

数学アートセミナー

— 折り紙の数理編 —

講師紹介

・ 講師

岡本 健太郎 【数理学博士】

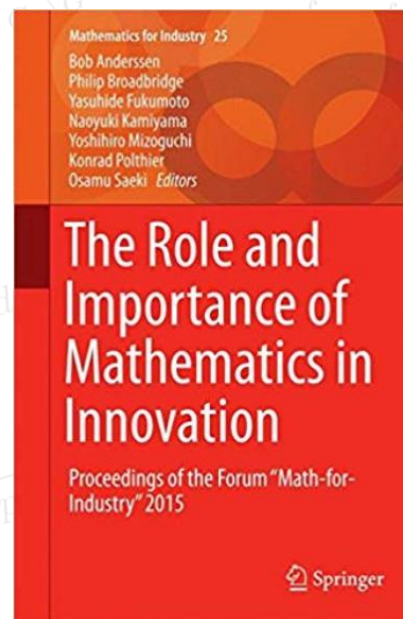
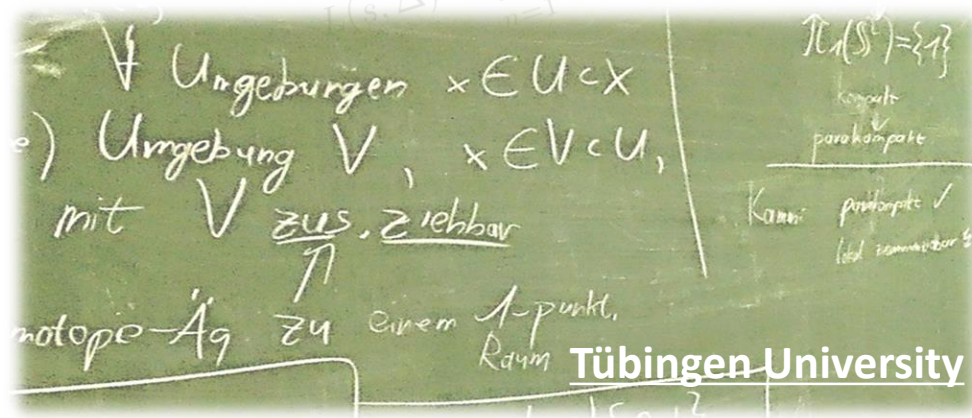
(おかもと けんたろう)



ζWalker@walker0226

・ 経歴

- ・ テュービンゲン大学（ドイツ） 研究員
- ・ 日本学術振興会 特別研究員
- ・ 九州大学 博士後期課程修了（数理学）



Zeta Function Associated with the Representation of the Braid Group

Kentaro Okamoto

Abstract There is a well-known zeta function of the \mathbb{Z} -dynamical system generated by an element of the symmetric group. By considering this zeta function as a model, we construct a new zeta function of an element of the braid group. In this article, we show that the Alexander polynomial which is the most classical polynomial invariant of knots can be expressed in terms of this braid zeta function. Furthermore, we show that the zeta function associated with the tensor product representation $\rho_{\sigma}^{\otimes n}$ can be expressed by some braid zeta function for the case of special braids whose closures are isotopic to certain torus knots. Moreover, we introduce the zeta function associated with the Jones representation which is defined by using the R-matrix satisfying the Yang-Baxter equation. Then, we calculate this zeta function for $n = 3$ and show the relation between the Alexander polynomial and the Jones polynomial.

Keywords Zeta function · Braid group · Representation theory · Knot theory

1 Introduction

Let S_n be the symmetric group acting on the finite set $X := \{1, 2, \dots, n\}$. Then, for any permutation $\sigma \in S_n$, the \mathbb{Z} -dynamical zeta function of σ is defined as

$$\zeta(s, \sigma) := \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\text{Fix}(\sigma^n)|}{n} s^n \right], \quad (1)$$

where $\text{Fix}(\sigma^n)$ is the set of fixed points defined as follows:

$$\text{Fix}(\sigma^n) := \{x \in X \mid \sigma^n x = x\}. \quad (2)$$

K. Okamoto (✉)
Kyushu University, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395, Japan
e-mail: k.okamoto@math.kyushu-u.ac.jp

© Springer Science+Business Media Singapore 2017
B. Anderssen et al. (eds.), *The Role and Importance of Mathematics in Innovation*, *Mathematics for Industry* 25

51

・ 所属学会

- ・ 日本数学会
- ・ 日本アクチュアリー会

・ 資格

- ・ 高等学校数学教諭専修免許取得
- ・ 統計検定 1 級（数理統計）取得

講師紹介

・ 講師

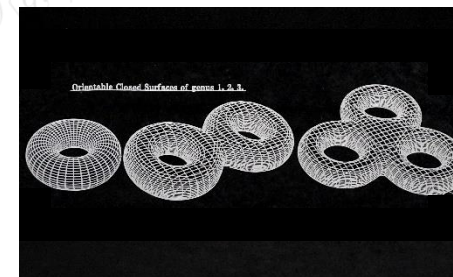
岡本 健太郎 【数理学博士】

(おかもと けんたろう)

 ζWalker@walker0226

・ 経歴

- ・ 2019年の若手アーティスト104人に選出
- ・ 2020年2月、代官山で切り絵の個展を開催



— 今後の展示予定 —

- ・ 2020年10月フランスのクロリュセ城
- ・ 2021年2月、東京上野の森美術館
- ・ 2021年4月、京都、京セラ美術館
- ・ 2021年夏、イギリスロンドンのモール美術館

折り紙



紙を折ることで「形」を作る

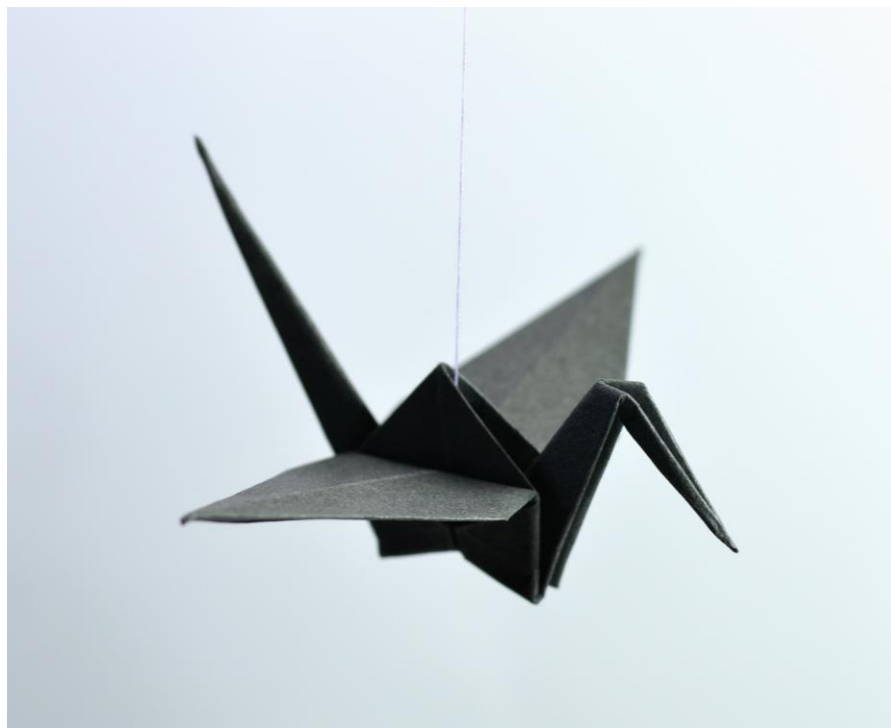


日本における「ものづくり芸術」の代表

古典的な折り紙



古典折り紙の代表例－折り鶴－

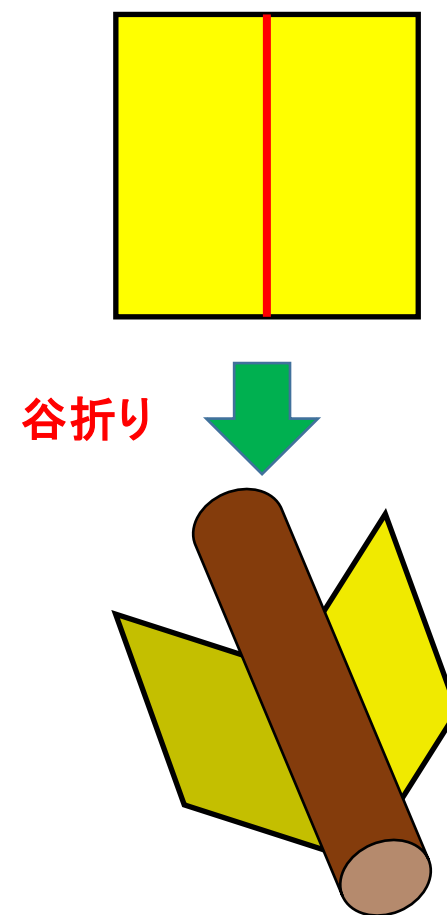
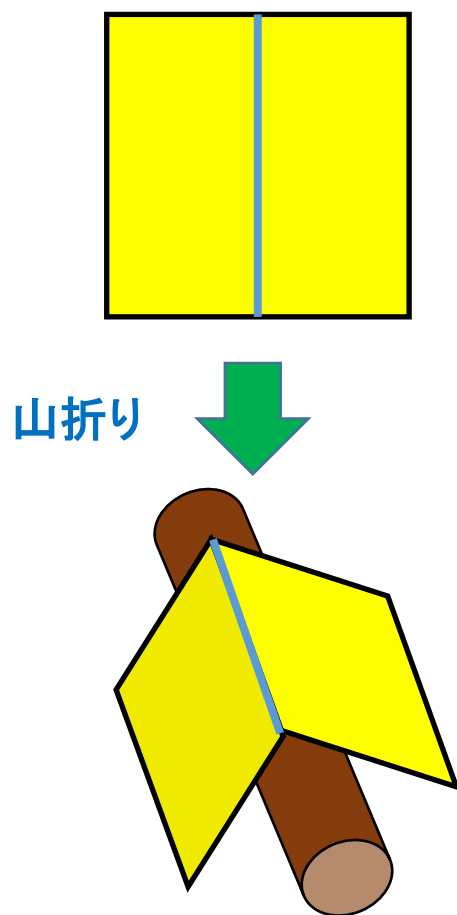


