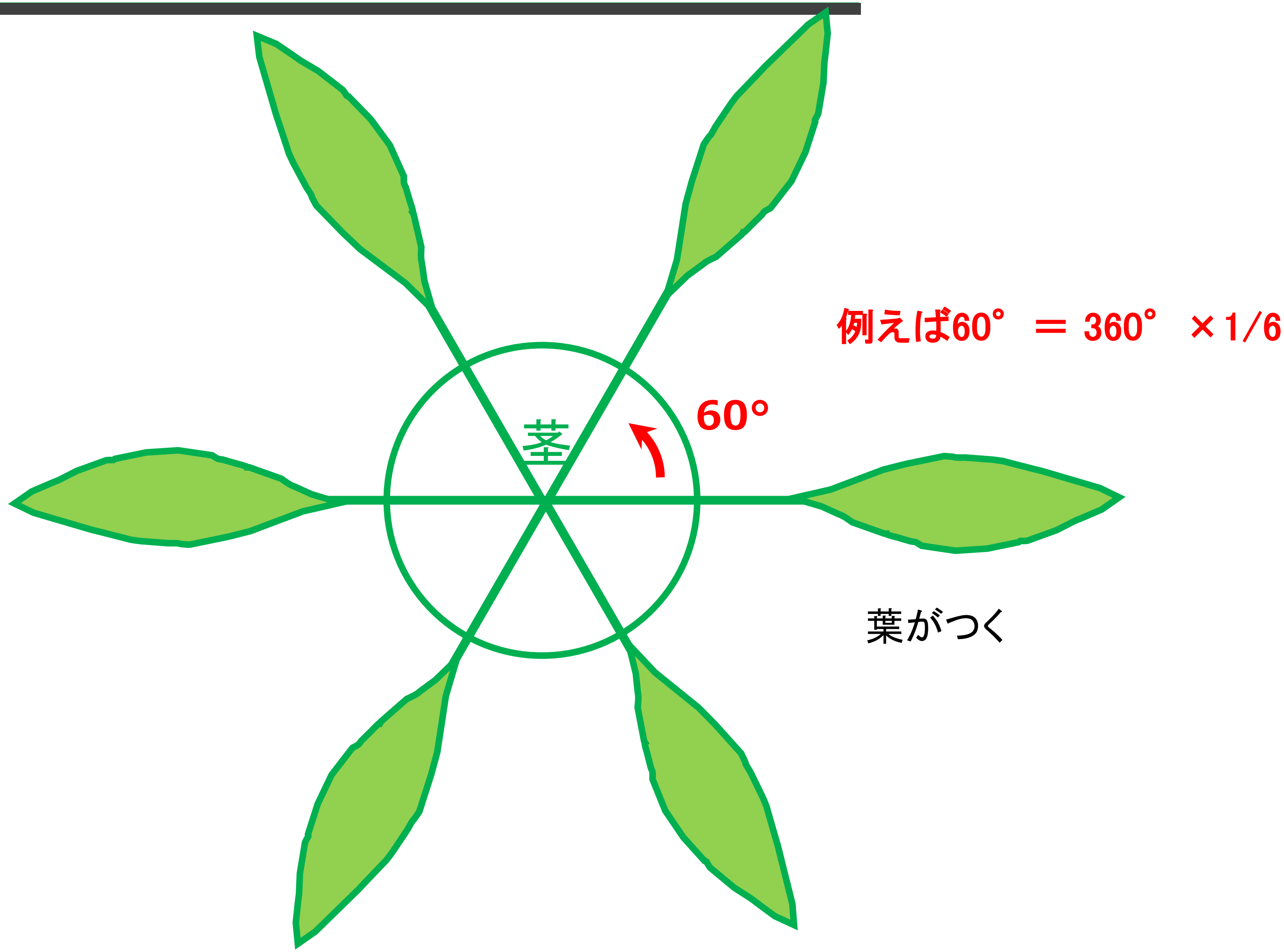
例えば60° ＝ 360° ×1/6

葉がつく

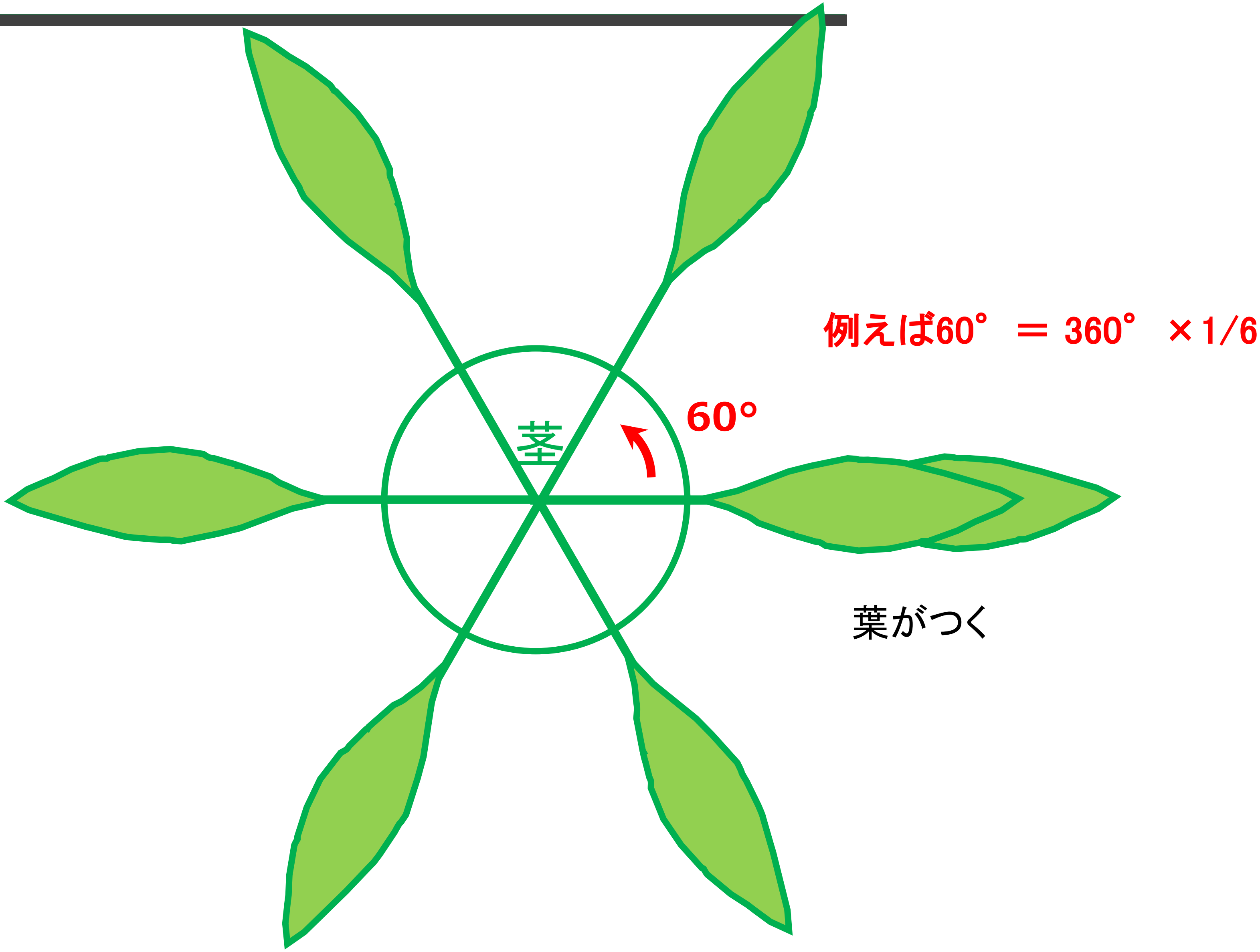
植物と黄金比



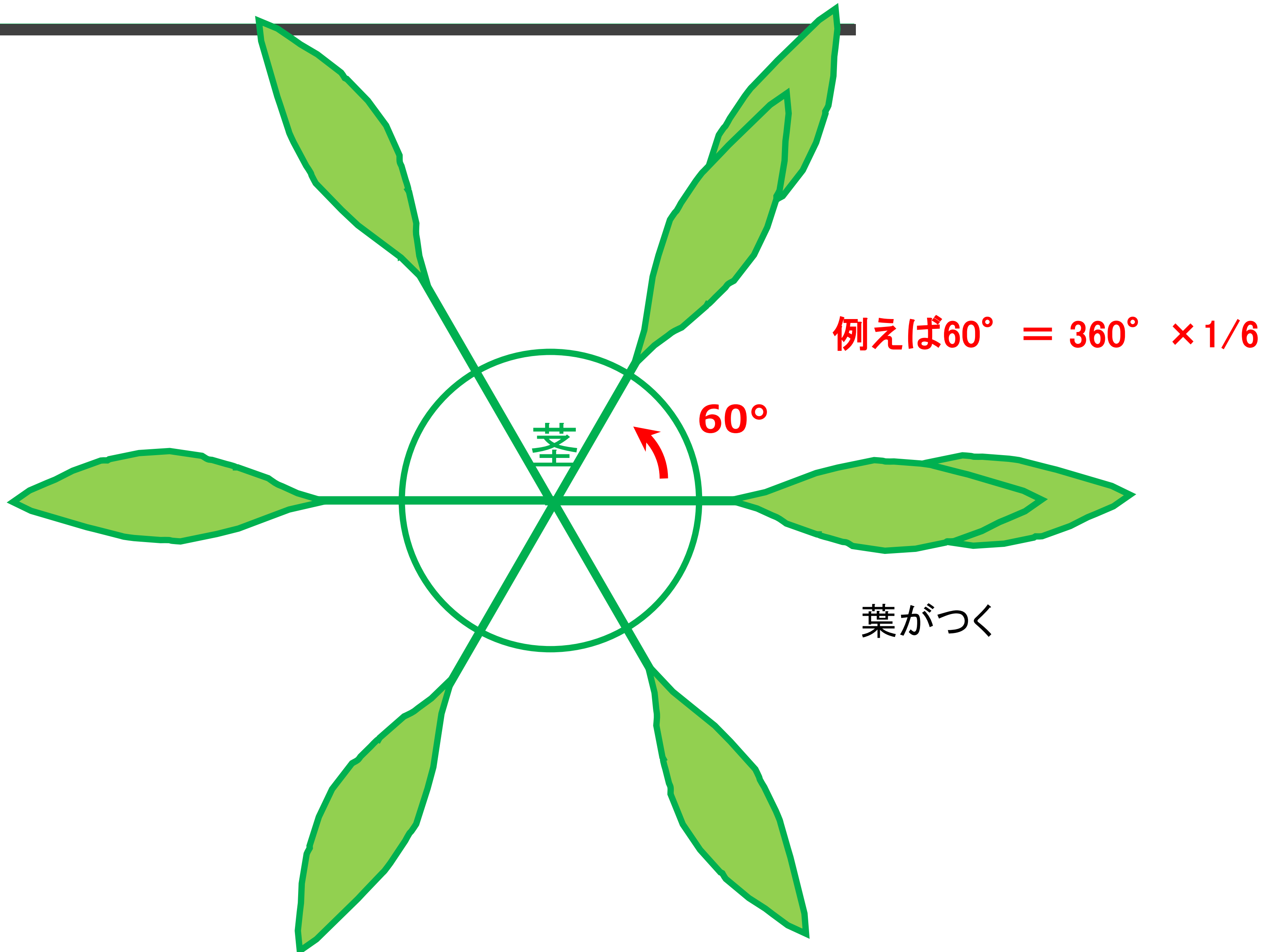
植物と黄金比



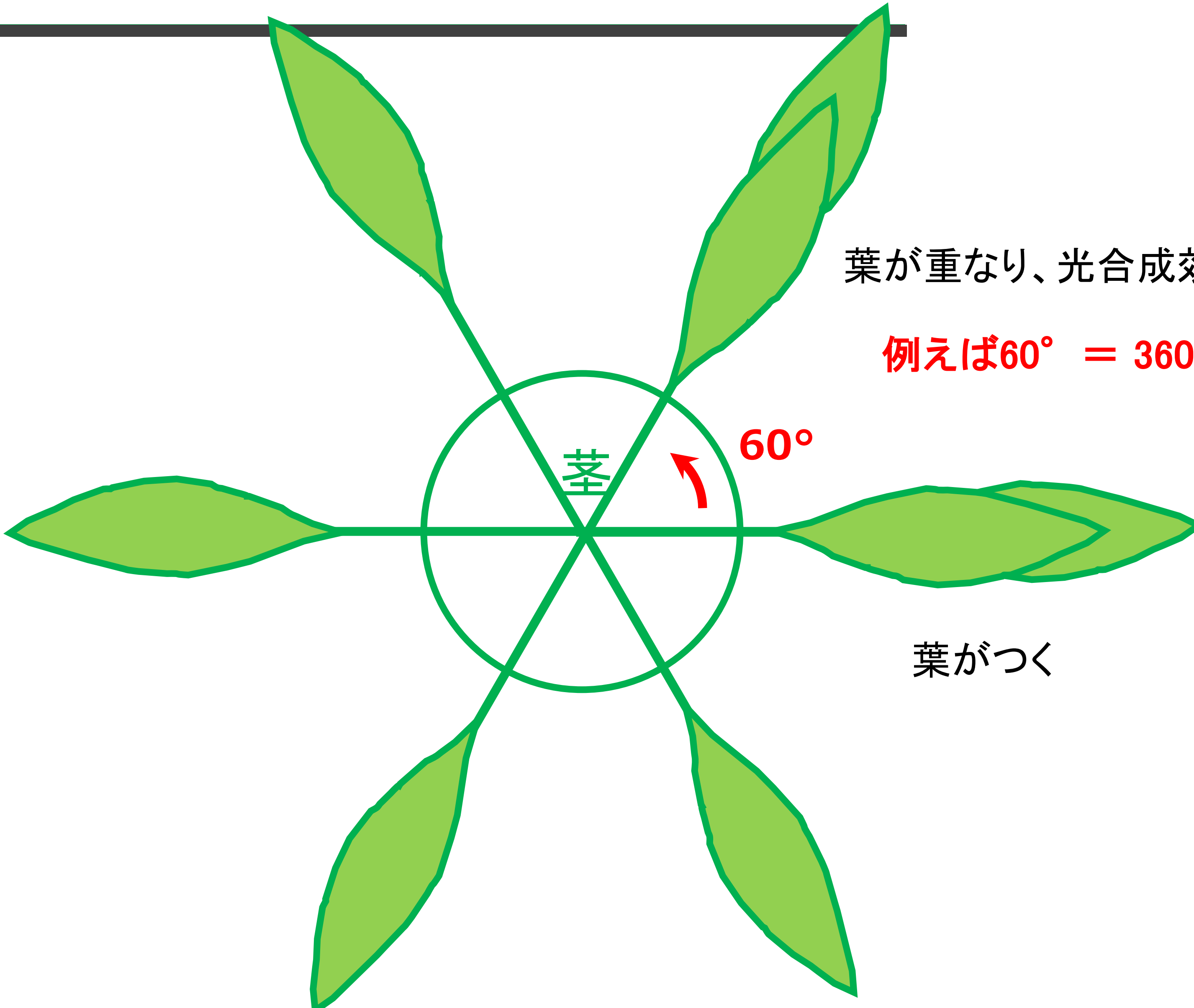
植物と黄金比



植物と黄金比



植物と黄金比



葉が重なり、光合成効率が良くない

例えば60°　＝ 360°　×1/6

葉がつく

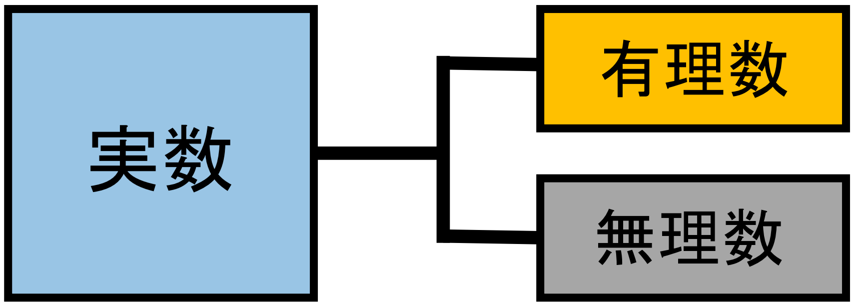
植物と黄金比

なぜ葉が重なってしまったのか

360° ×	1/6	⇒	6倍すると1になる	＝ 6枚目の葉で1周して最初の葉と重なる！
360° ×	5/6	⇒	6倍すると5になる	＝ 6枚目の葉で5周して最初の葉と重なる！
360° ×	7/9	⇒	9倍すると7になる	＝ 9枚目の葉で7周して最初の葉と重なる！

分数（有理数）である限り、いつか葉が重なってしまう…。

有理数と無理数



(整数)/(整数)の形の分数のこと
例：-2, 0, $2/3$, etc

有理数以外の実数
例：$\sqrt{2}$, π, e etc

葉をなるべくばらけさせるにはどんな数を使えばいいのか。

Excelでシミュレーションしてみましょう。

演習問題３（葉のつき方）

演習問題３
いろいろな数を使って、葉のつき方をシミュレーションしてみましょう。

n	x	y
0	1	0
1	1	-2.5E-16
2	1	-4.9E-16
3	1	-7.4E-16
4	1	-9.8E-16
5	1	-1.2E-15
6	1	-1.5E-15
7	1	-1.7E-15
8	1	-2E-15

c	1

←ここの数値を変えてみましょう

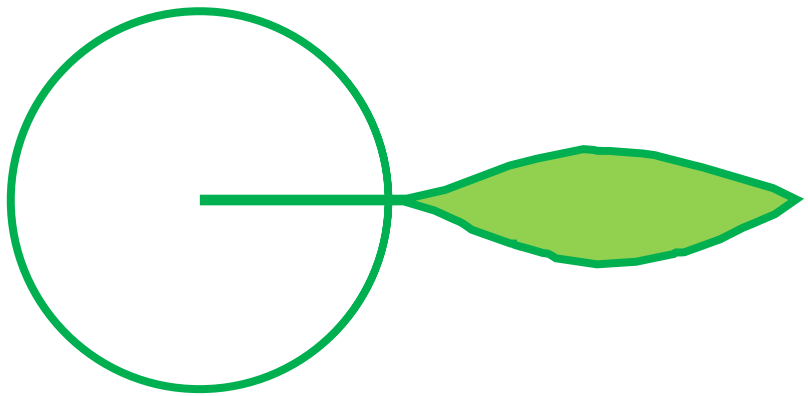
無理数の出力例

無理数	Excelの関数
$\sqrt{数値}$	＝SQRT(数値)
π（円周率）	＝PI()
e（ネイピア数）	＝EXP(1)

円周上に葉が生える位置をプロットします。

正多角形に近いほど、葉が重なってしまいます。

植物と黄金比

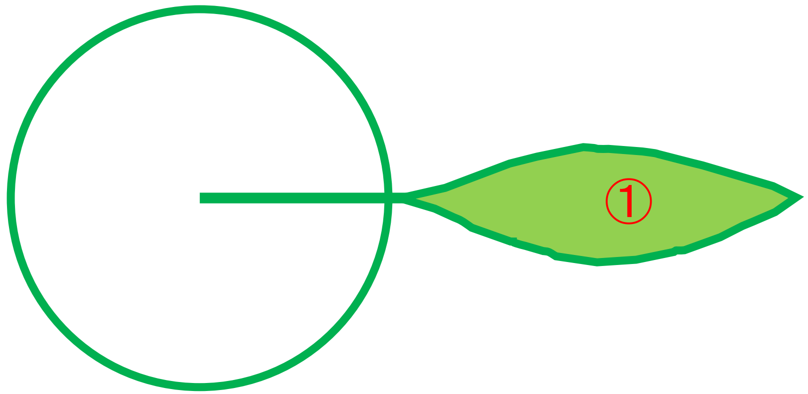


【葉のつき方の条件】

条件１：葉をばらけさせたい

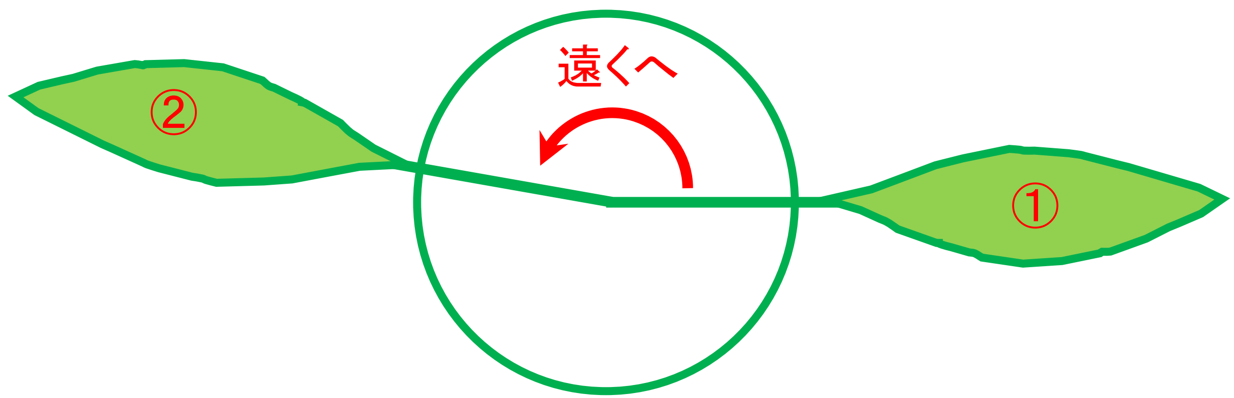
条件２：できるだけ前の葉と距離をとりたい ➡ **適当な無理数でいいわけではない！**

植物と黄金比



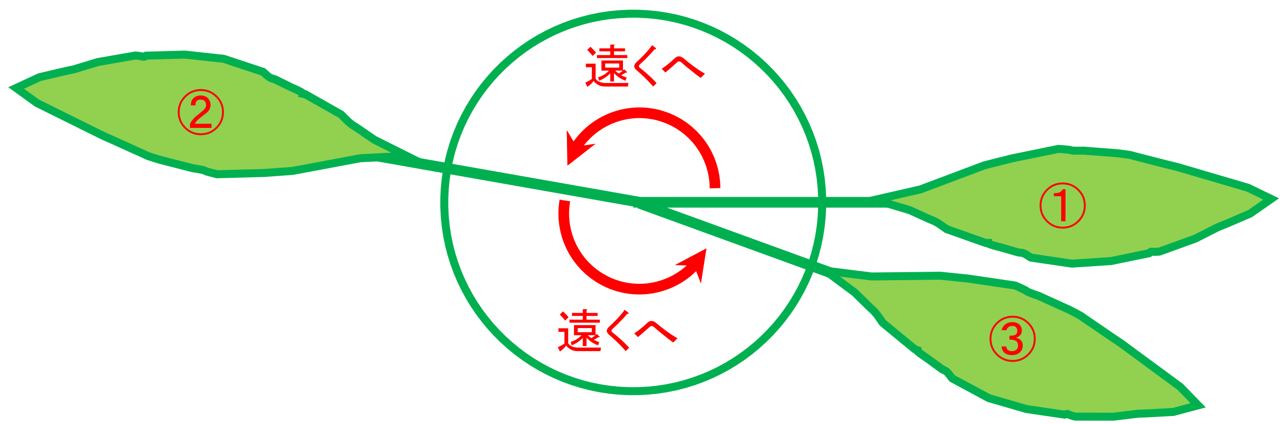
条件２:できるだけ前の葉と距離をとりたい

植物と黄金比



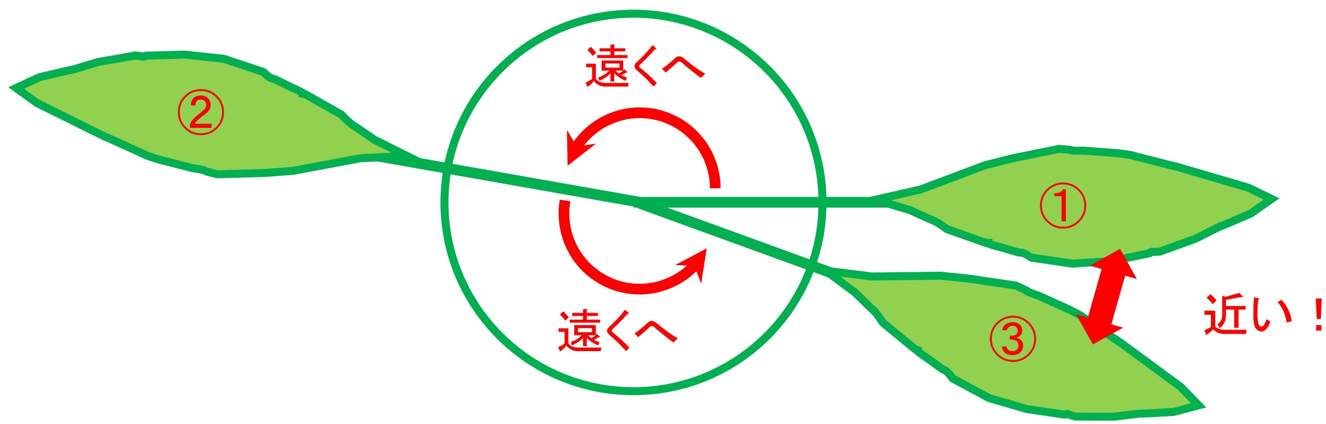
条件２：できるだけ前の葉と距離をとりたい

植物と黄金比



条件２：できるだけ前の葉と距離をとりたい

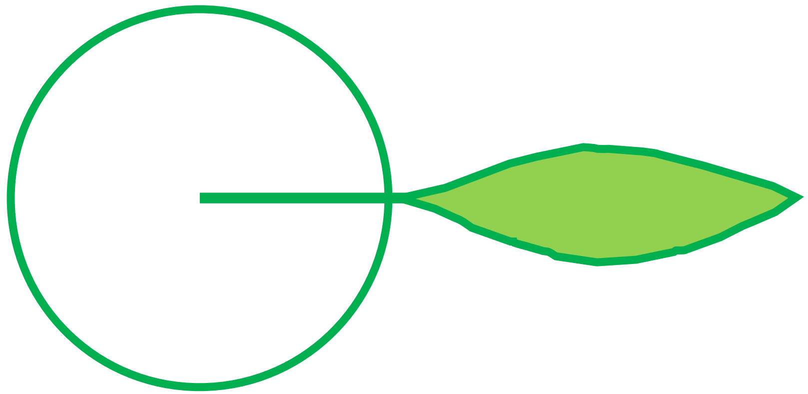
植物と黄金比



条件2：できるだけ前の葉と距離をとりたい

成長期の葉に使うエネルギーをなるべく分散させたい。

植物と黄金比



【葉のつき方の条件】

条件１：葉をばらけさせたい

条件２：できるだけ前の葉と距離をとりたい　➡　**黄金比がこれらの条件を満たす。**

演習問題３（黄金比を出力する）

演習問題３
いろいろな数を使って、葉のつき方をシミュレーションしてみましょう。

n	x	y
0	1	0
1	1	-2.5E-16
2	1	-4.9E-16
3	1	-7.4E-16
4	1	-9.8E-16
5	1	-1.2E-15
6	1	-1.5E-15
7	1	-1.7E-15
8	1	-2E-15

c	1

←ここの数値を変えてみましょう

黄金比の出力例

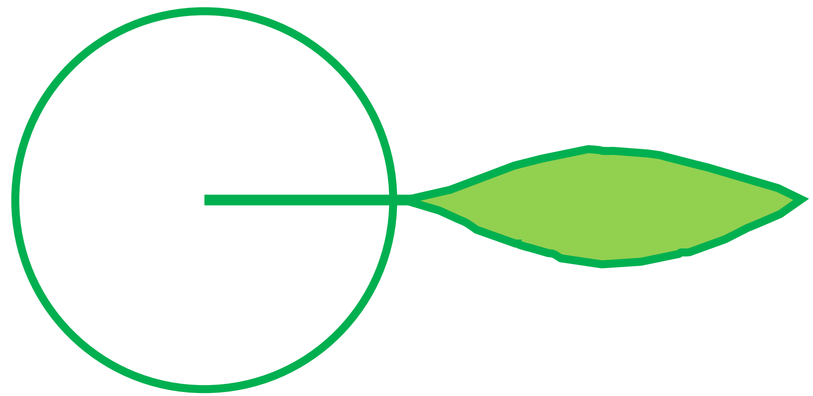
黄金比	Excelの関数
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	＝(1+SQRT(5))/2

円周上に葉が生える位置をプロットします。

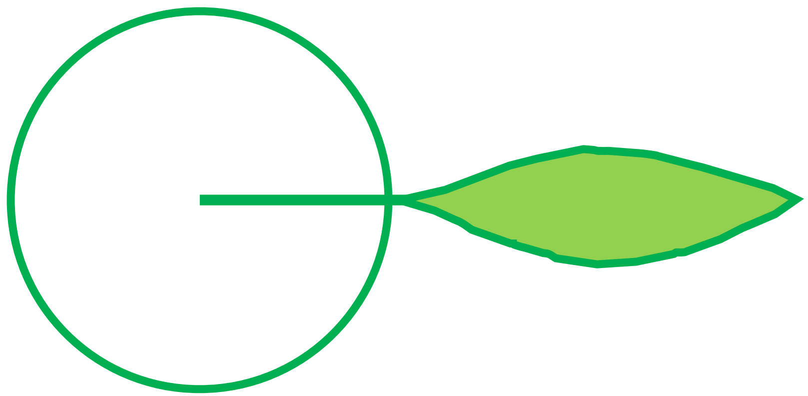
正多角形に近いほど、葉が重なってしまいます。

植物と黄金比

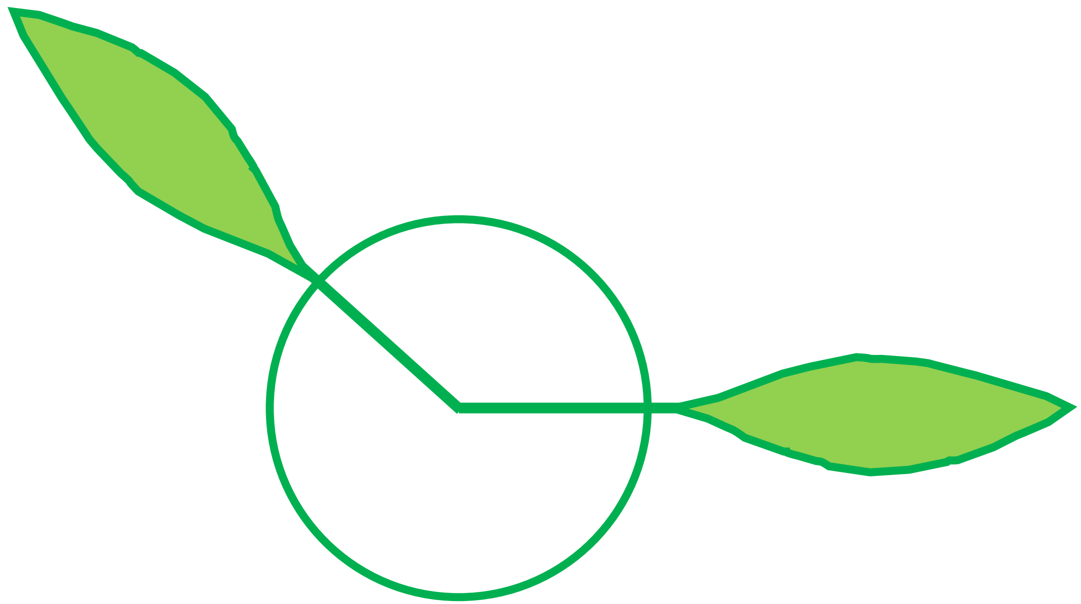
黄金角＝360° / φ =222.4°　（逆回りで考えると 360° － 222.4° ＝**137.5°** ）