折り鶴

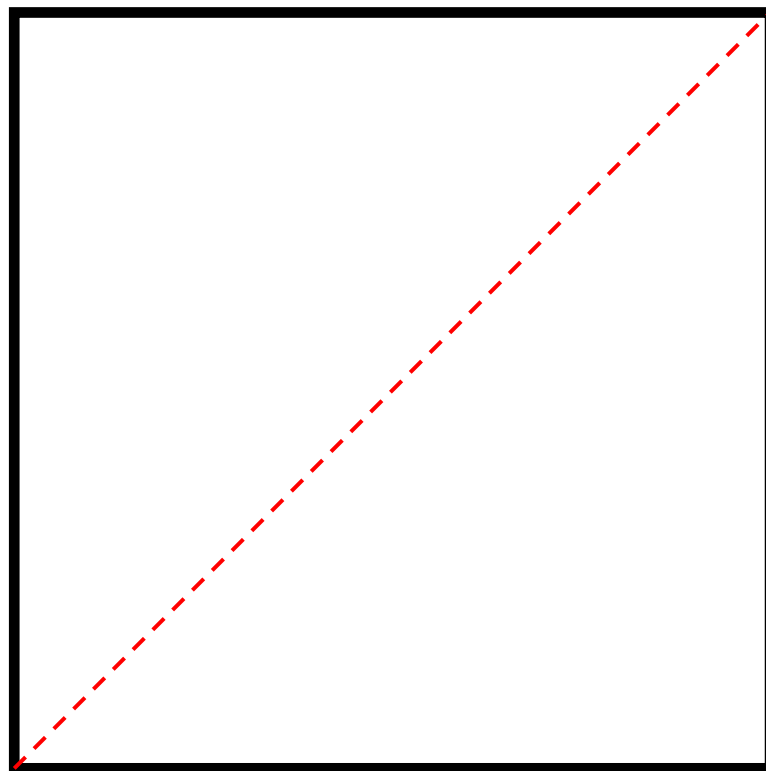
折り鶴の折り方はさまざまな折り紙の「**基本形**」となっている

山折りと谷折り

山折りと谷折りについて



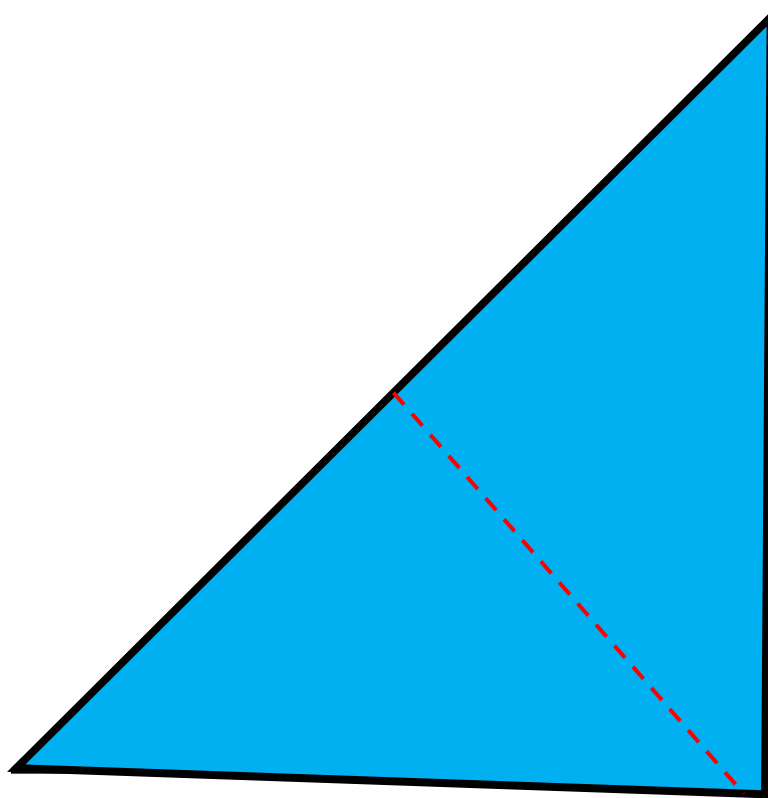
【実践】 鶴を折ってみましょう。



谷折り

山折り

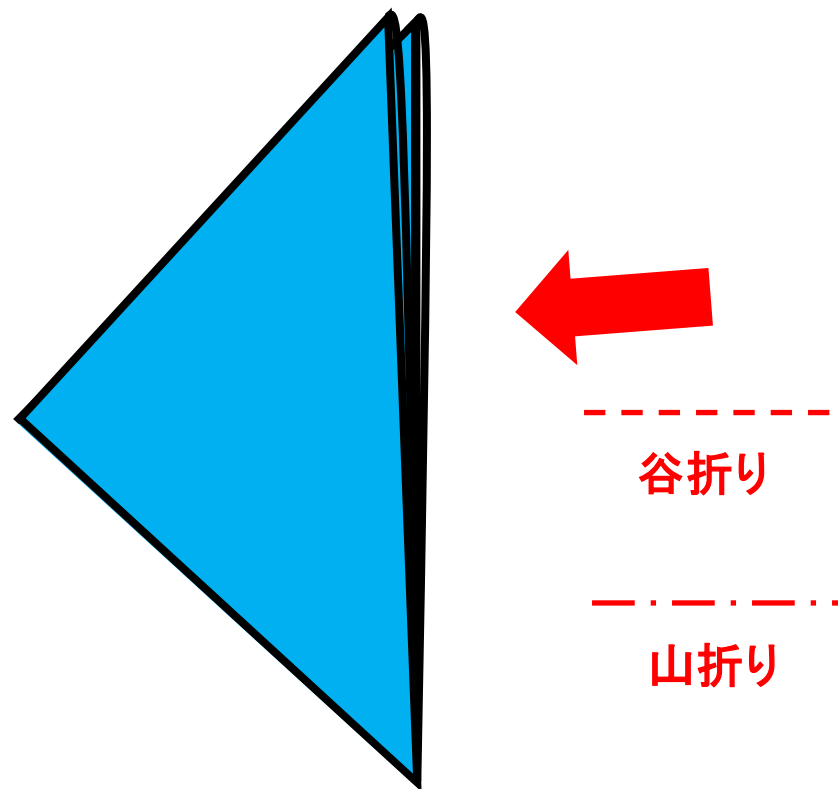
【実践】 鶴を折ってみましょう。



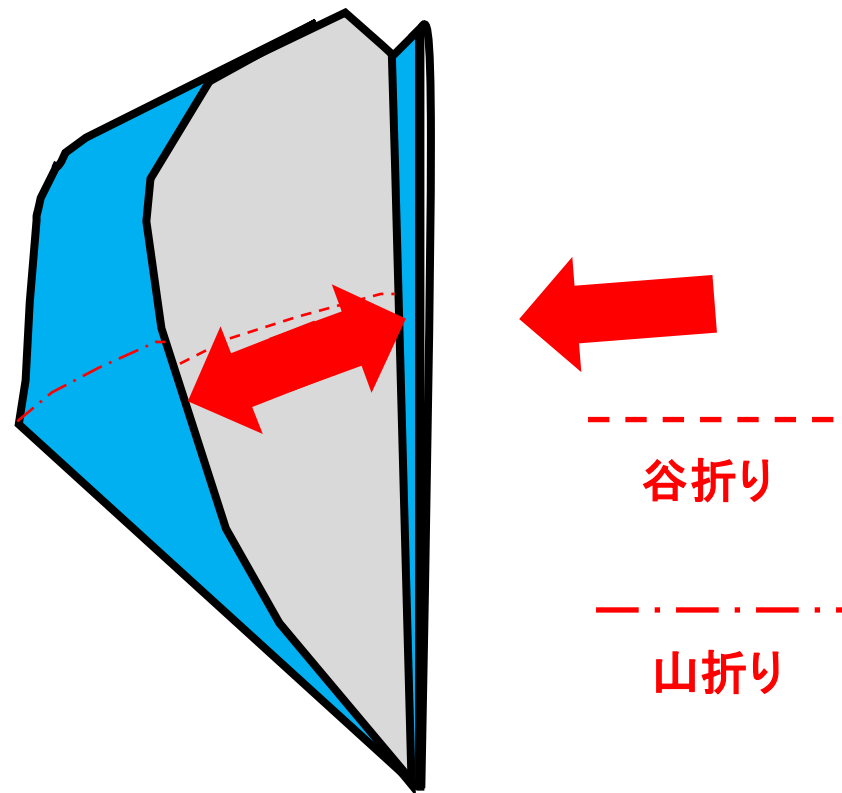
谷折り

山折り

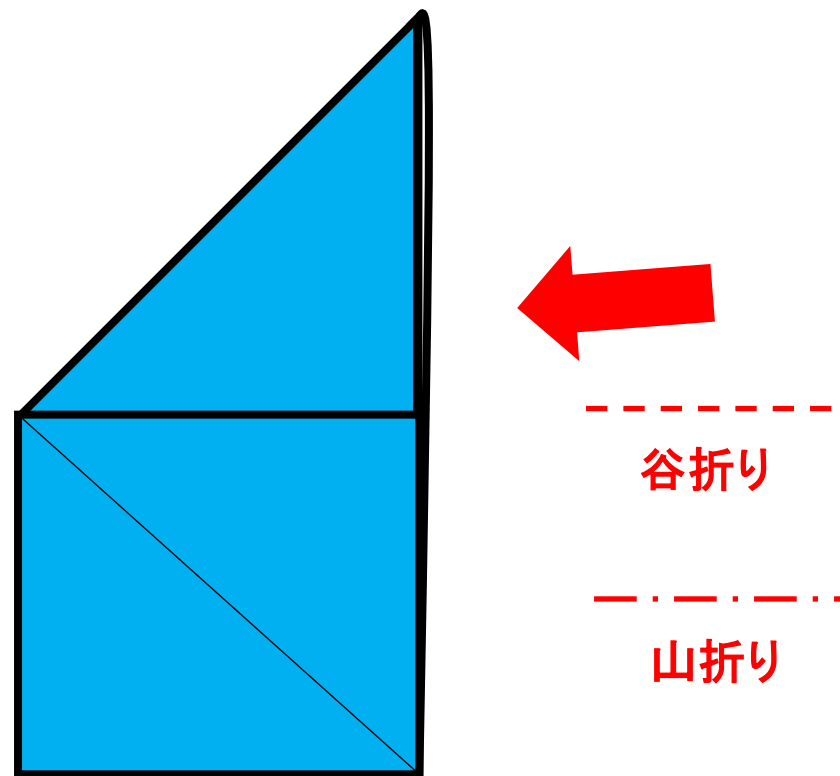
【実践】 鶴を折ってみましょう。



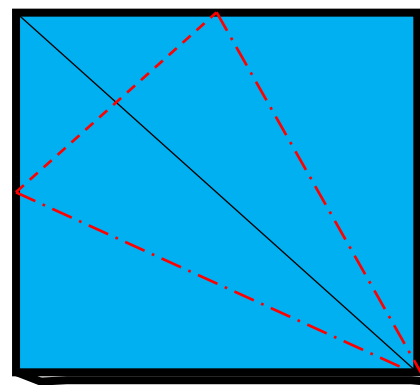
【実践】 鶴を折ってみましょう。



【実践】 鶴を折ってみましょう。



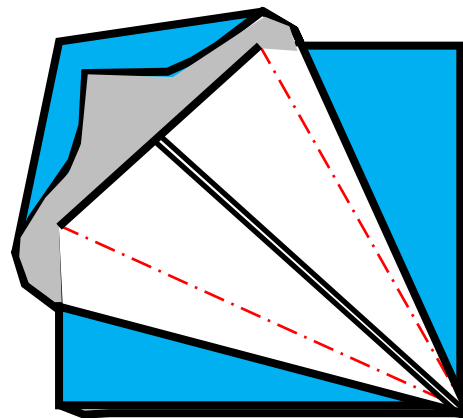
【実践】 鶴を折ってみましょう。



谷折り

山折り

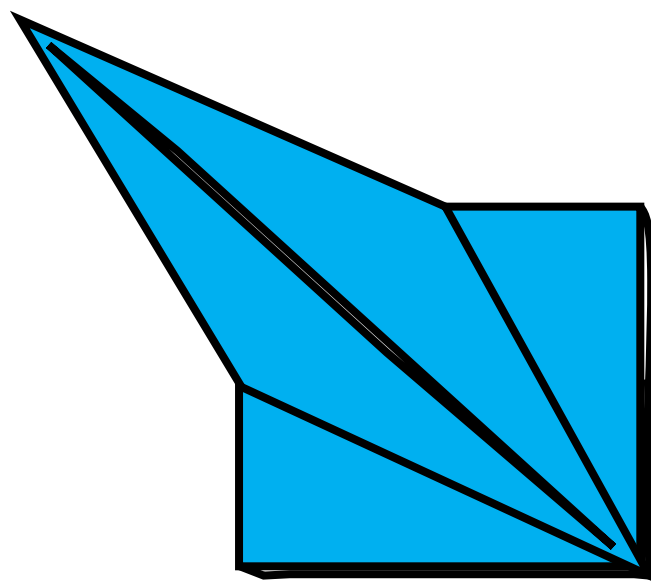
【実践】 鶴を折ってみましょう。



谷折り

山折り

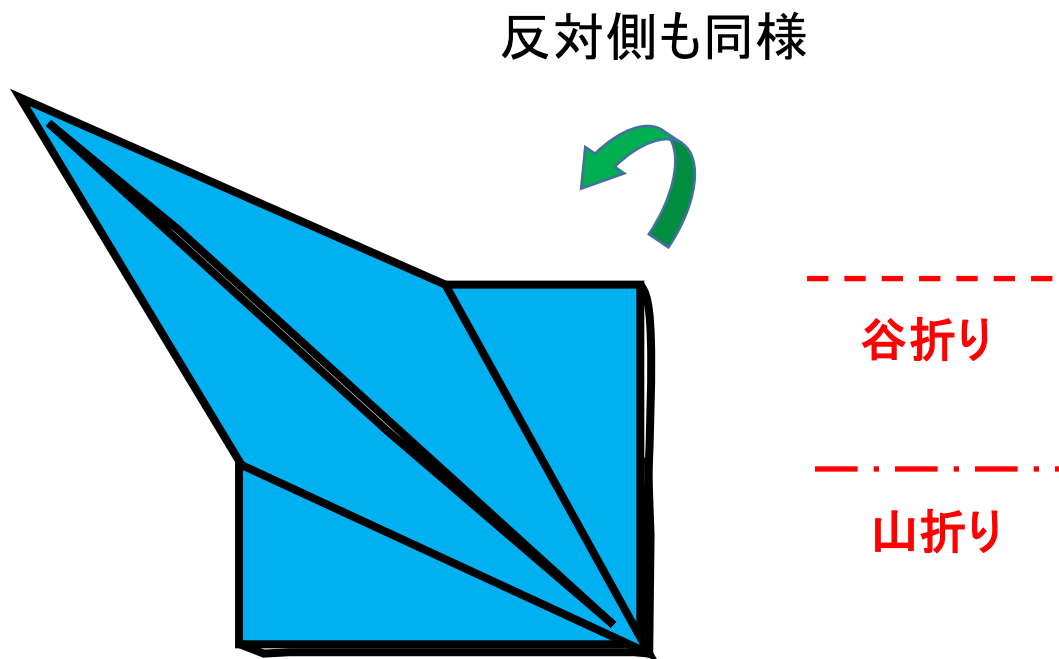
【実践】 鶴を折ってみましょう。



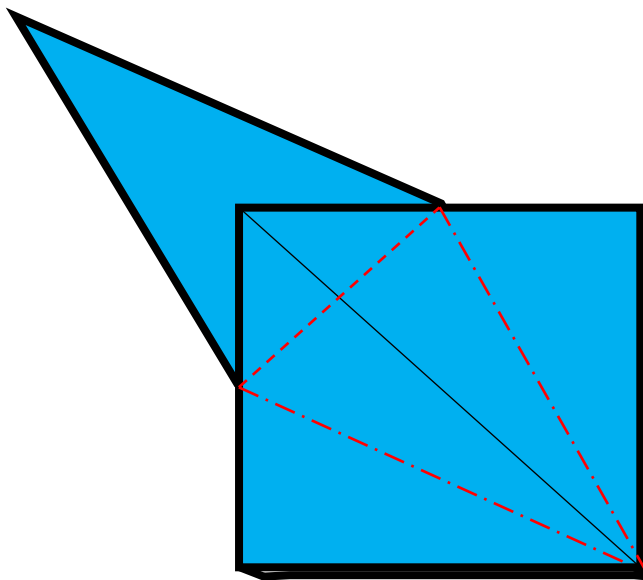
谷折り

山折り

【実践】 鶴を折ってみましょう。



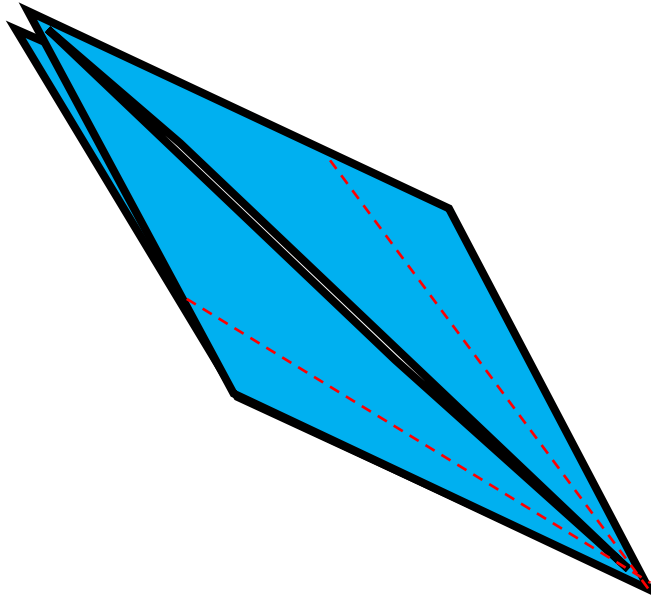
【実践】 鶴を折ってみましょう。



谷折り

山折り

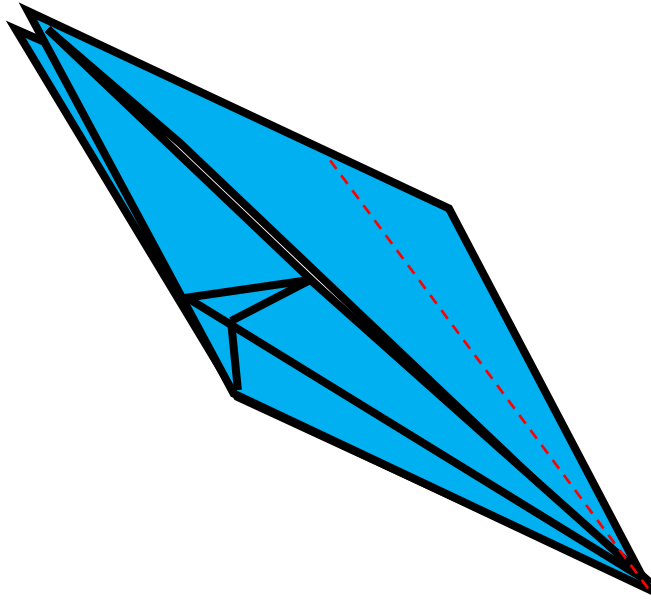
【実践】 鶴を折ってみましょう。



谷折り

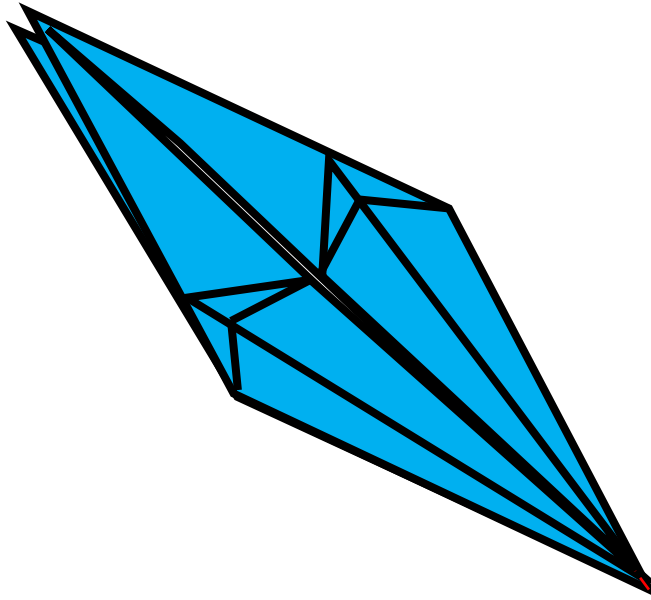
山折り

【実践】 鶴を折ってみましょう。



谷折り

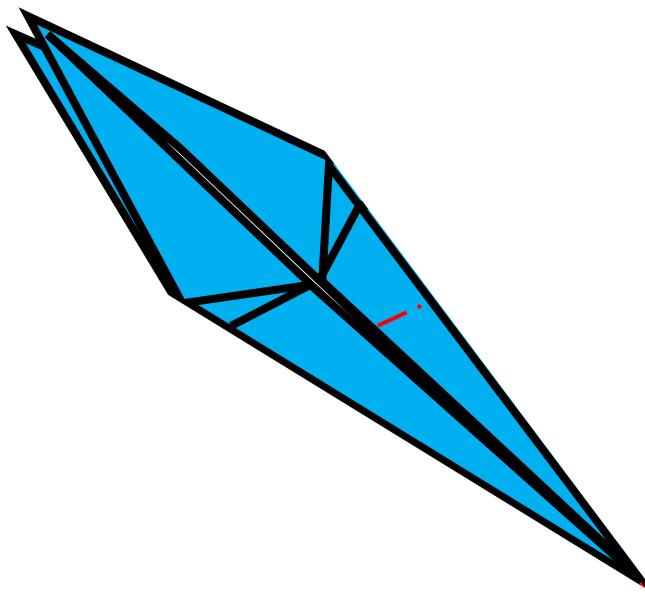
山折り



谷折り

山折り

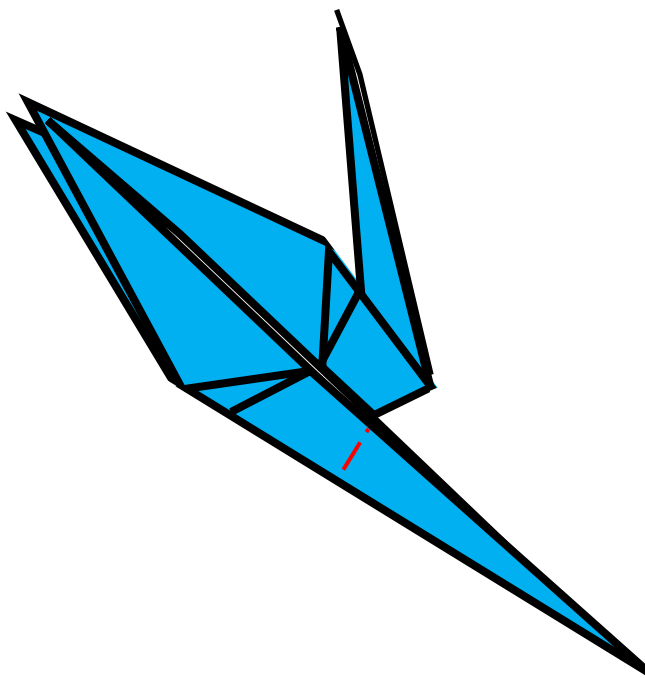
【実践】 鶴を折ってみましょう。



谷折り

山折り

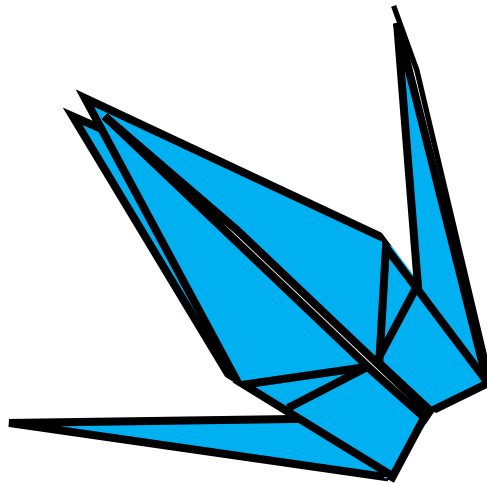
【実践】 鶴を折ってみましょう。



谷折り

山折り

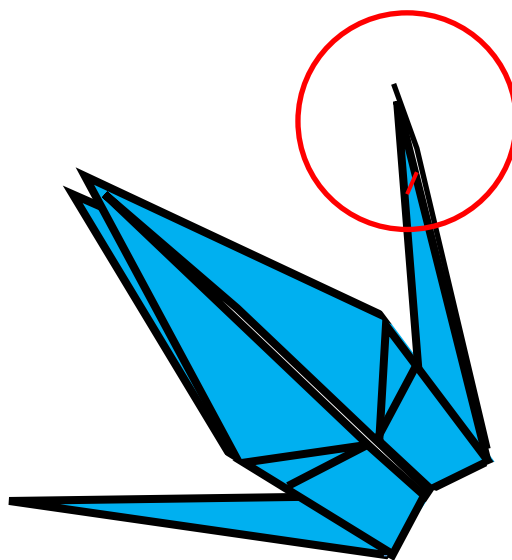
【実践】 鶴を折ってみましょう。



谷折り

山折り

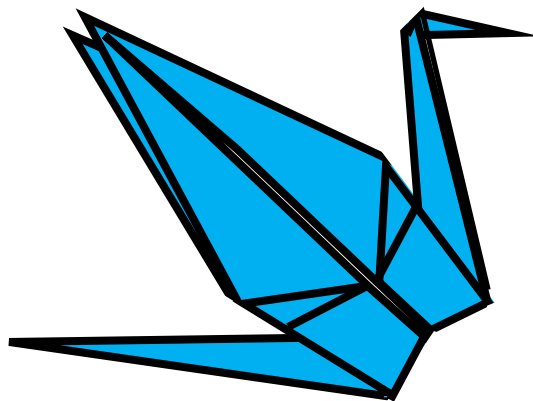
【実践】 鶴を折ってみましょう。