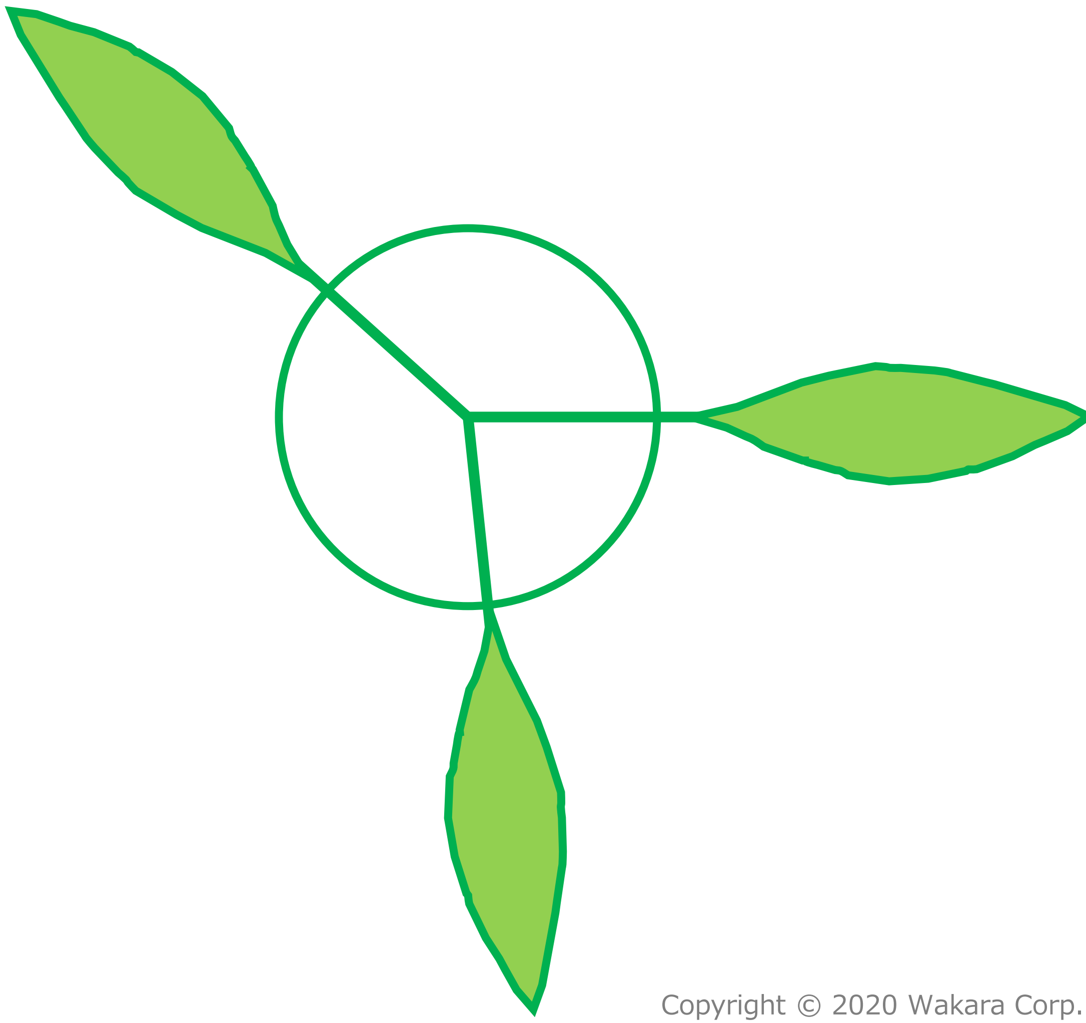
植物と黄金比



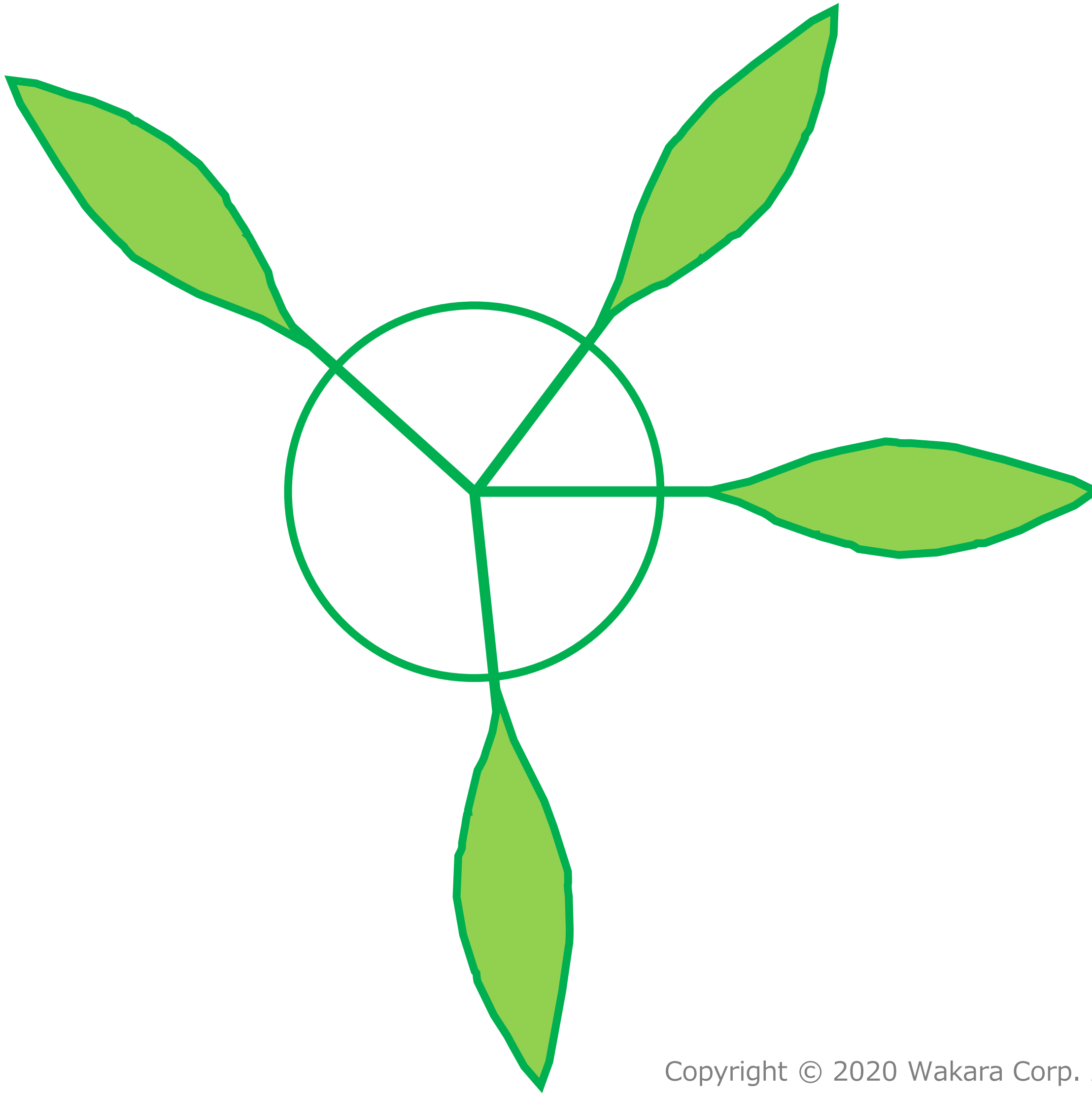
植物と黄金比



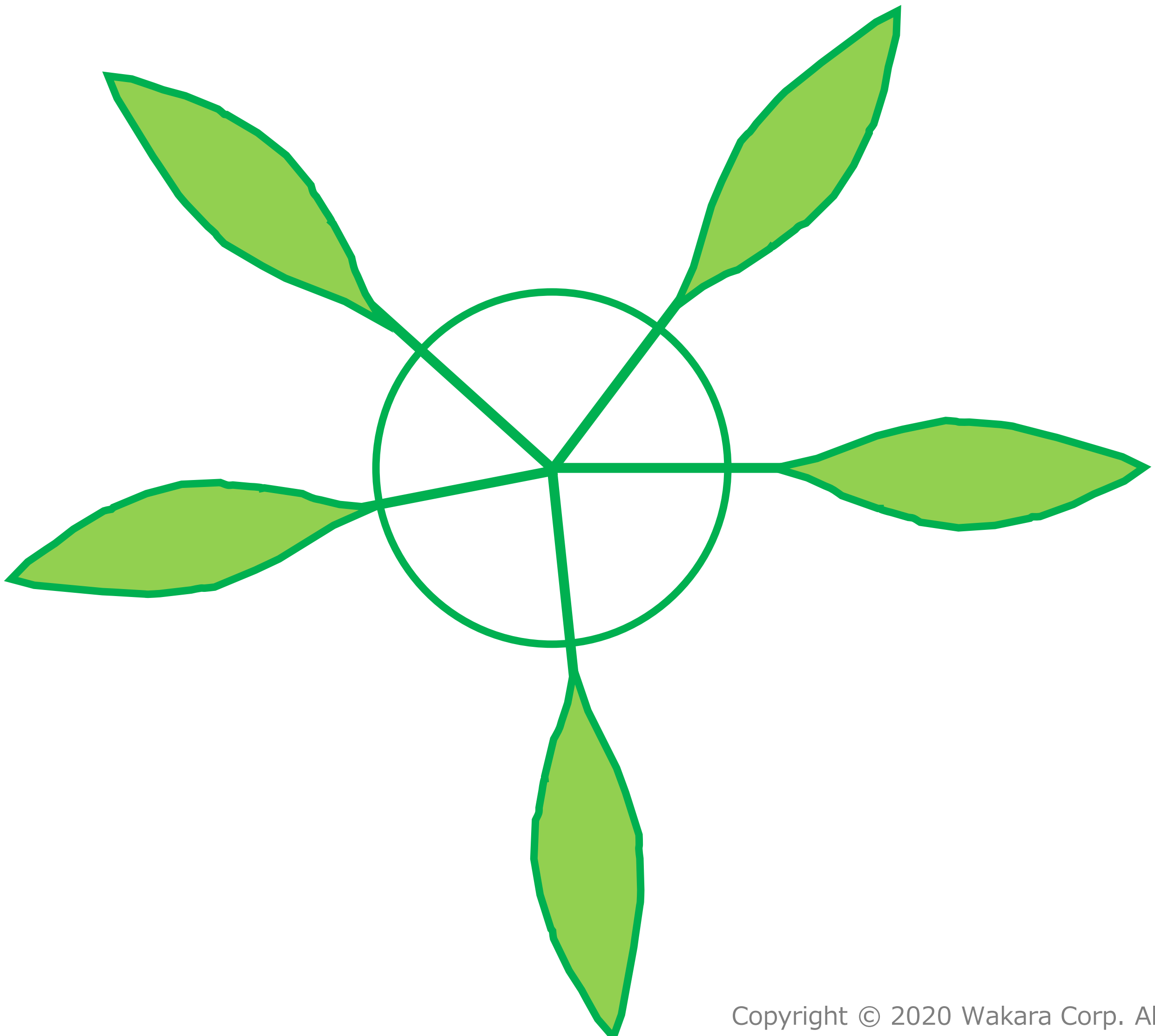
植物と黄金比



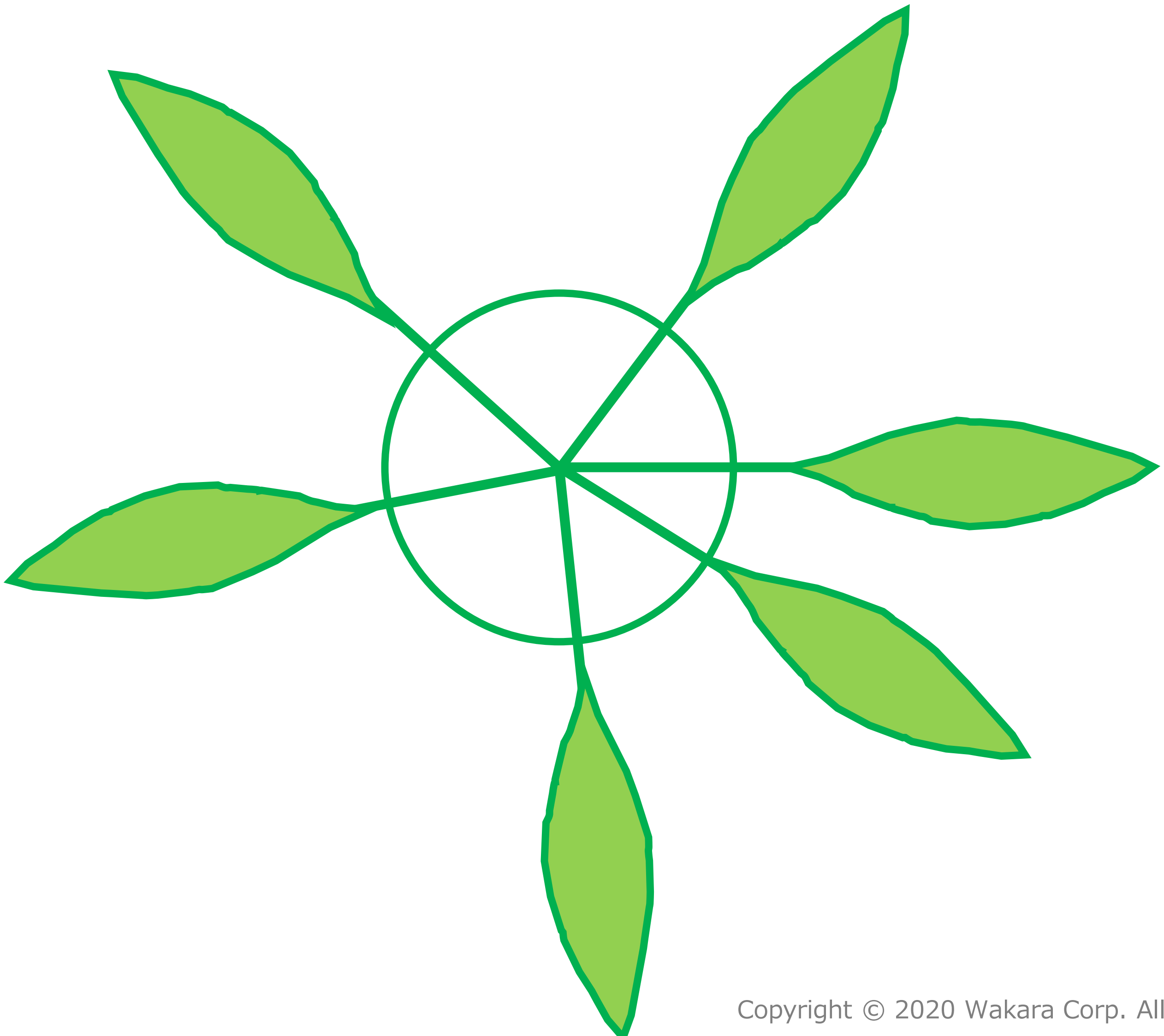
植物と黄金比



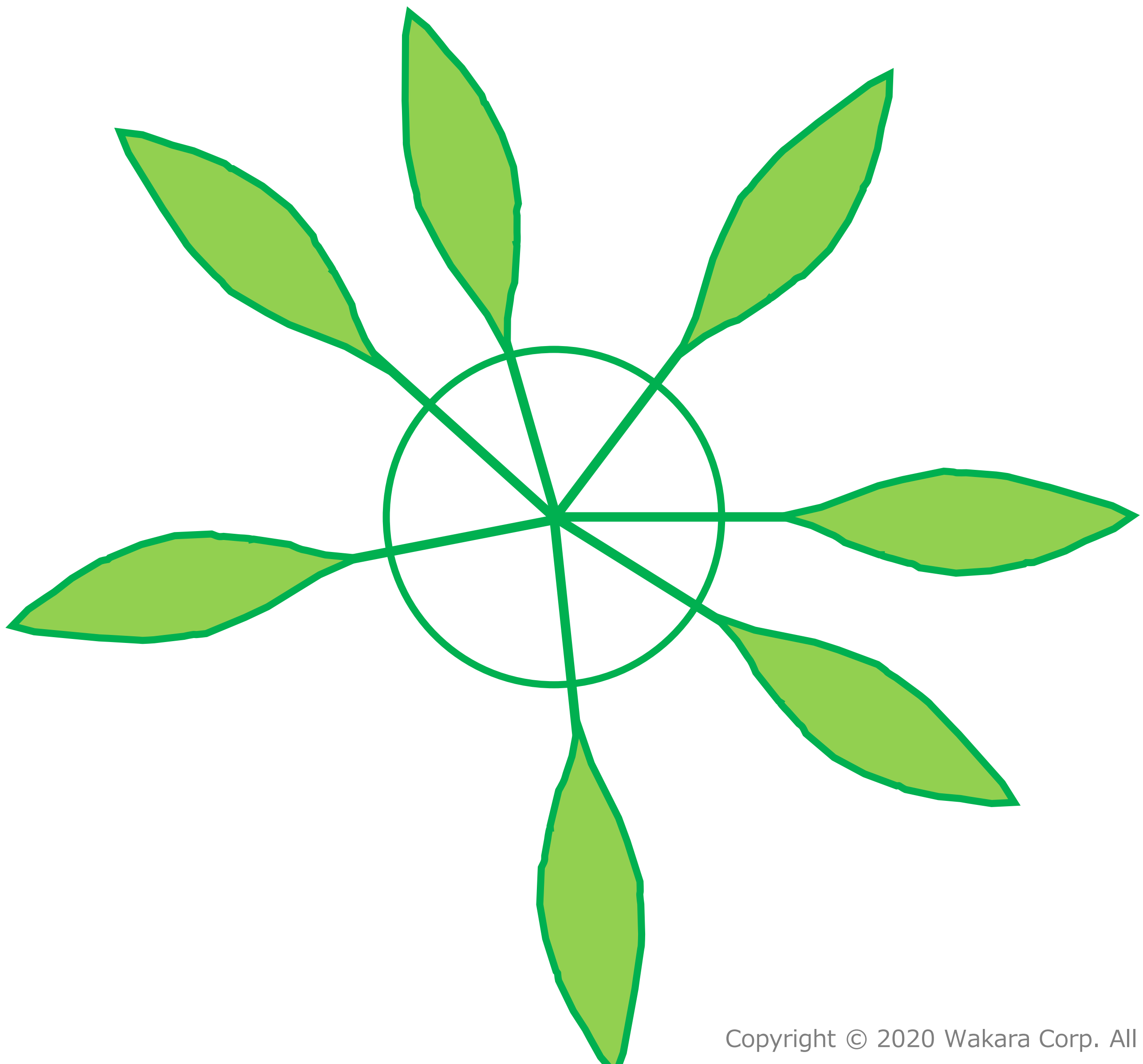
植物と黄金比



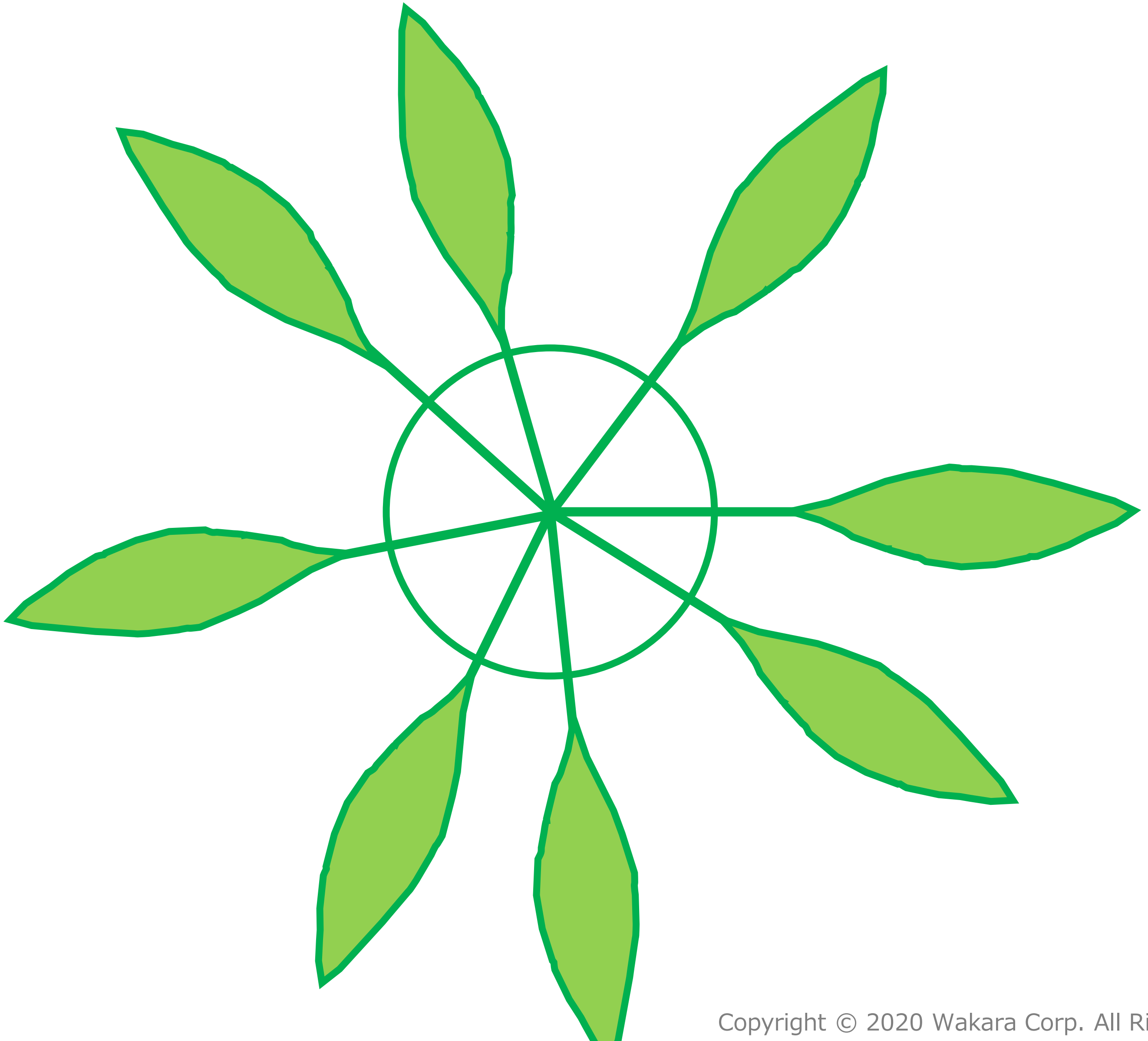
植物と黄金比



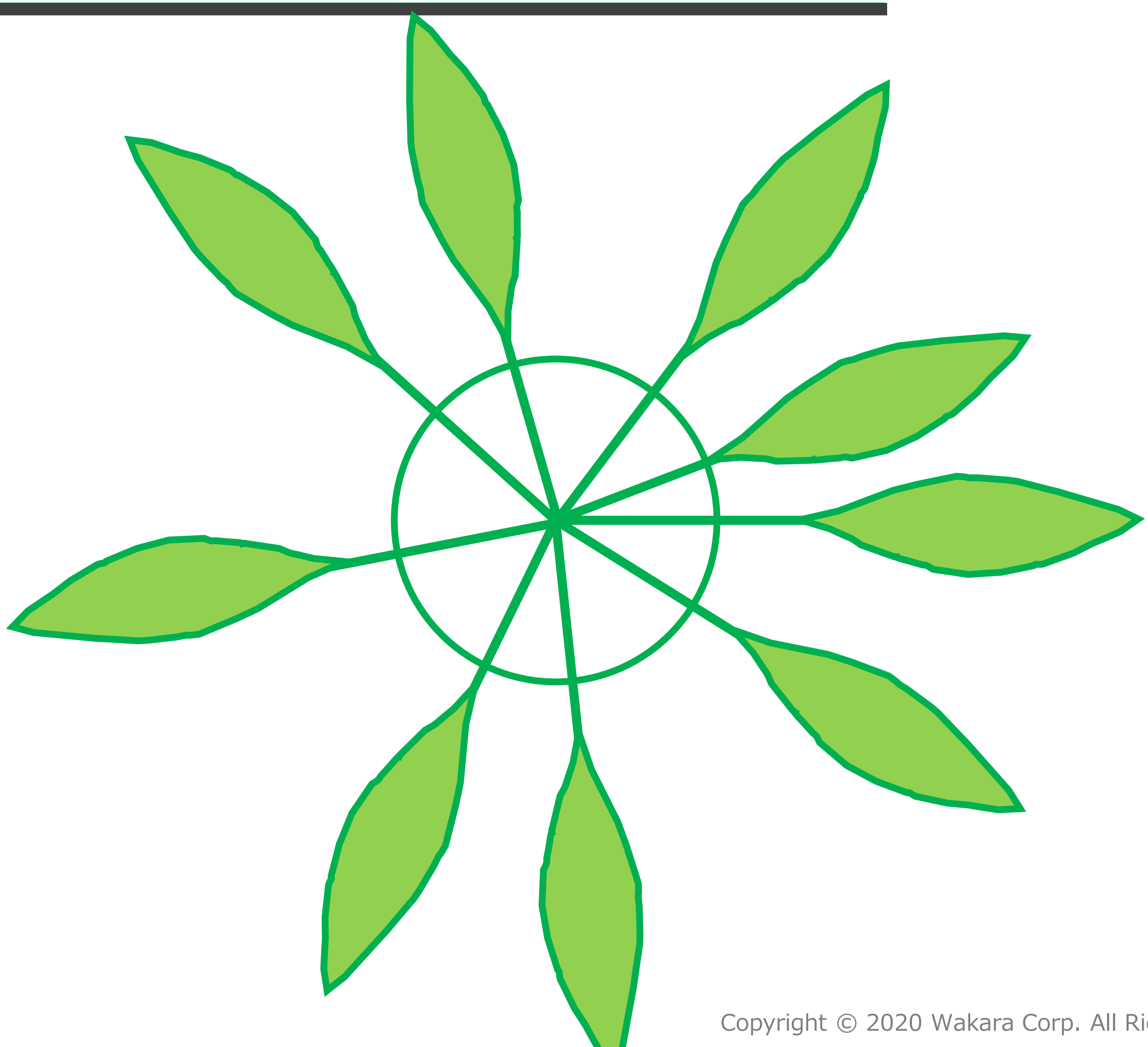
植物と黄金比



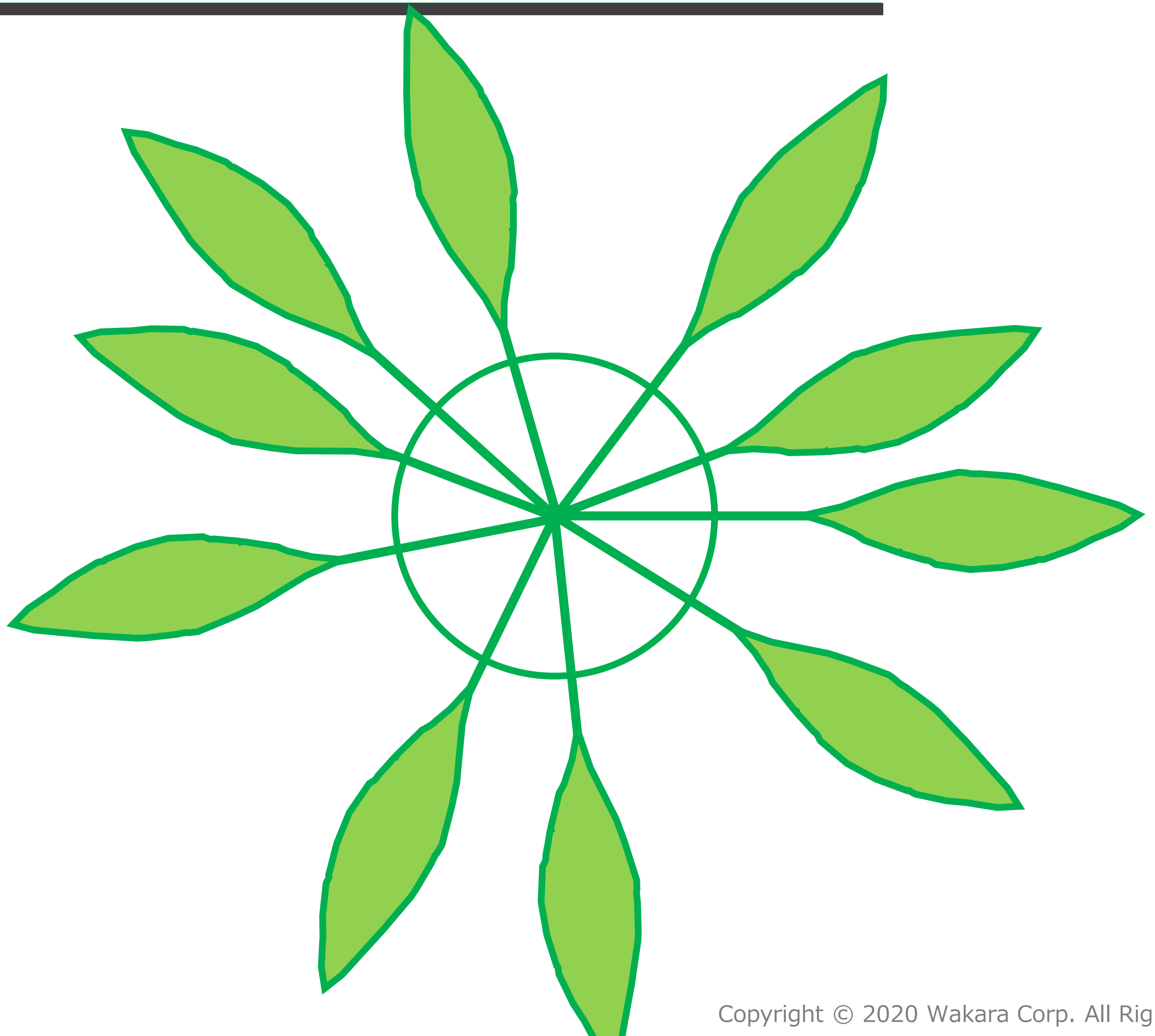
植物と黄金比



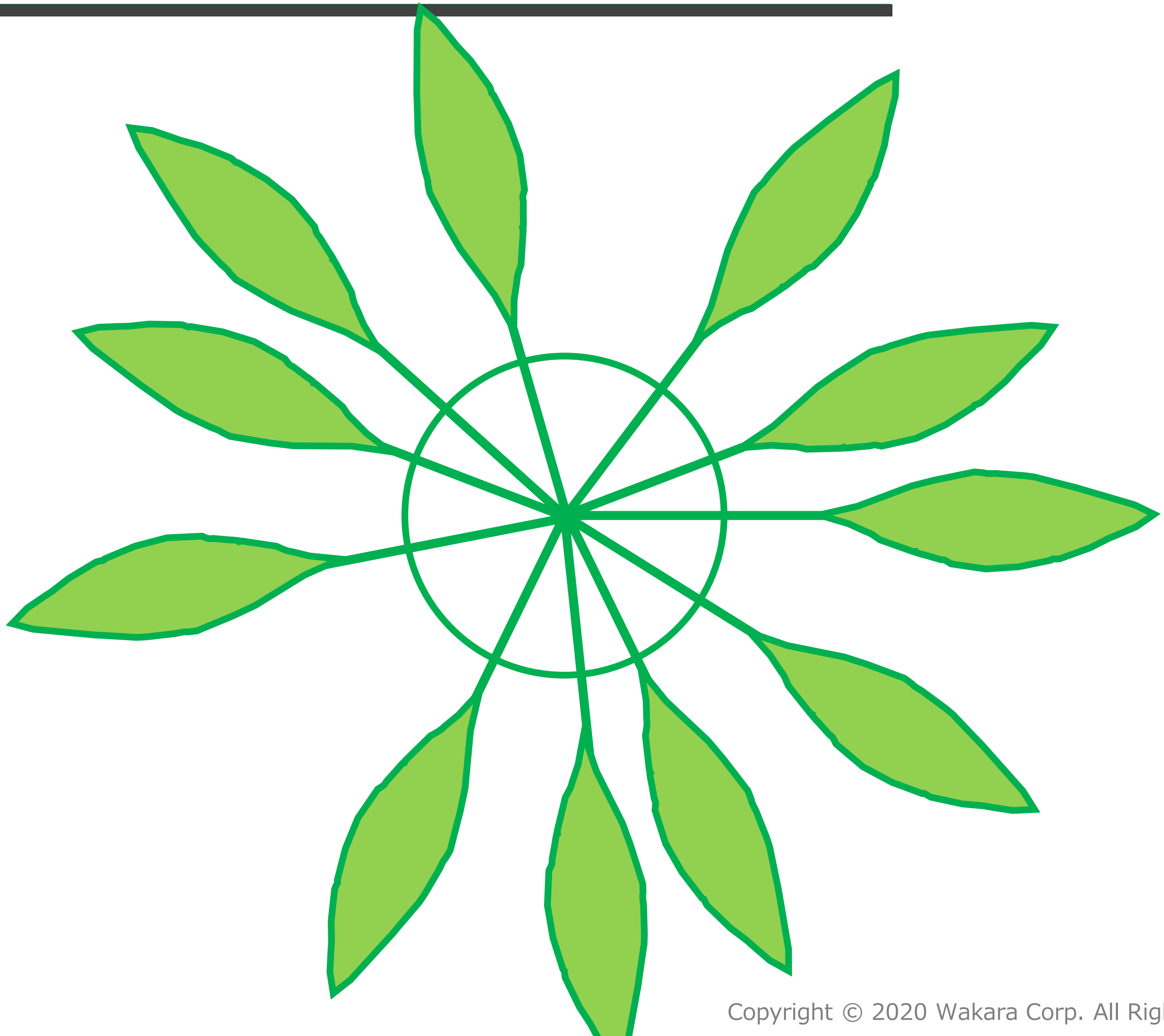
植物と黄金比



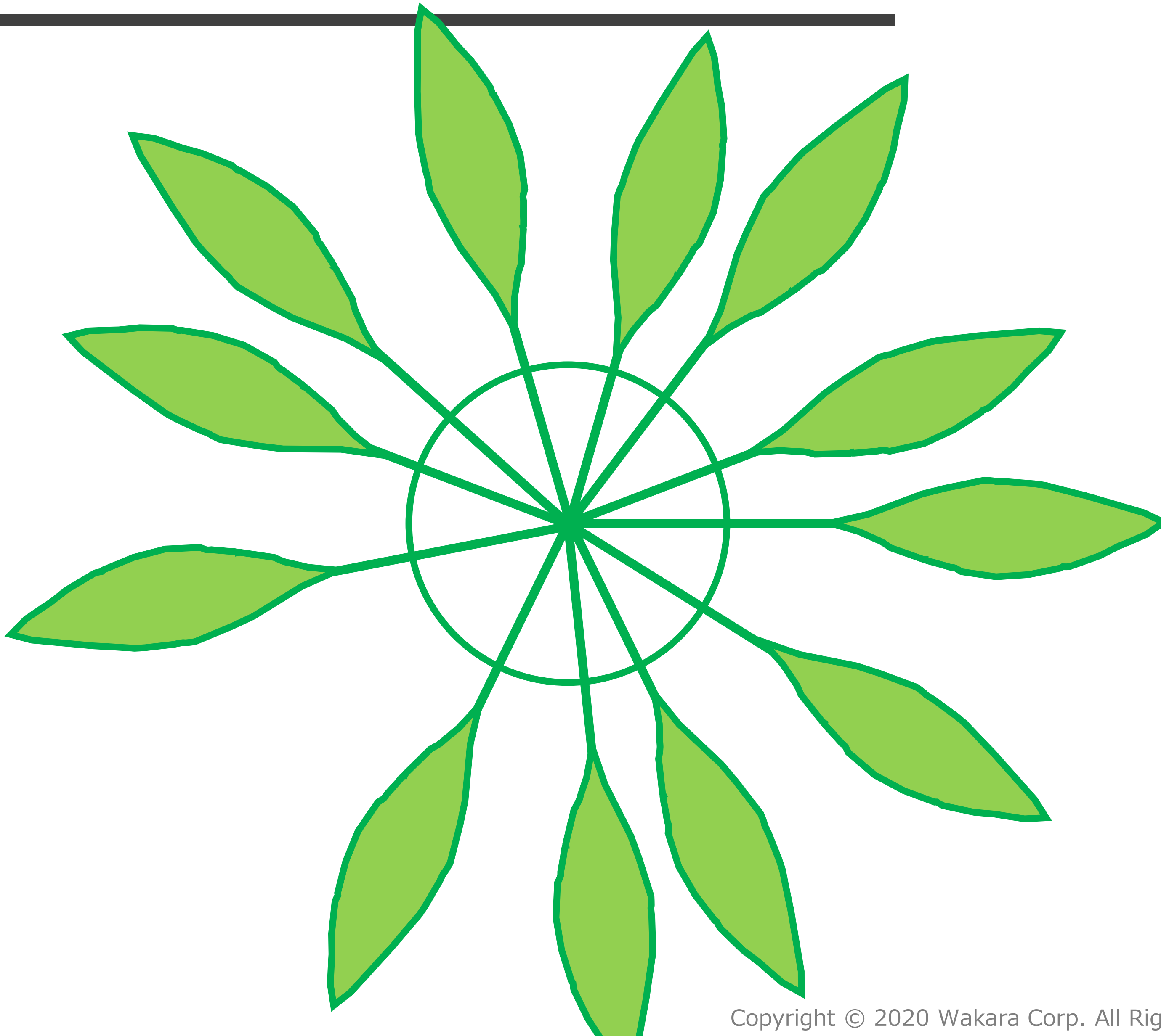
植物と黄金比



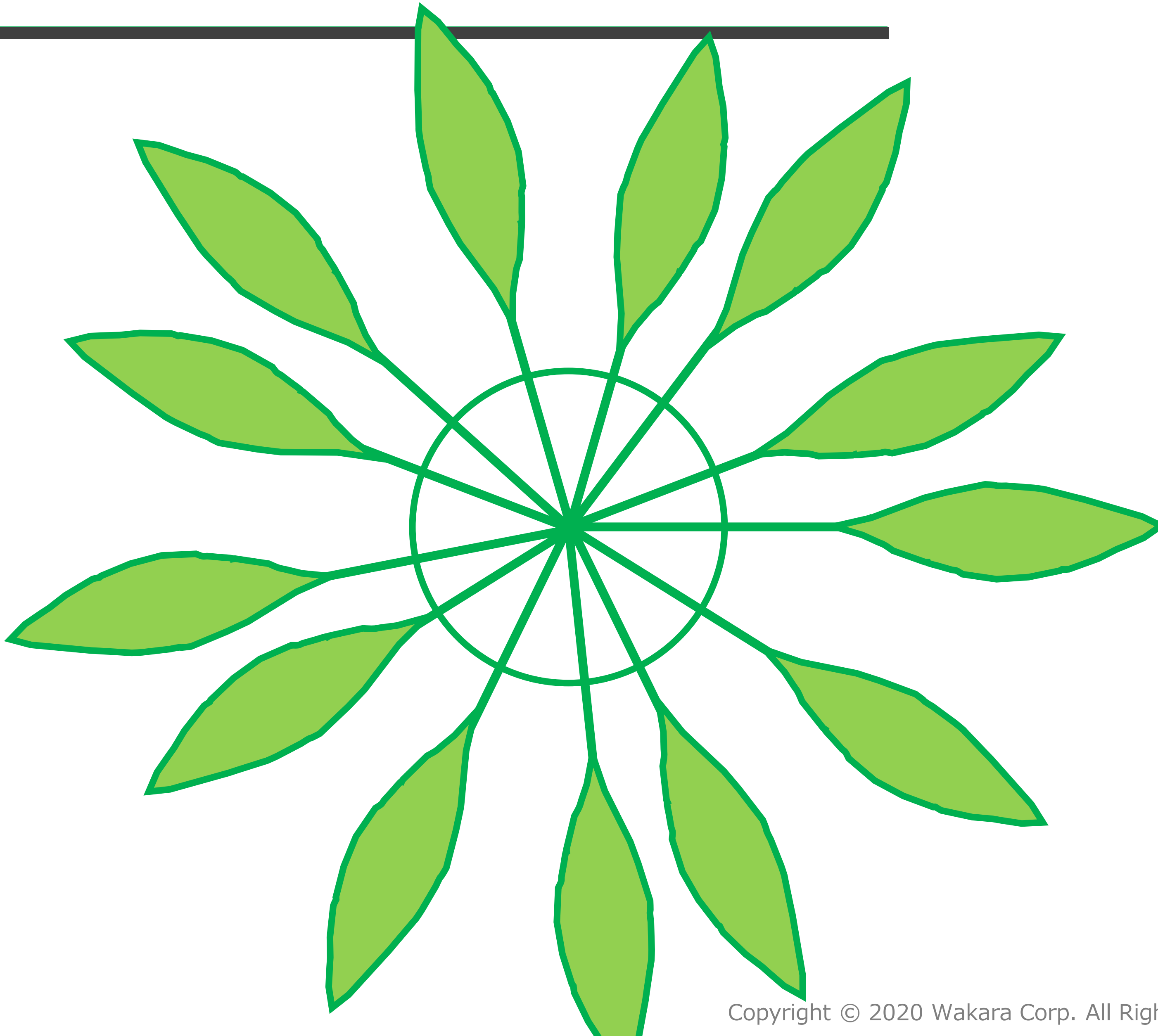
植物と黄金比



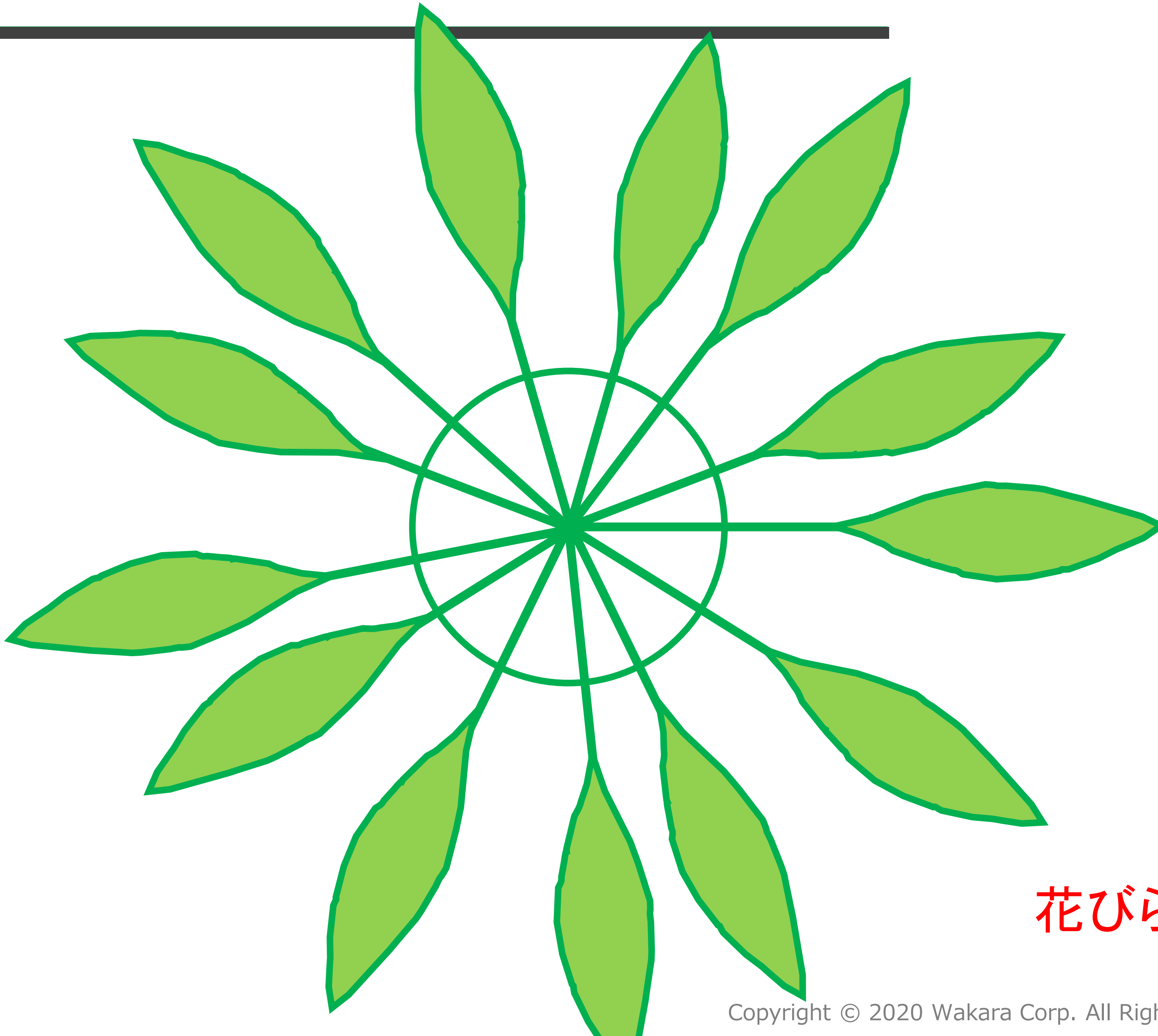
植物と黄金比



植物と黄金比



植物と黄金比



花びらも同様

花びらを数えてみる

桜

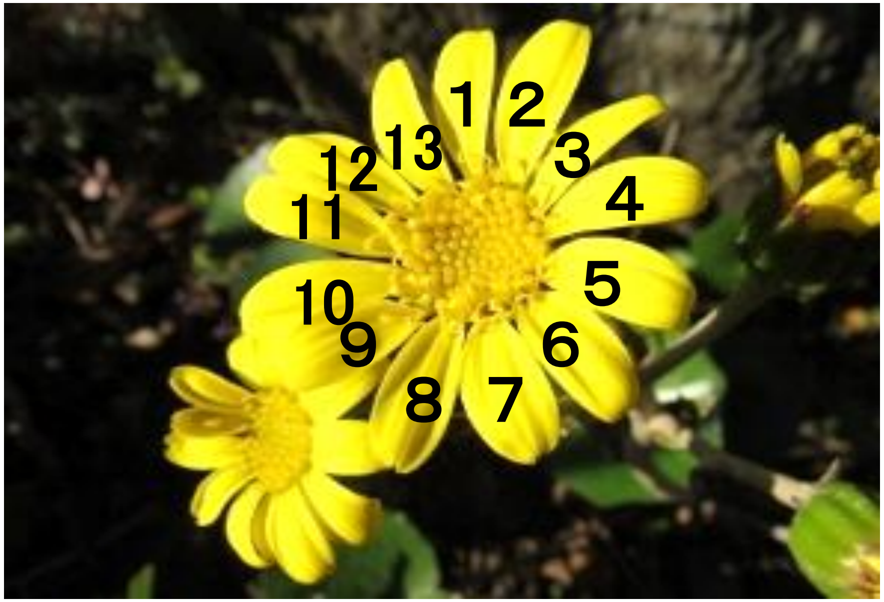
花びらは5枚

花びらを数えてみる

コスモス

花びらは8枚

花びらを数えてみる



ツワブキ

花びらは13枚

花びらを数えてみる

マーガレット

➡ 花びらは21枚

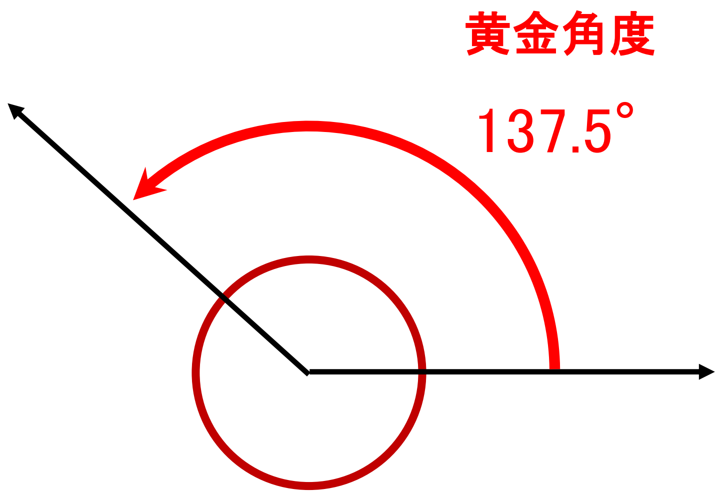
花びらを数えてみる

5　8　13　21　・・・ ➡ **フィボナッチ数**

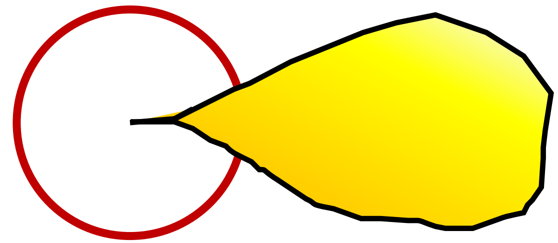