谷折り

山折り

【実践】 鶴を折ってみましょう。

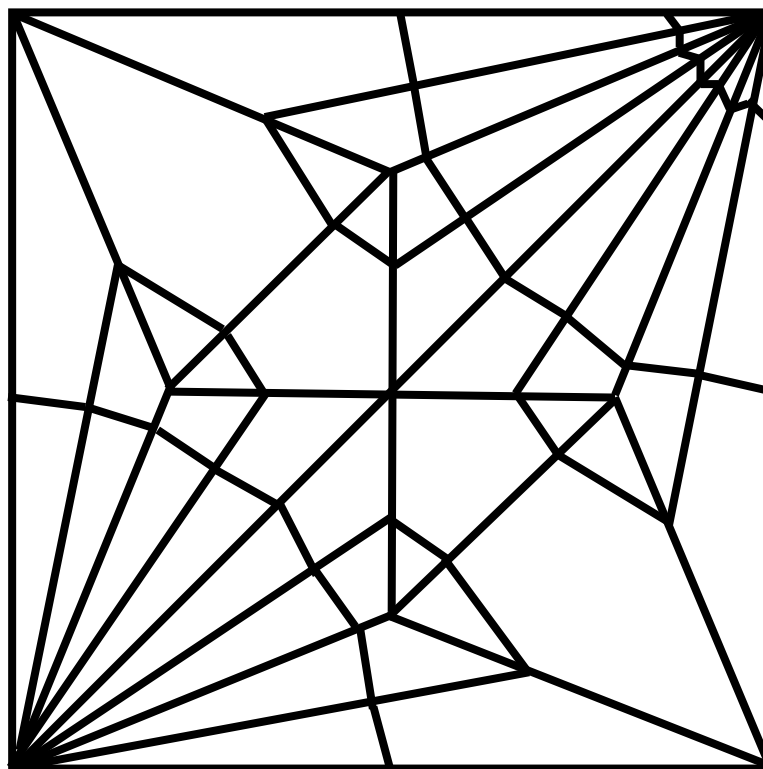


完成

谷折り

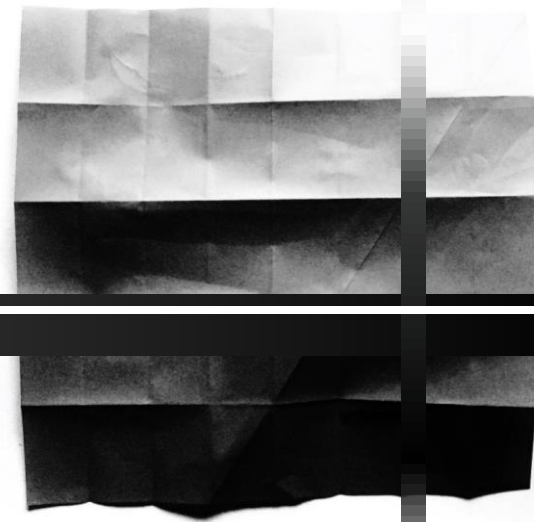
山折り

折り鶴の展開図



今日の流れ

- ・折り紙の歴史
- ・折り紙と数学
 - ①等分問題
 - ②平坦折りの理論
 - ②折り鶴の幾何学
- ・ミウラ折りの数理



折り紙と歴史

折り紙の歴史

7世紀

大陸から“紙”が伝わる

平安
鎌倉

大量に紙が生産されるように
供物や贈り物の美しく「包む」ために紙を折る文化が生まれる

室町

小笠原家、伊勢家により「紙包みの礼法」が整備される

江戸

色付きの紙が庶民にも普及
1797年 世界最古の折り紙本「秘傳千羽鶴折形」が出版

明治

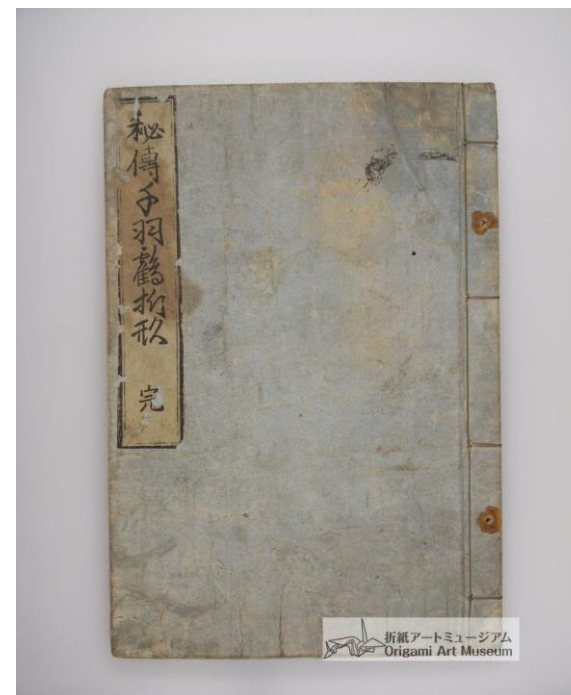
洋紙が普及し折り紙が学校教材として使われる

折り紙の歴史

小笠原家、伊勢家による整備

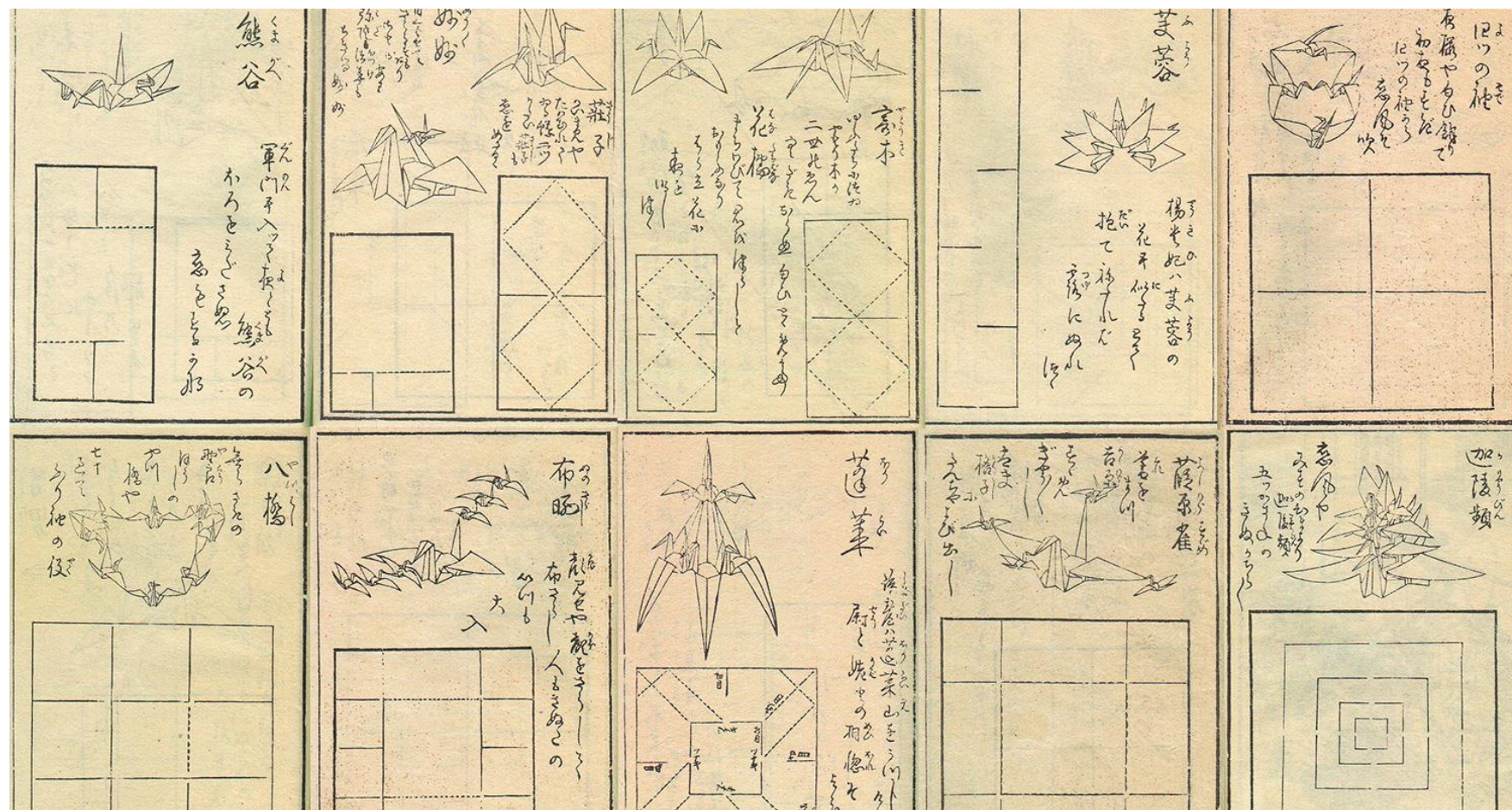


「雌蝶雄蝶」



世界最古の折り紙本
「秘傳千羽鶴折形」

「秘傳千羽鶴折形」



現代折り紙 (Origami)

立体化、細密化が進み、より「リアル」な形が折り紙によって実現されてきた。



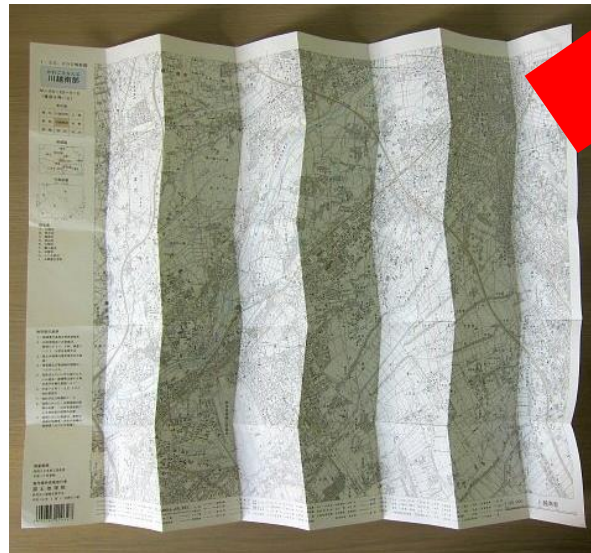
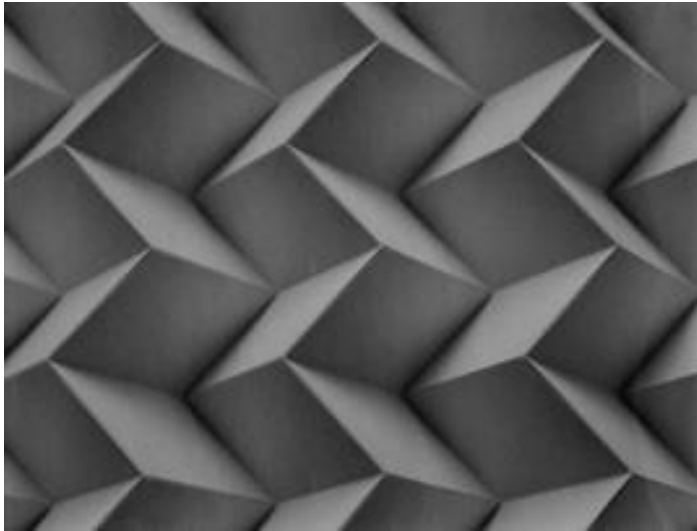
悪魔(前川淳氏)

バラ(川崎敏和氏)



龍神(神谷哲史氏)

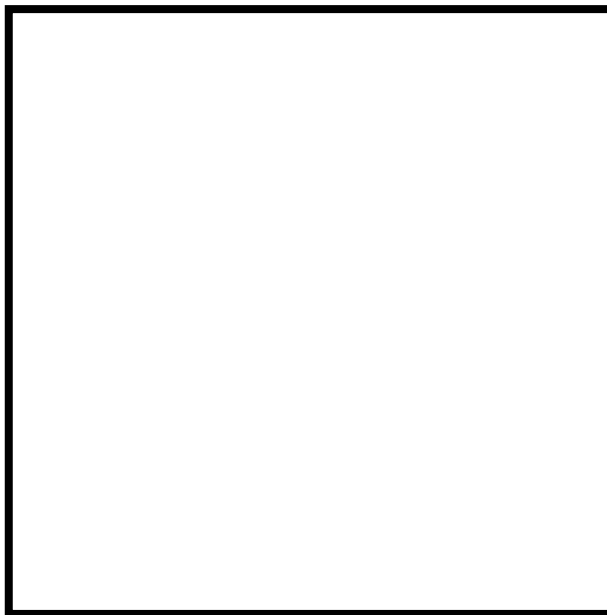
ミウラ折り (宇宙工学への応用)



折り紙と数学

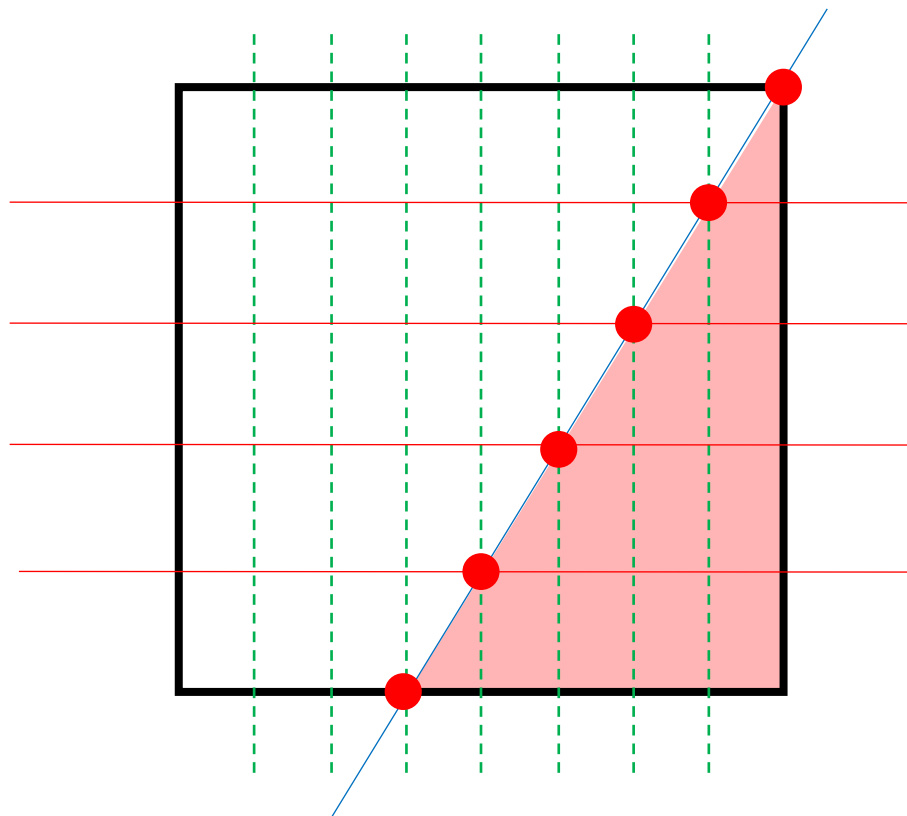
①折り紙の等分問題

折り紙を折ることで1辺を5等分してください。



①折り紙の等分問題

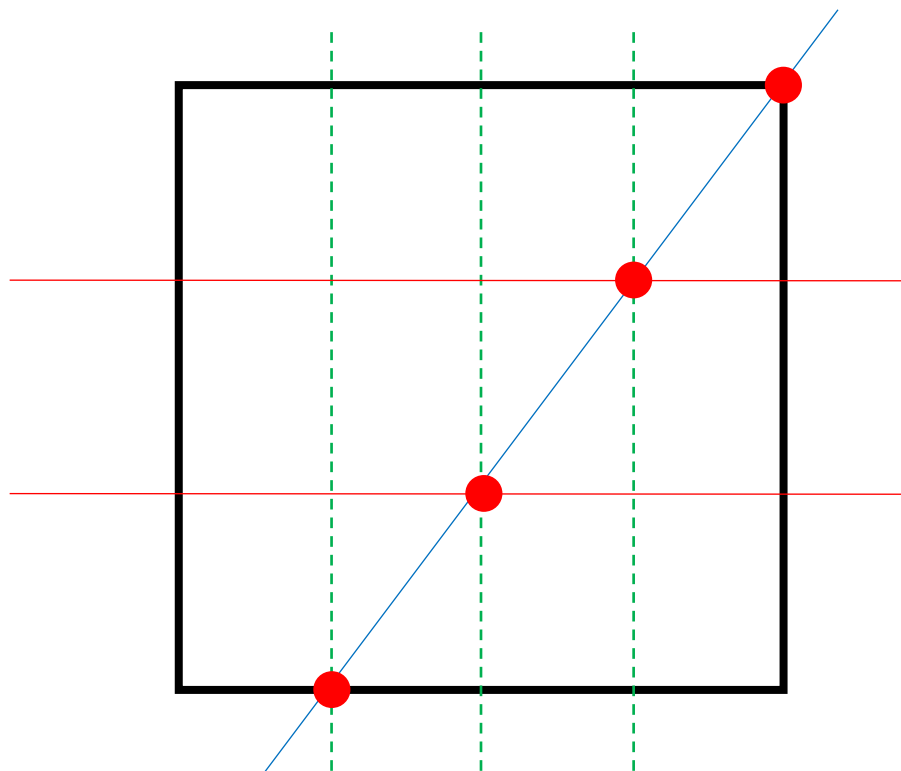
折り紙を折ることで1辺を5等分してください。



三角形の相似を使う

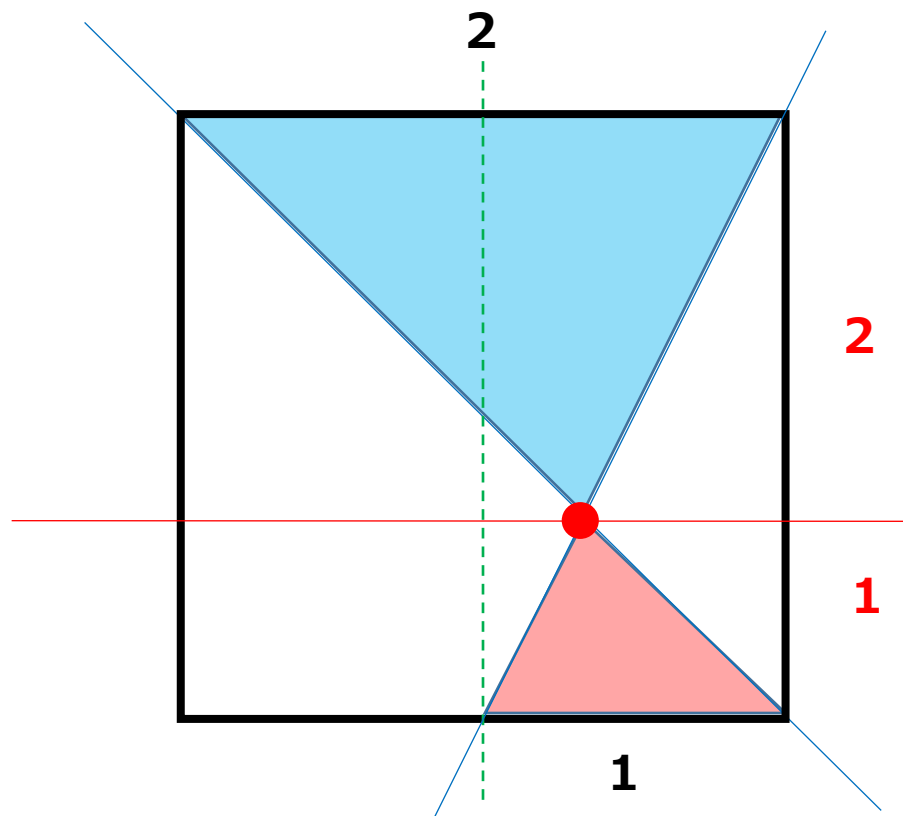
【実践】折り紙の等分問題

折り紙を折ることで1辺を3等分してください。



【実践】折り紙の等分問題

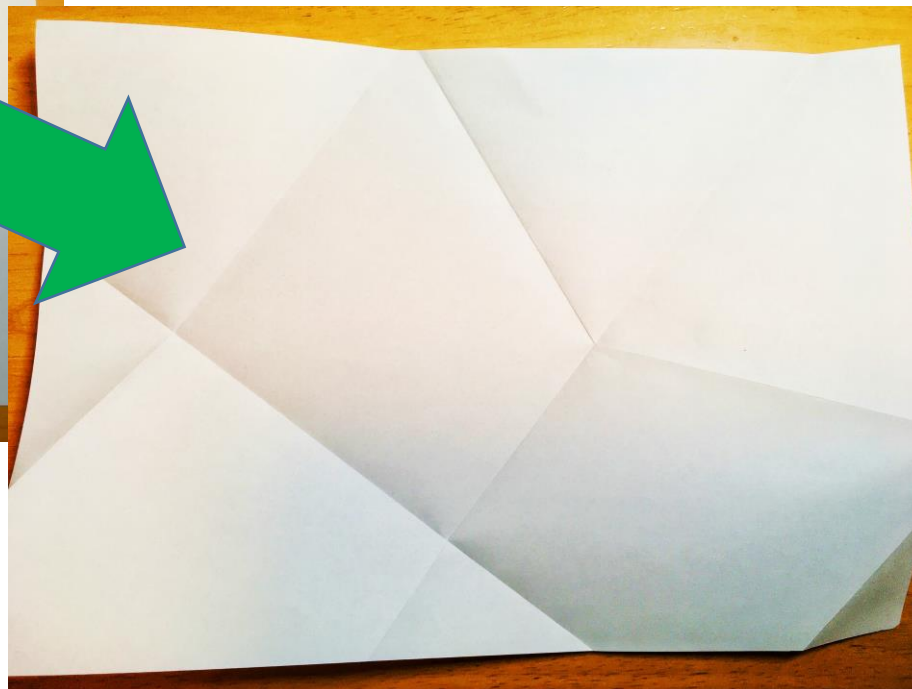
折り紙を折ることで1辺を3等分してください。



②平坦折りの理論



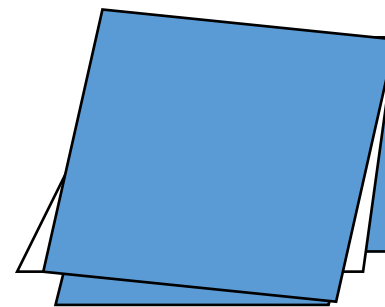
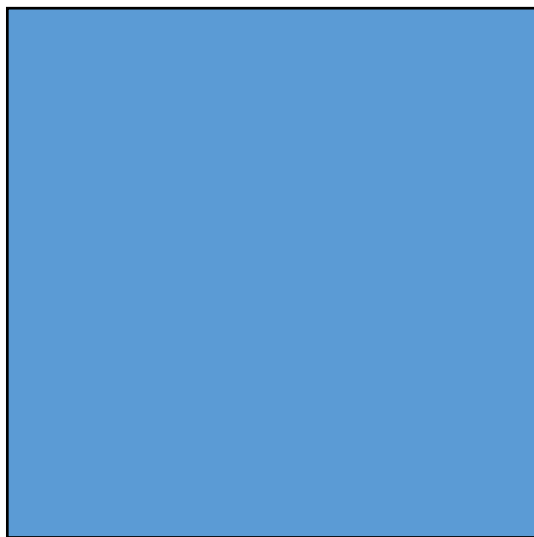
適当に折る