なぜ、フィボナッチ数になる？

葉と同様に重なりにくいよう黄金角度で生えてきている。

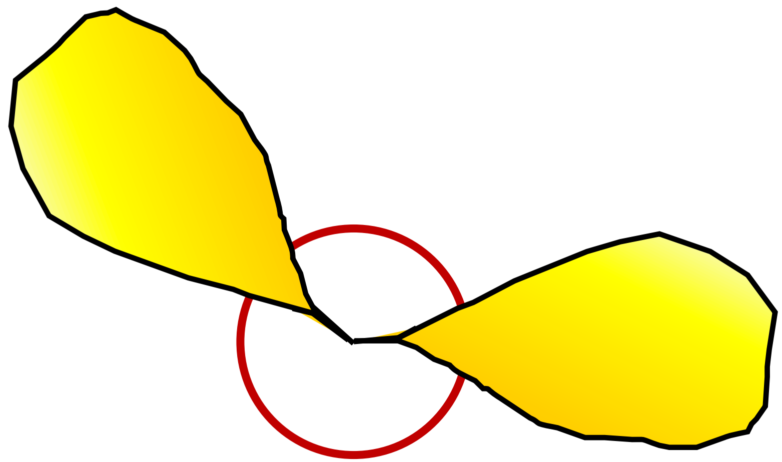
黄金角度



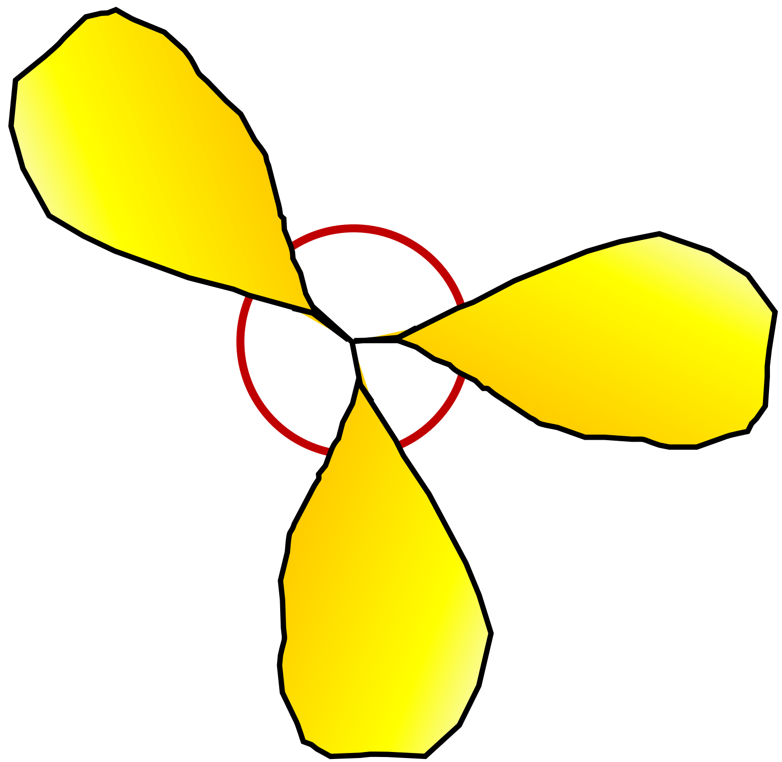
黄金角度



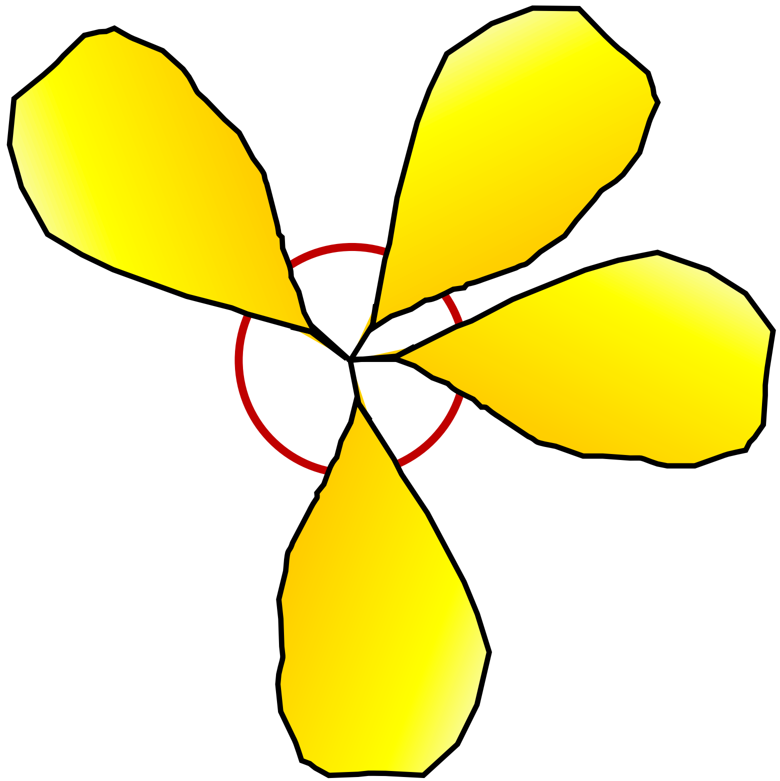
黄金角度



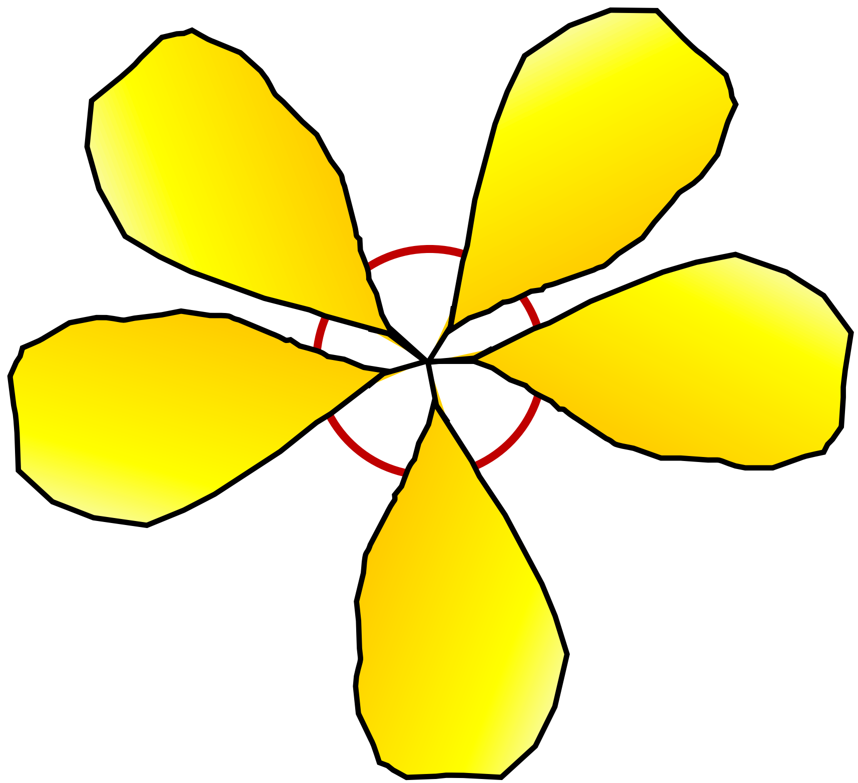
黄金角度



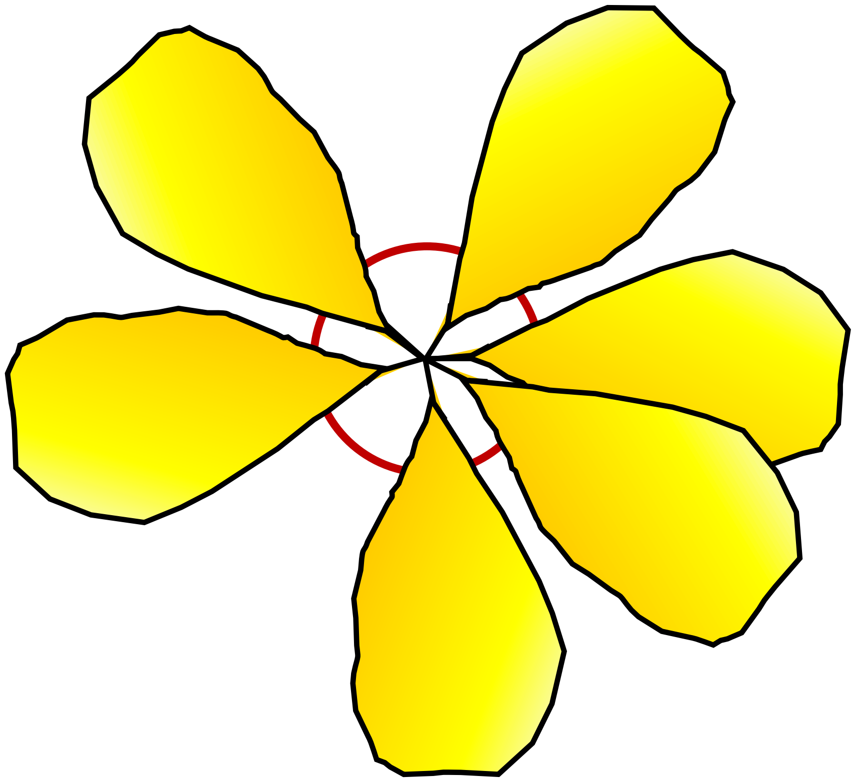
黄金角度



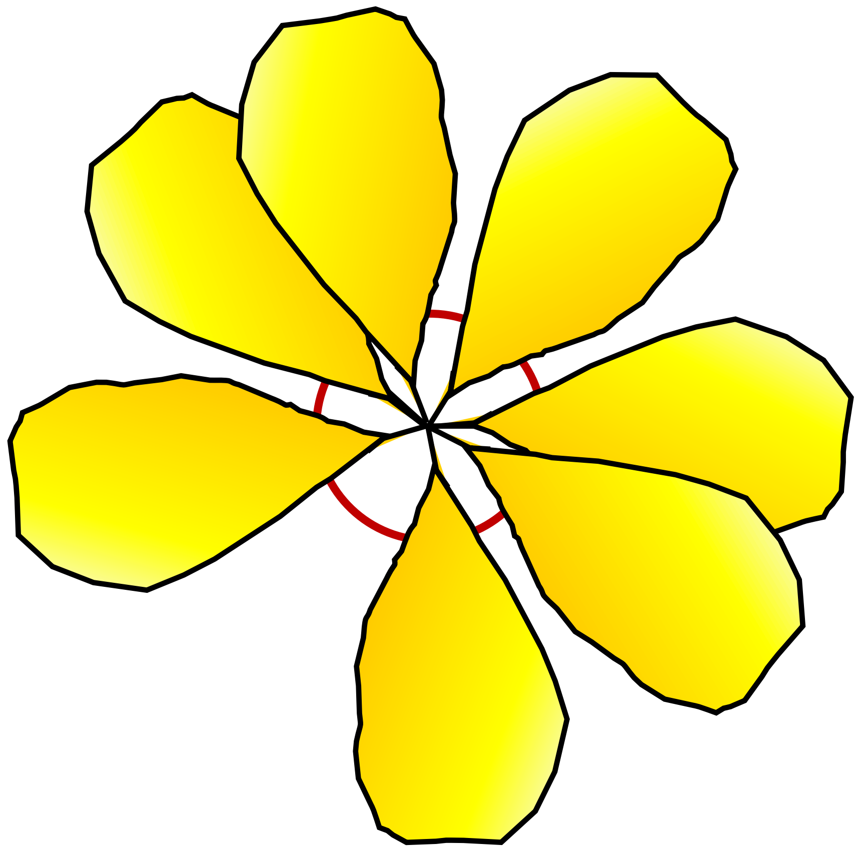
黄金角度



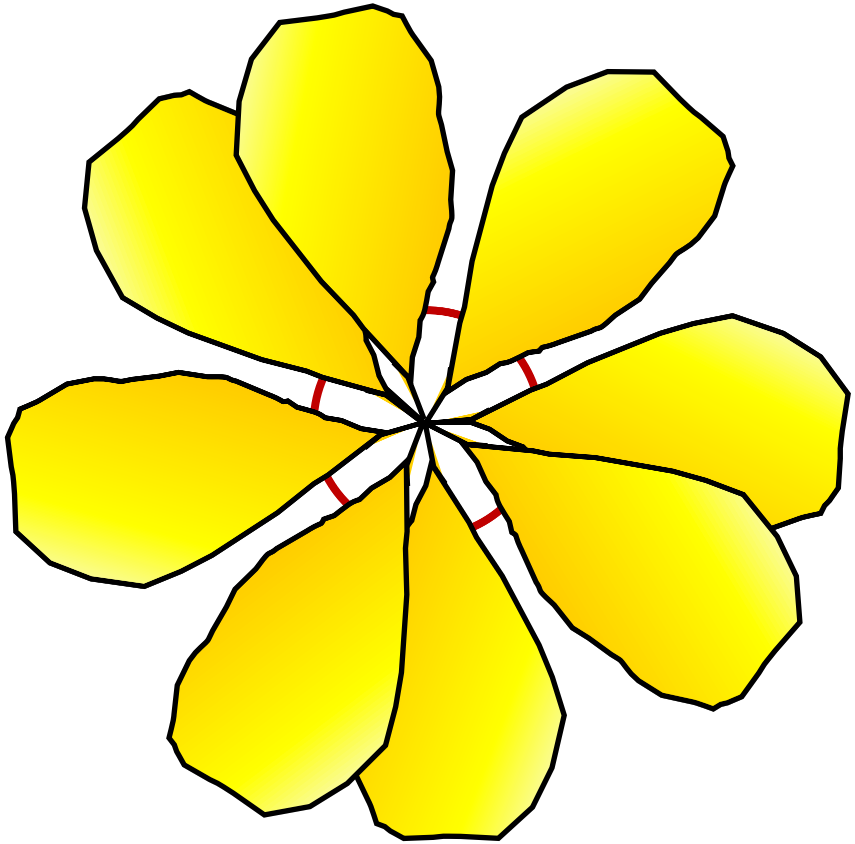
黄金角度



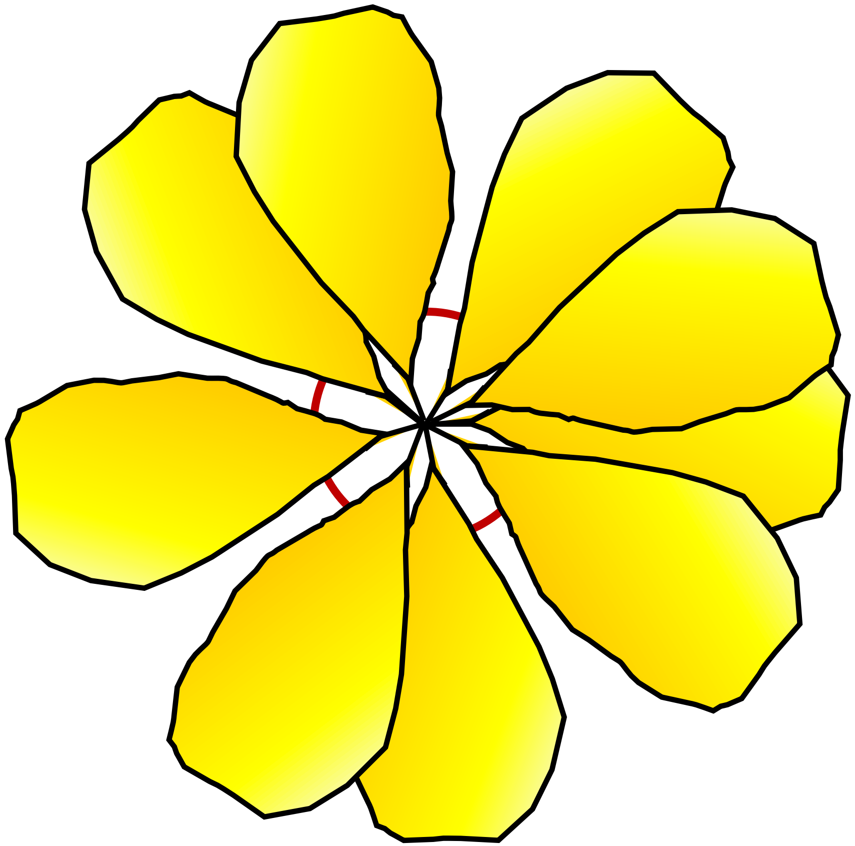
黄金角度



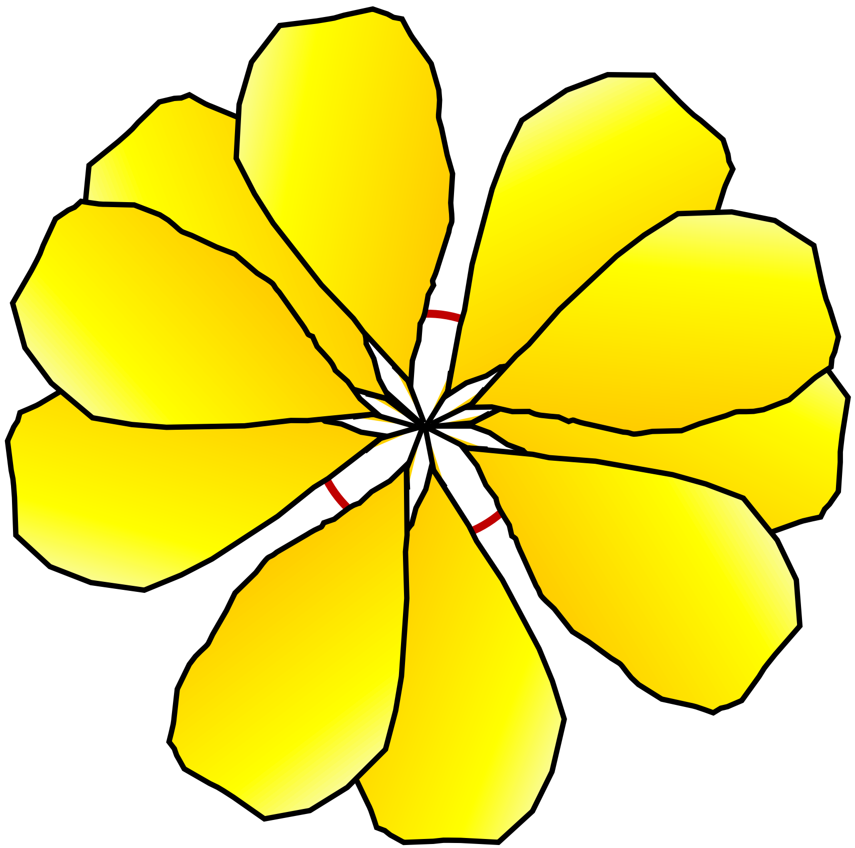
黄金角度



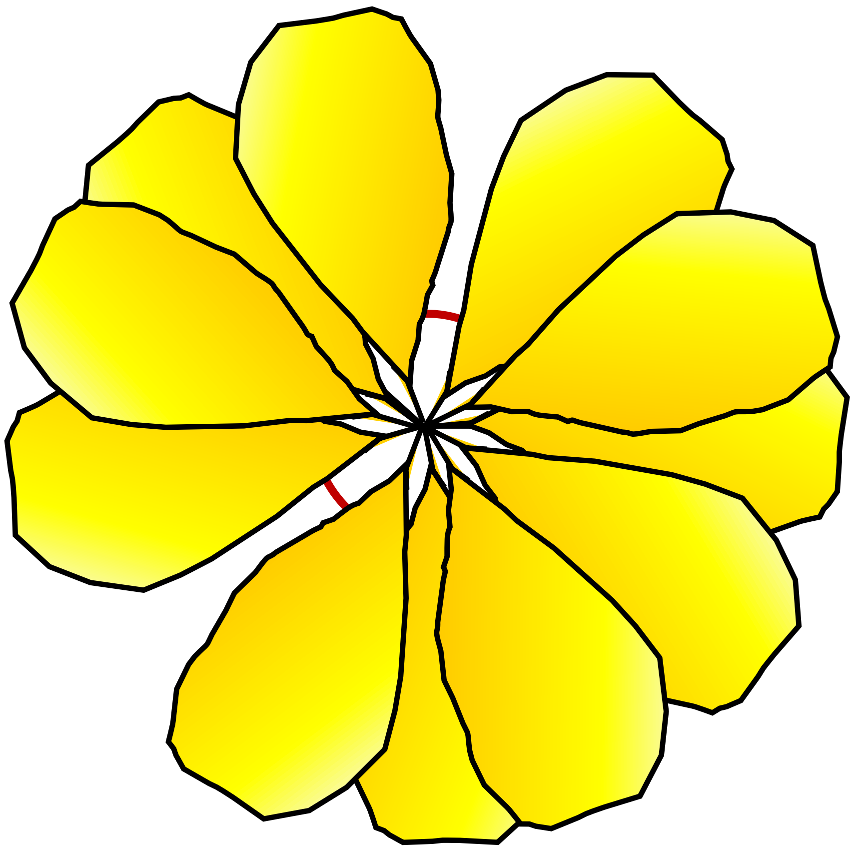
黄金角度



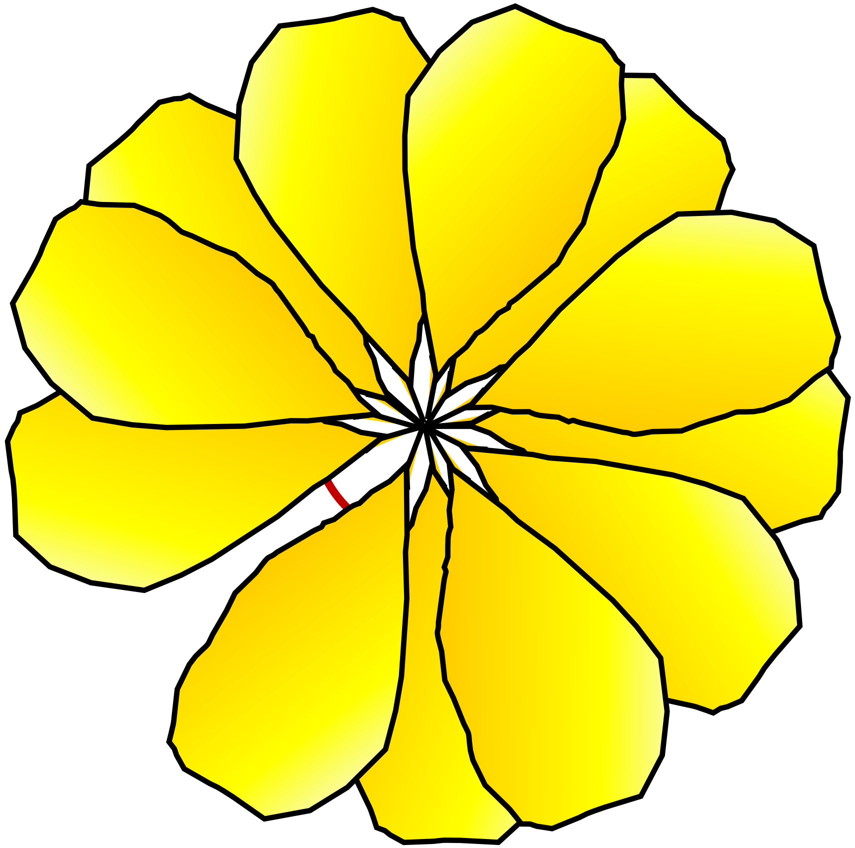
黄金角度



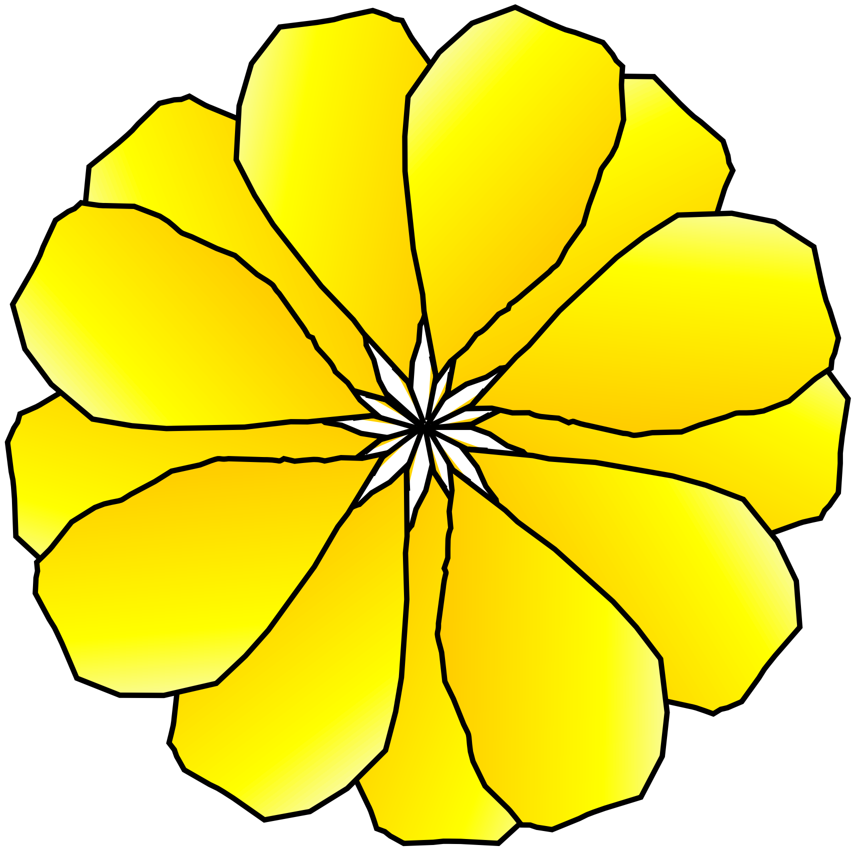
黄金角度



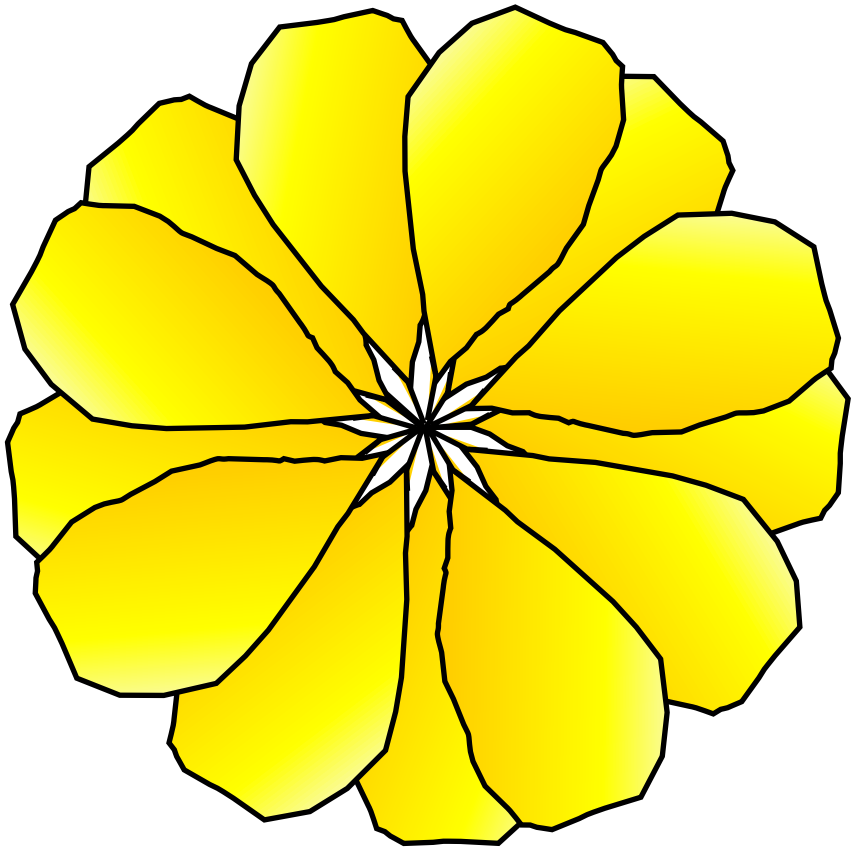
黄金角度



黄金角度

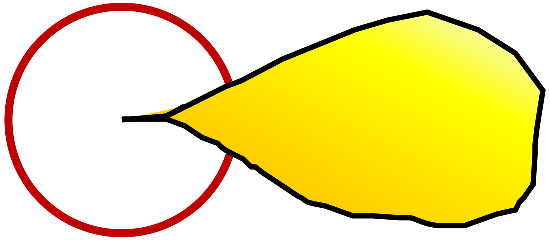


黄金角度

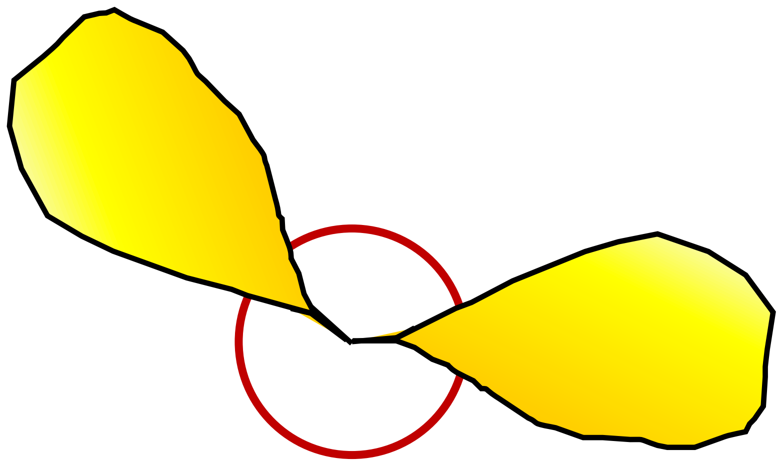


お気づきでしょうか？

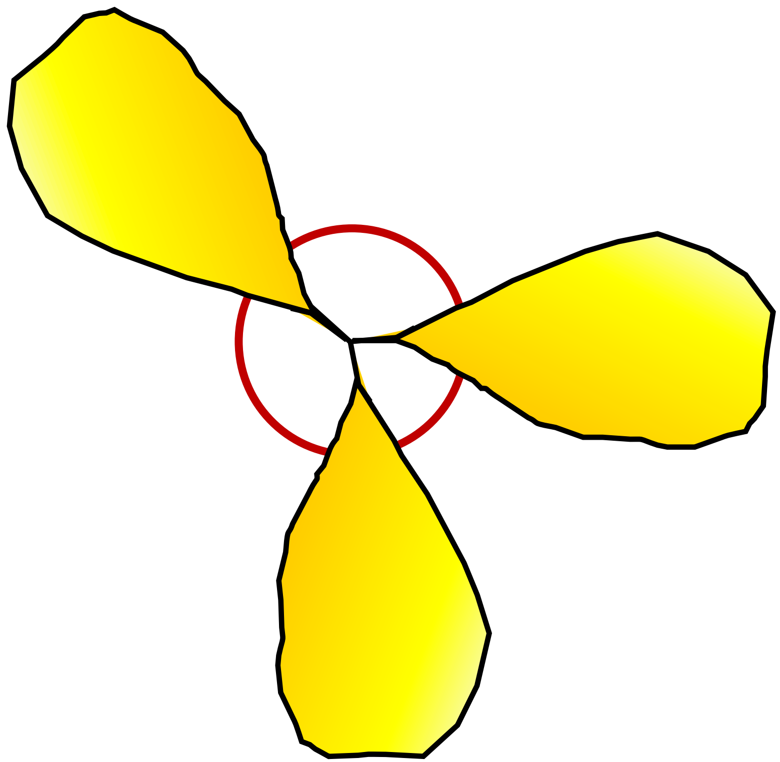
黄金角度



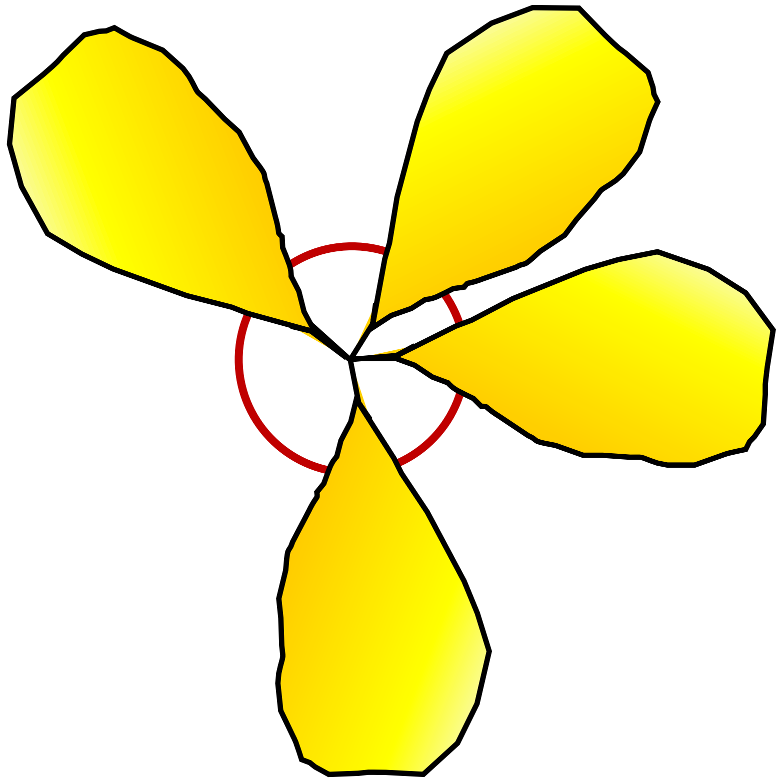