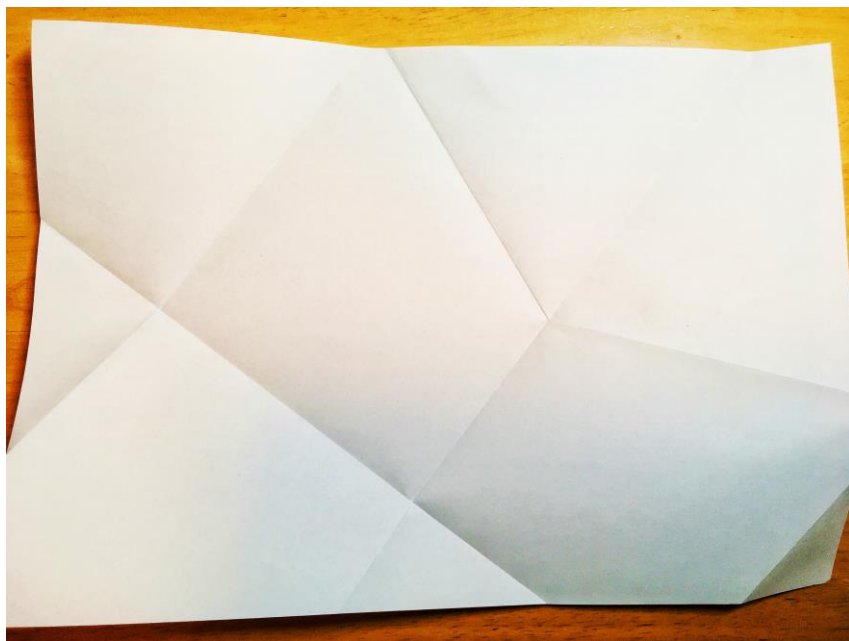
開いて「折り目」を観察する

【実践】折り紙を折りたたむ

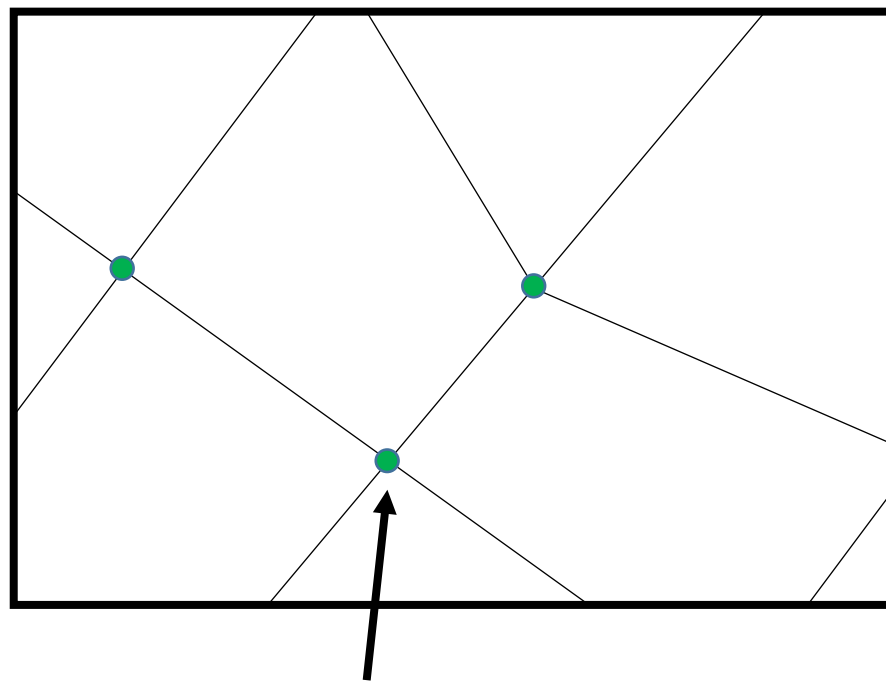
折り紙を適当に折りたたんでみましょう。



②平坦折りの理論



折り目を観察する



折り線の交点を「頂点」といいます。

②平坦折りの理論

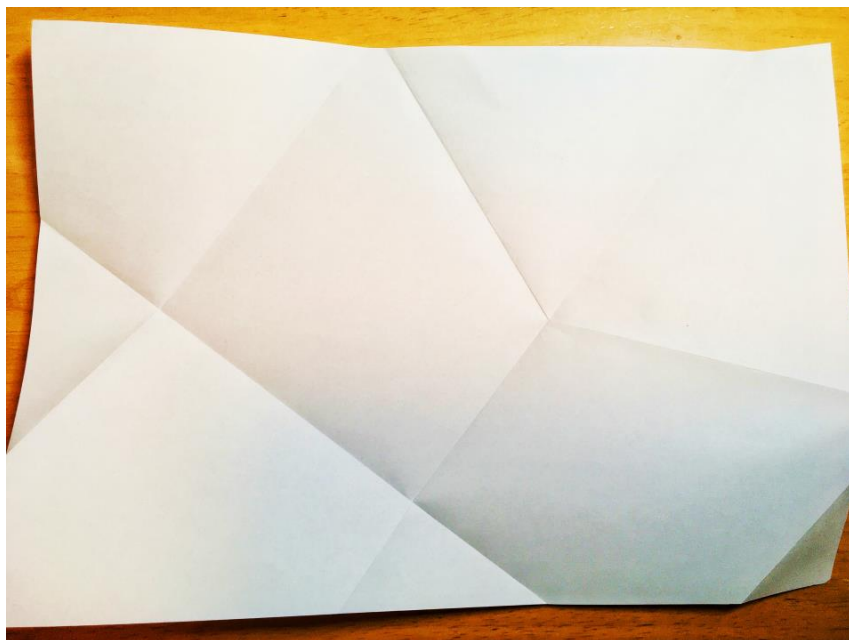
折り紙の基本定理1(局所平坦条件)

折り紙が平坦に折りたためる

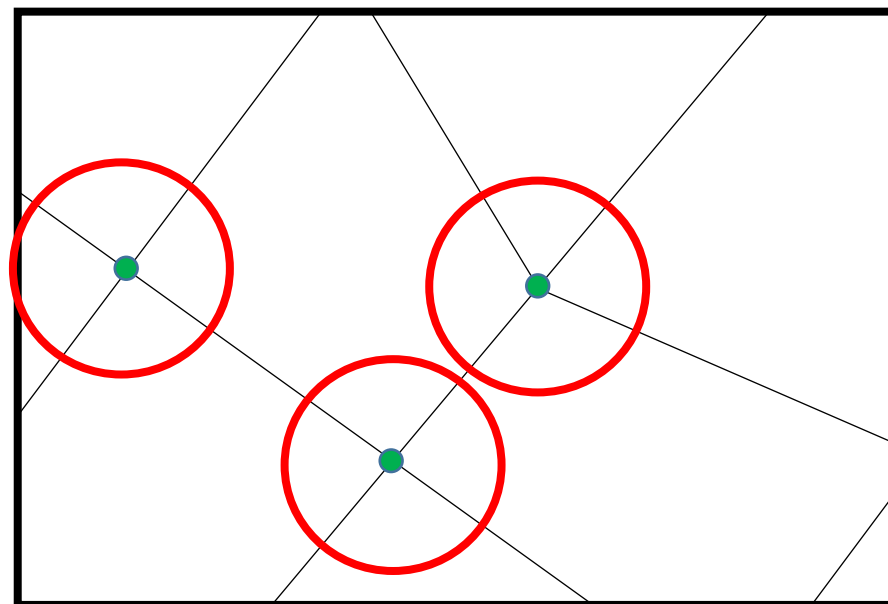


- ・頂点まわりの折り線は4以上の**偶数本**
- ・折り線のなす角の一つおきの和は**180°**

②平坦折りの理論

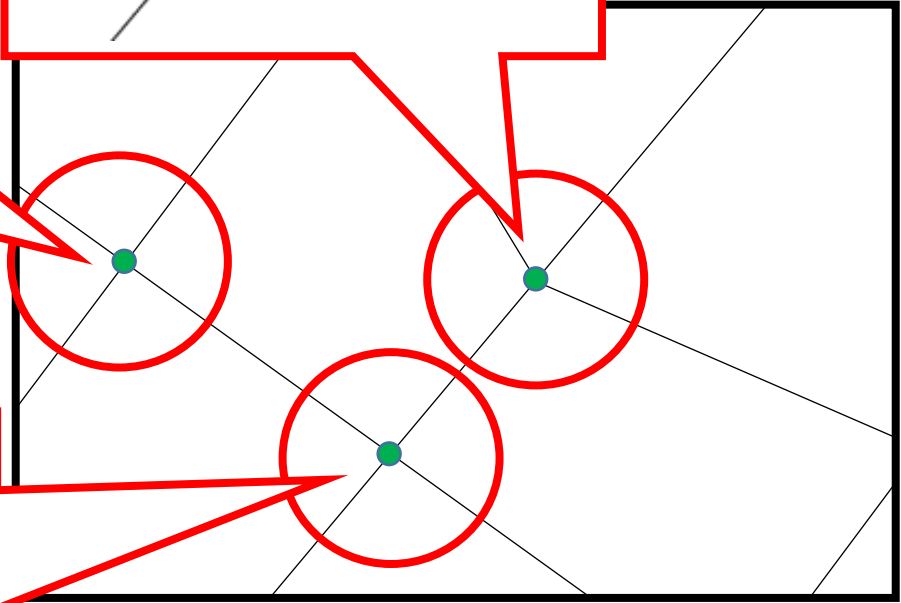
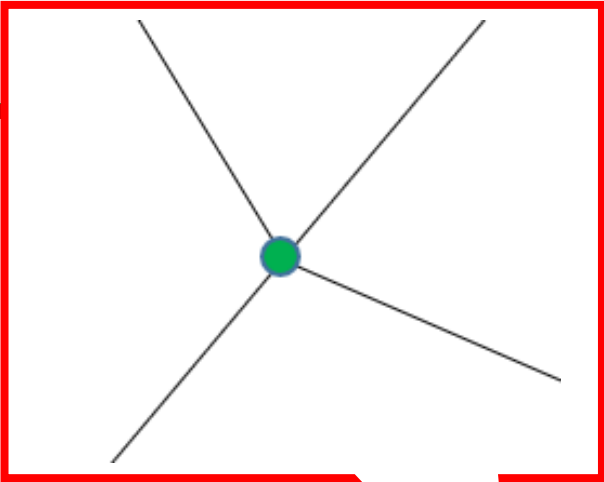
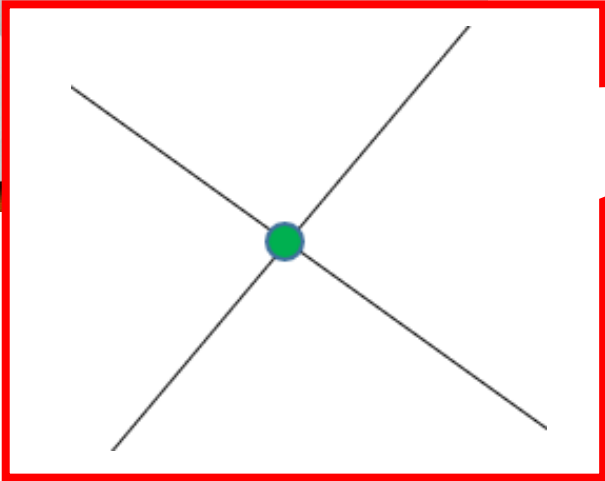
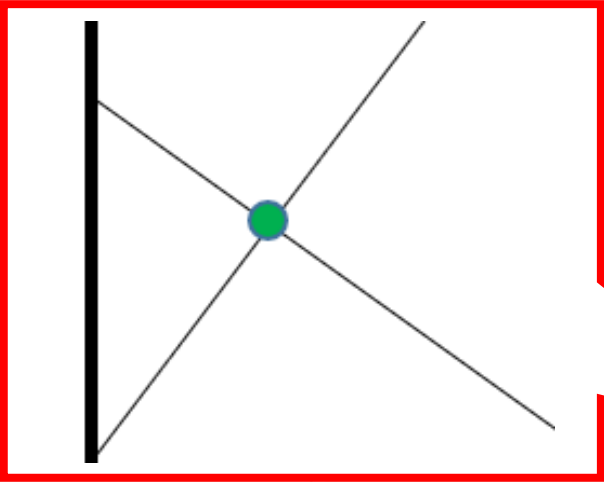
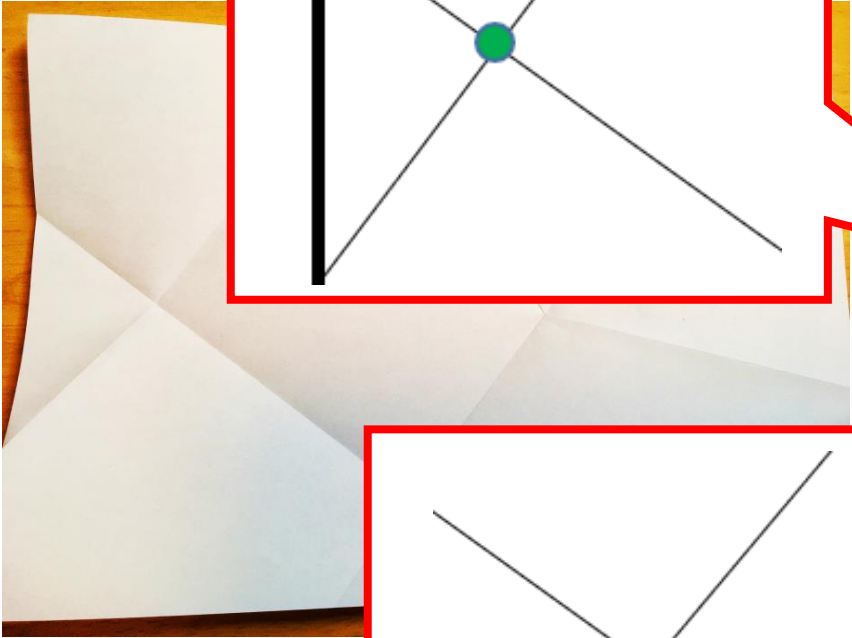


折り目を観察する



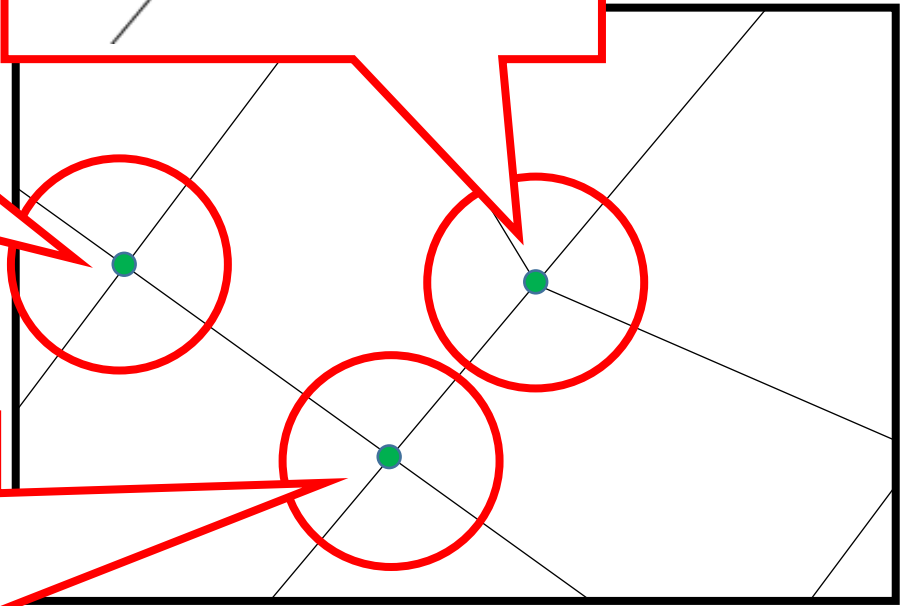
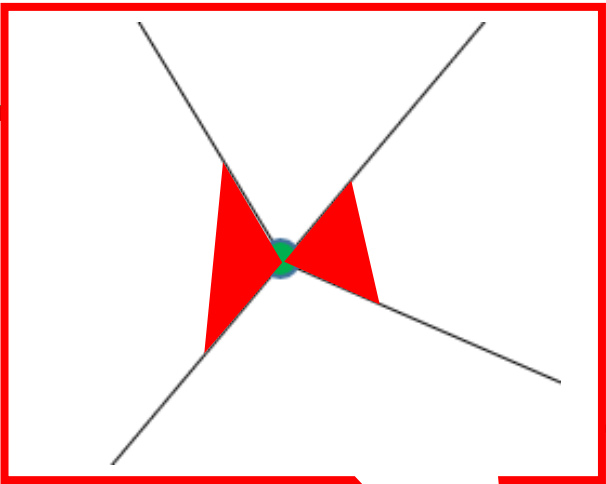
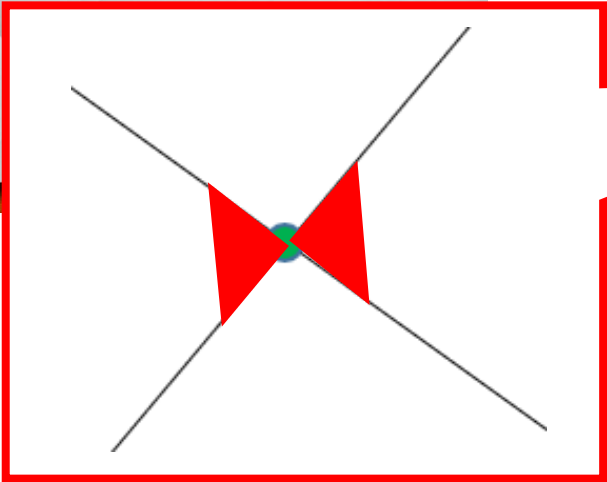
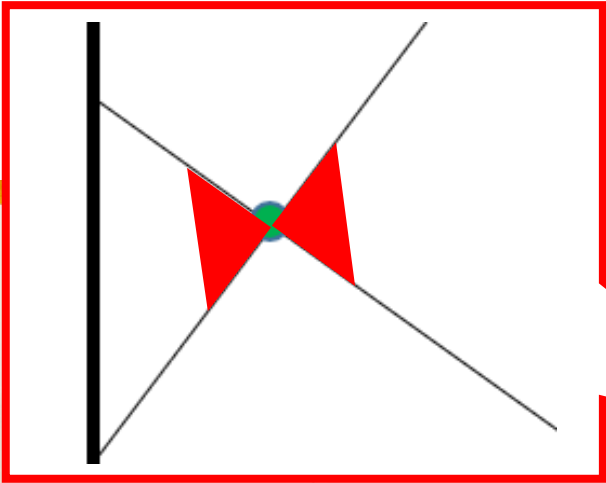
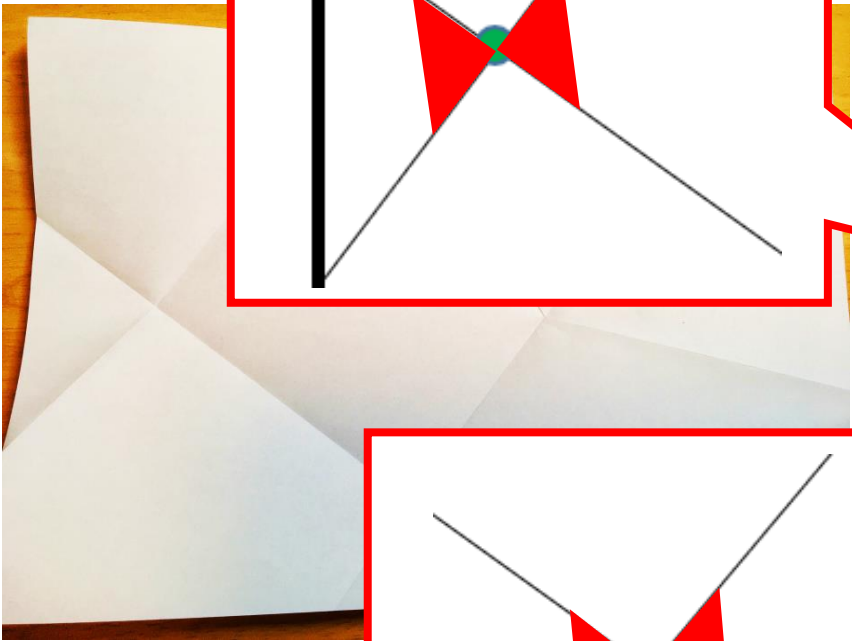
全て偶数本！