黄金角度



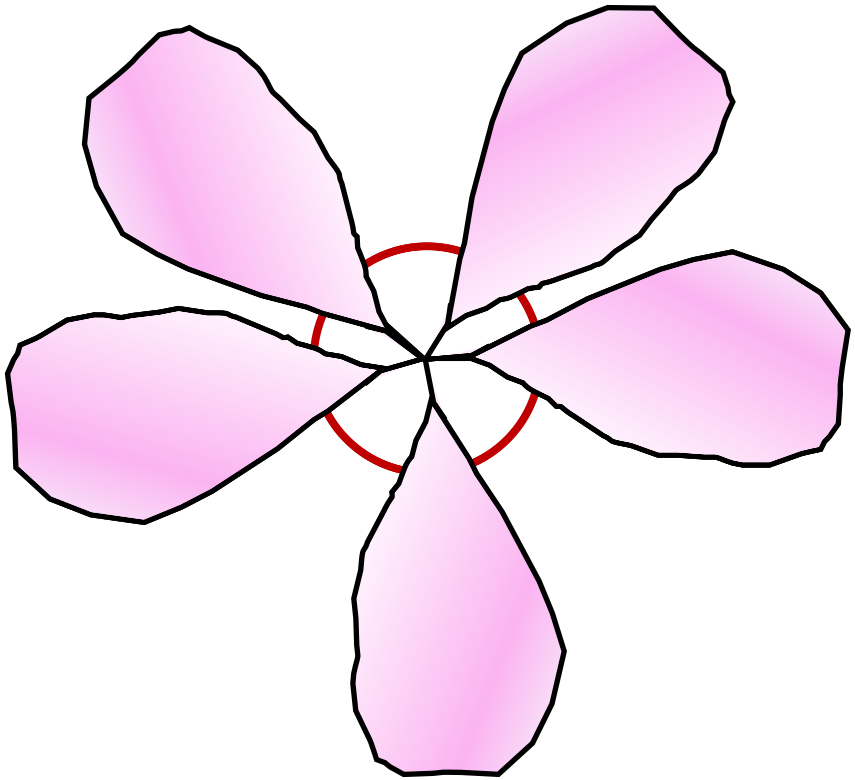
黄金角度



黄金角度

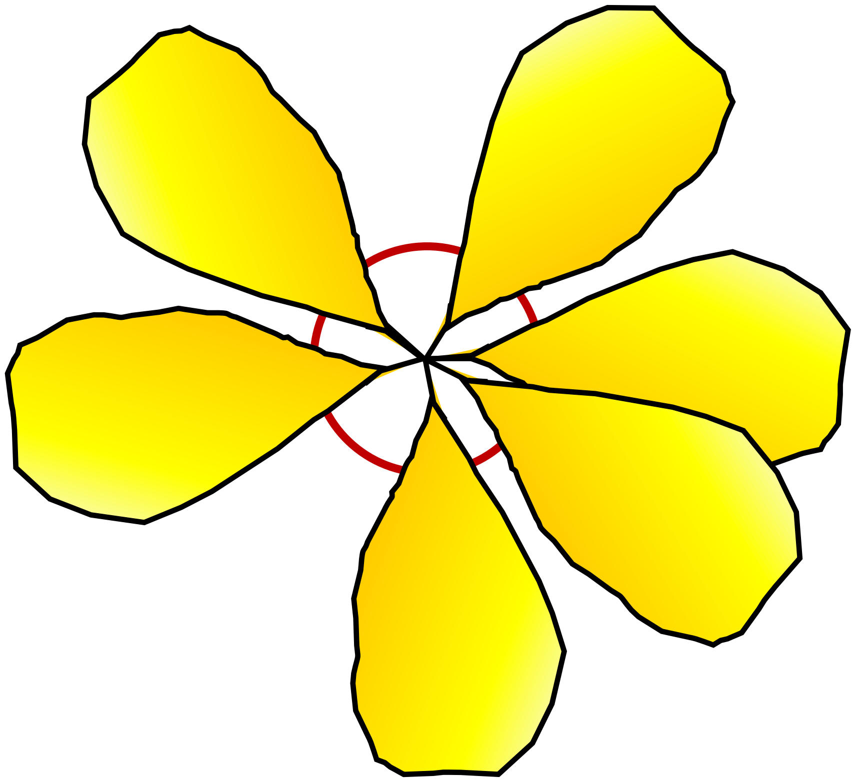


黄金角度

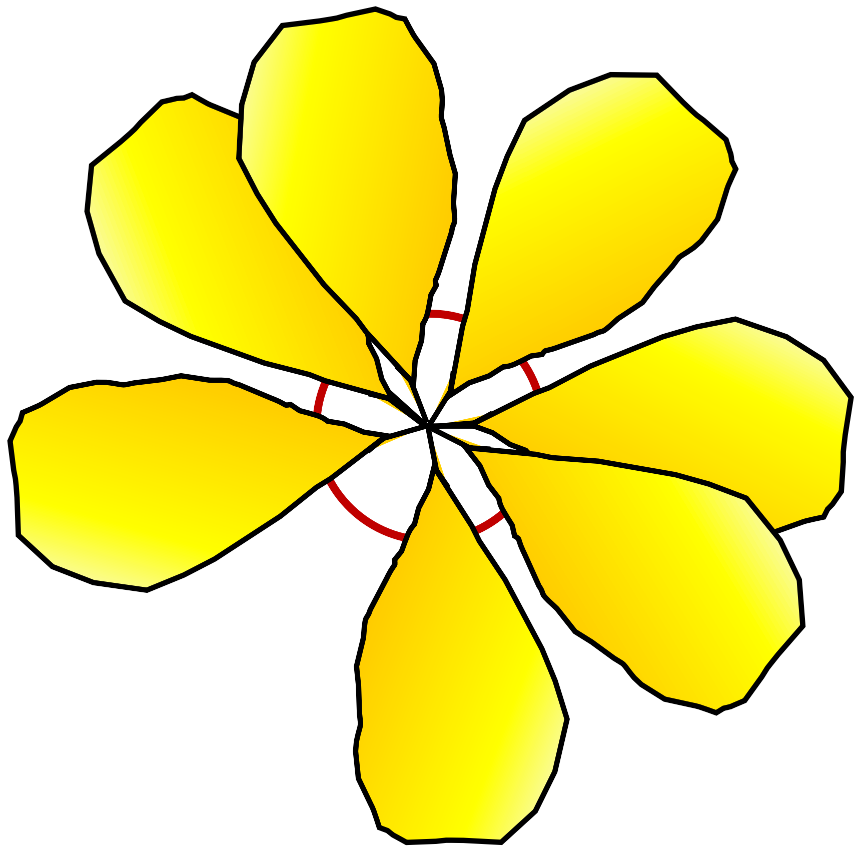


5枚

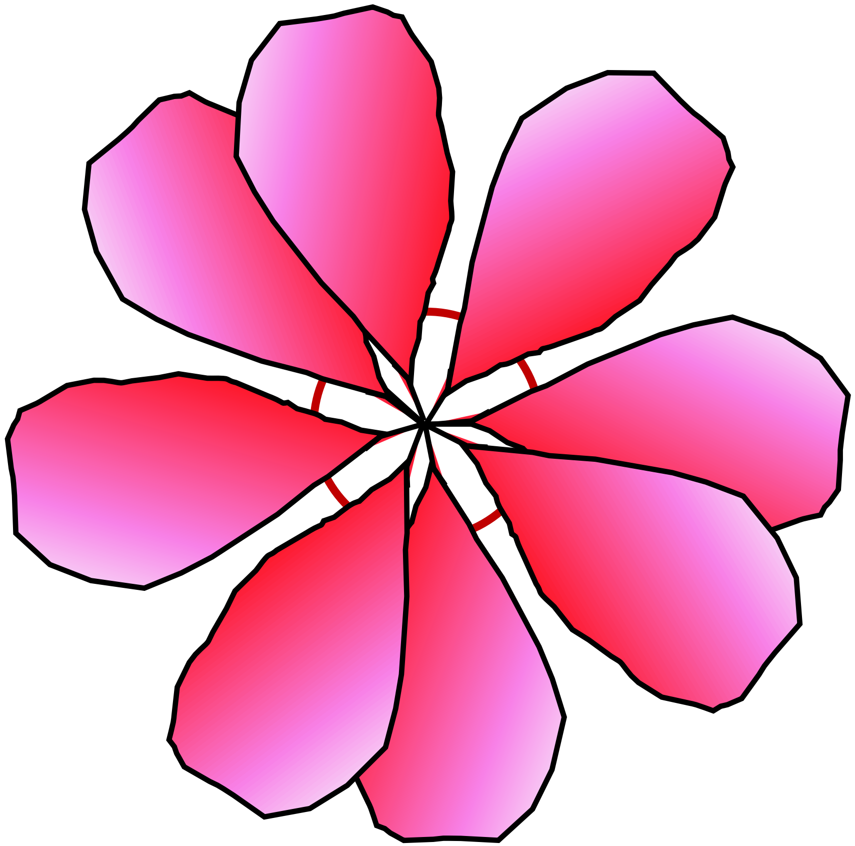
黄金角度



黄金角度

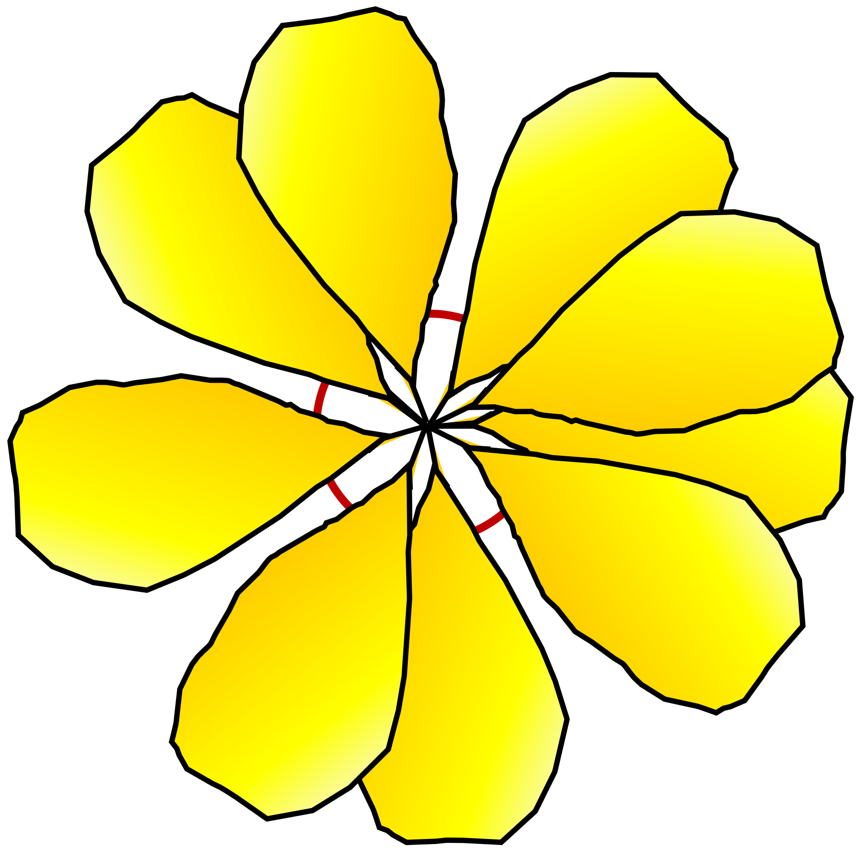


黄金角度

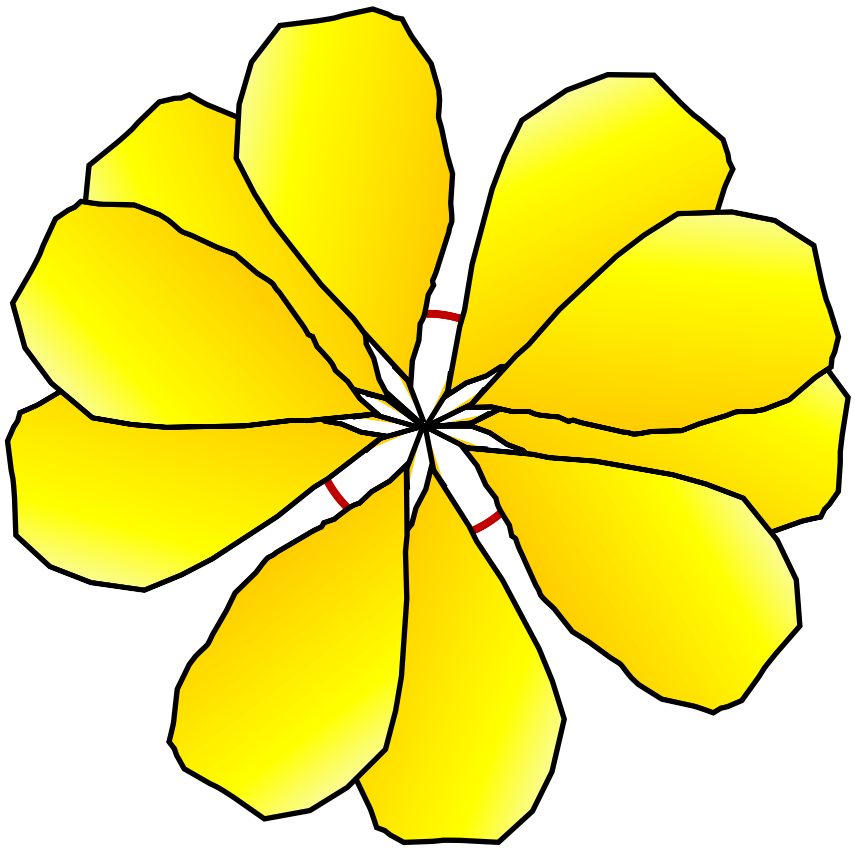


8枚

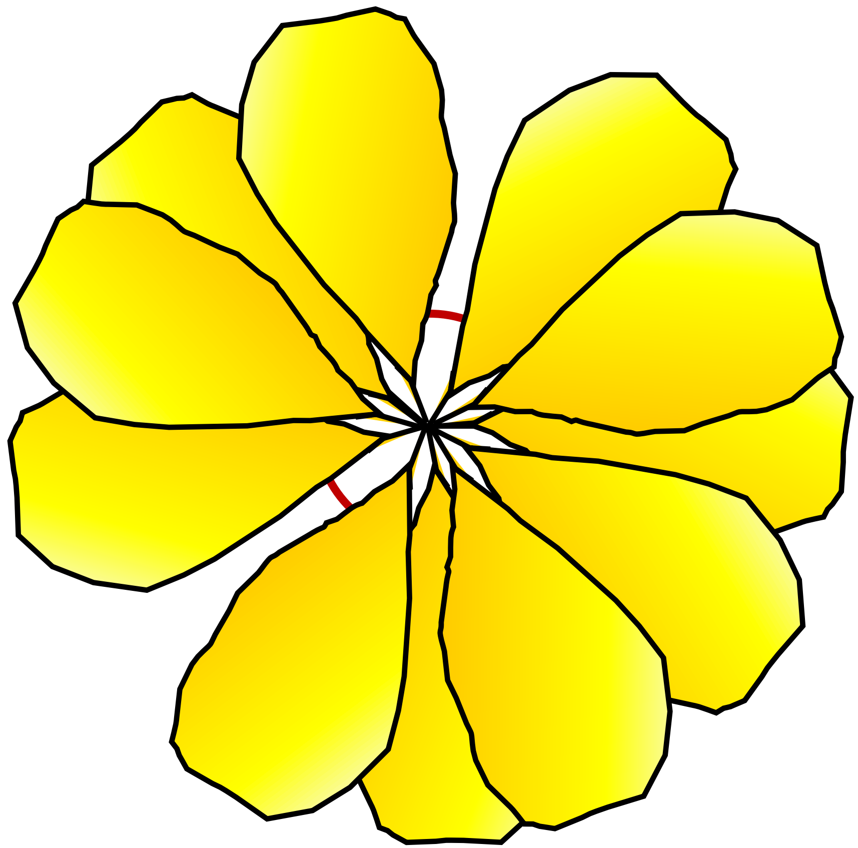
黄金角度



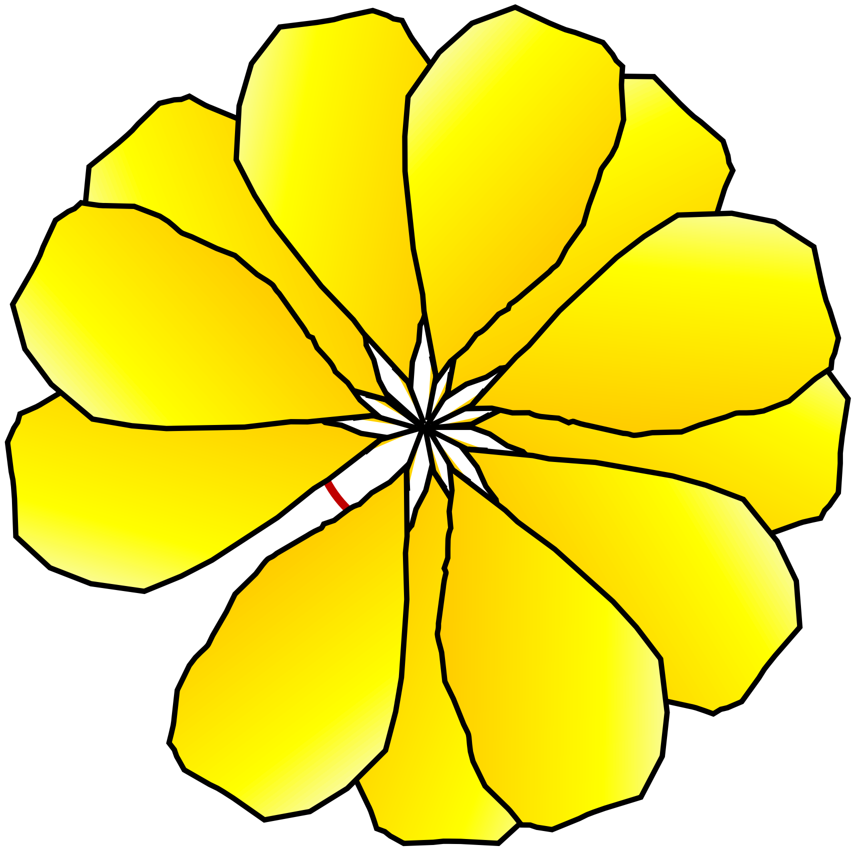
黄金角度



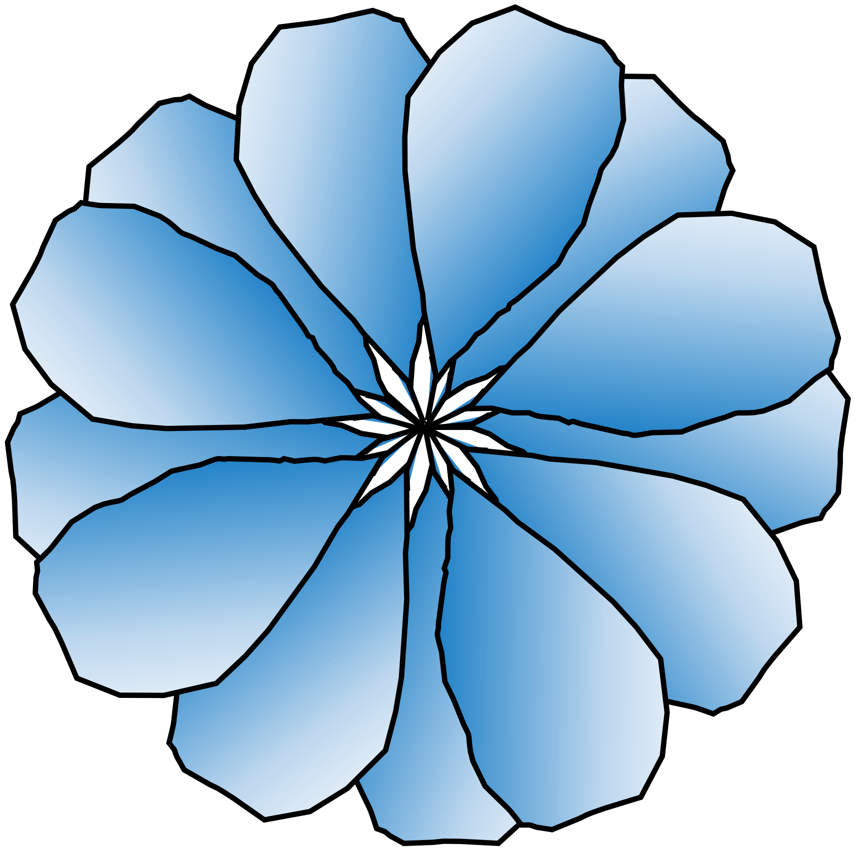
黄金角度



黄金角度

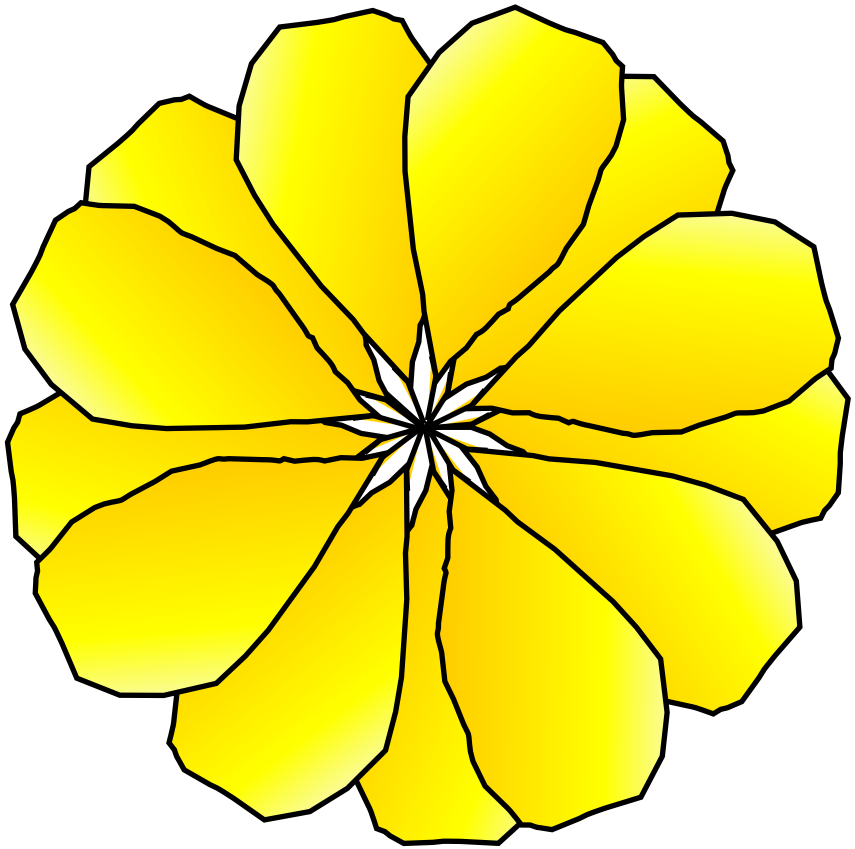


黄金角度



13枚

黄金角度



13枚

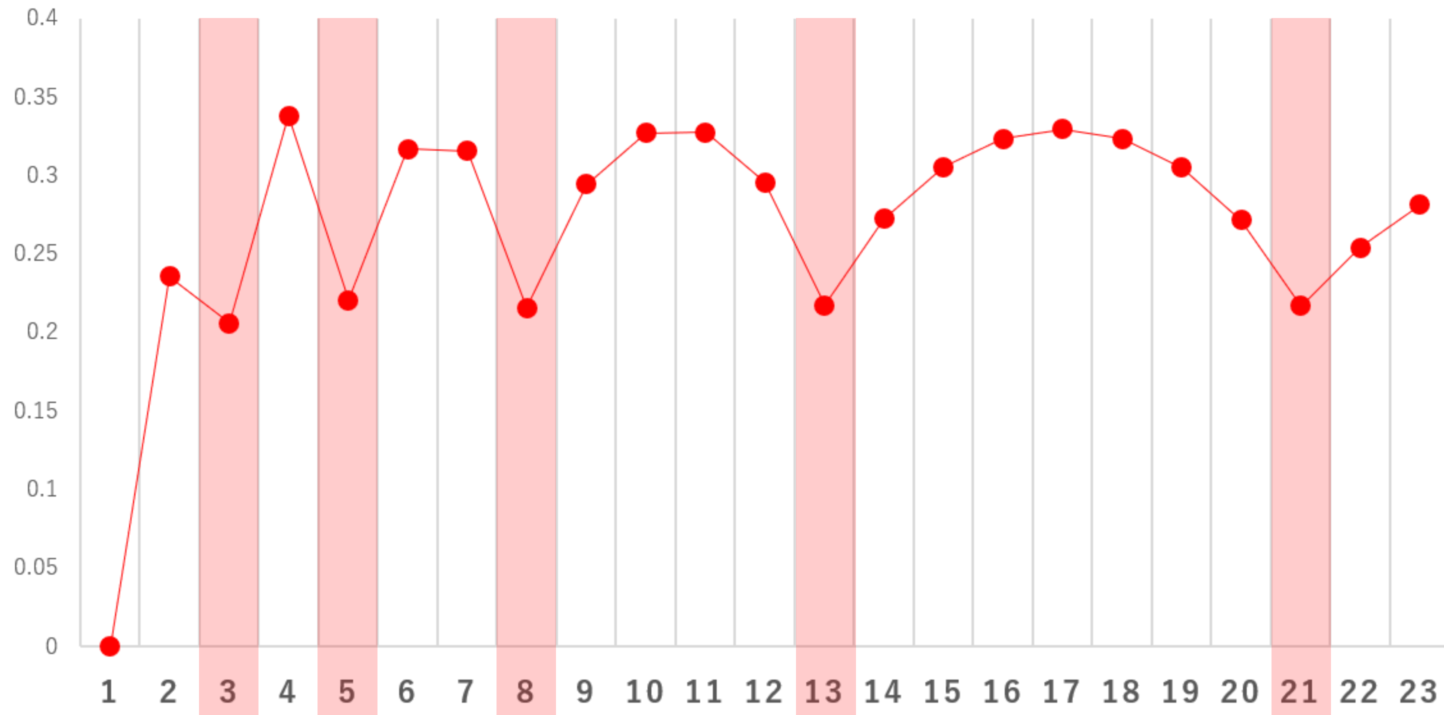
花びらの数がフィボナッチ数のとき、花のバランスがいい。

||

花びら同士の「なす角（開度）」のばらつきが小さい

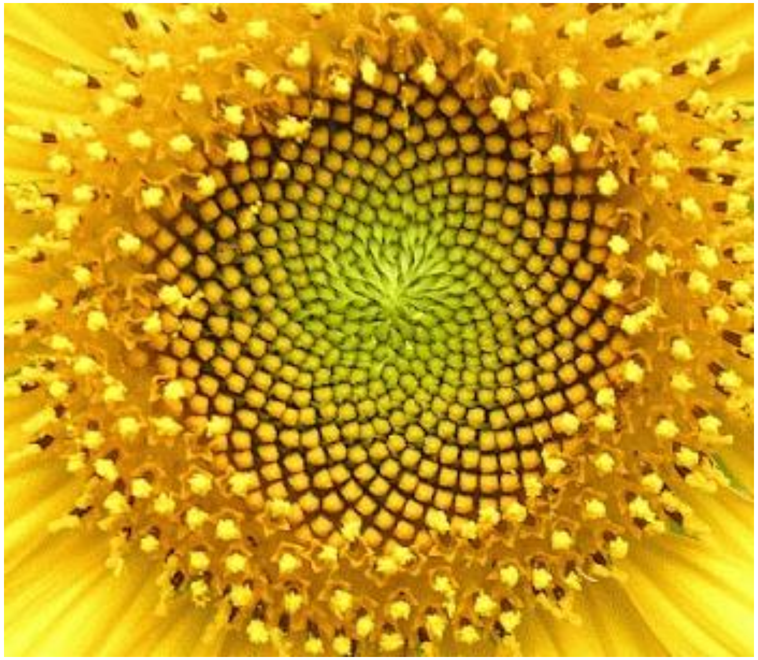
花びらの開度のばらつき

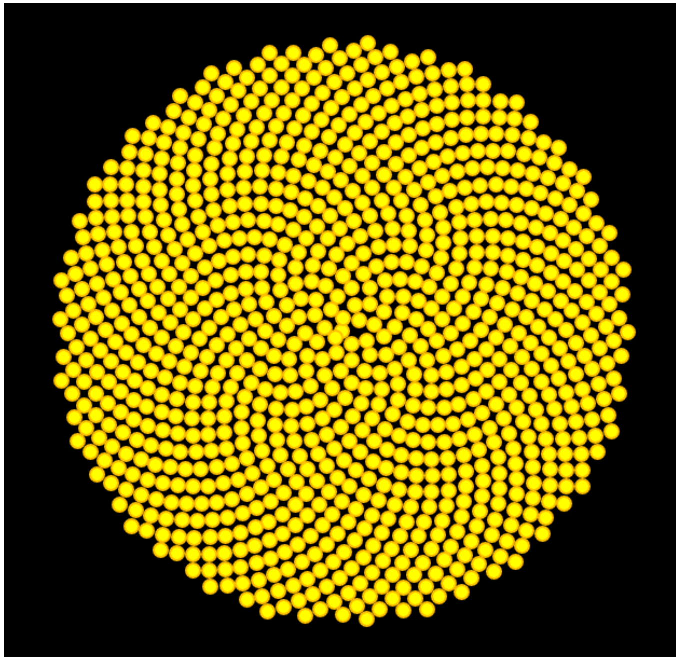
花びらの枚数とばらつき具合を表すグラフ



フィボナッチ数枚のとき、確かにばらつきが小さくなる

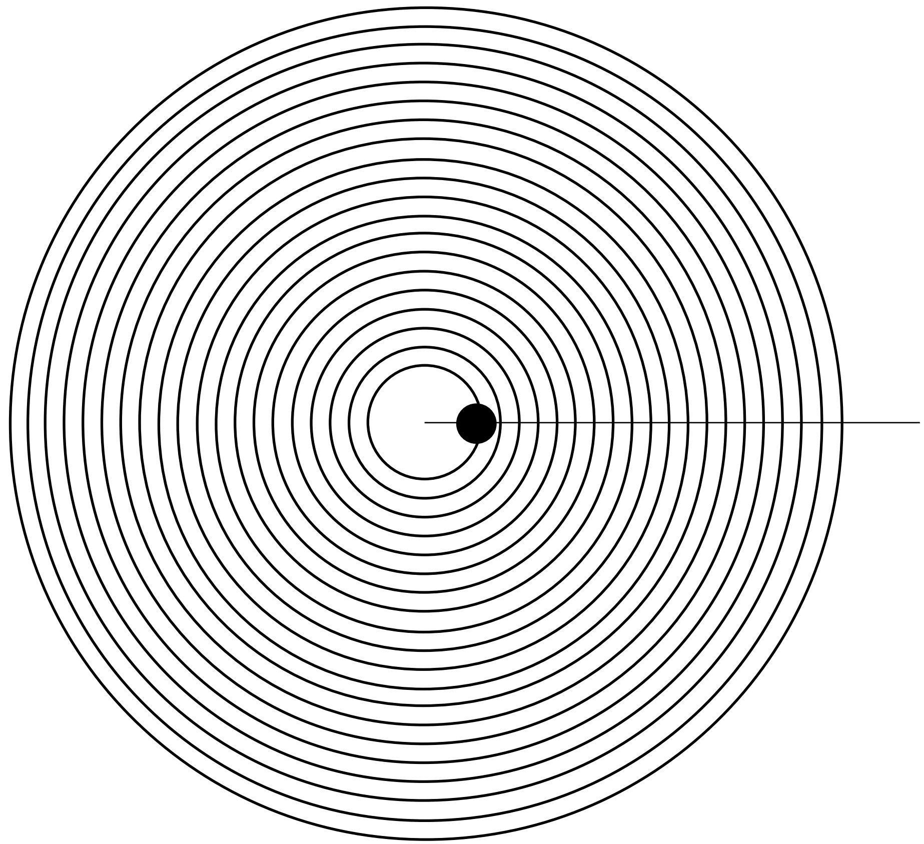
ひまわりの種の配置



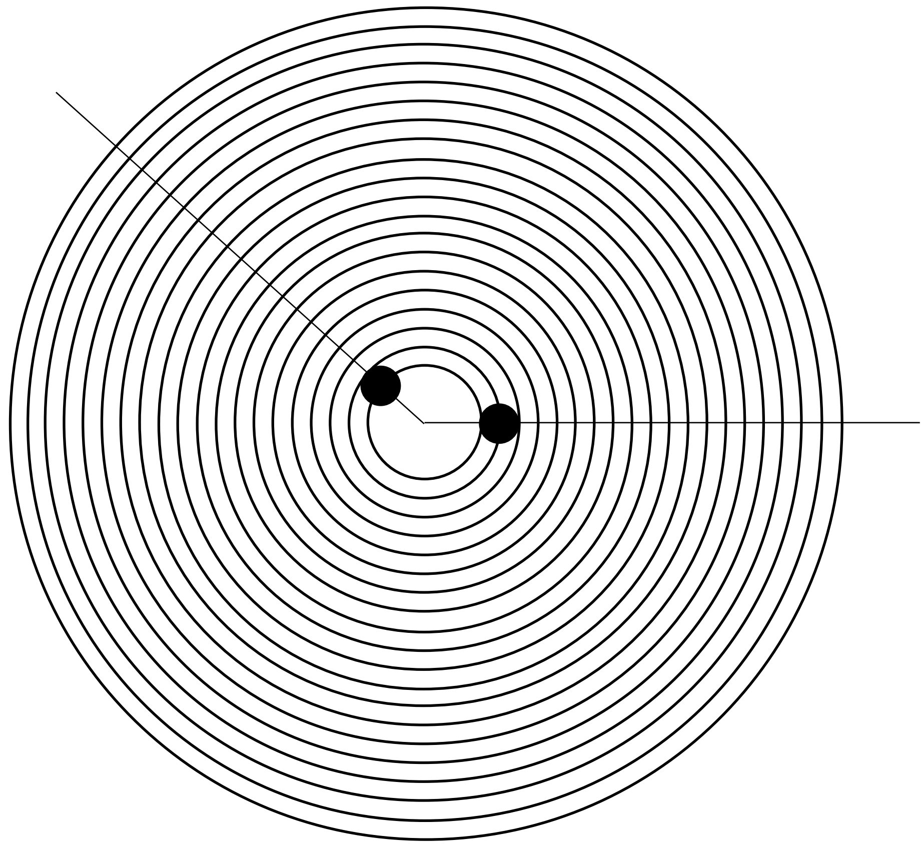


葉や花びらのつき方と同じく、種のつき方も黄金角度に従っている

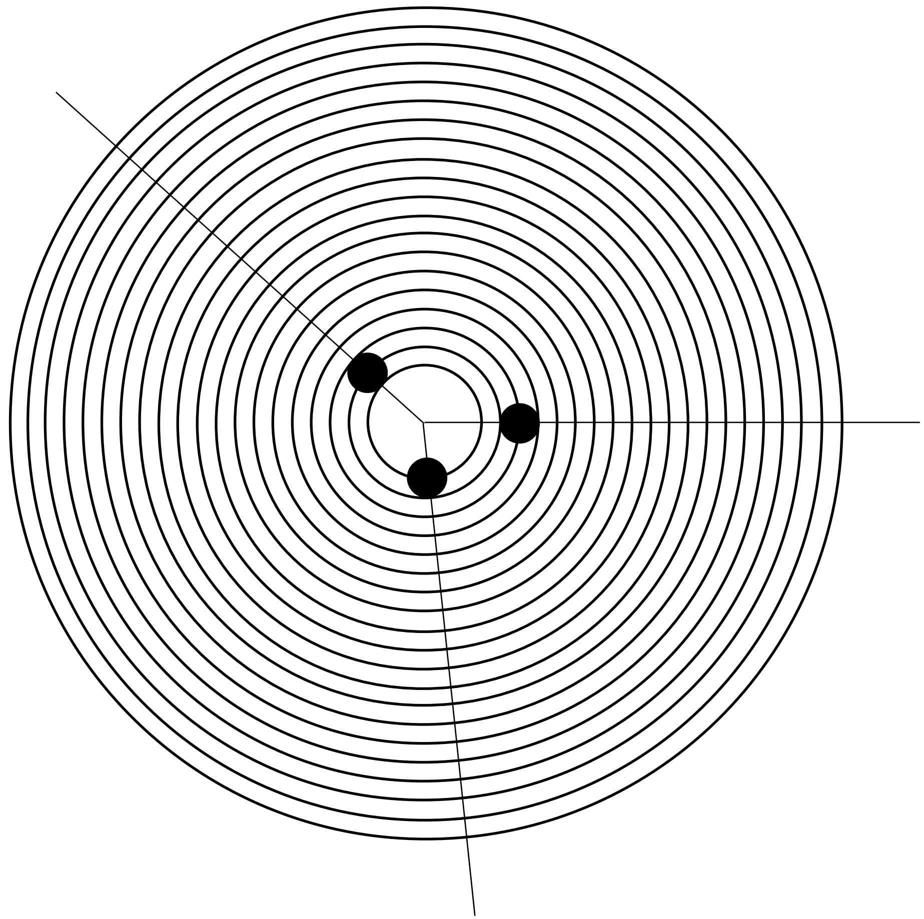
ひまわりの種の配置



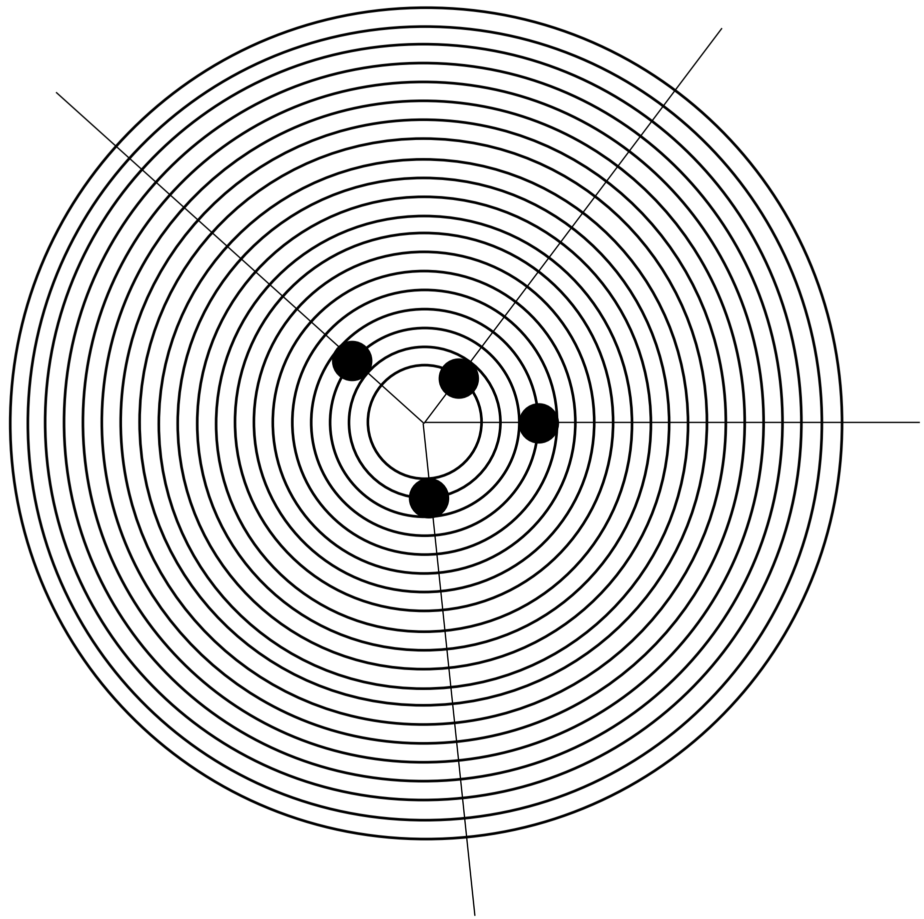
ひまわりの種の配置



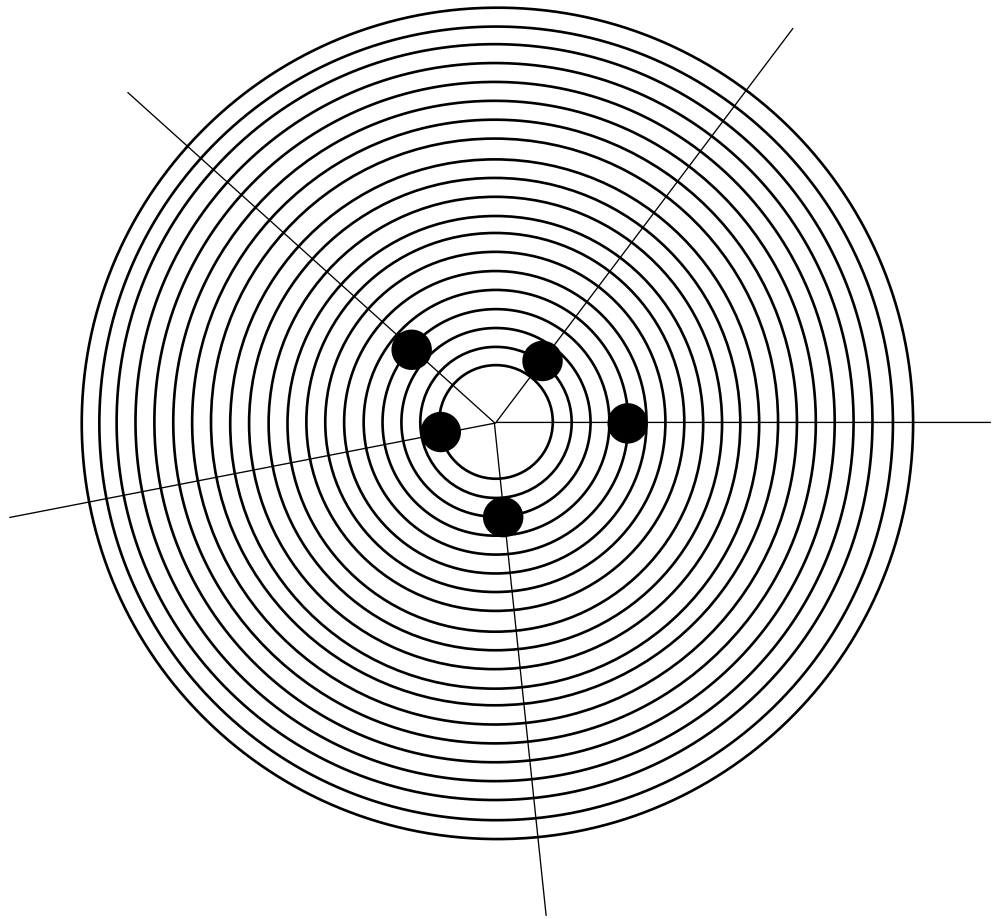
ひまわりの種の配置



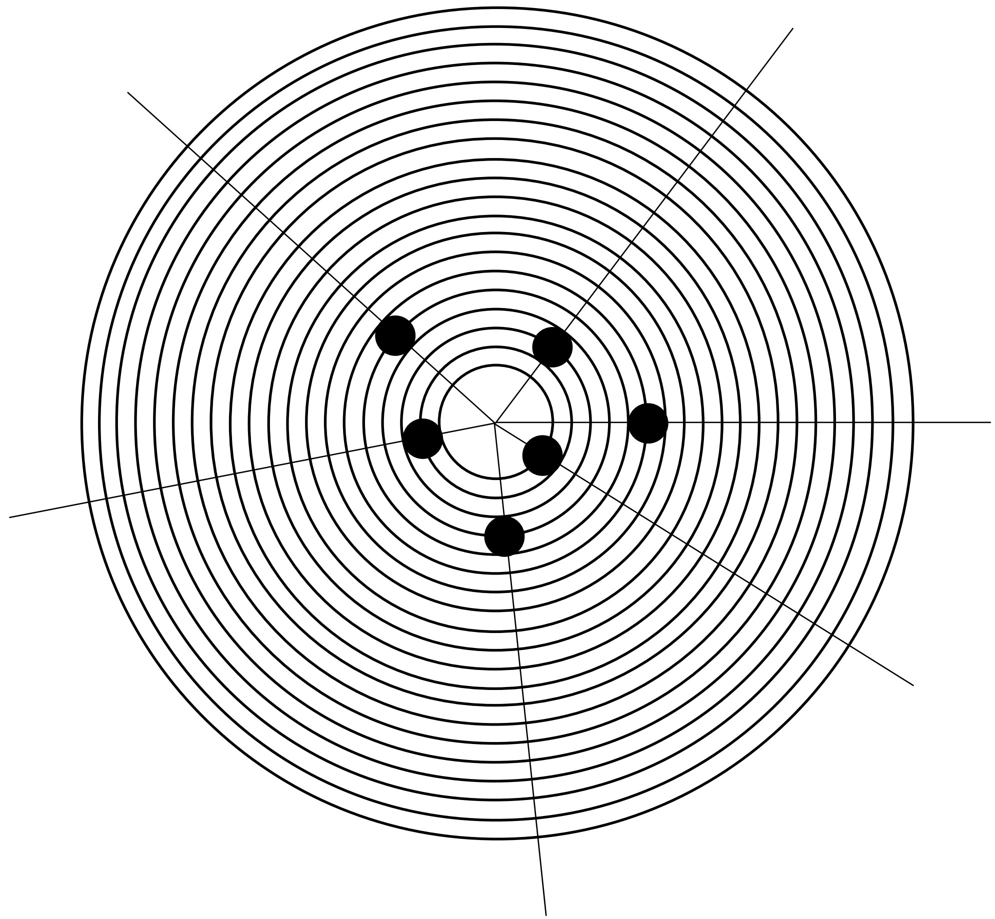
ひまわりの種の配置



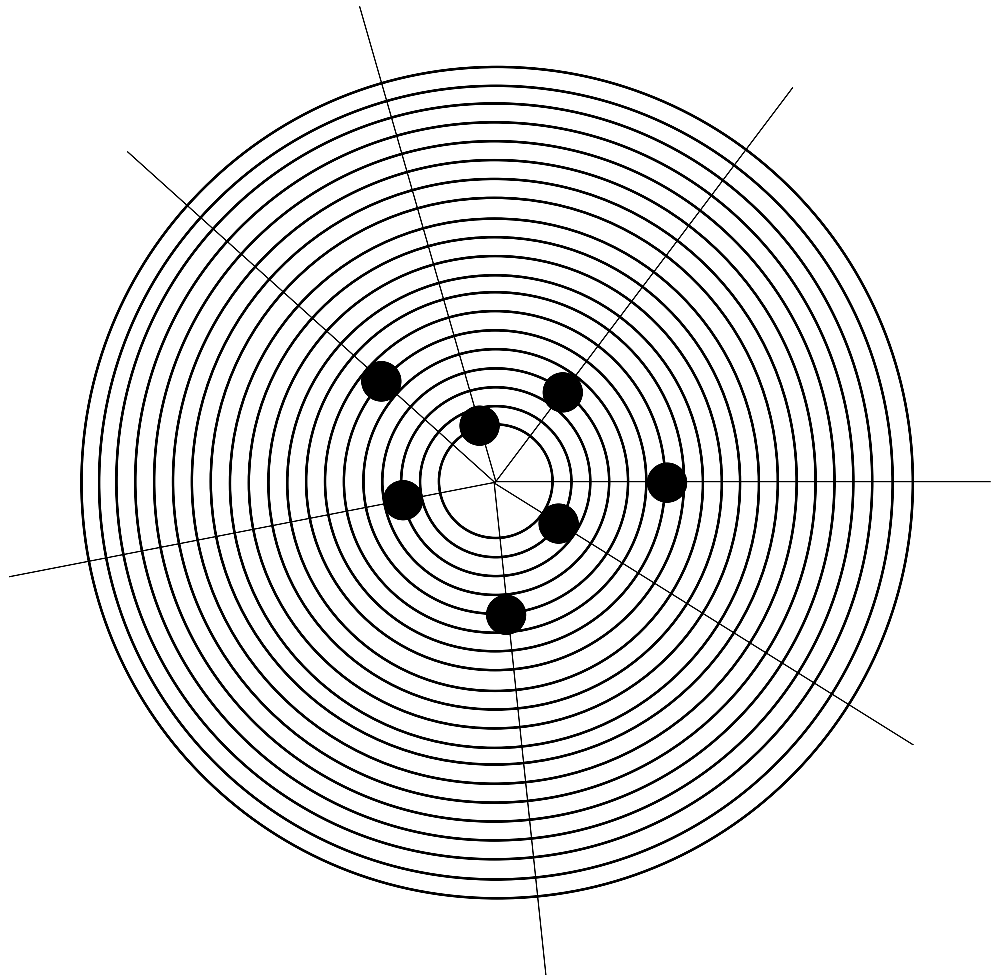
ひまわりの種の配置



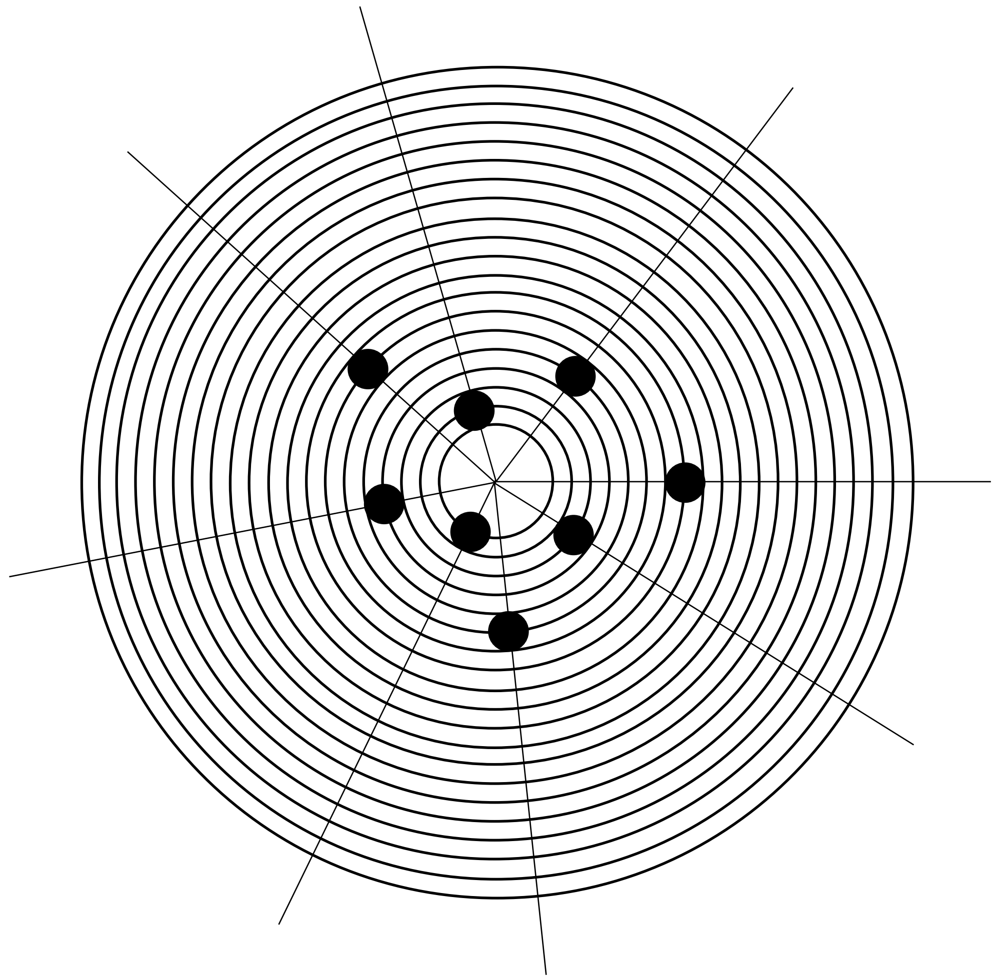
ひまわりの種の配置



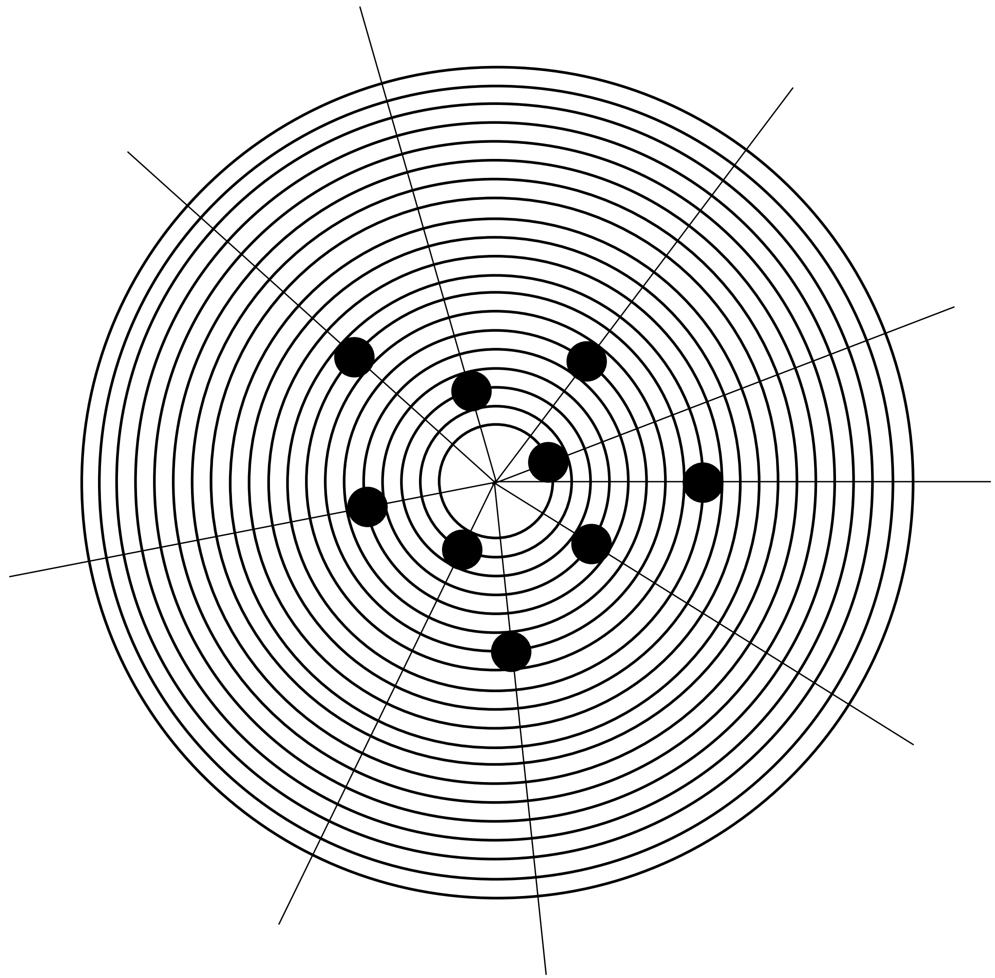
ひまわりの種の配置



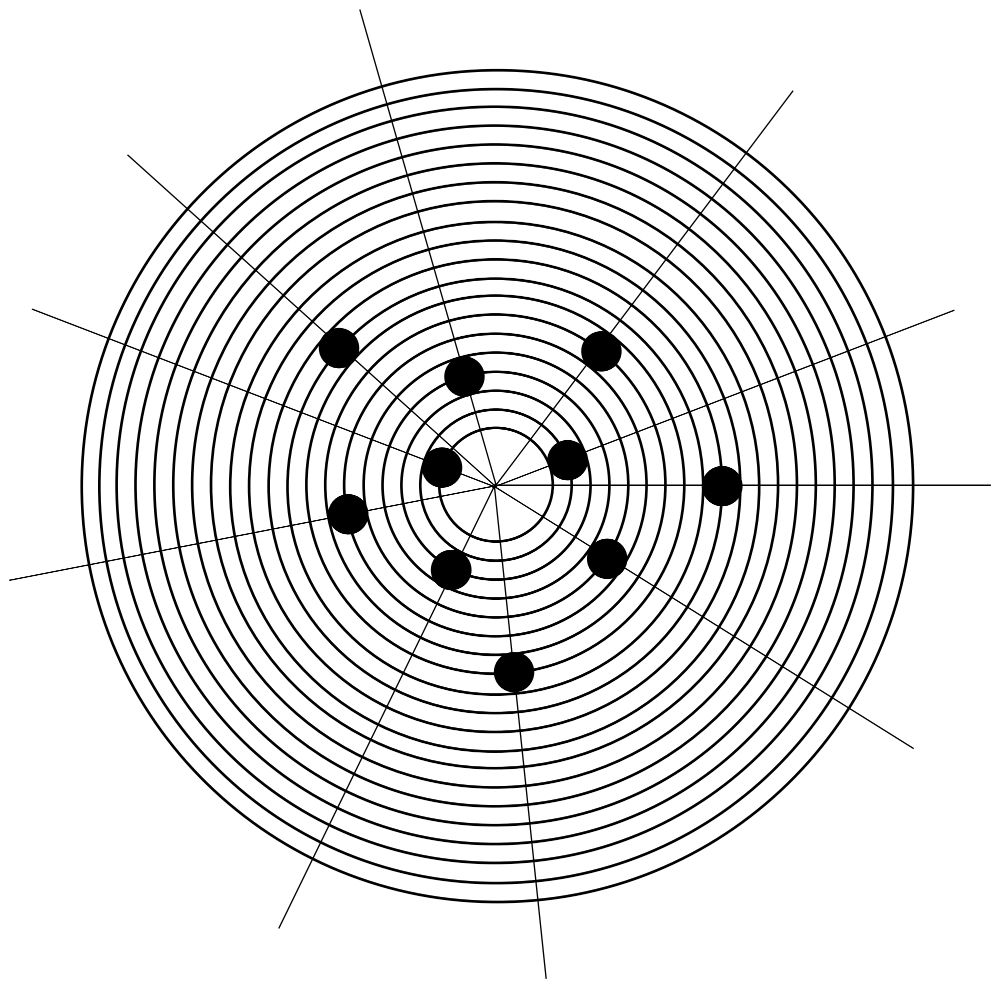
ひまわりの種の配置



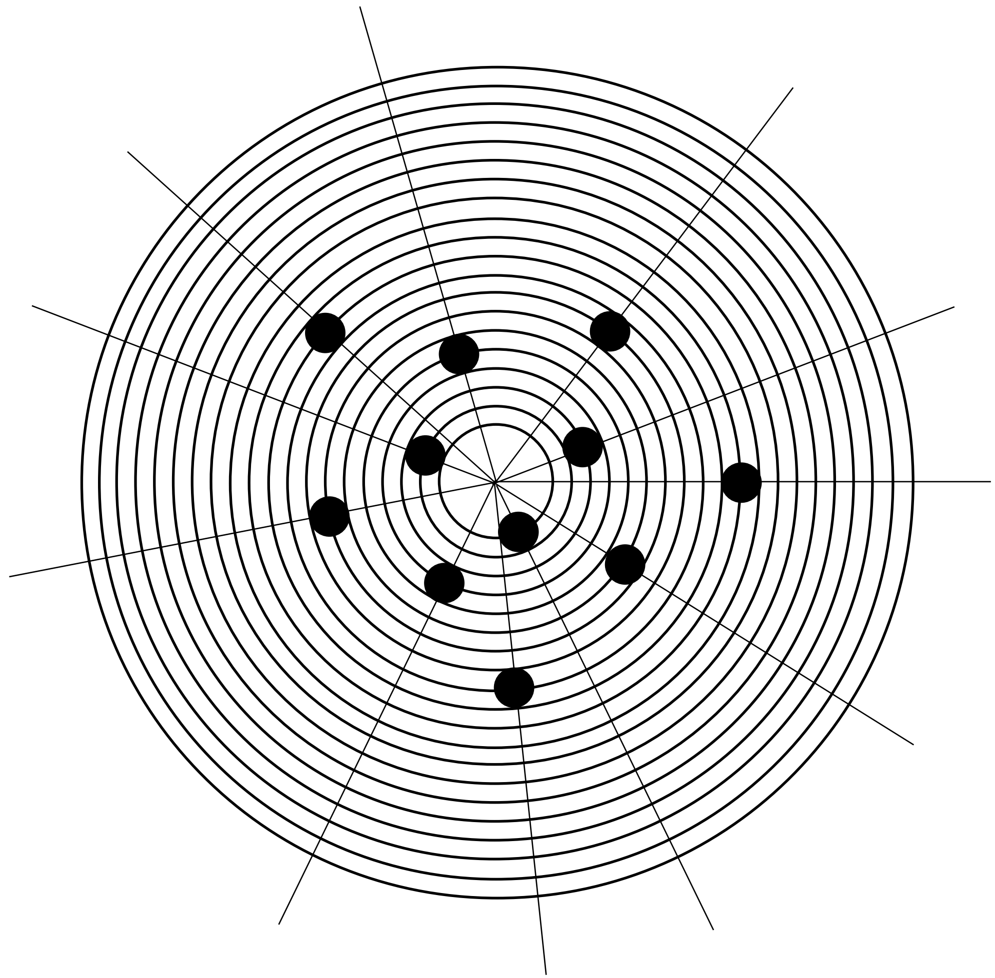
ひまわりの種の配置



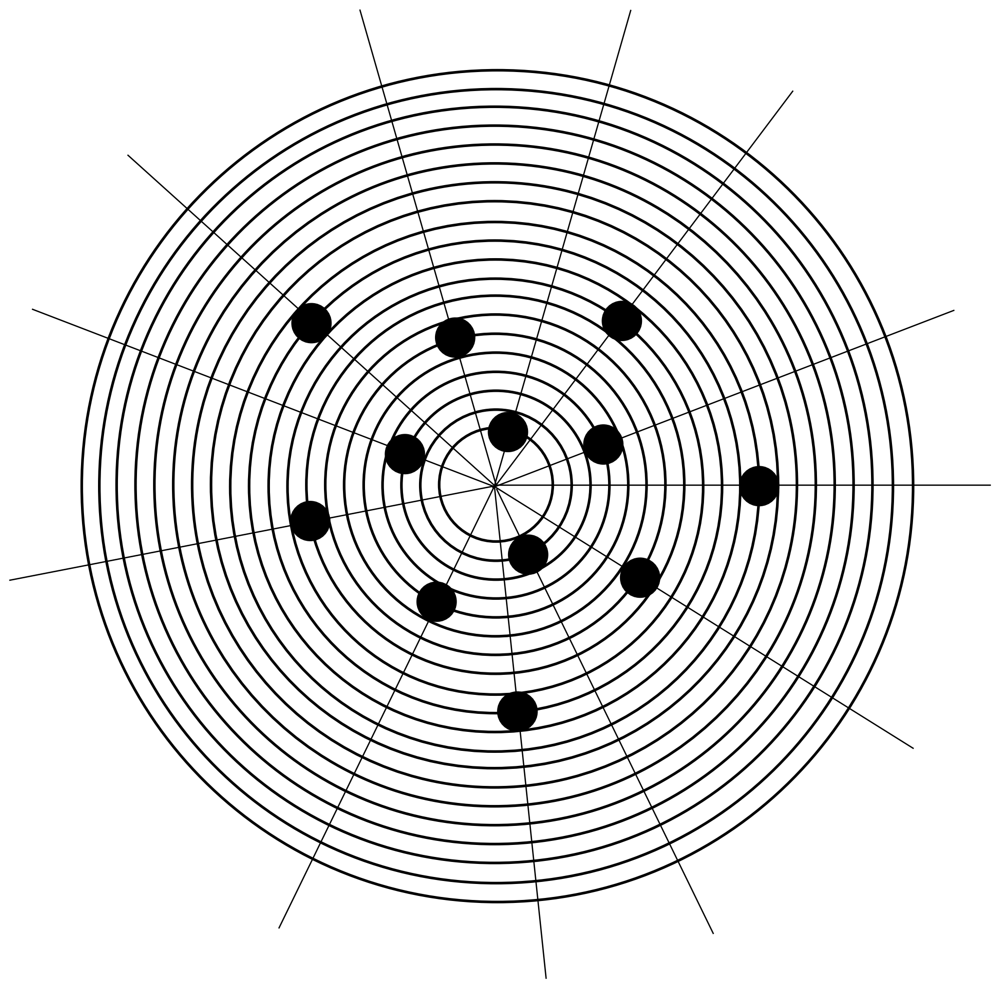
ひまわりの種の配置



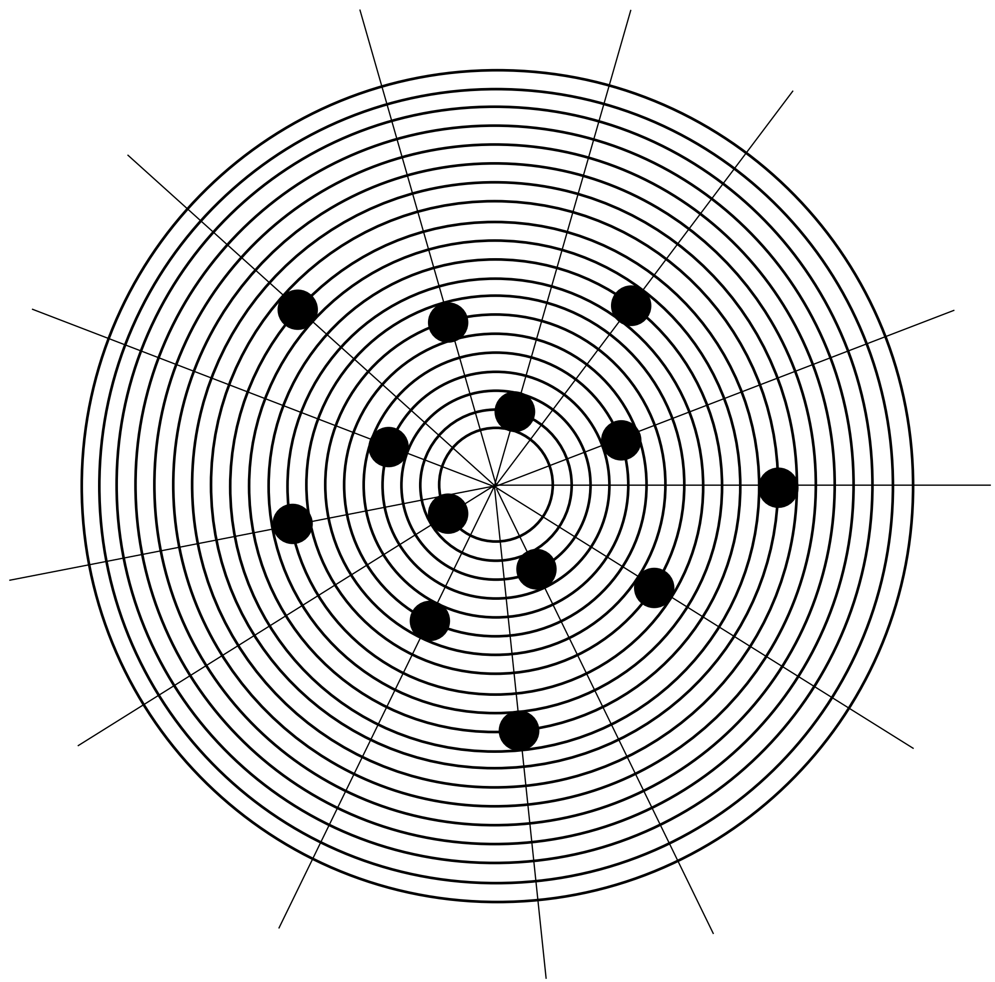
ひまわりの種の配置



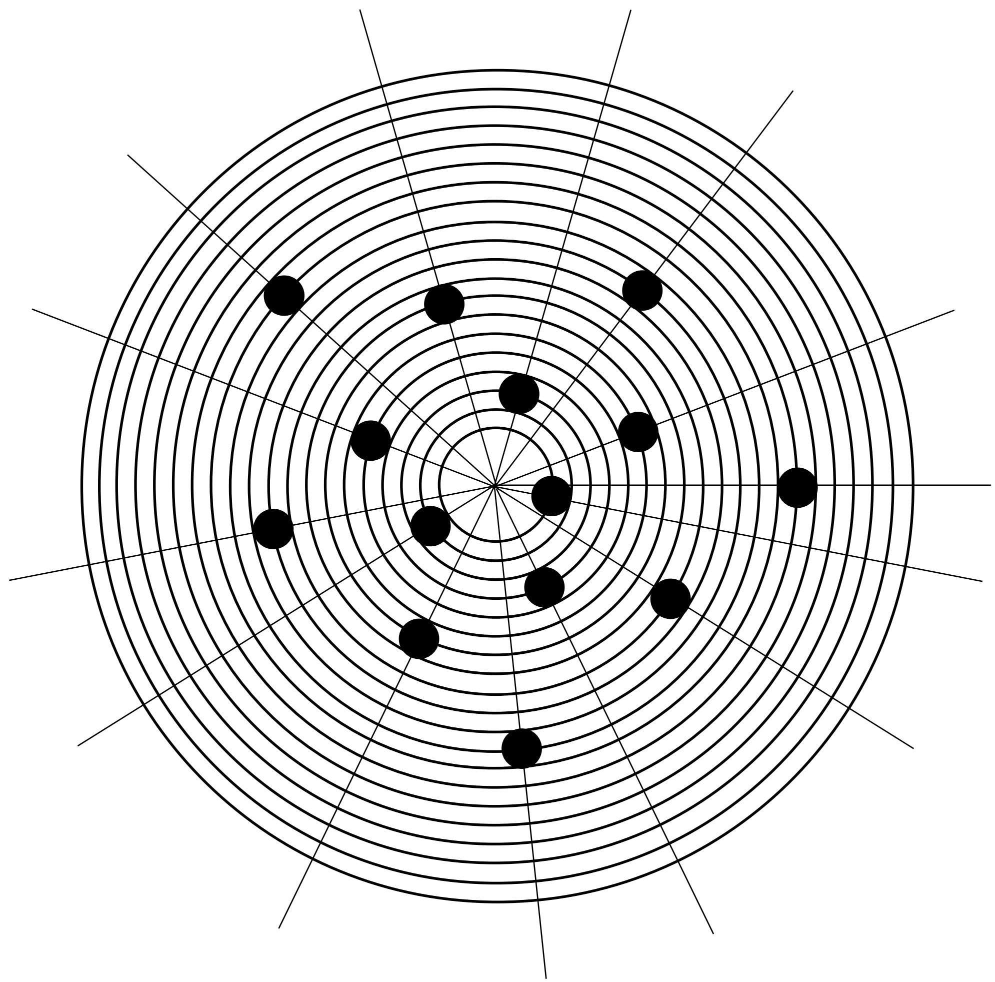
ひまわりの種の配置



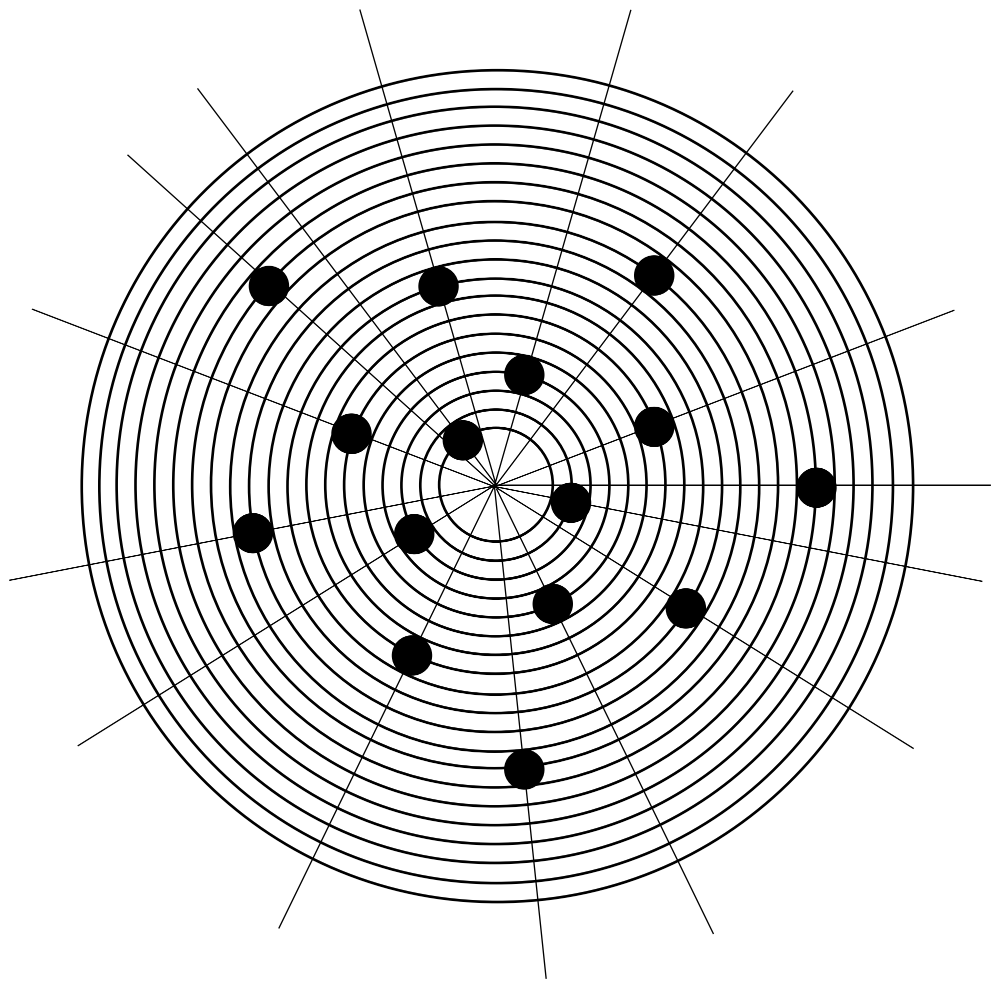
ひまわりの種の配置



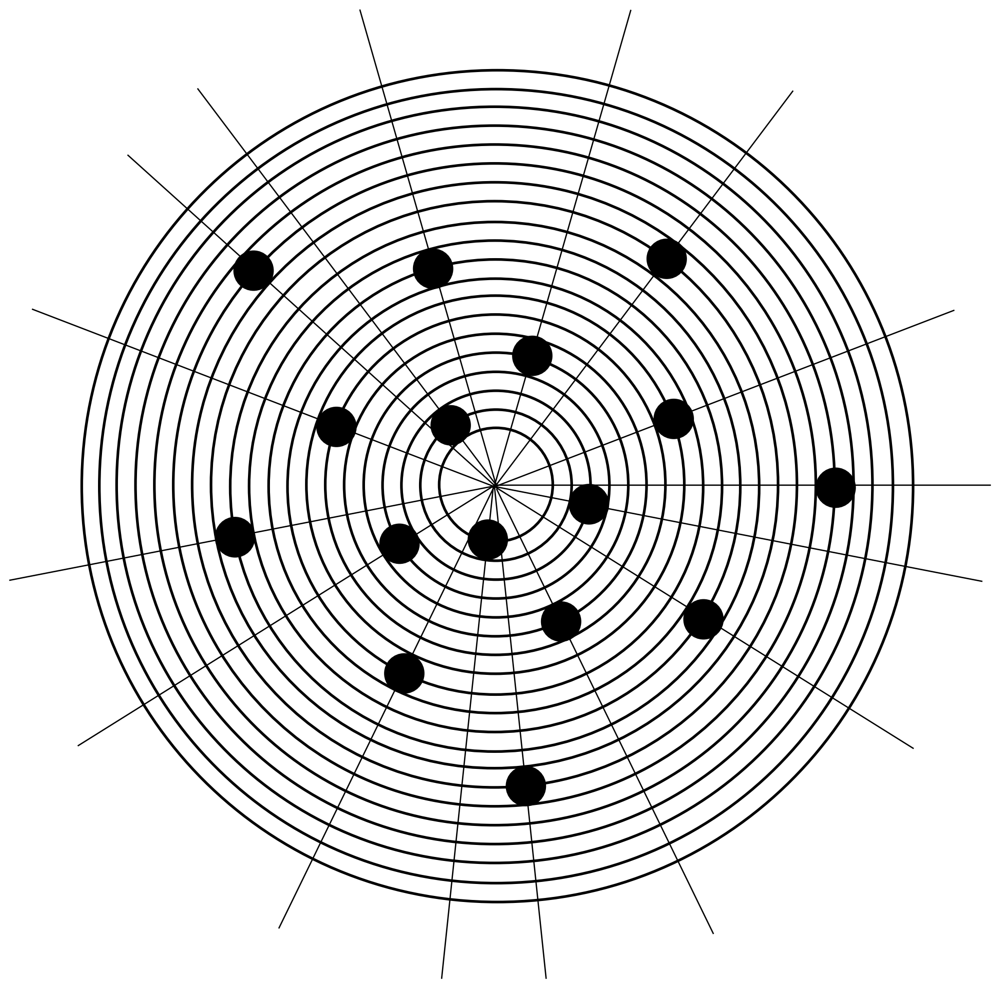
ひまわりの種の配置



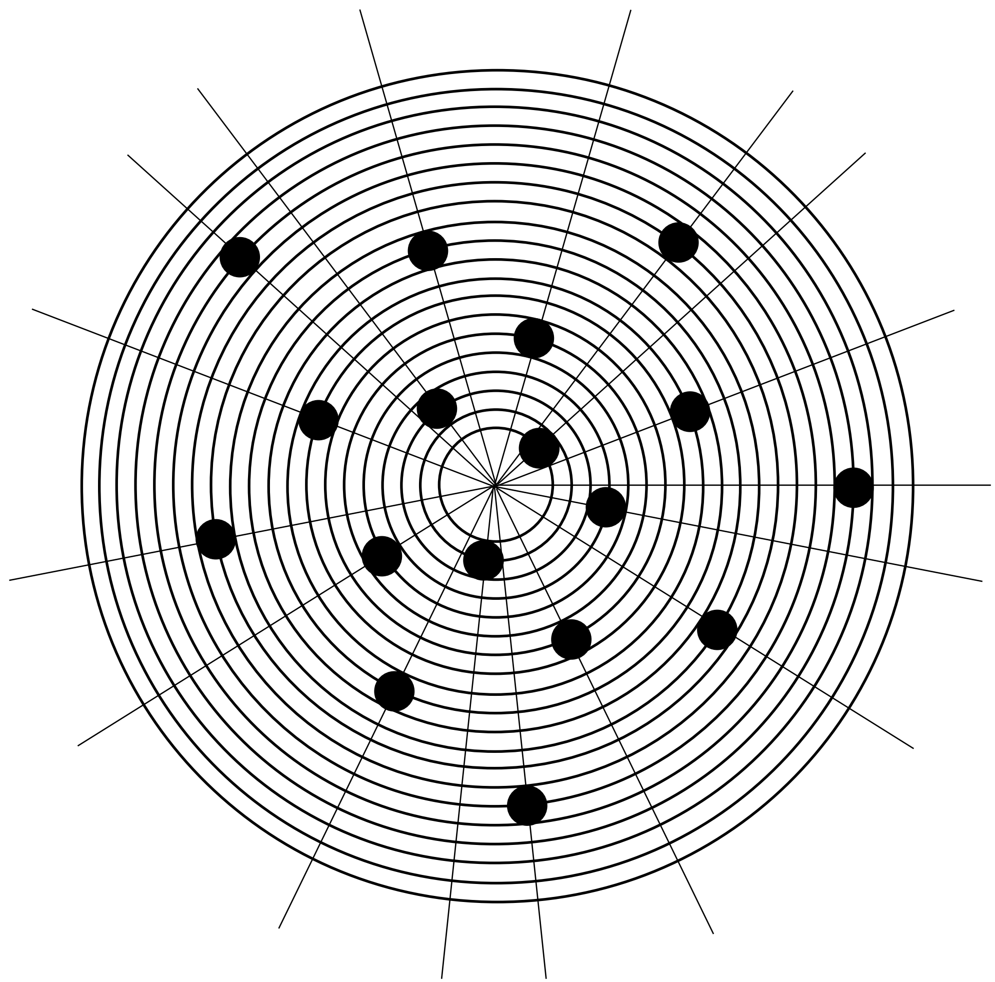
ひまわりの種の配置



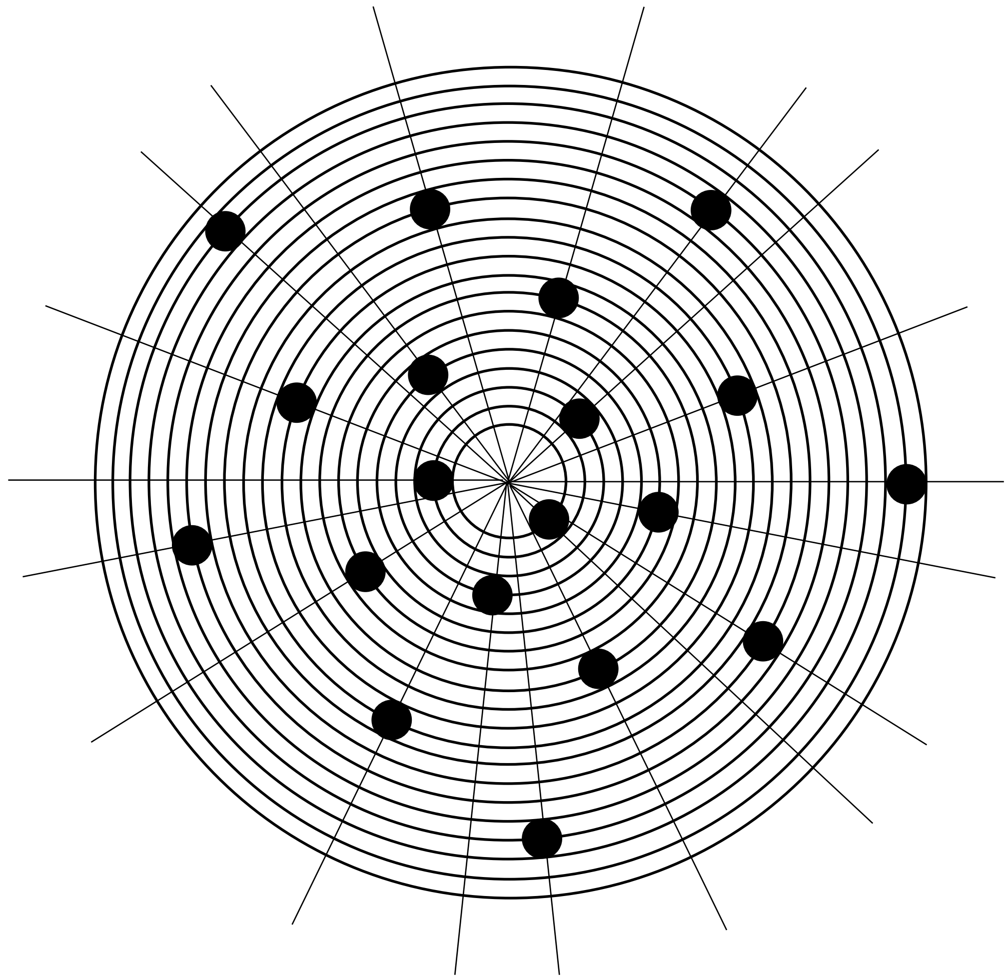
ひまわりの種の配置