②平坦折りの理論



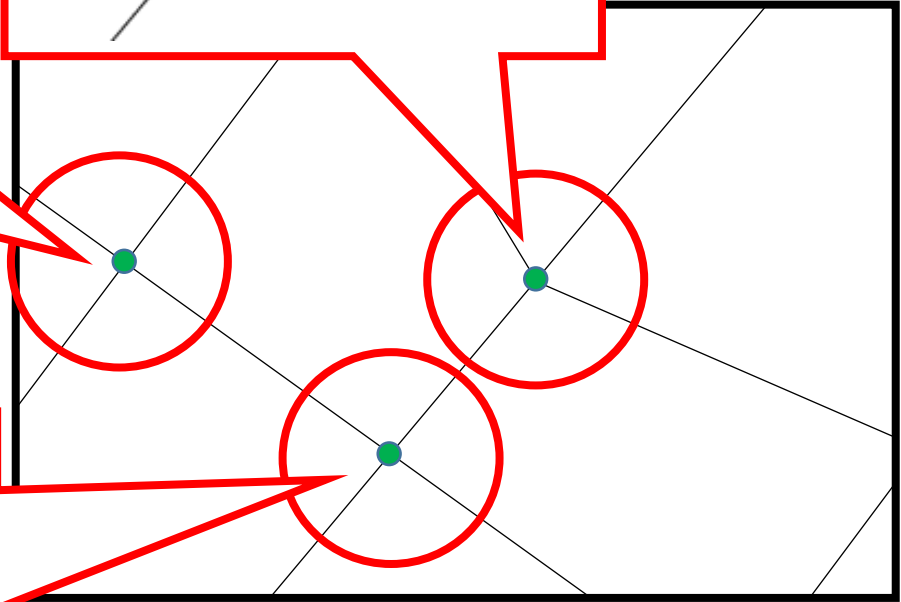
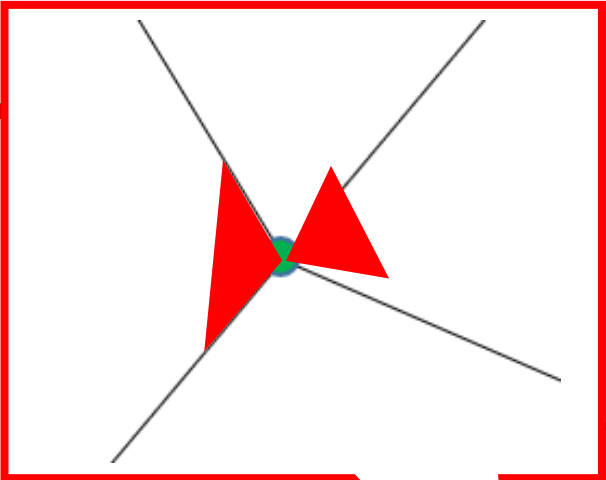
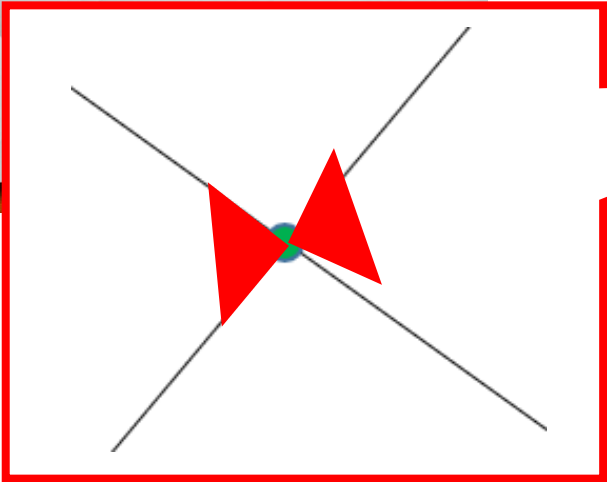
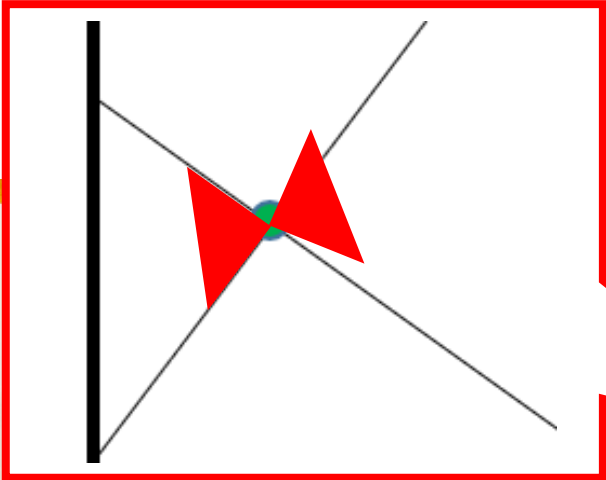
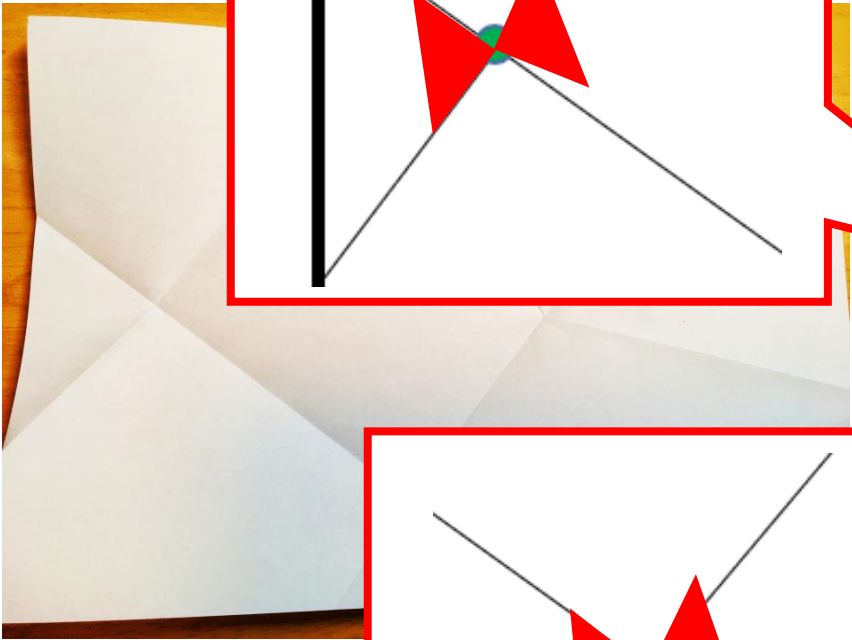
る

②平坦折りの理論



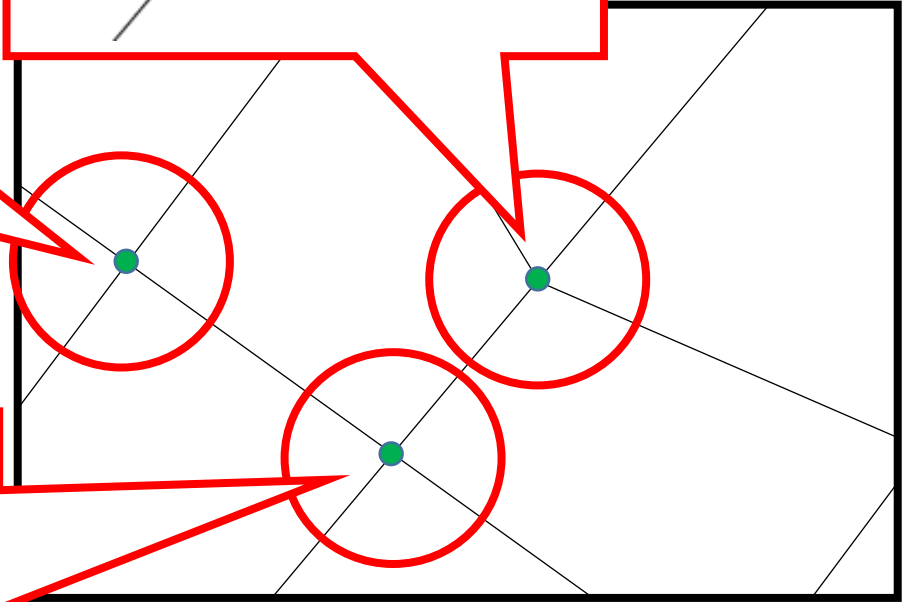
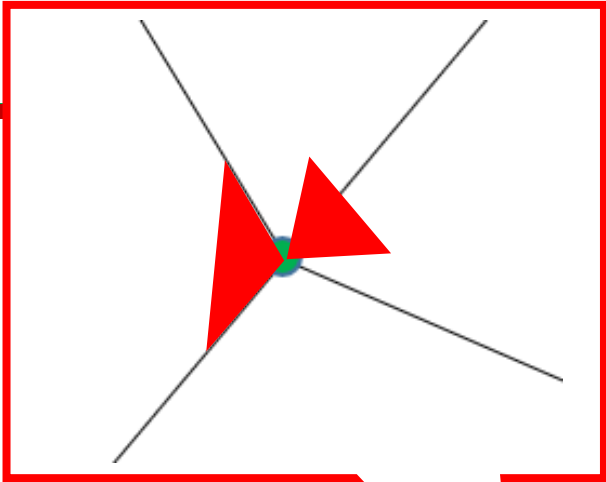
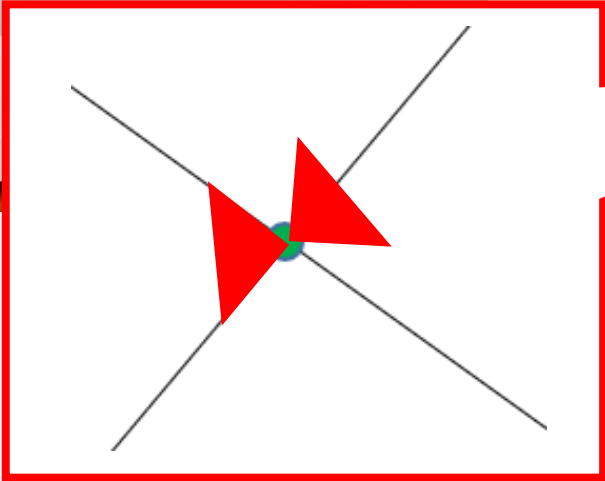
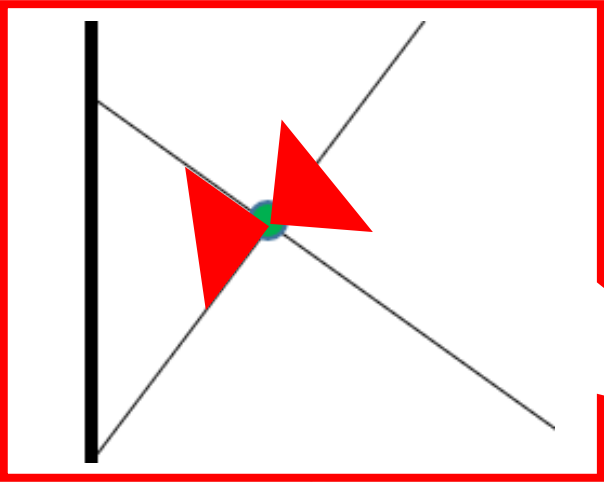
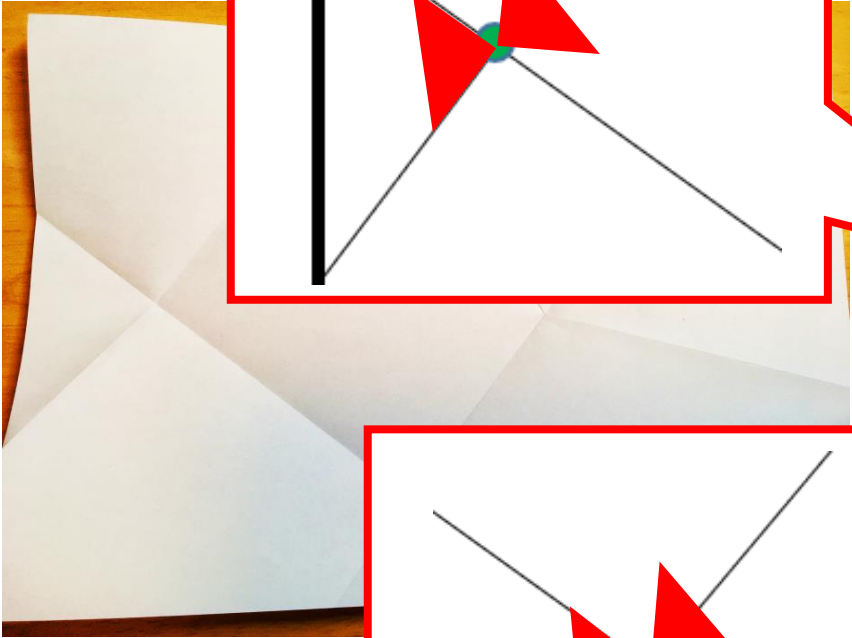
る

②平坦折りの理論

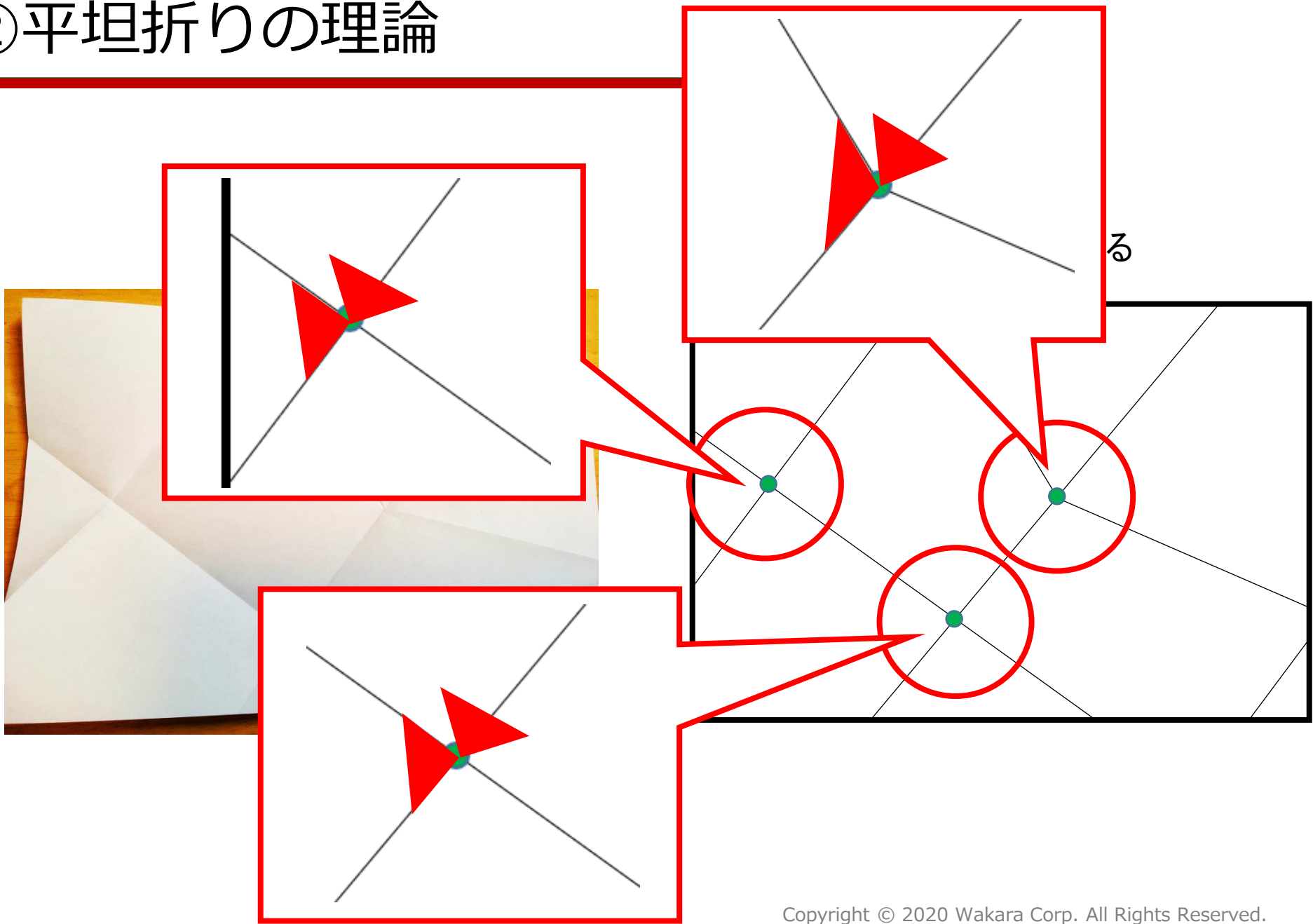


る

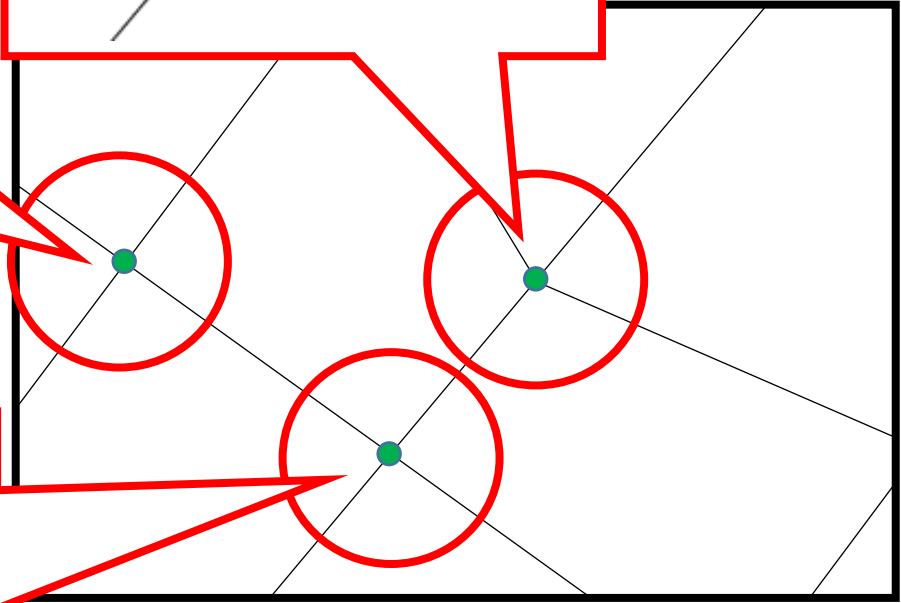
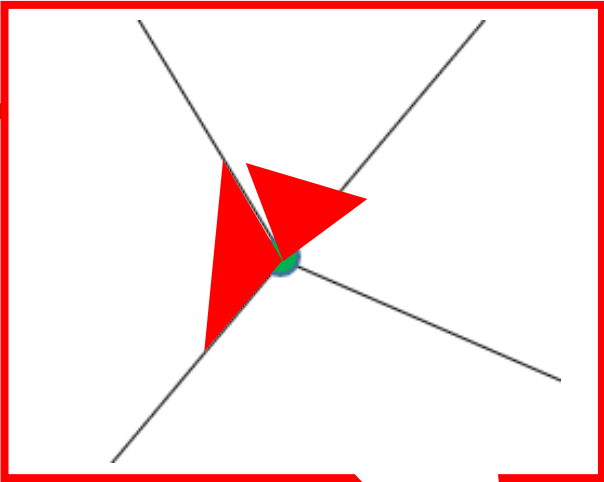
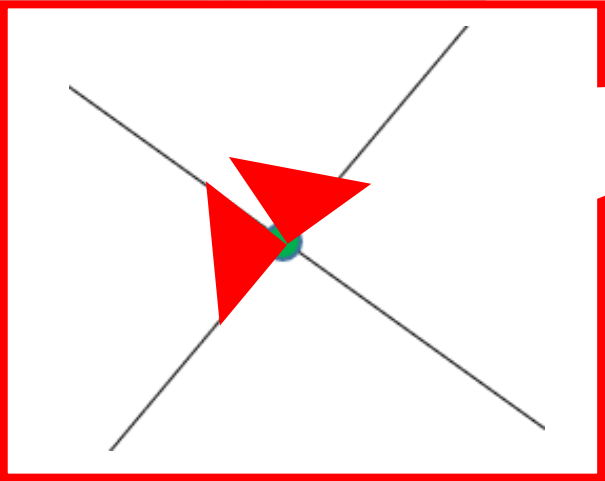
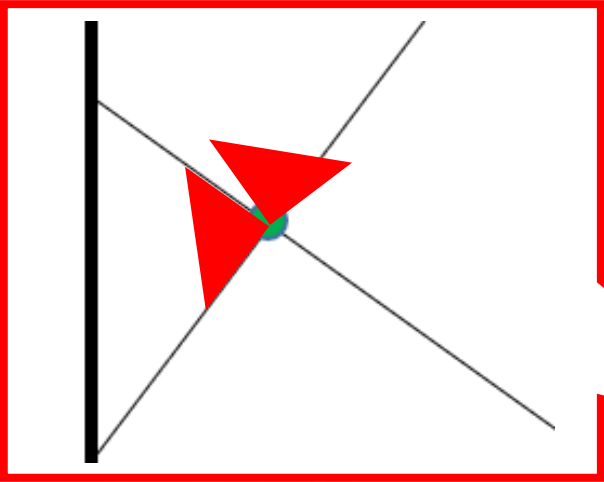
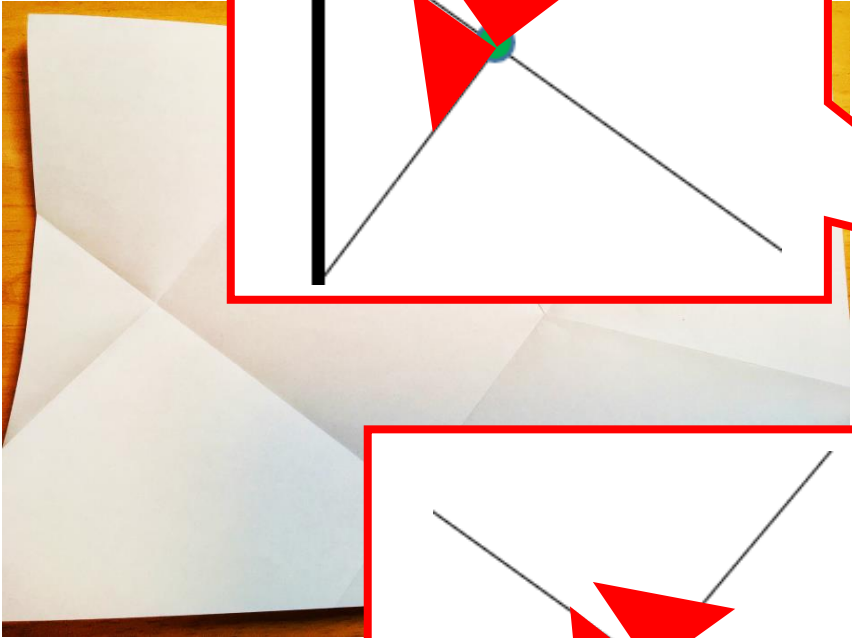
②平坦折りの理論