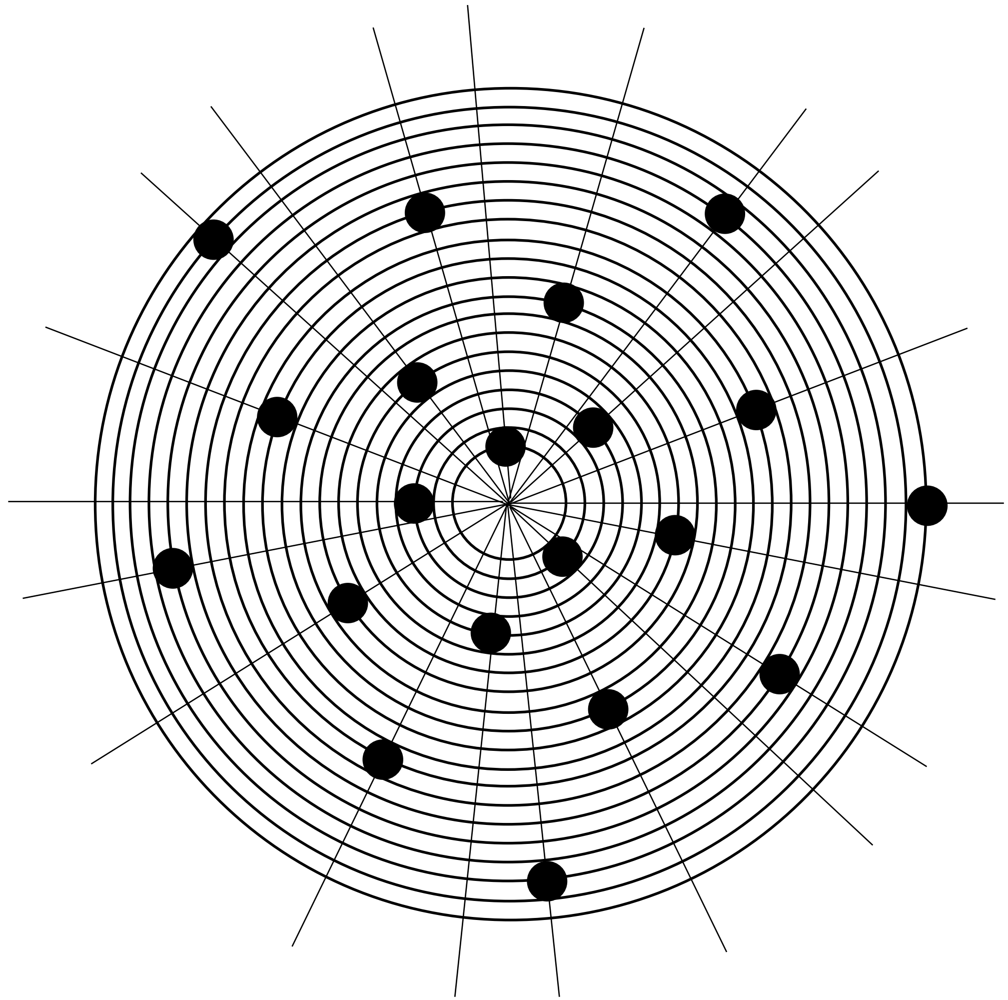
ひまわりの種の配置



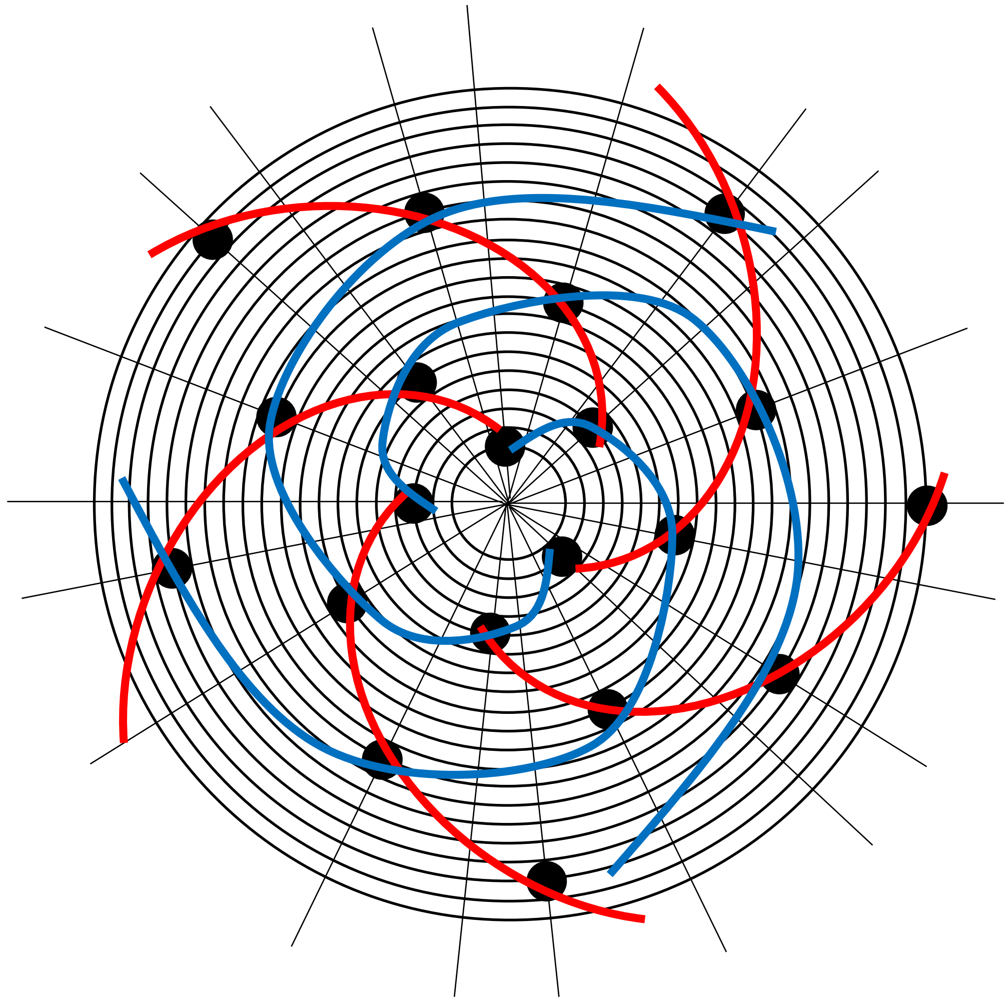
ひまわりの種の配置



ひまわりの種の配置



ひまわりの種の配置



螺旋が見えてくる

5本

3本

演習問題４（ひまわりシミュレーション）

演習問題４
散布図を使って、ひまわりの種の配置をシミュレーションしてみましょう。

F_{n+1}/F_n	1.618026	黄金比	1.618
成長率	0.5	n	13

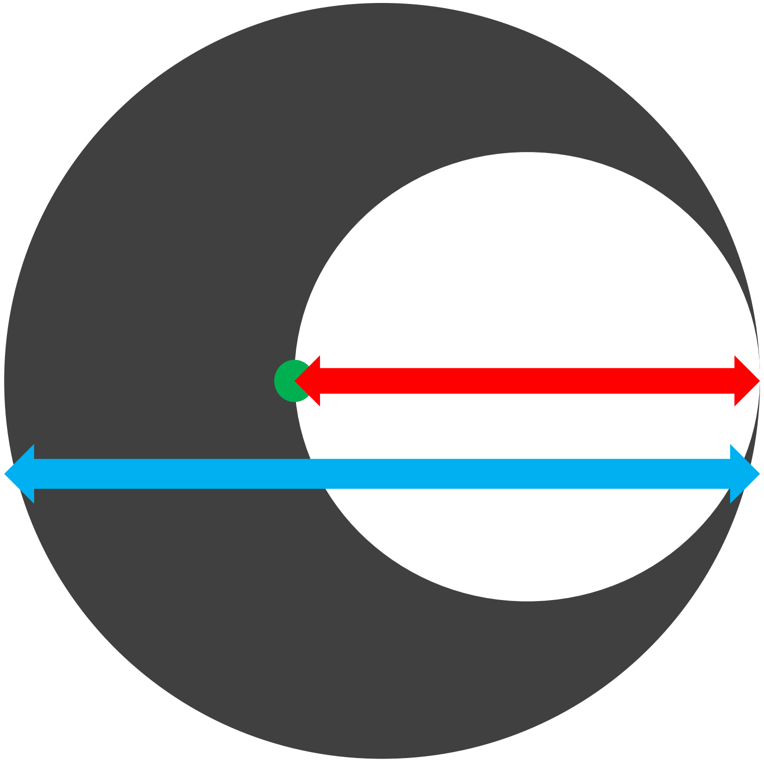
←数字を変えてみましょう。

n	x	y
0	0	0
1	-0.73736	-0.6755
2	0.123583	1.408803
3	1.053929	-1.37449
4	-1.96945	0.348208
5	1.886576	1.200347
6	-0.63562	-2.36558
7	-1.21977	2.347799
8	2.656955	-0.96984
9	-2.77283	-1.14516
10	1.339752	2.864448

理論的解説

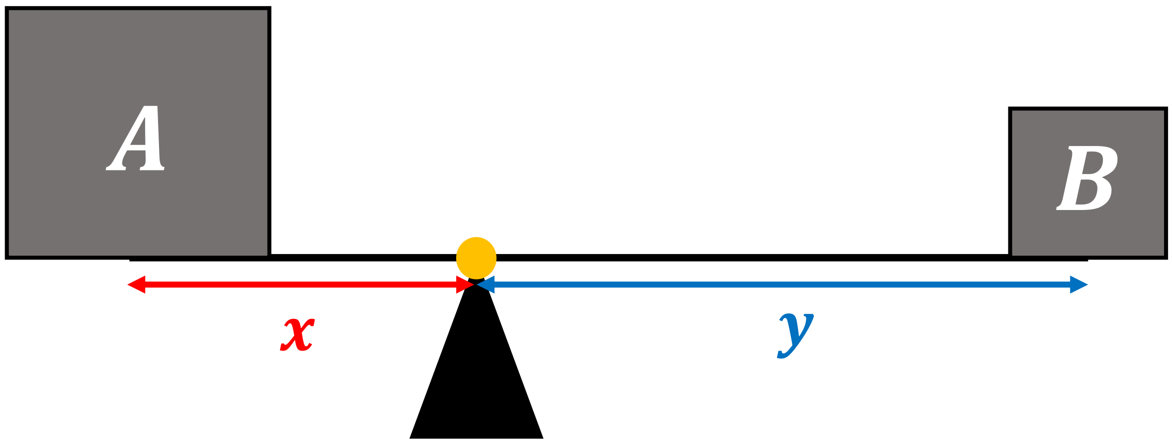
Question (Center of Crescent)

大きな円から内接する小さな円をくり出すことで三日月形を作る。この図形の重心が境界線上にある場合、2つの円の比率をどのようになるか。



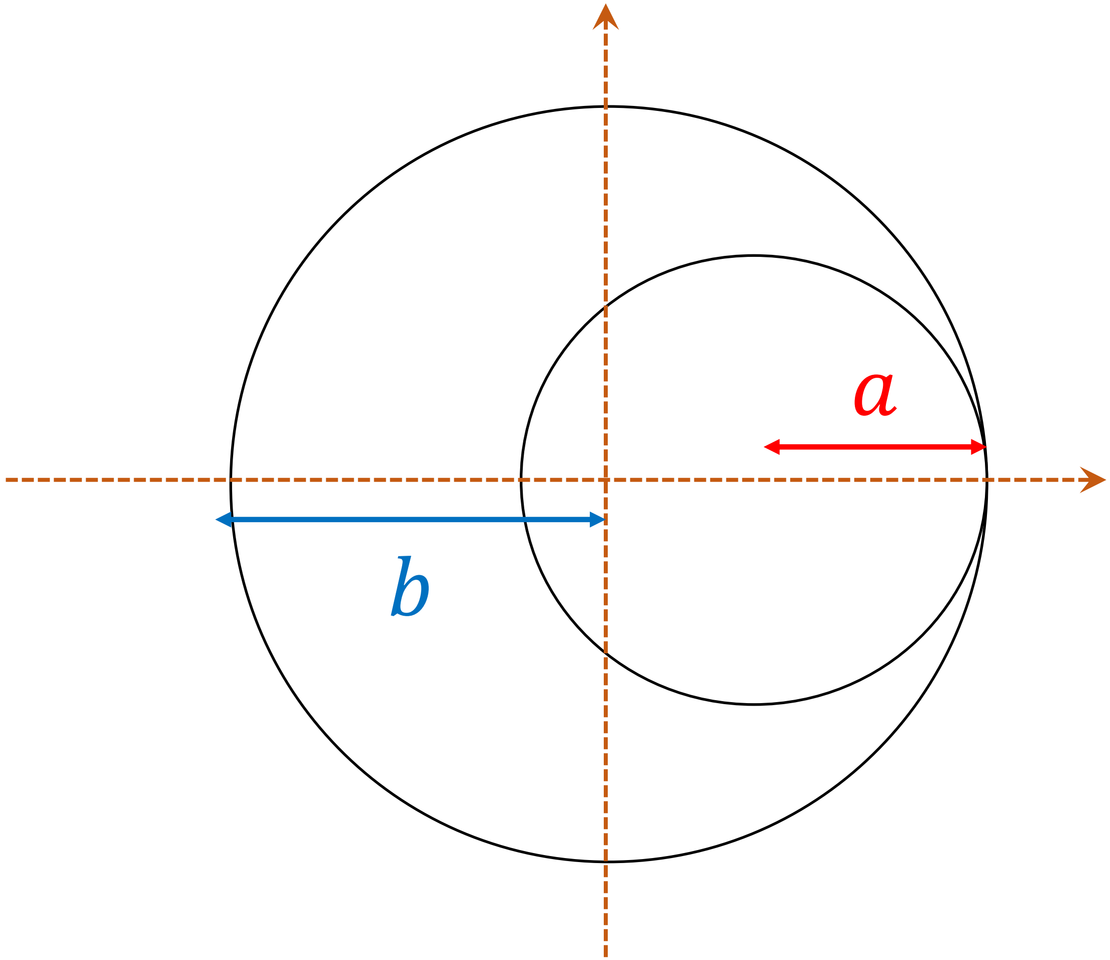
Question (Center of Crescent)

重心の法則

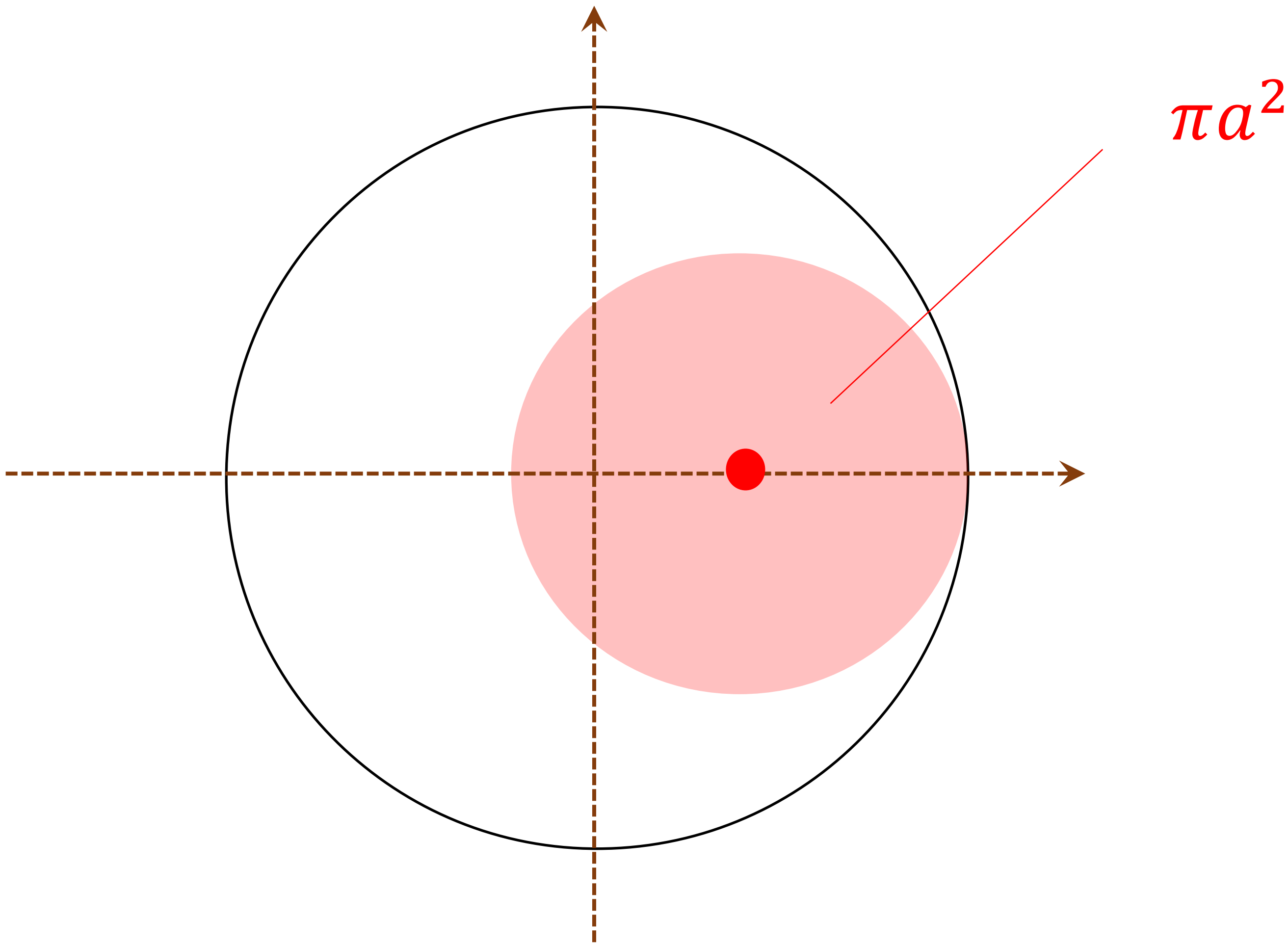


$$A \times x = B \times y$$

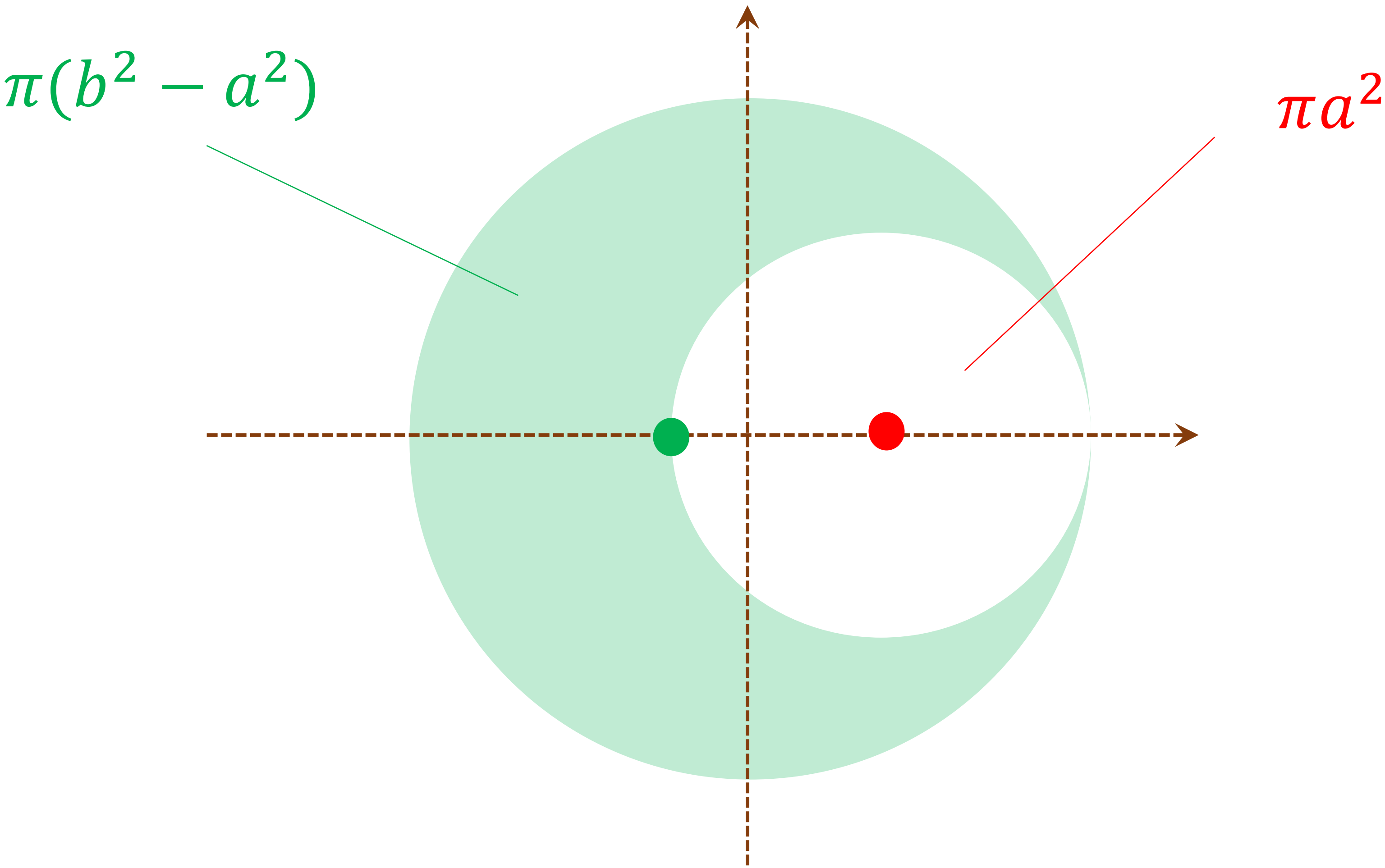
Question (Center of Crescent)



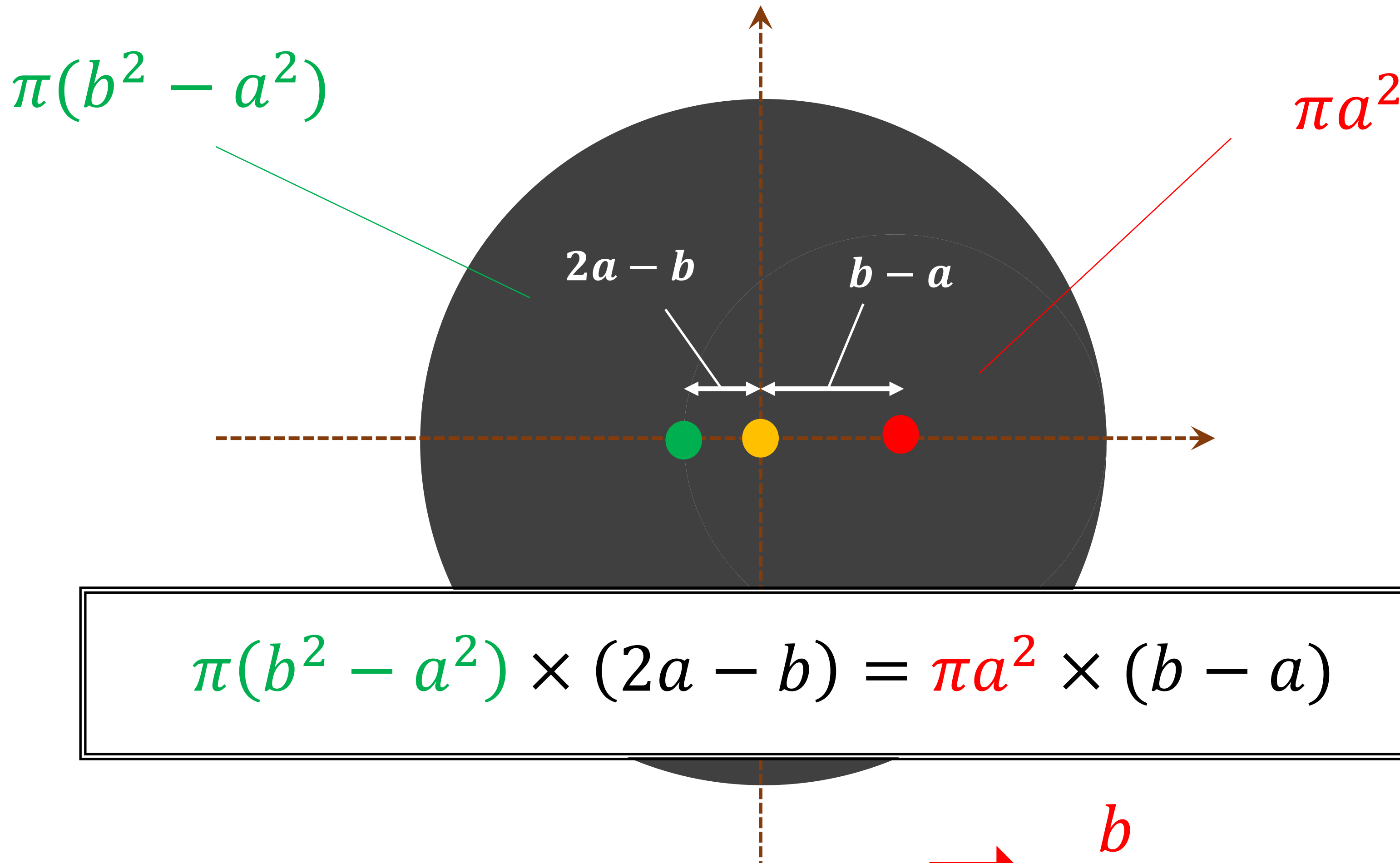
Question (Center of Crescent)



Question (Center of Crescent)



Question (Center of Crescent)



$$\pi(b^2 - a^2) \times (2a - b) = \pi a^2 \times (b - a)$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \varphi$$

Question (Center of Crescent)

$$\boxed{\pi(b^2 - a^2) \times (2a - b) = \pi a^2 \times (b - a)}$$

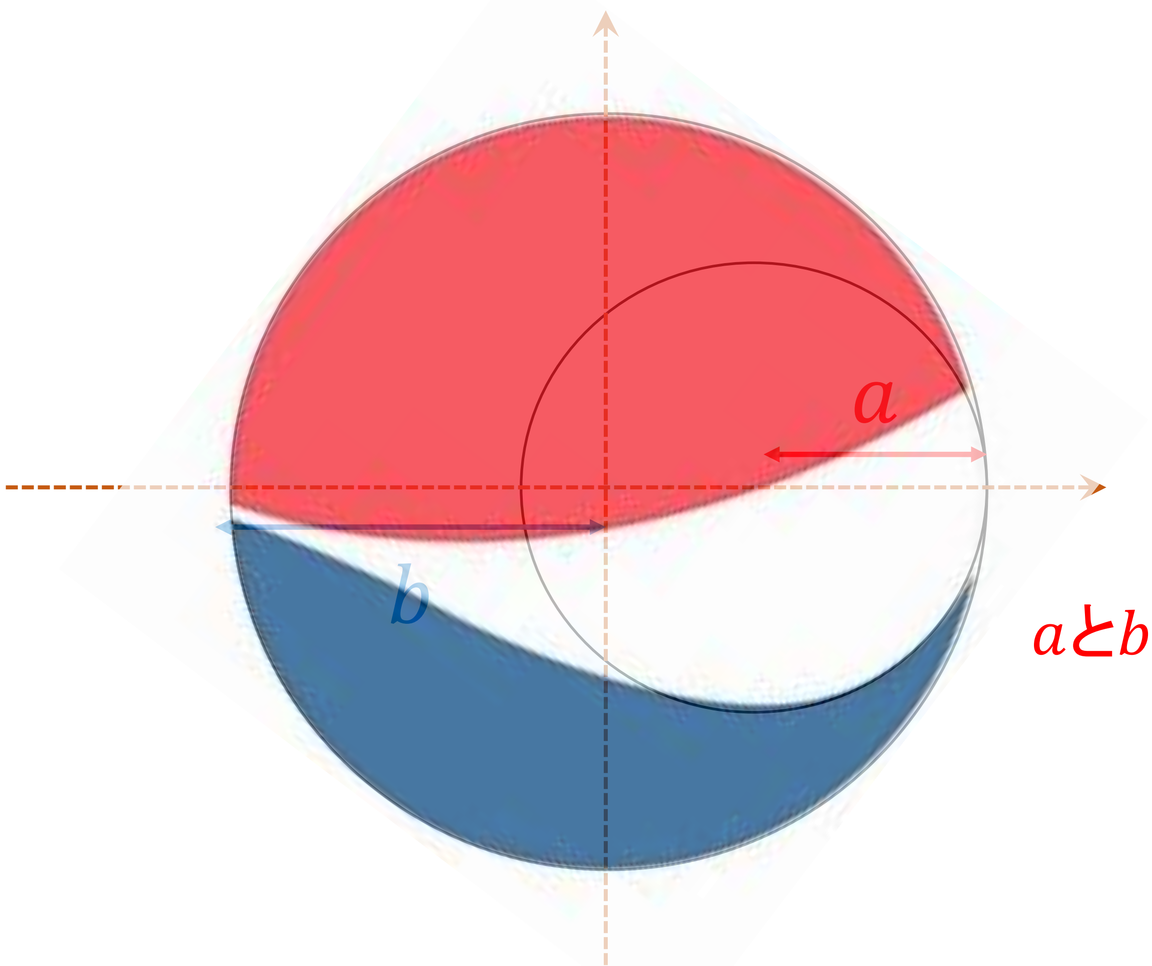
両辺を πa^3 で割る

$$\left((b/a)^2 - 1\right) \times (2 - b/a) = (b/a - 1)$$

$$(x^2 - 1) \times (2 - x) = (x - 1)$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b}{a} = \varphi$$

ロゴのデザインへ



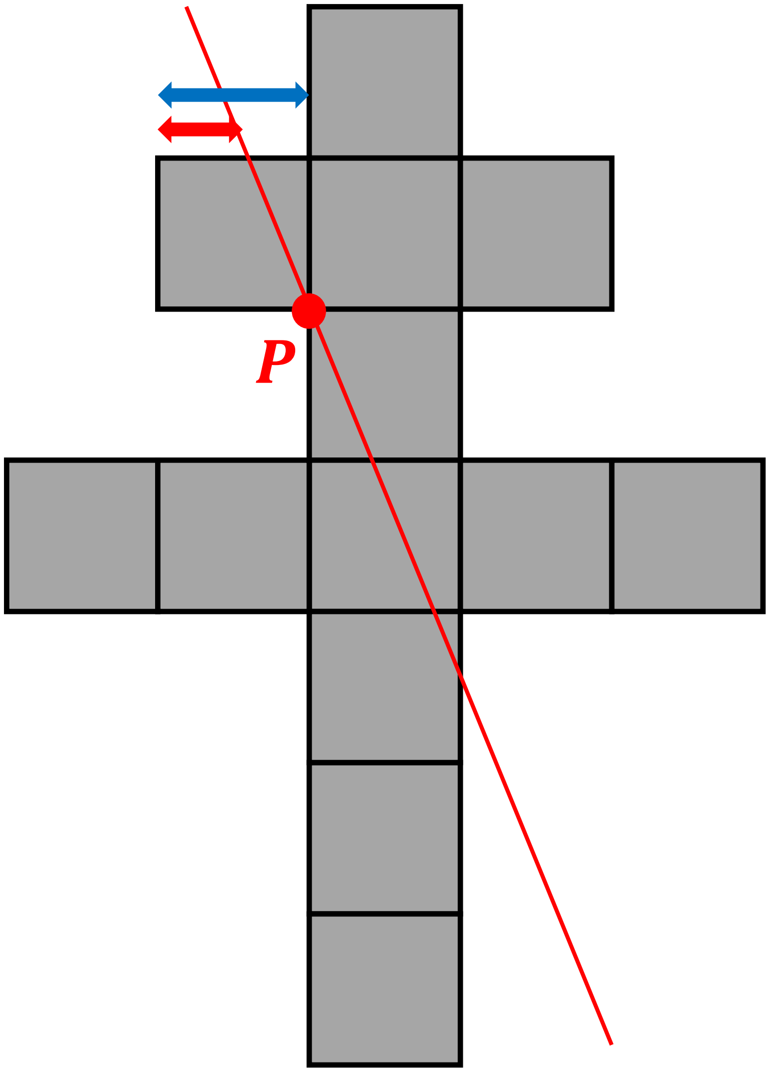
aとbは黄金比率

ペプシのロゴ

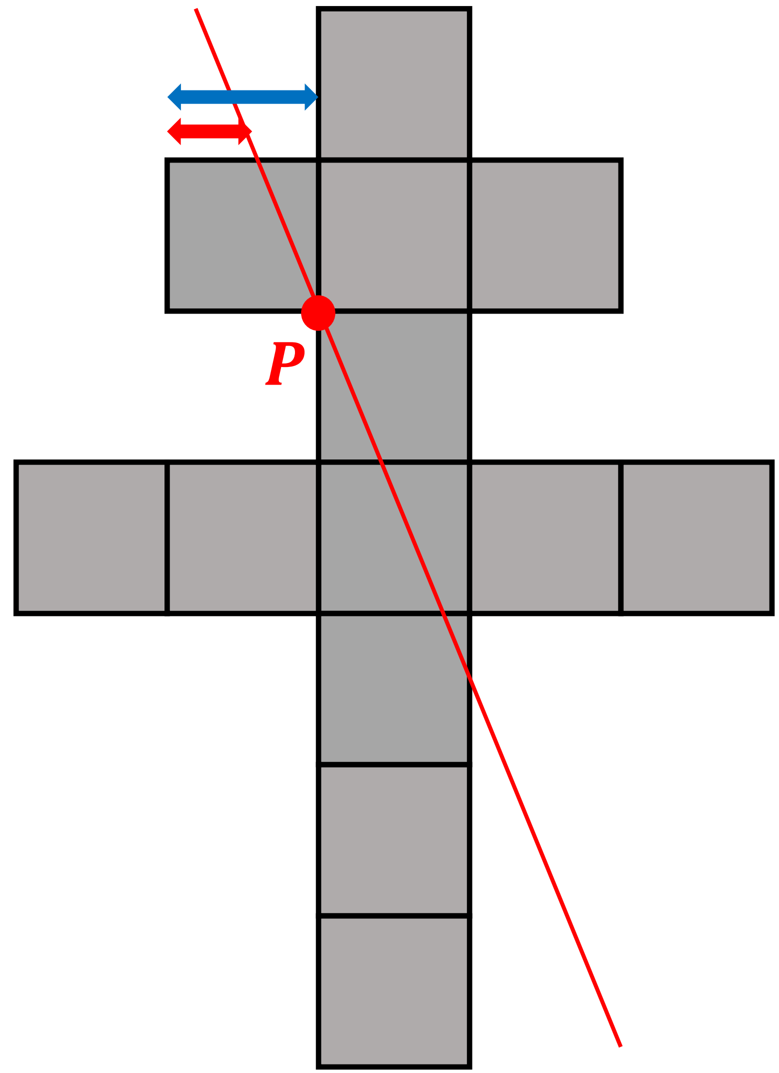
Question (Cross of Lorraine)

ロレーヌの十字架

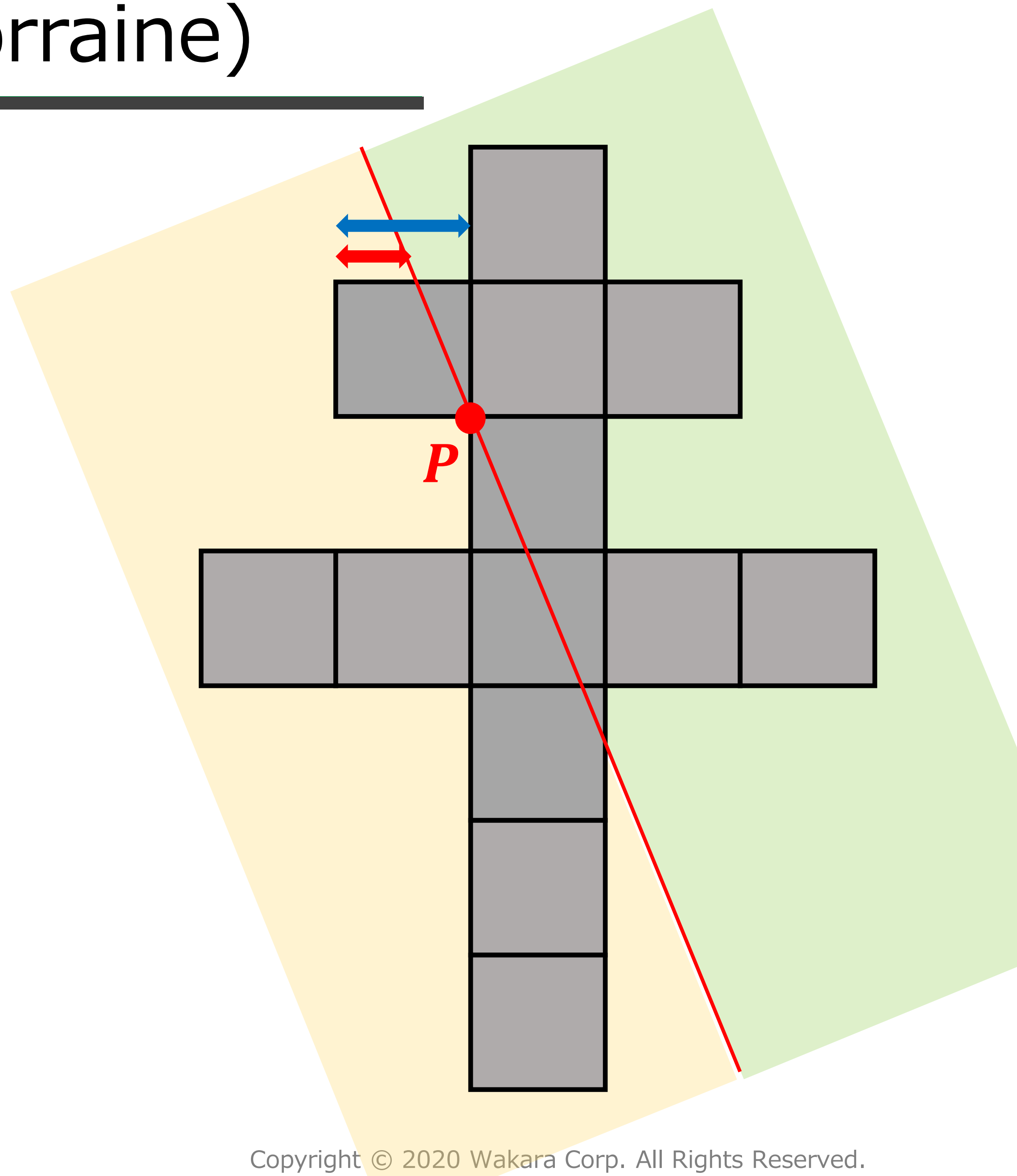
13個の正方形で作られる十字架を、点 P を通る直線で面積を2等分したい。切り口の位置をどのように設定にすればいいか。



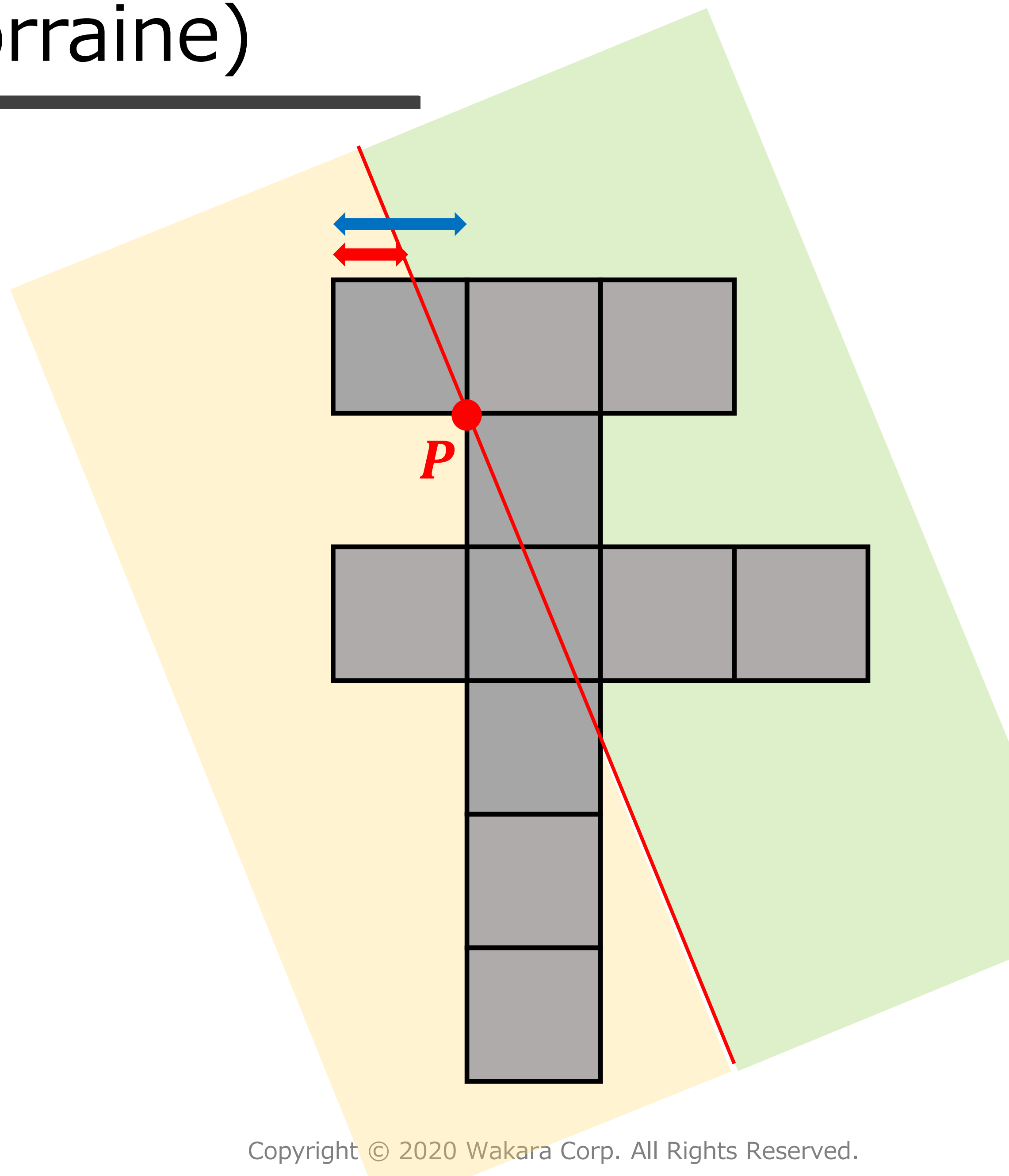
Question (Cross of Lorraine)



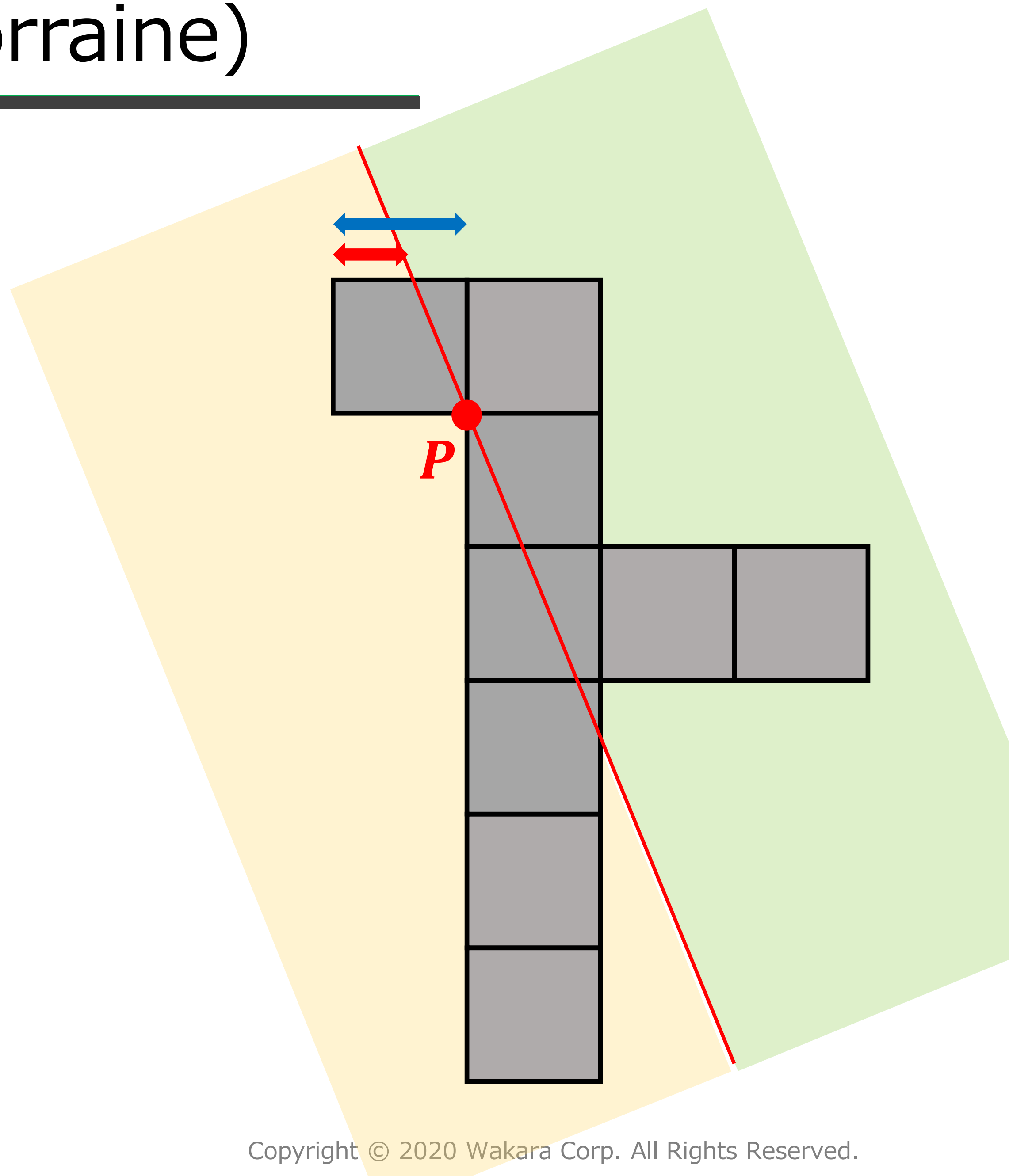
Question (Cross of Lorraine)



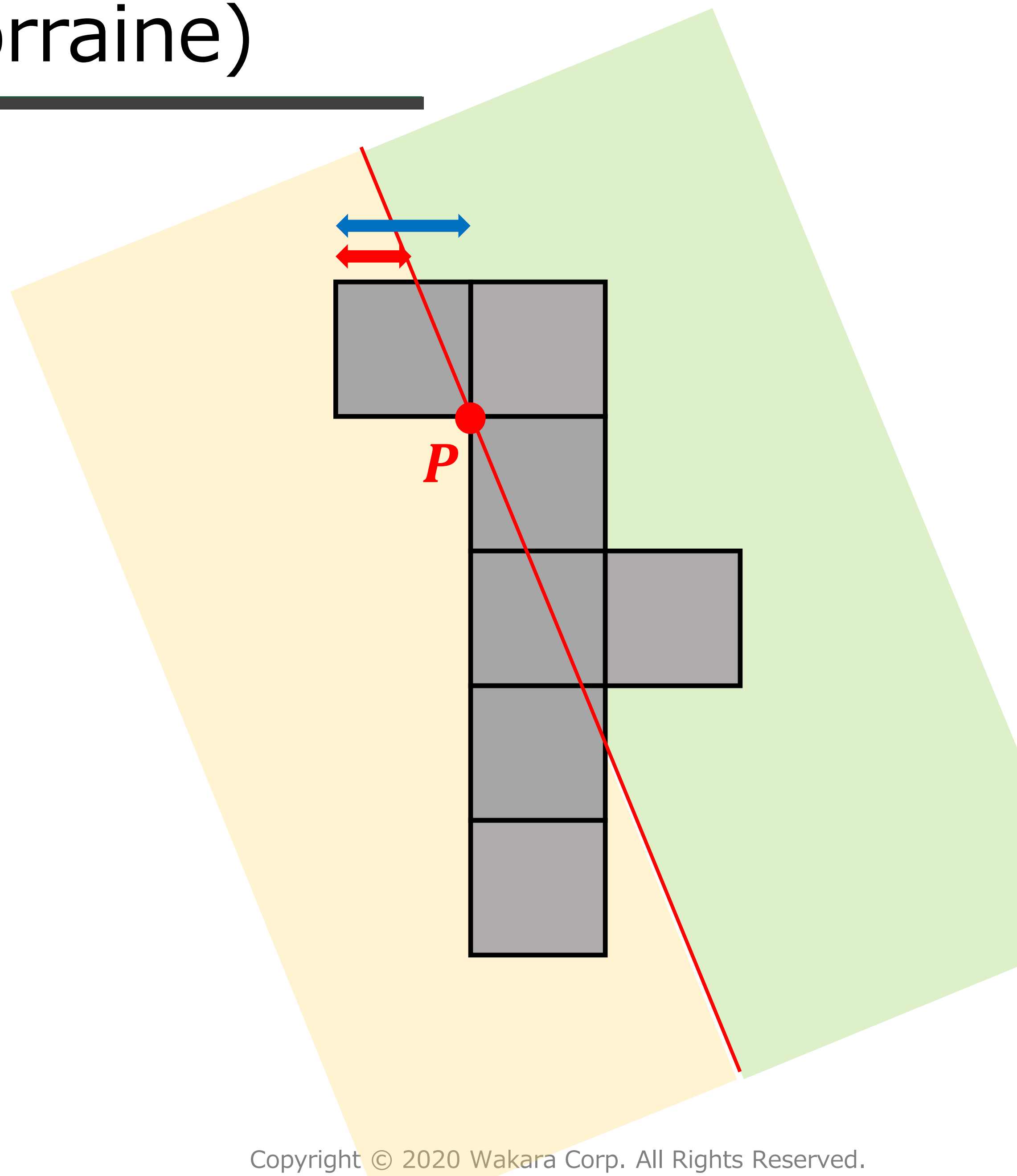
Question (Cross of Lorraine)



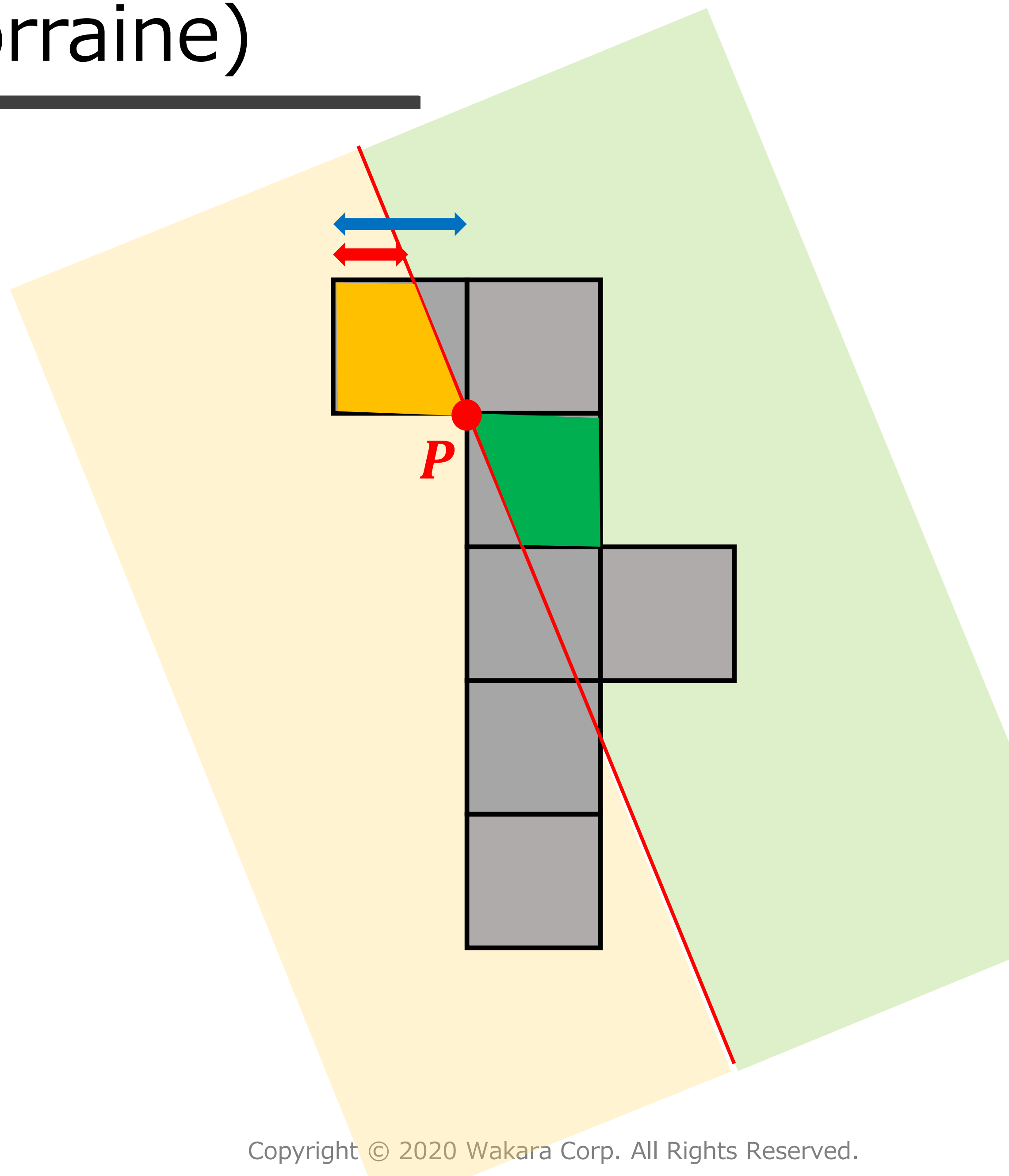
Question (Cross of Lorraine)



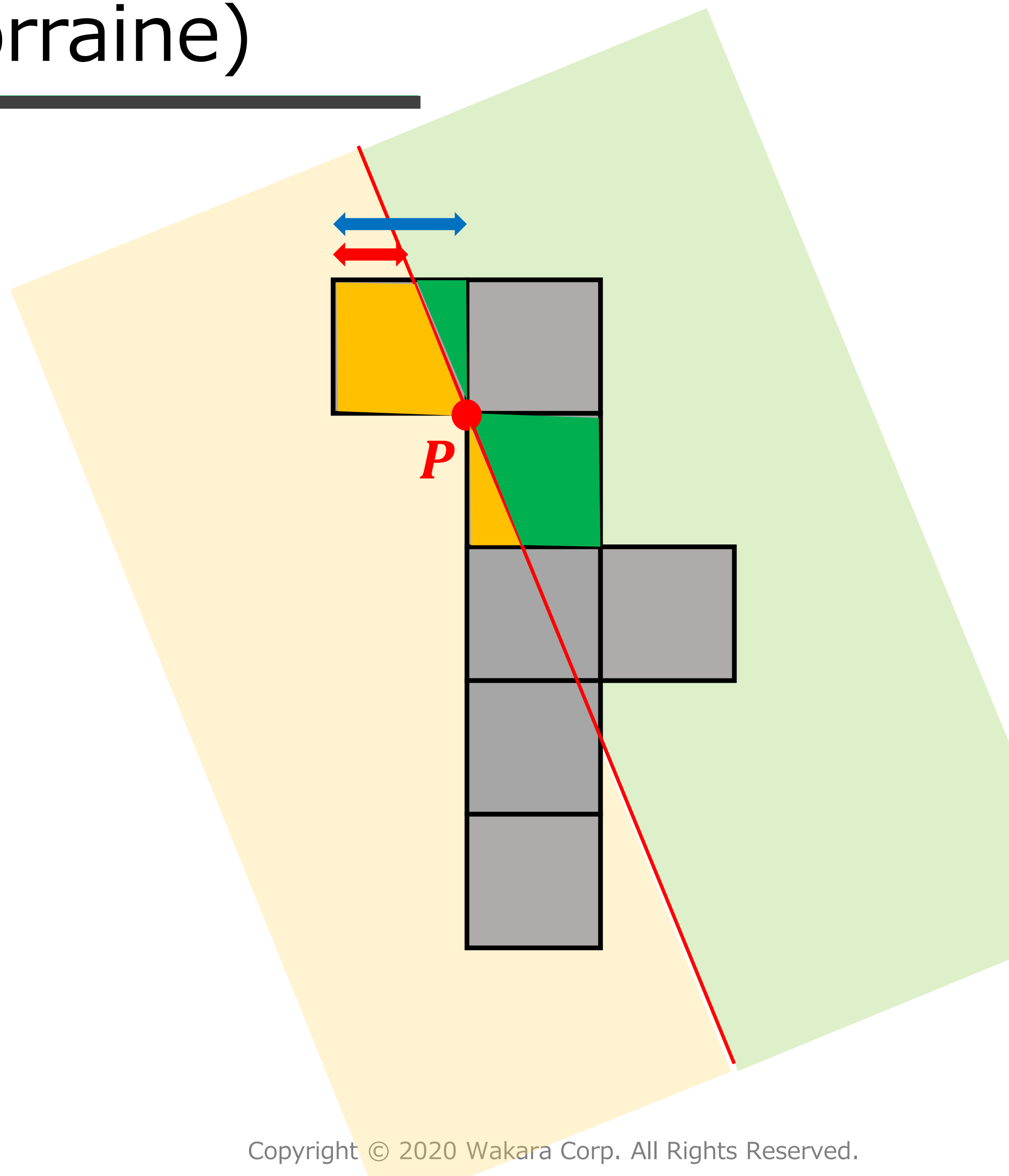
Question (Cross of Lorraine)



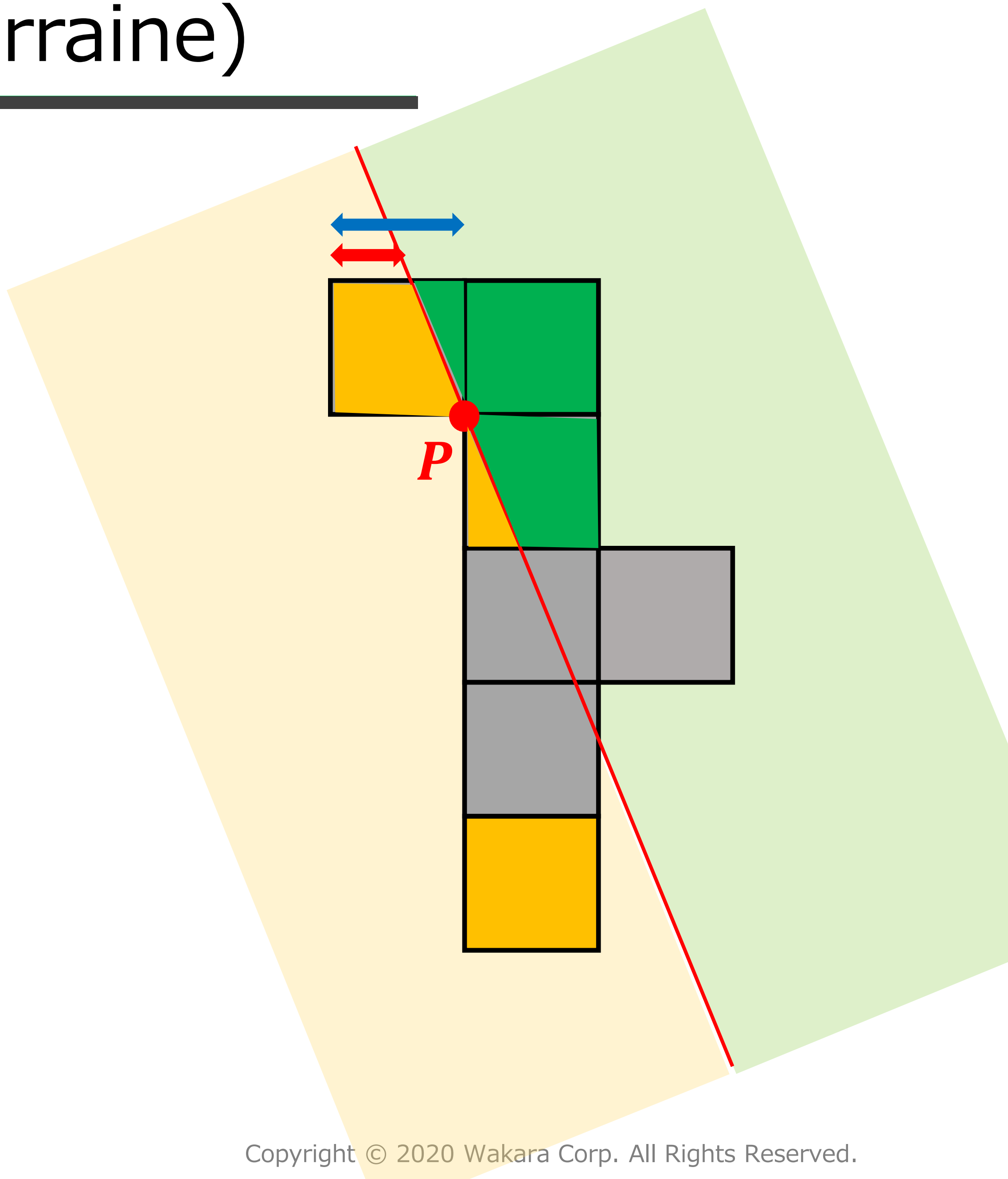
Question (Cross of Lorraine)