②平坦折りの理論

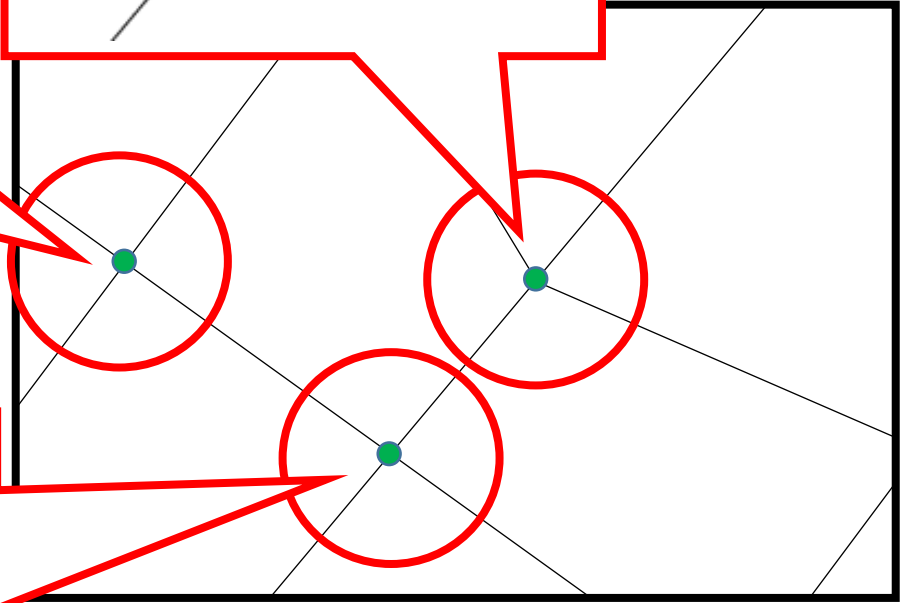
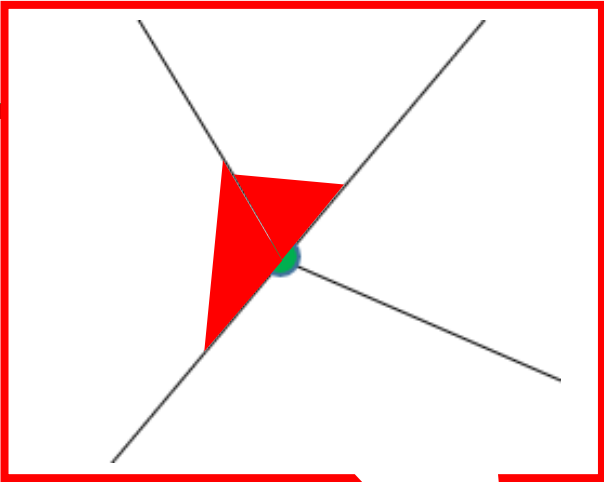
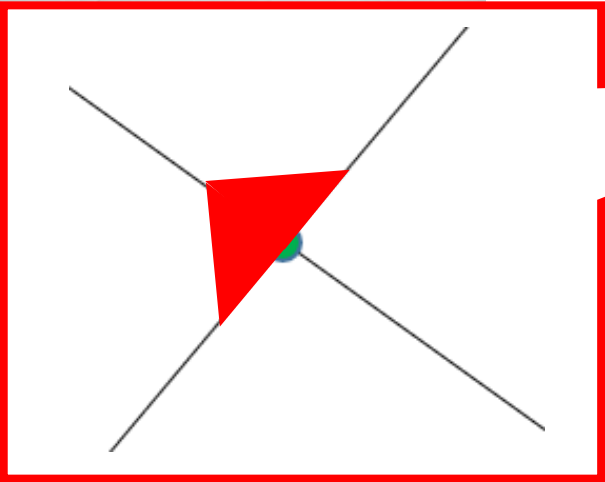
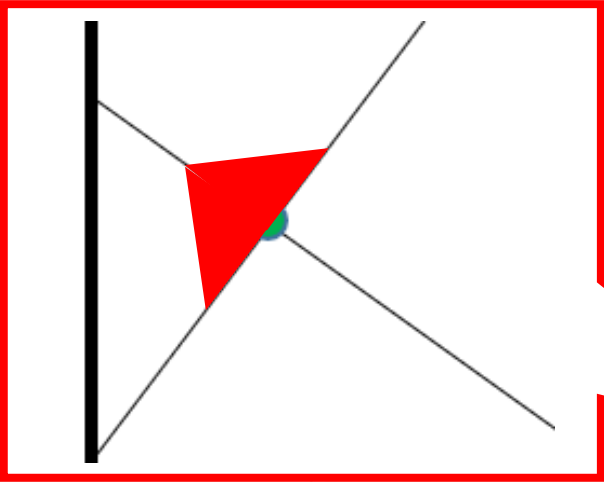
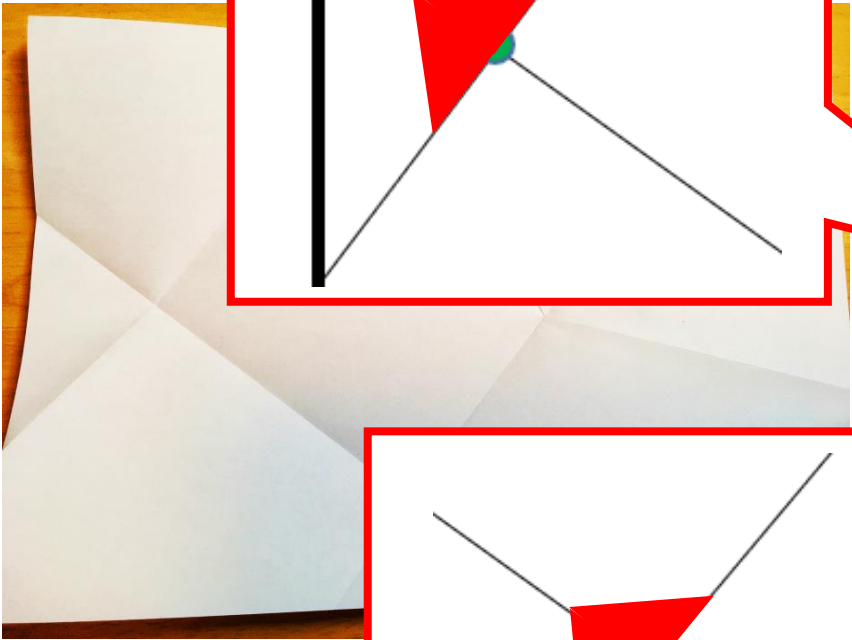


②平坦折りの理論



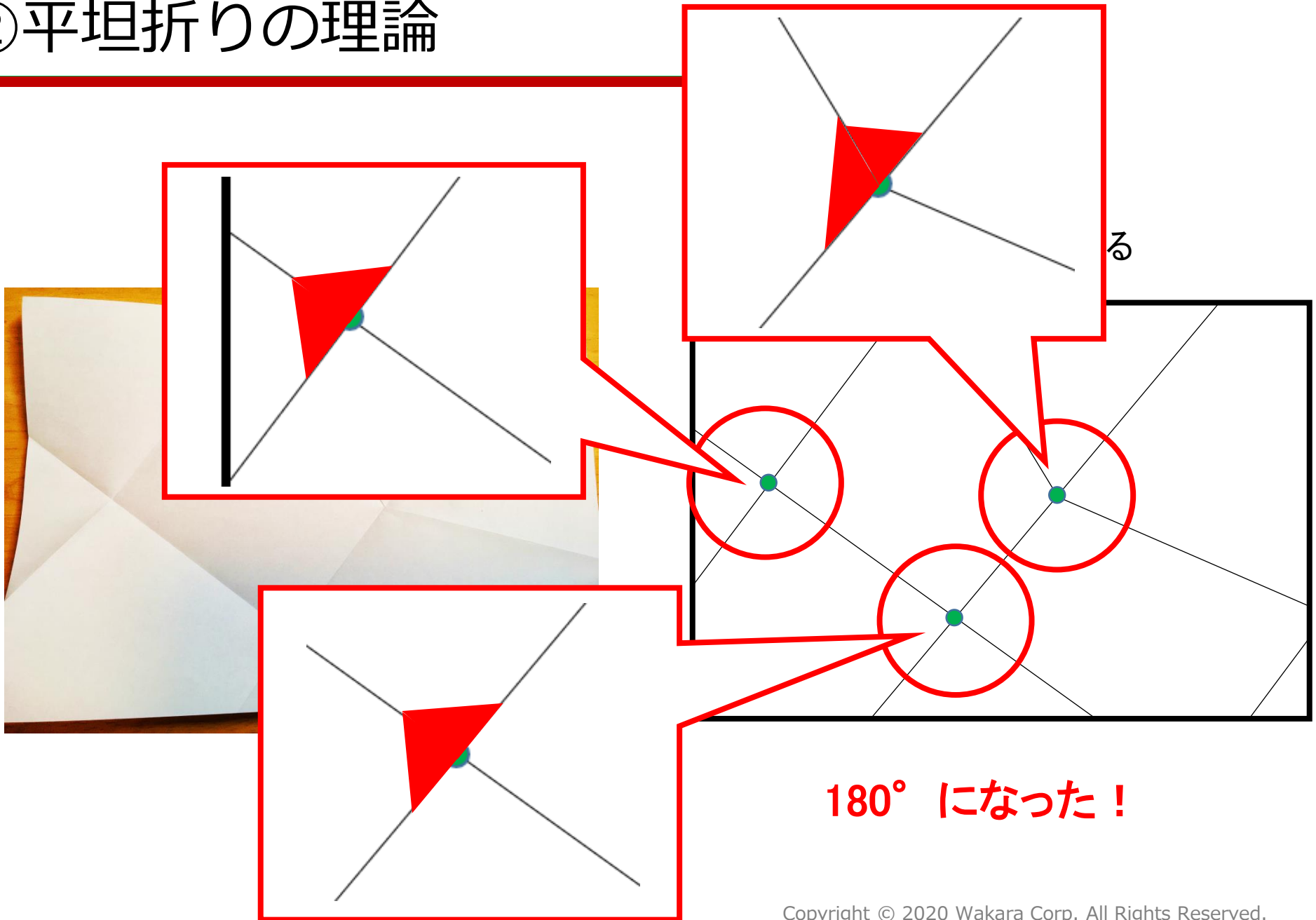
る

②平坦折りの理論



る

②平坦折りの理論



②平坦折りの理論

折り紙の基本定理1(局所平坦条件)

折り紙が平坦に折りたためる



- ・頂点まわりの折り線は4以上の**偶数本**
- ・折り線のなす角の一つおきの和は**180°**

折り紙の基本定理2(隣接谷山条件)