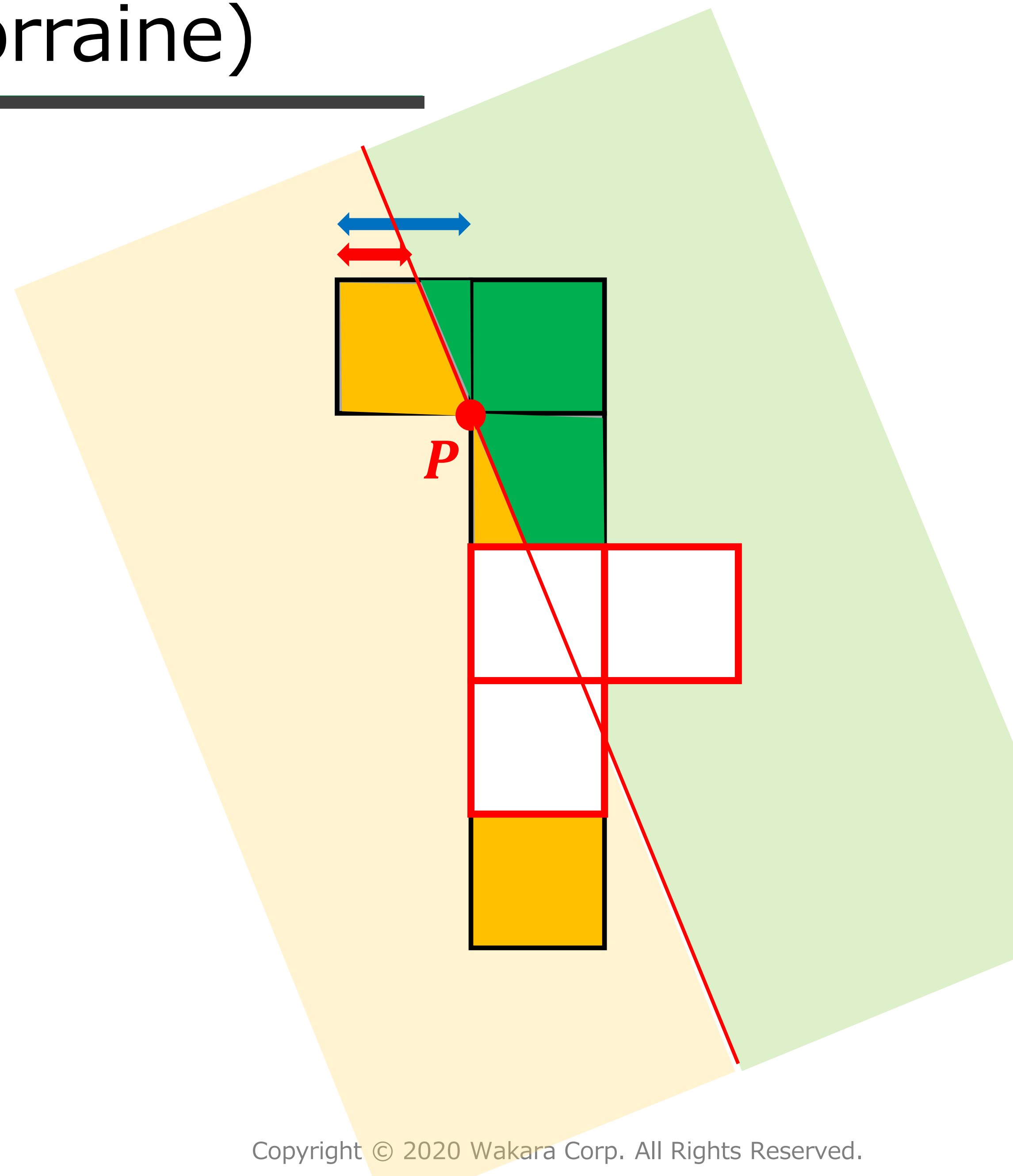
Question (Cross of Lorraine)



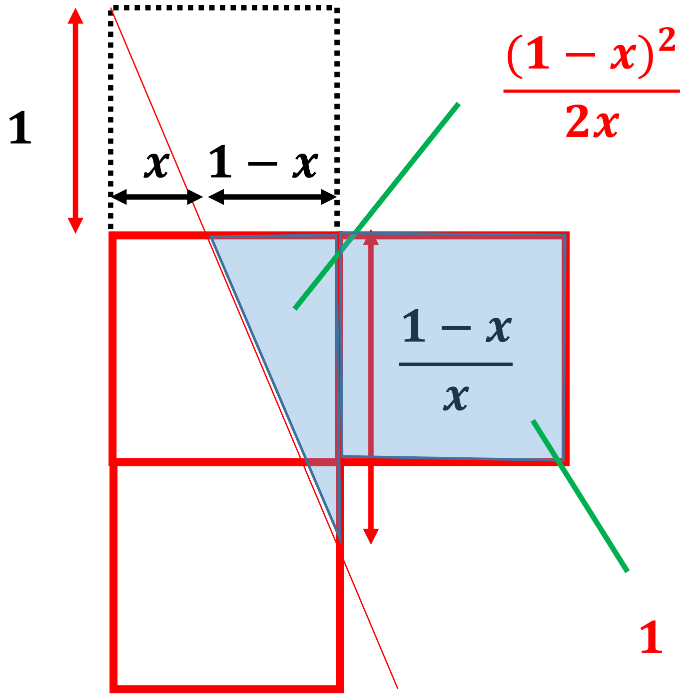
Question (Cross of Lorraine)



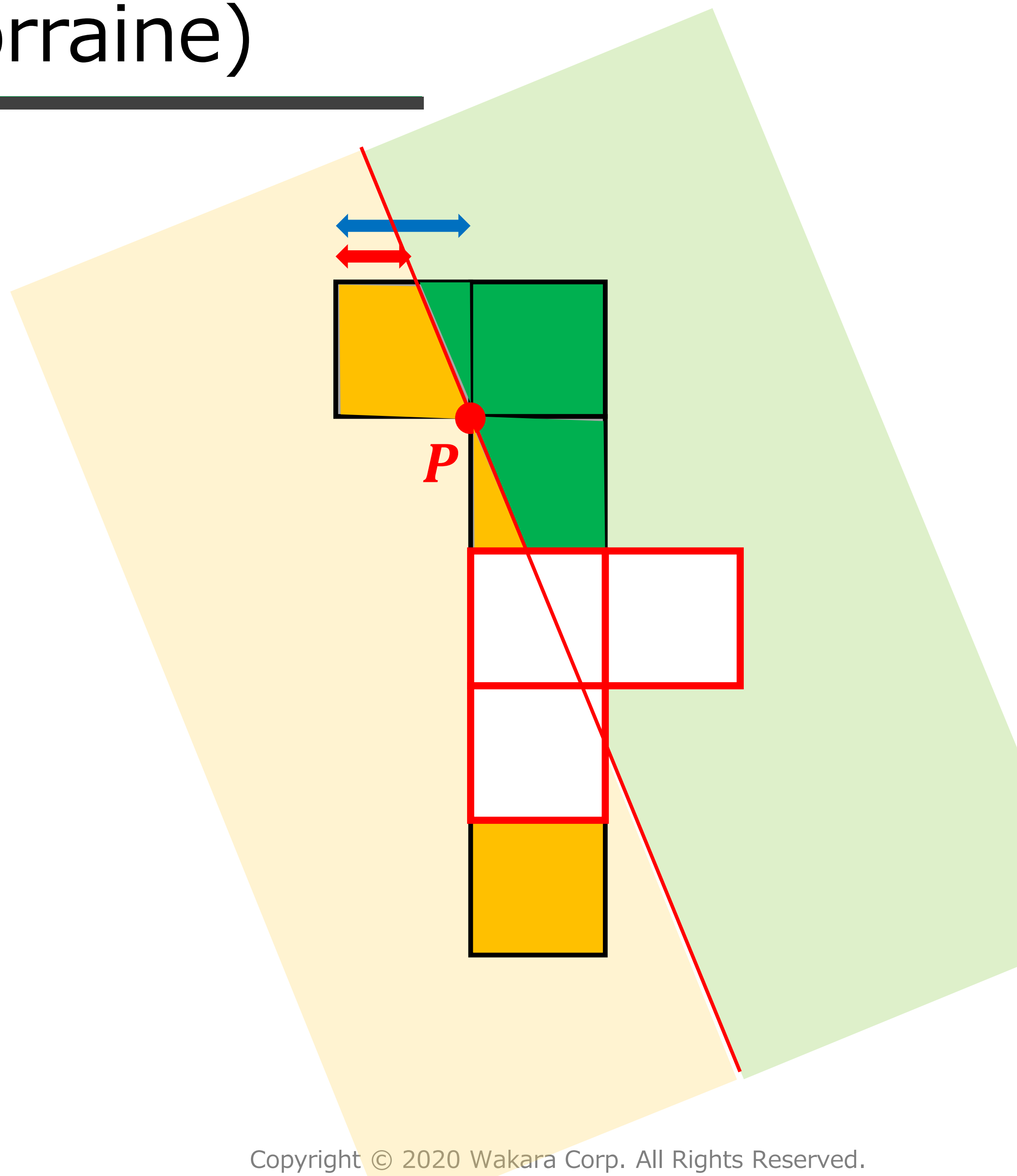
Question (Cross of Lorraine)



Question (Cross of Lorraine)



$$\frac{(1-x)^2}{2x}+1=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\varphi^{-2}$$



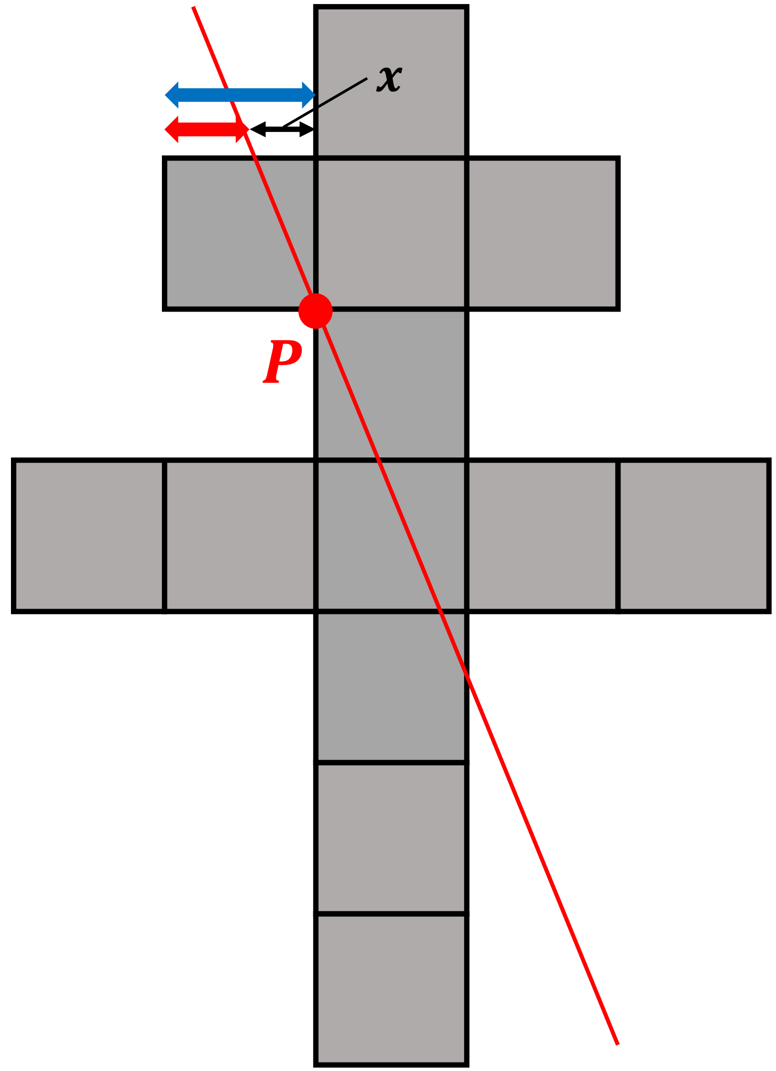
Question (Cross of Lorraine)

$$青 : 赤 = 1 : 1 - \varphi^{-2}$$

$$= \varphi^2 : \varphi^2 - 1$$

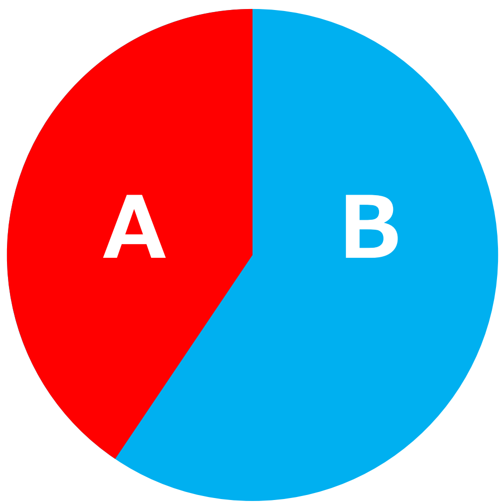
$$= \varphi^2 : \varphi$$

$$= \varphi : 1$$



Question (Unfair Game)

AとBが的当てゲームを行う。円形の的を2つのエリアに分けて、Aは『エリアA』、Bは残りの『エリアB』に当てることで成功とし、先に成功した方が勝利とする。先にAから実施する場合、公平なゲームにするにはエリアをどのような比率で分ければいいか？



Question (Unfair Game)

AとBが的当てゲームを行う。円形の的を2つのエリアに分けて、Aは『エリアA』、Bは残りの『エリアB』に当てることで成功とし、先に成功した方が勝利とする。先にAから実施する場合、公平なゲームにするにはエリアをどのような比率で分ければいいか？

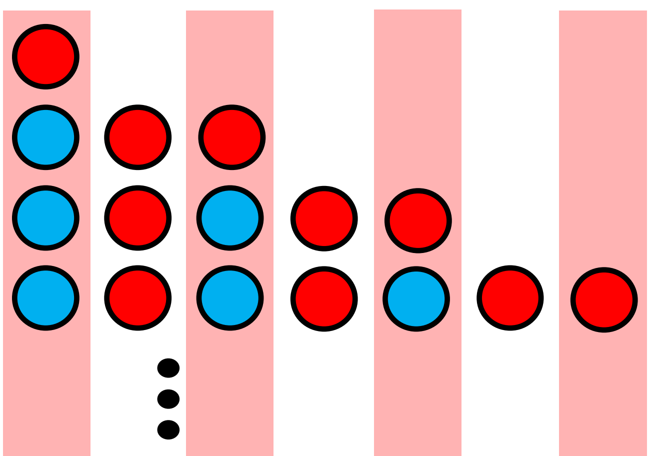
エリアAに当たる確率を p とすると、Aが勝つ確率は

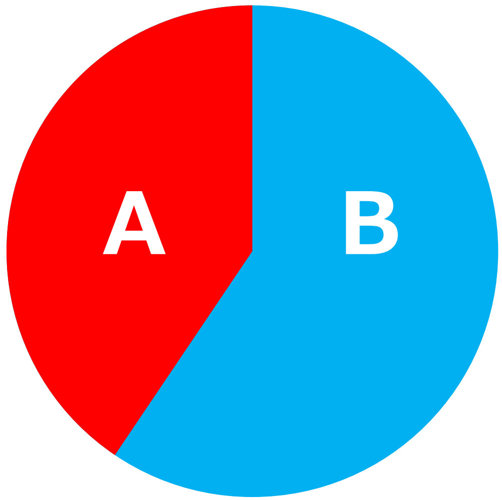
p

$p^2(1-p)$

$p^3(1-p)^2$

$p^4(1-p)^3$





$$p + p^2(1-p) + p^3(1-p)^2 + p^4(1-p)^3 + \cdots = \frac{p}{1-p(1-p)}$$

Question (Unfair Game)

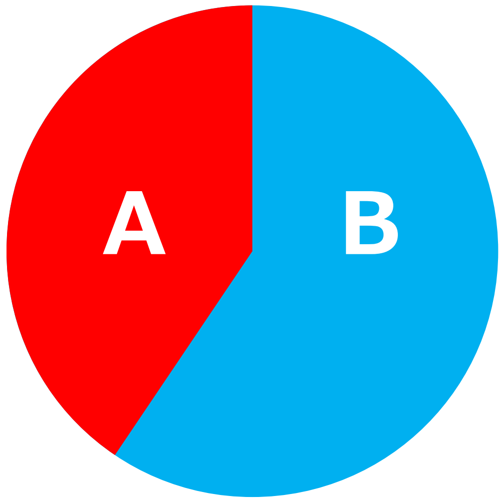
AとBが的当てゲームを行う。円形の的を2つのエリアに分けて、Aは『エリアA』、Bは残りの『エリアB』に当てることで成功とし、先に成功した方が勝利とする。先にAから実施する場合、公平なゲームにするにはエリアをどのような比率で分ければいいか？

勝負が公平であるためには、次がなりたつことが必要

$$\frac{p}{1-p(1-p)}=\frac{1}{2}$$

⬇

$$p=\varphi^{-2}=1-\varphi^{-1}$$

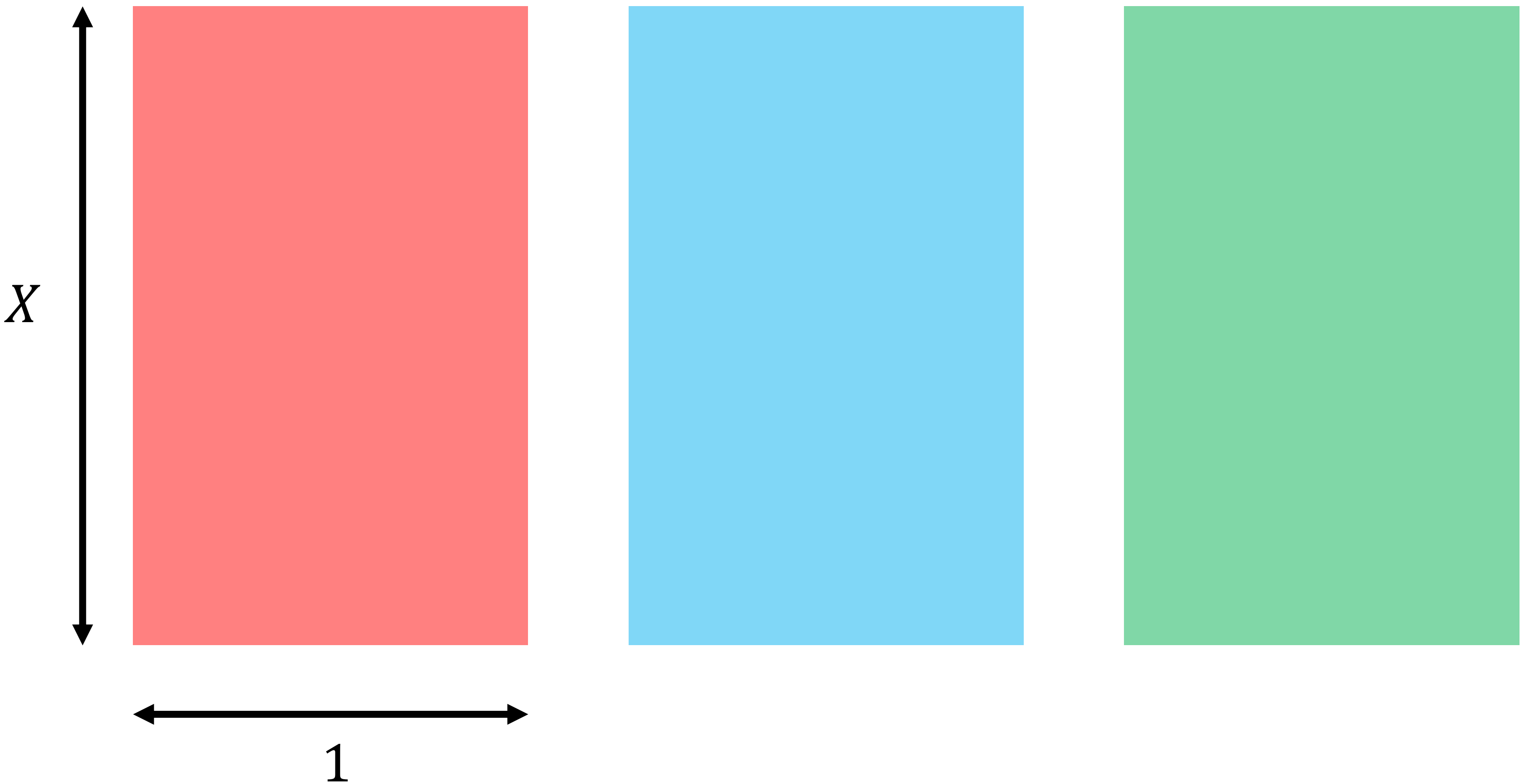


Bの勝率をφ^{-1}、つまり、エリア全体とエリアBの面積比は

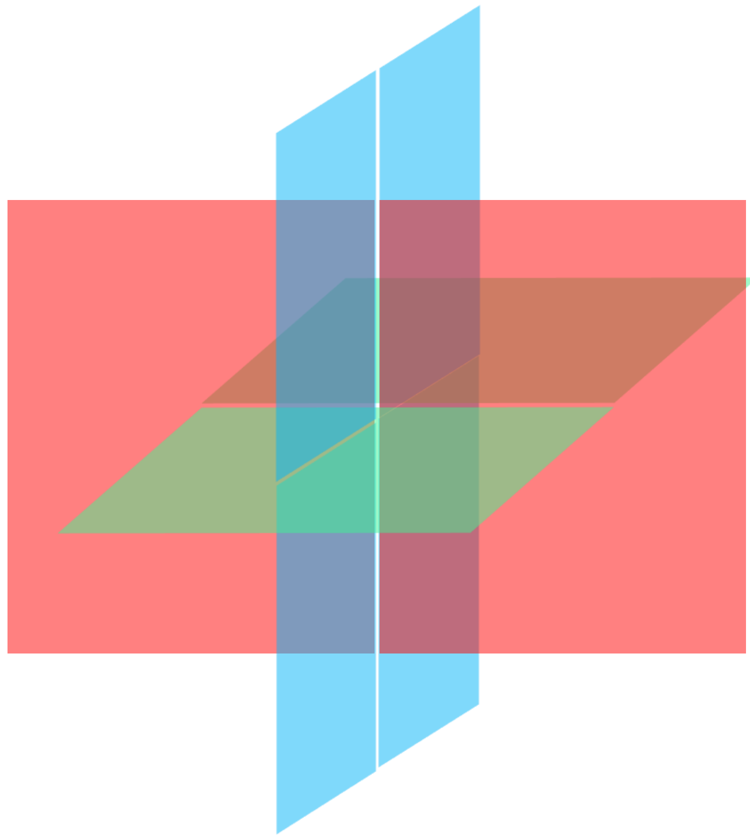
エリア全体:エリアB $=\varphi:1$

Regular icosahedron

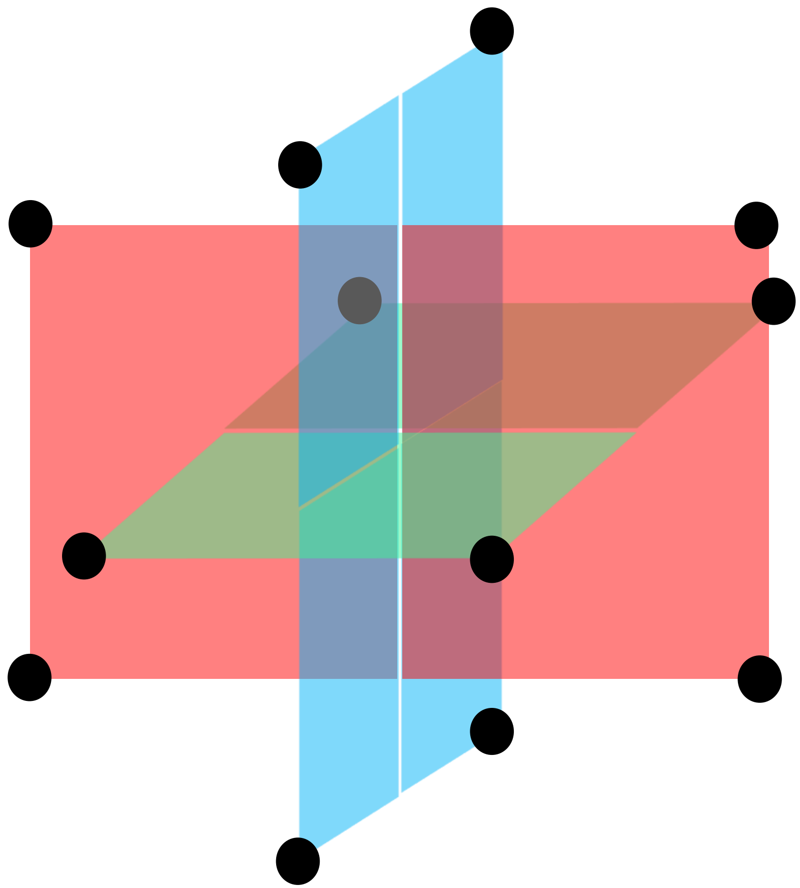
長方形を３つ用意します。



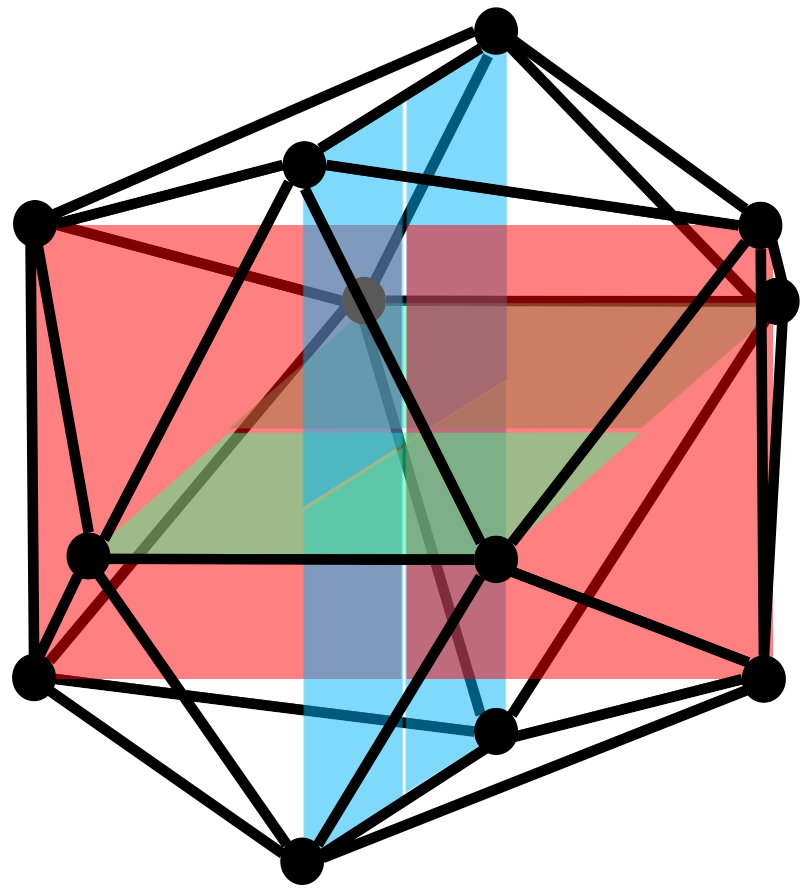
Regular icosahedron



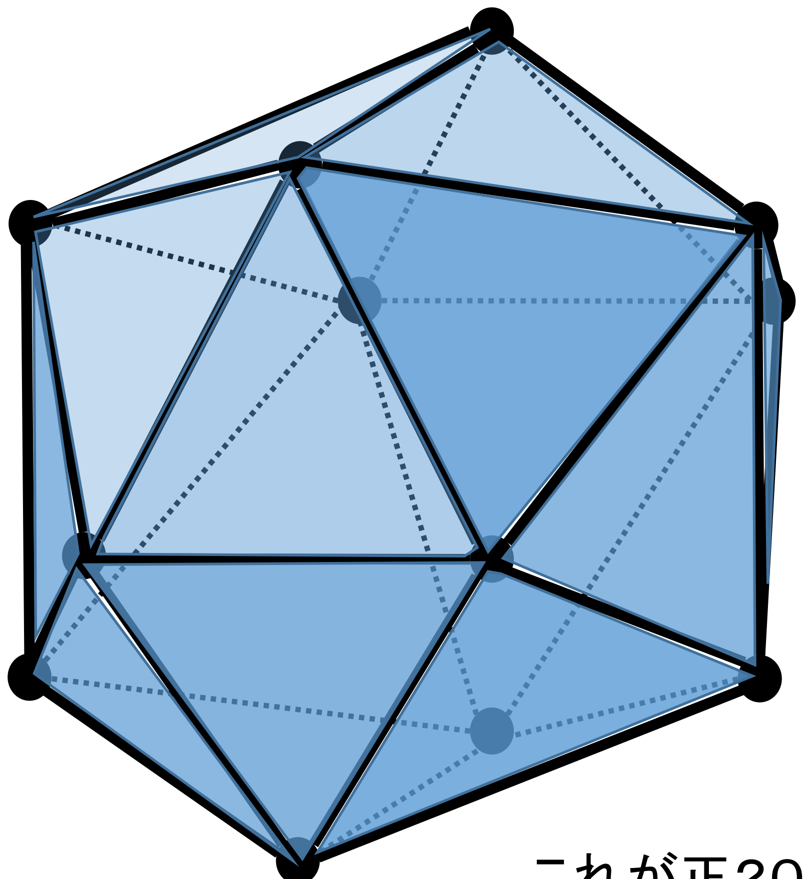
Regular icosahedron



Regular icosahedron



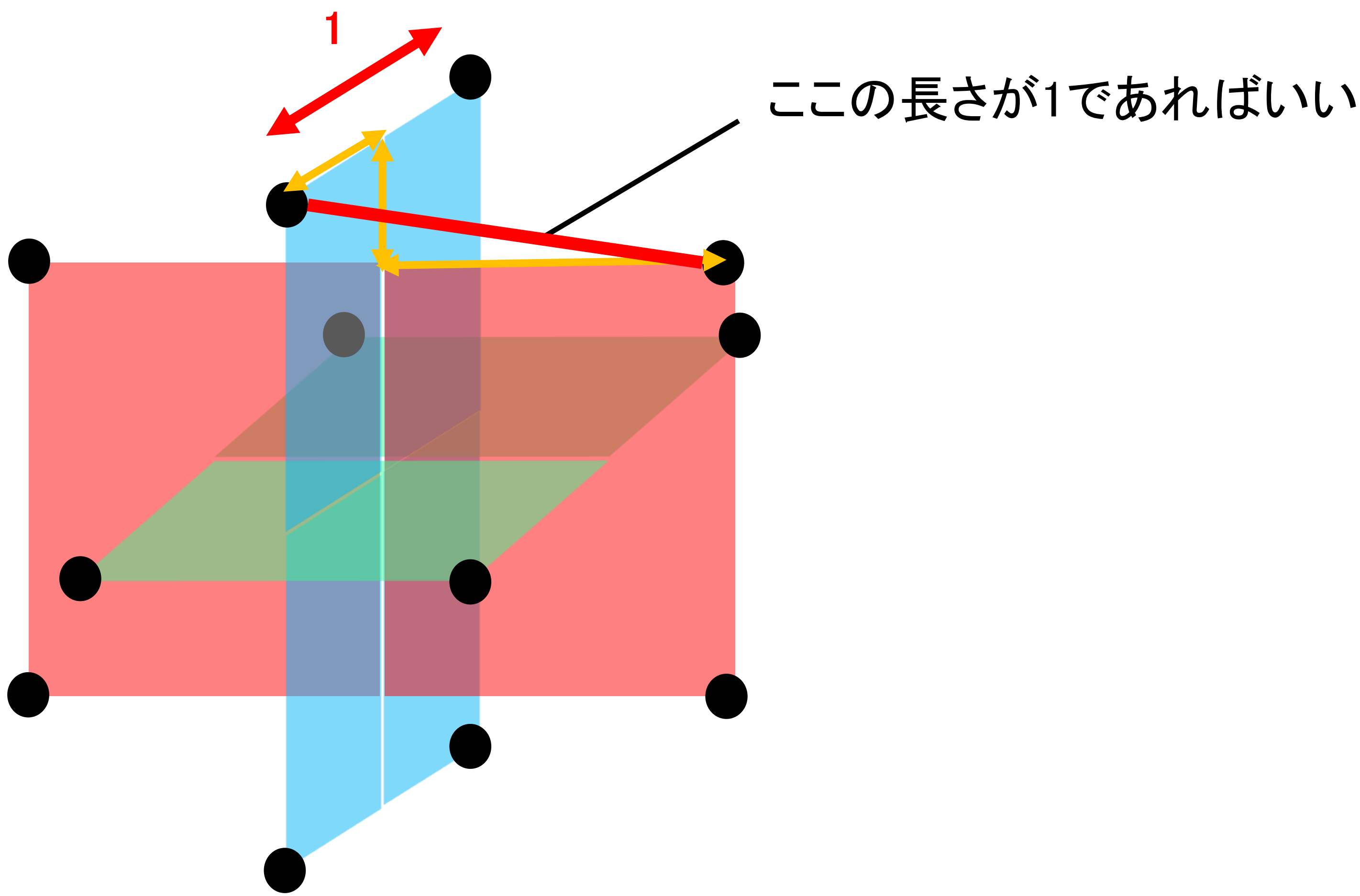
Regular icosahedron



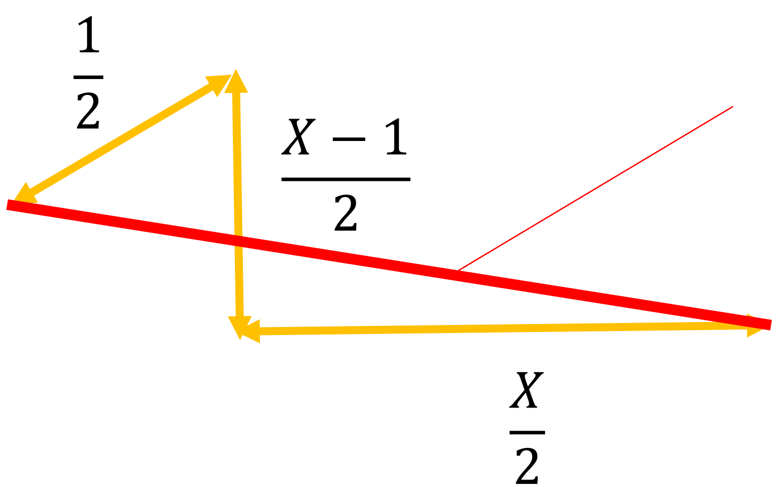
A.黄金比

これが正20面体になるには長方形の縦と横の比をどれぐらいにすればいいか？

Regular icosahedron



Regular icosahedron



$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{X-1}{2}\right)^2+\left(\frac{X}{2}\right)^2} = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{X = \varphi}$$