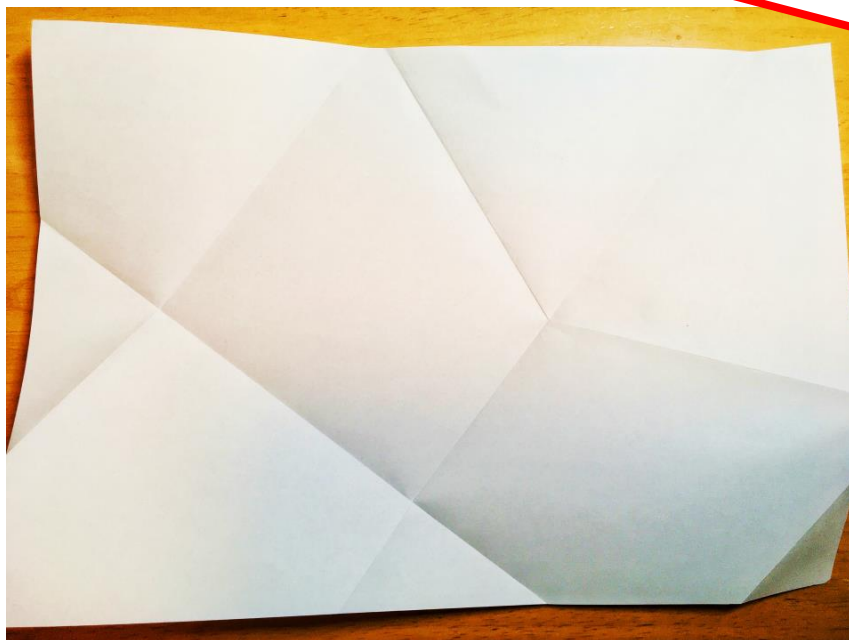
折り紙が平坦に折りたためる



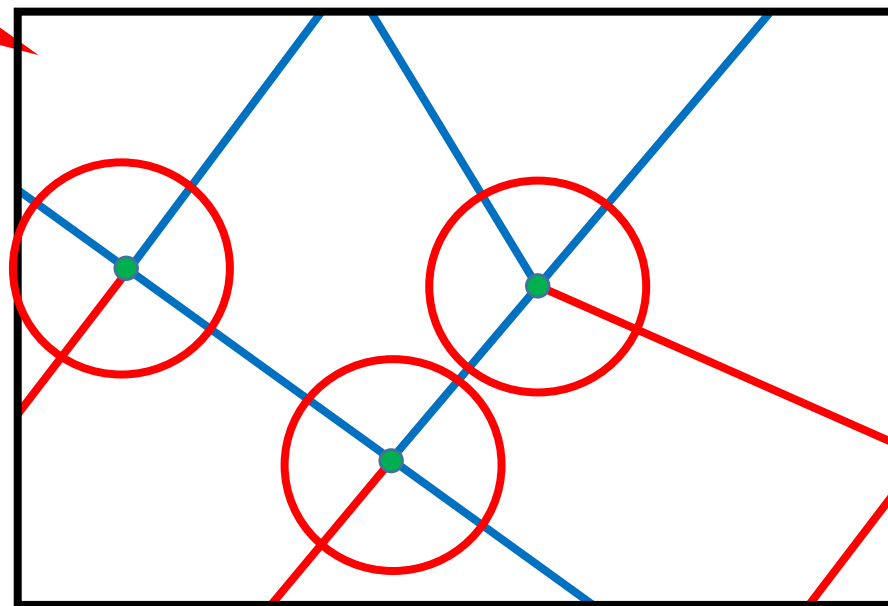
頂点から出ている山折り線の本数と
谷折り線の本数の差は**2**

②平坦折りの理論

全ての頂点回りで 青－赤＝2



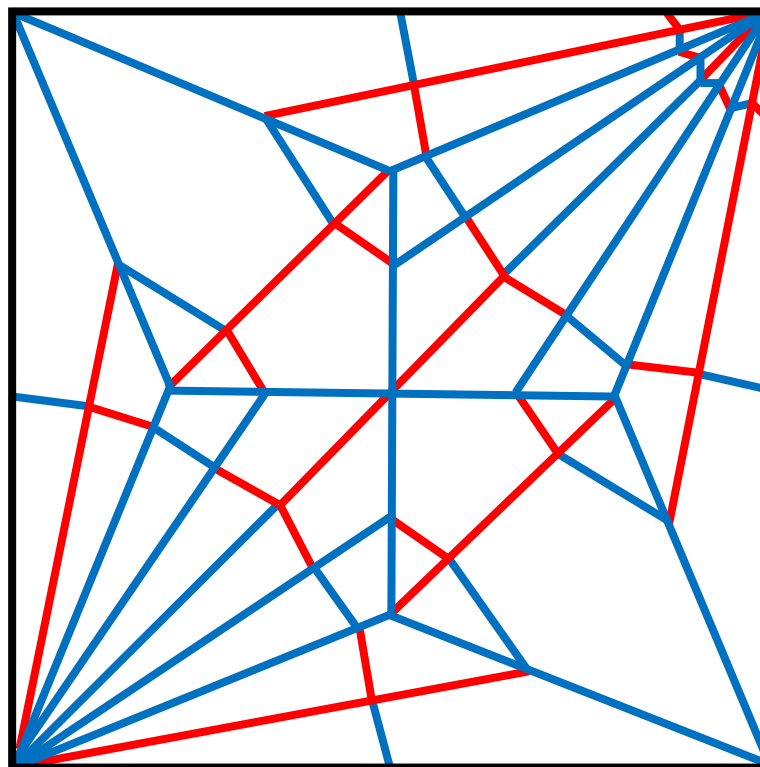
折り目を観察する



山折りと谷折りで色分けする

山折り: 赤 谷折り: 青

折り鶴の展開図



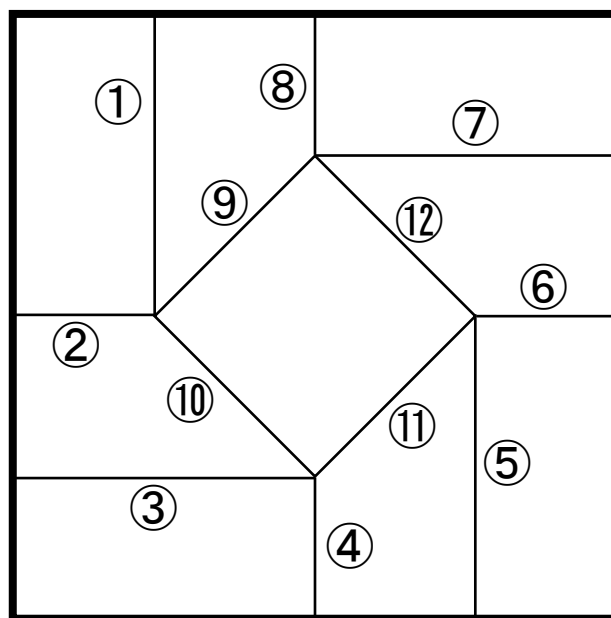
・局所平坦条件

・隣接谷山条件

を確認してみましょう。

②平坦折りの理論（応用）

折り目を線で表現した図を「形式的折り線図」といいます。



しかし、これだけではどこが山折りなのか谷折りなのかわかりません。

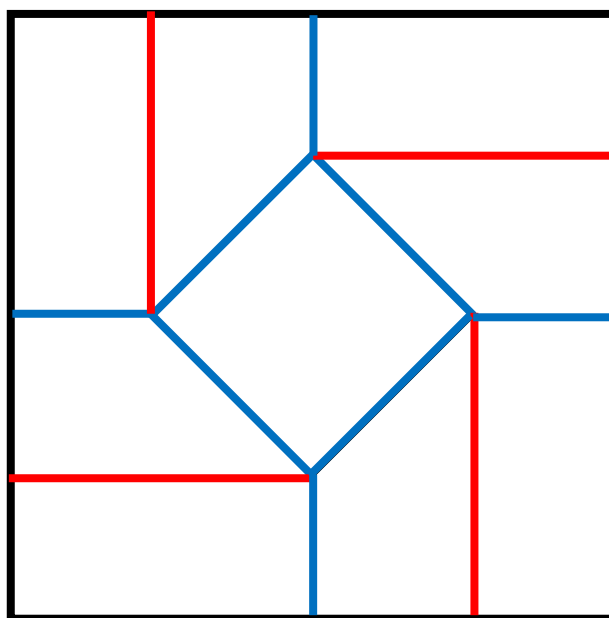
山折りと谷折りを決める



線の本数が12本あるので 2^{12} 通りある

②平坦折りの理論（応用）

ここを谷折りとする



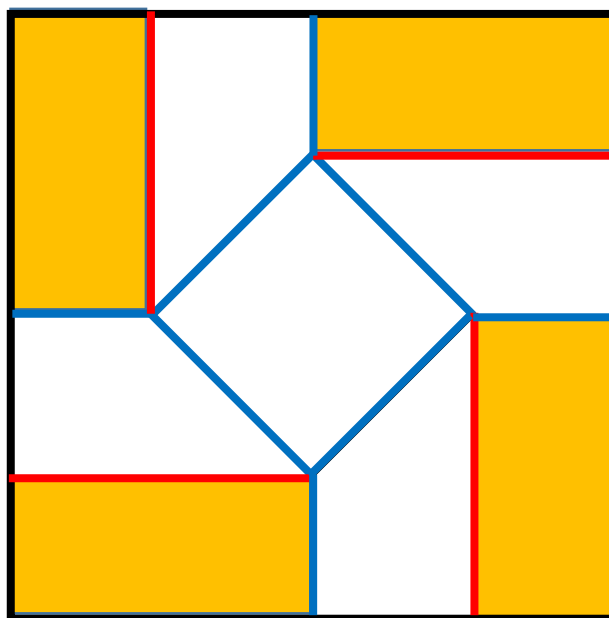
谷折り: 青

山折り: 赤

折り紙の基本定理を使うと、実は実現可能な折り線は1通りしかないとわかる。

②平坦折りの理論（応用）

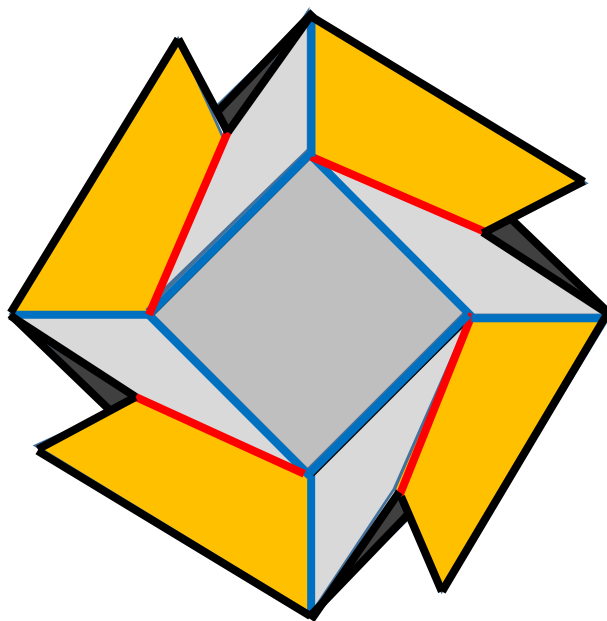
ここを谷折りとする



谷折り: 青

山折り: 赤

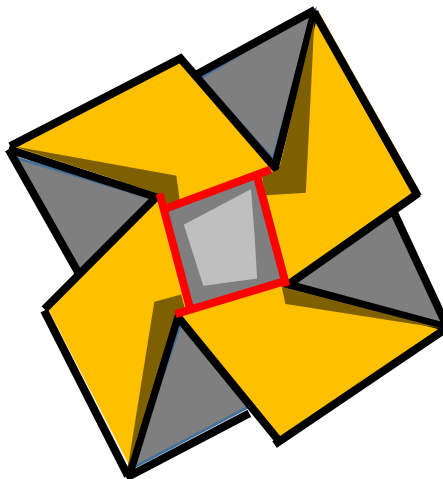
②平坦折りの理論（応用）



谷折り: 青

山折り: 赤

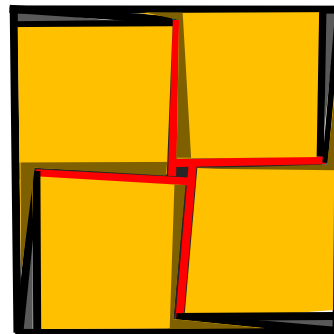
②平坦折りの理論（応用）



谷折り: 青

山折り: 赤

②平坦折りの理論（応用）

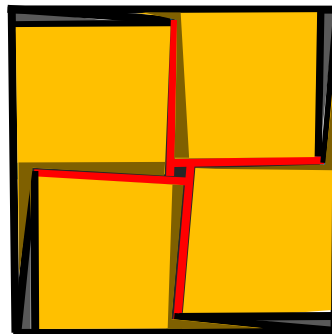


谷折り: 青

山折り: 赤

②平坦折りの理論（応用）

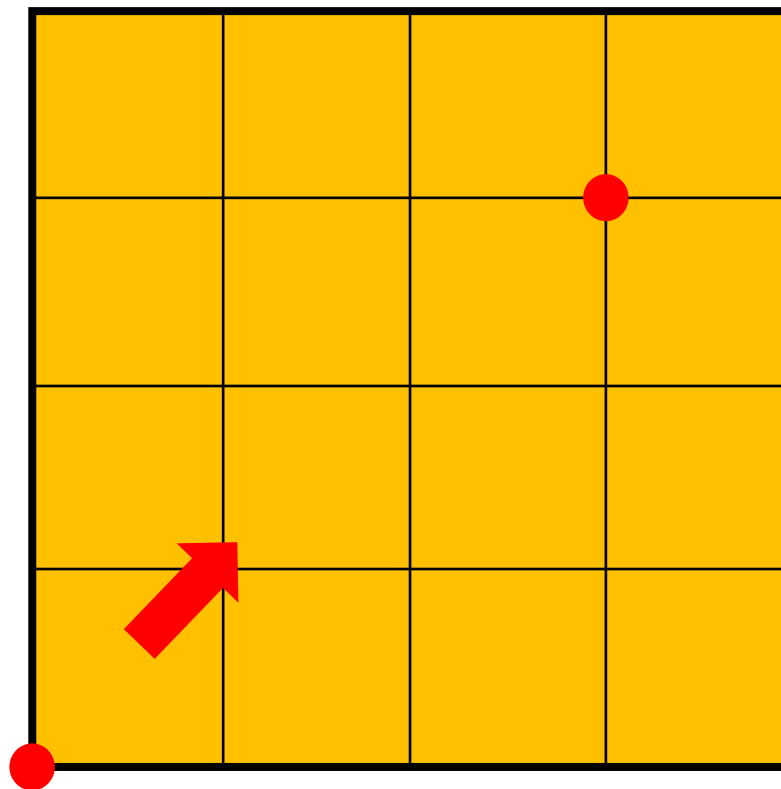
ねじり折り



谷折り: 青

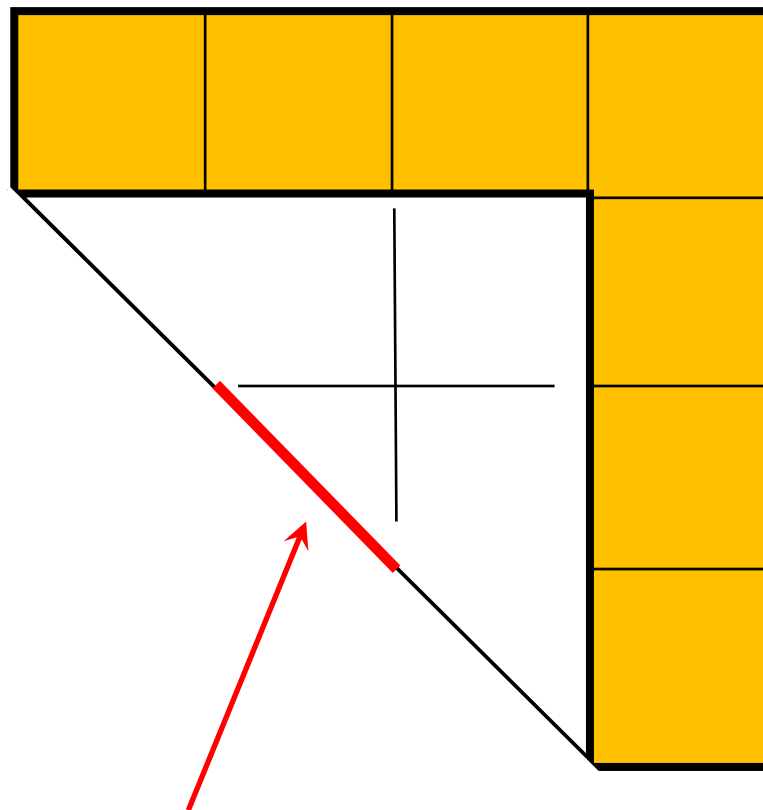
山折り: 赤

【実践】ねじり折りを折ってみる



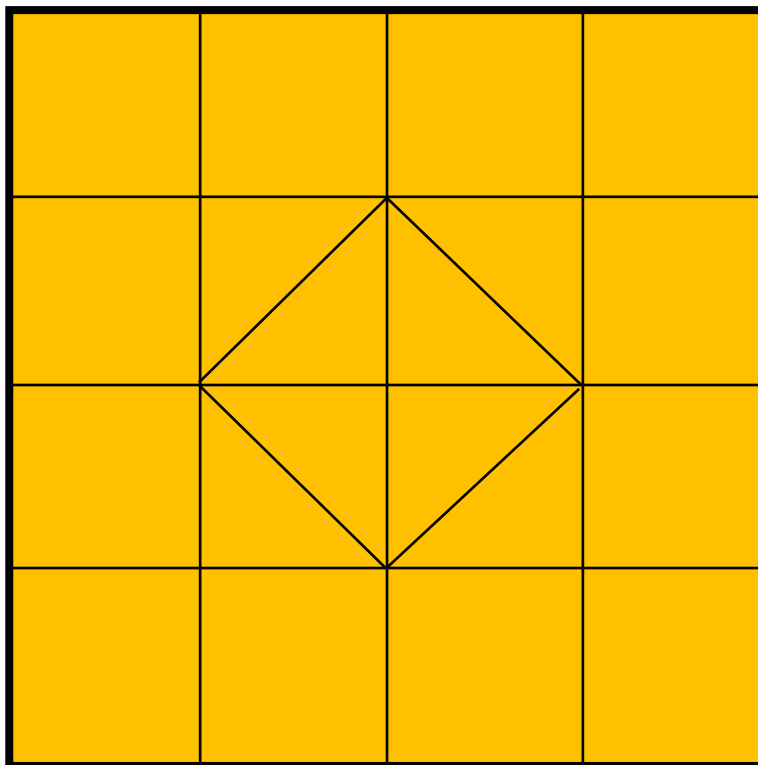
縦横で4等分の折り目を付けます。

【実践】ねじり折りを折ってみる



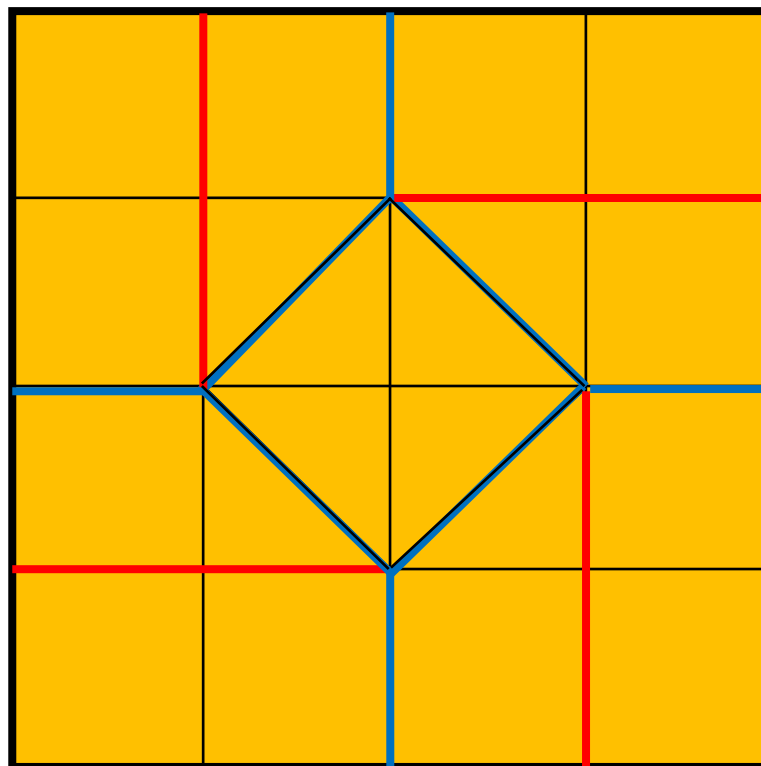
ここだけ折り目を付けます。

【実践】ねじり折りを折ってみる



4方向で同じ折り目をつけます。

【実践】ねじり折りを折ってみる

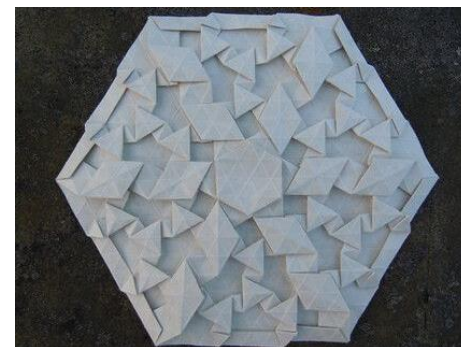
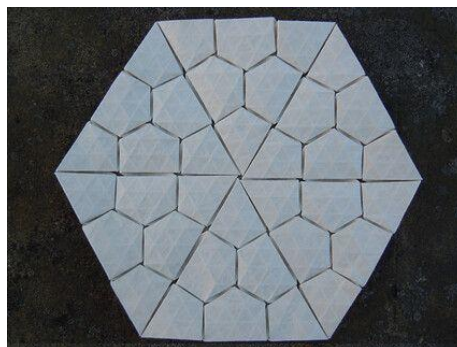


準備完了です。**赤を谷折り**、**青を山折り**として
ねじり折りをしてみましょう。

②平坦折りの理論（応用）

ねじり折りの応用例

・結晶折り（平織り）



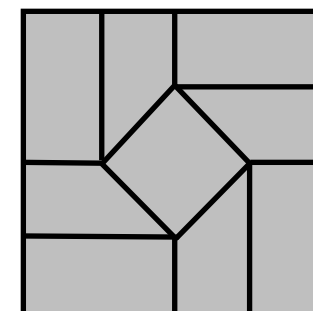
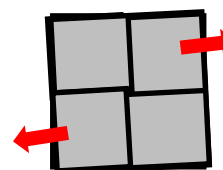
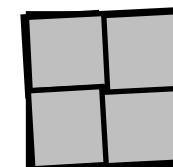
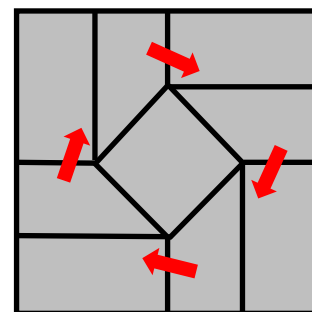
・川崎ローズ



②平坦折りの理論（応用）

ねじり折りの応用例

・昆虫の羽の構造



ねじれ折りの構造を利用して折りたたみが容易に

③折り鶴の幾何学

この研究分野の主な目的

① 折り鶴の対称性を崩せないか



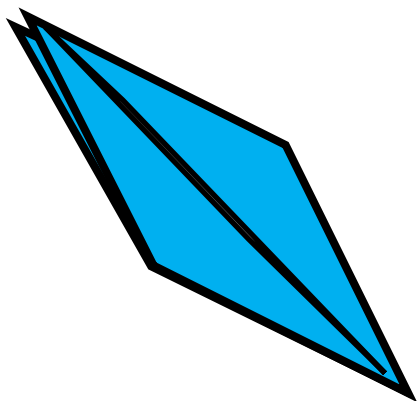
「前川変形」

② 正方形以外の四角形で変形版が作れないか

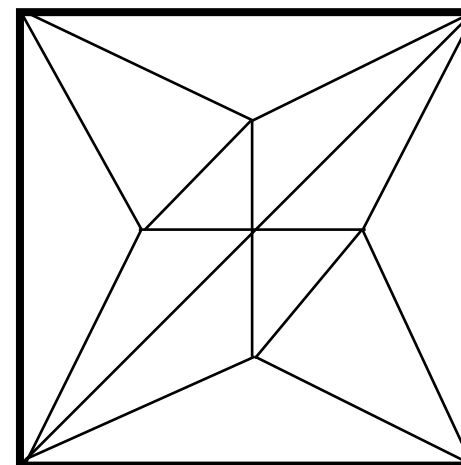


「内接四辺形」

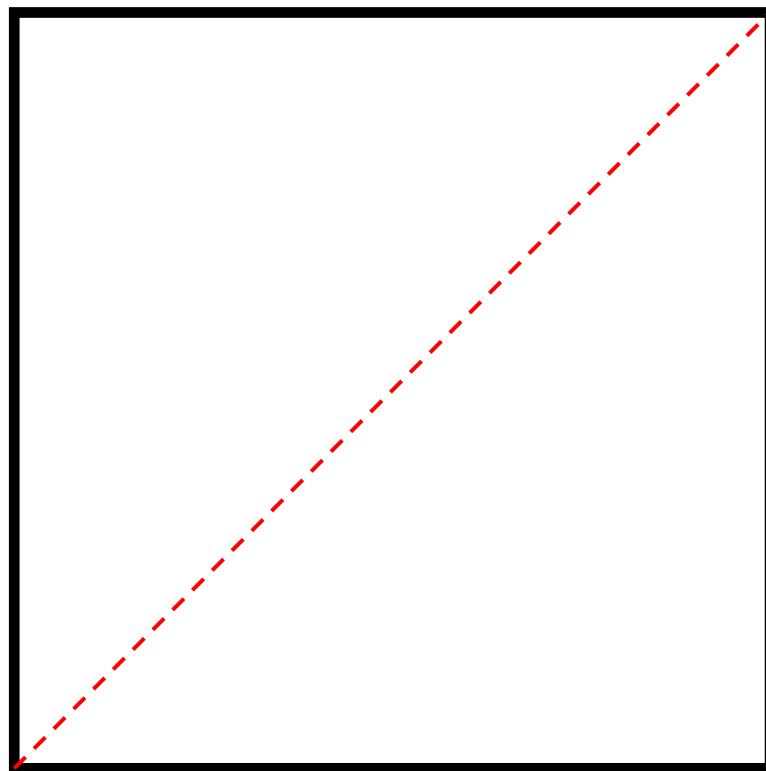
折り鶴の「基本形」



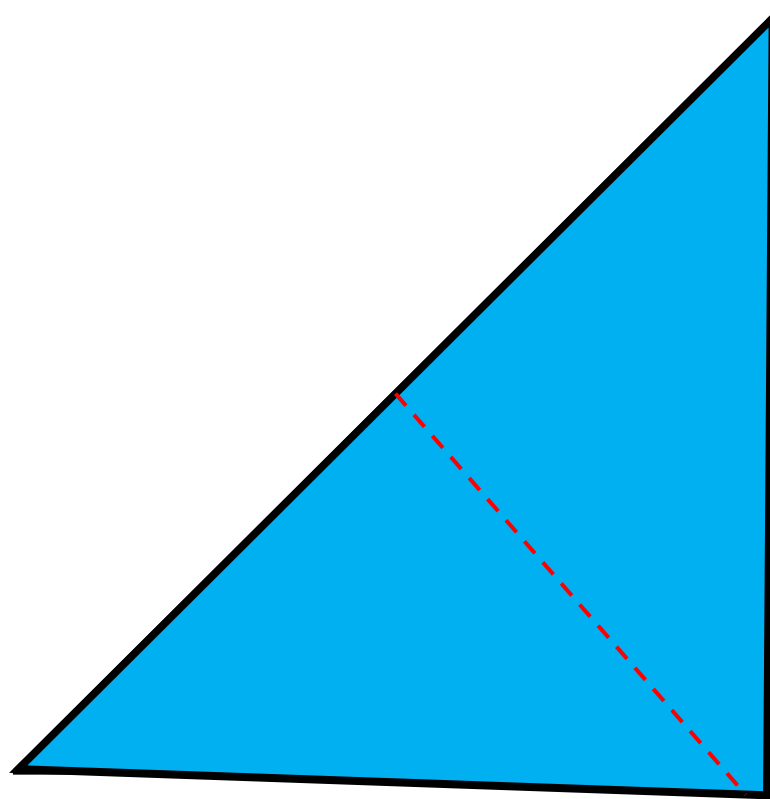
基本形の展開図



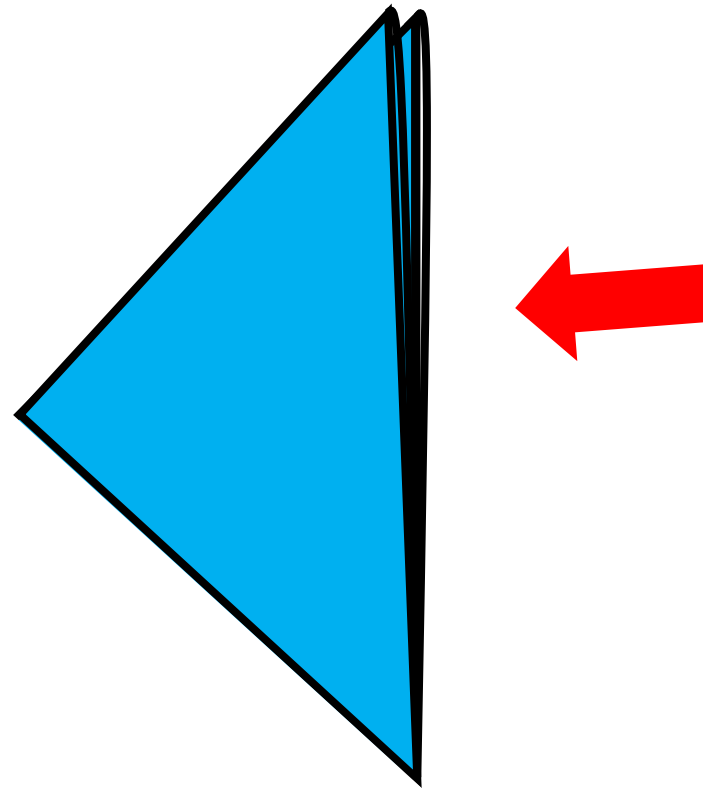
【実践】 対称性を崩す



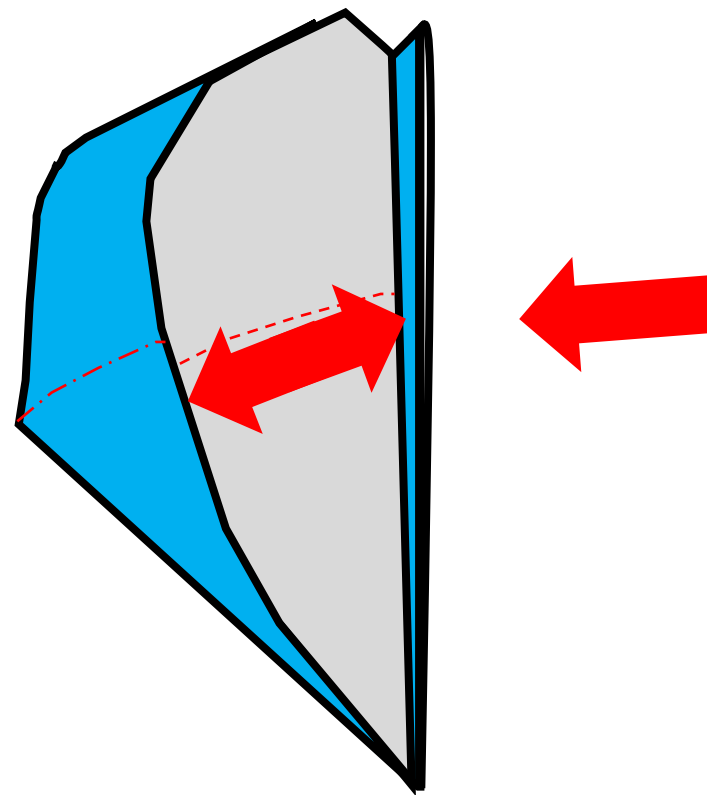
【実践】対称性を崩す



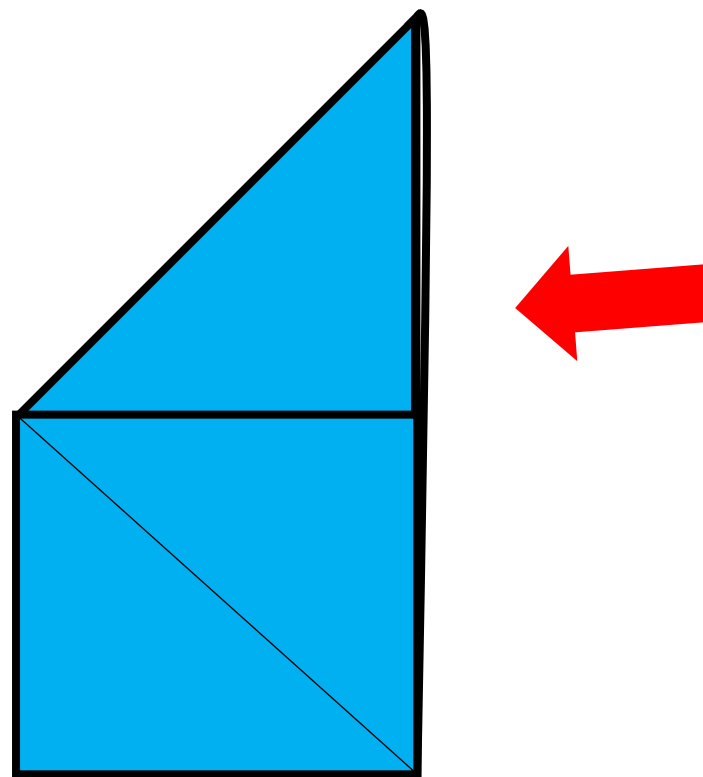
【実践】対称性を崩す



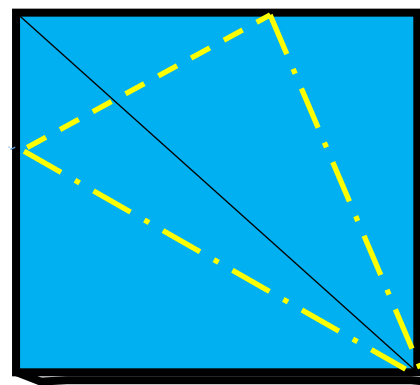
【実践】 対称性を崩す



【実践】 対称性を崩す

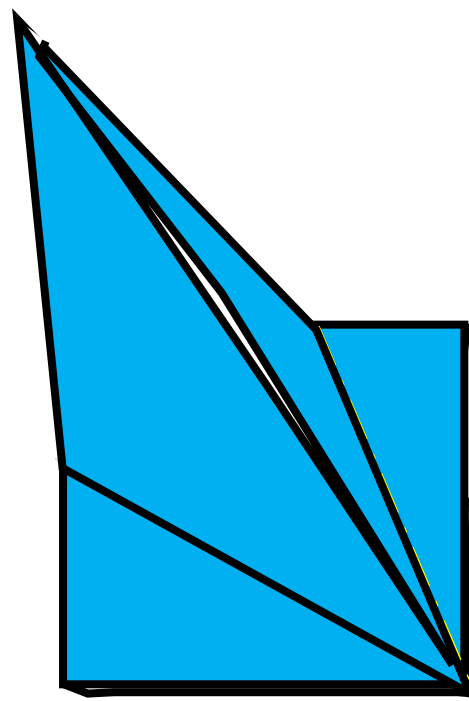


【実践】 対称性を崩す



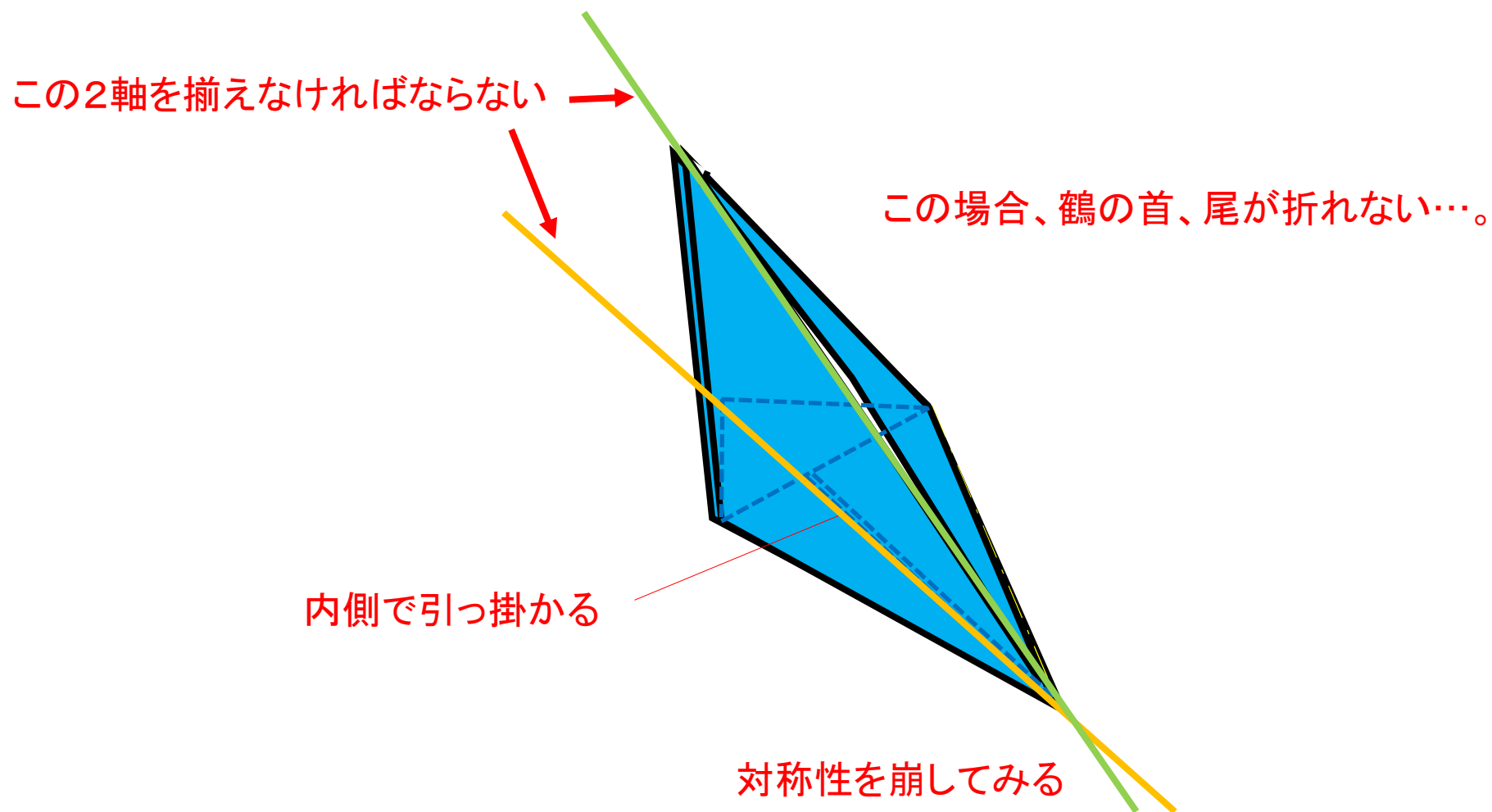
対称性を崩してみる

【実践】対称性を崩す

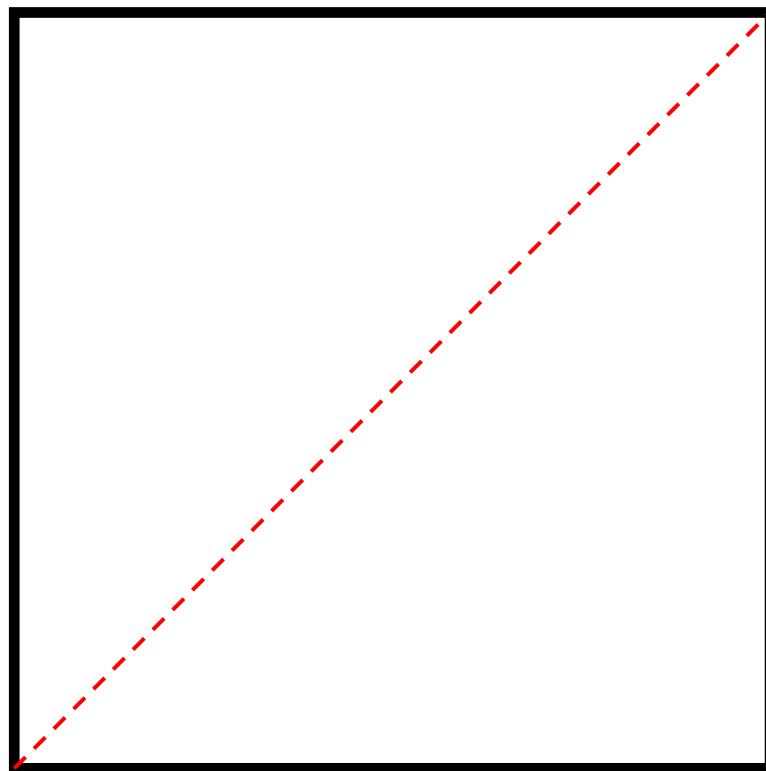


対称性を崩してみる

【実践】 対称性を崩す

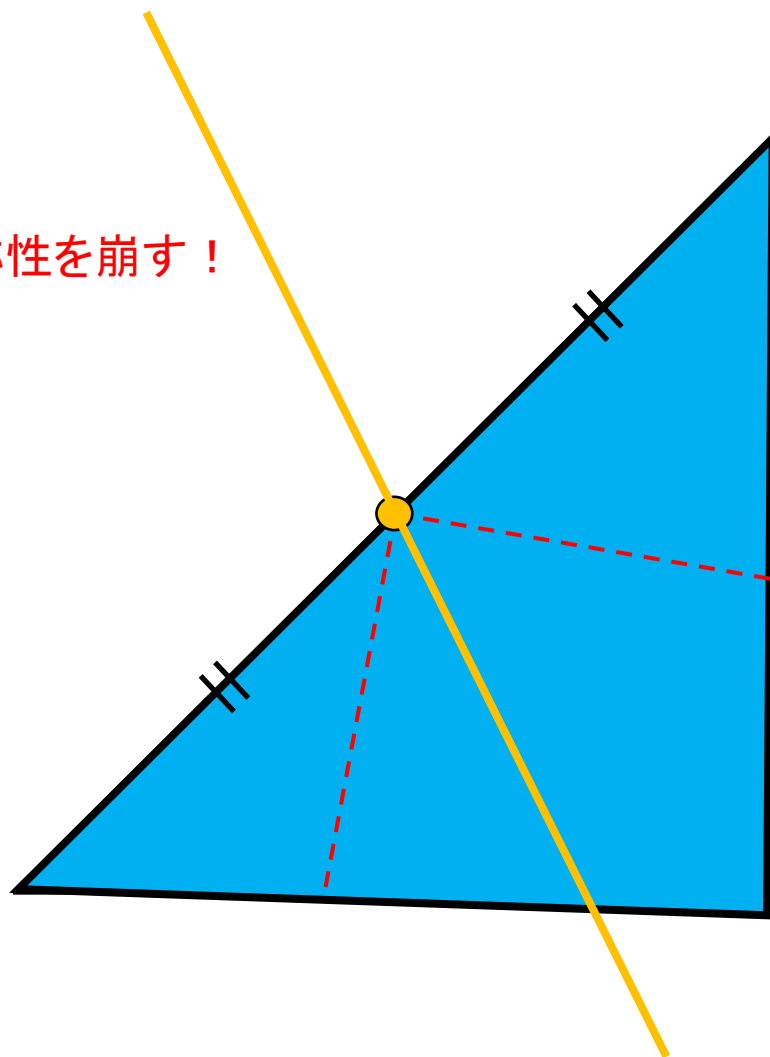


【実践】前川変形

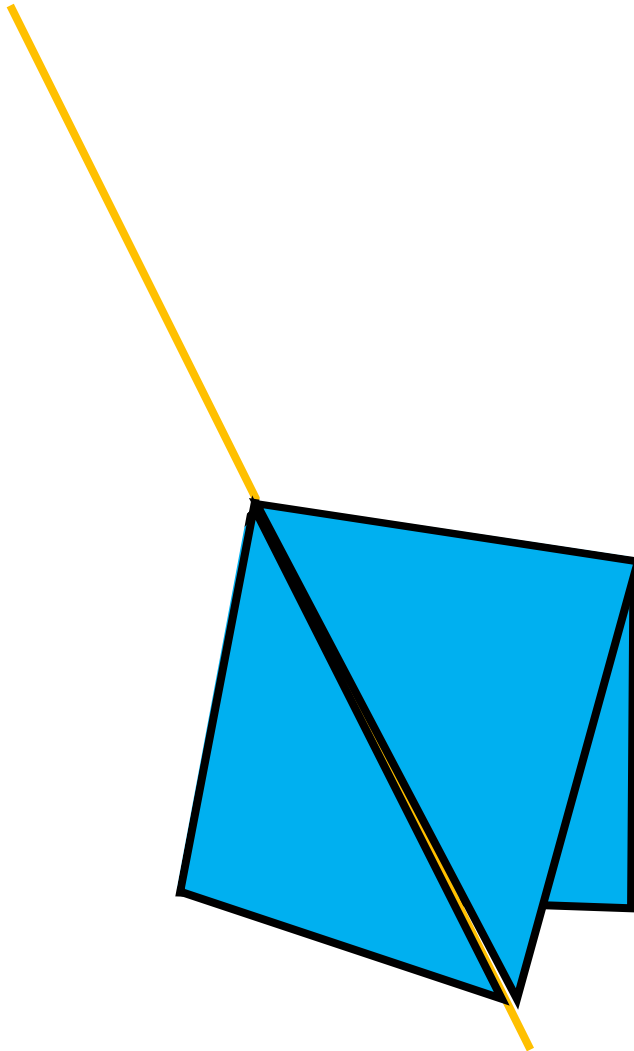


【実践】前川変形

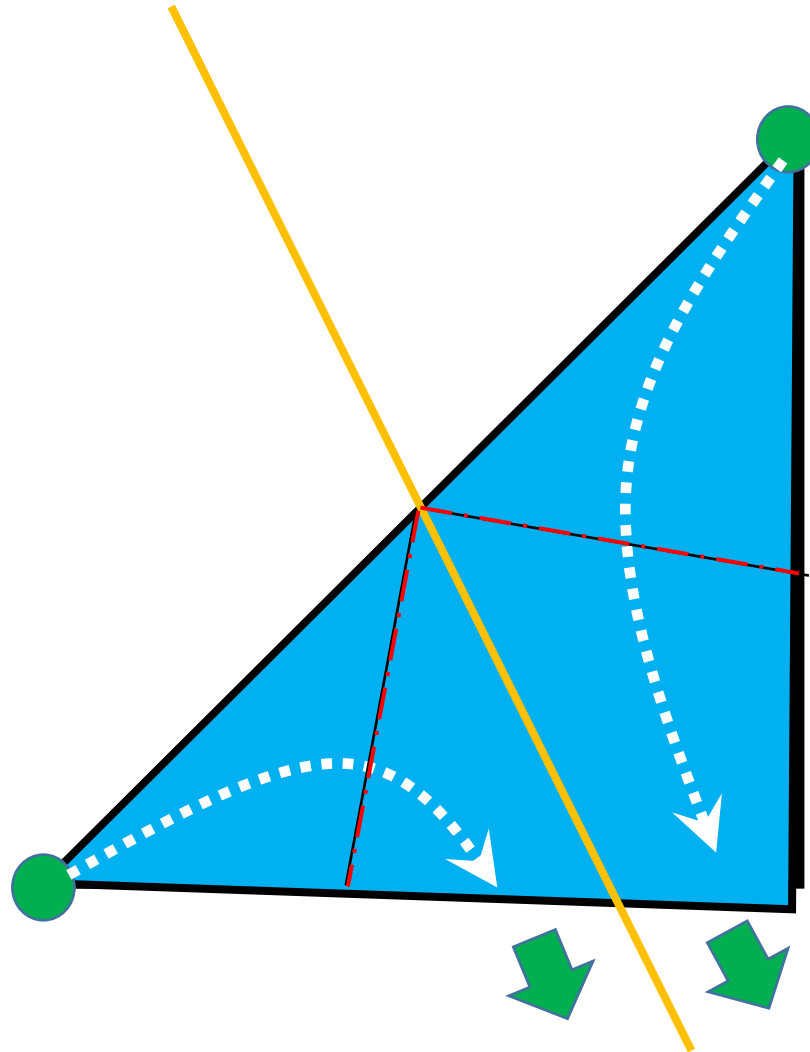
ここで対称性を崩す！



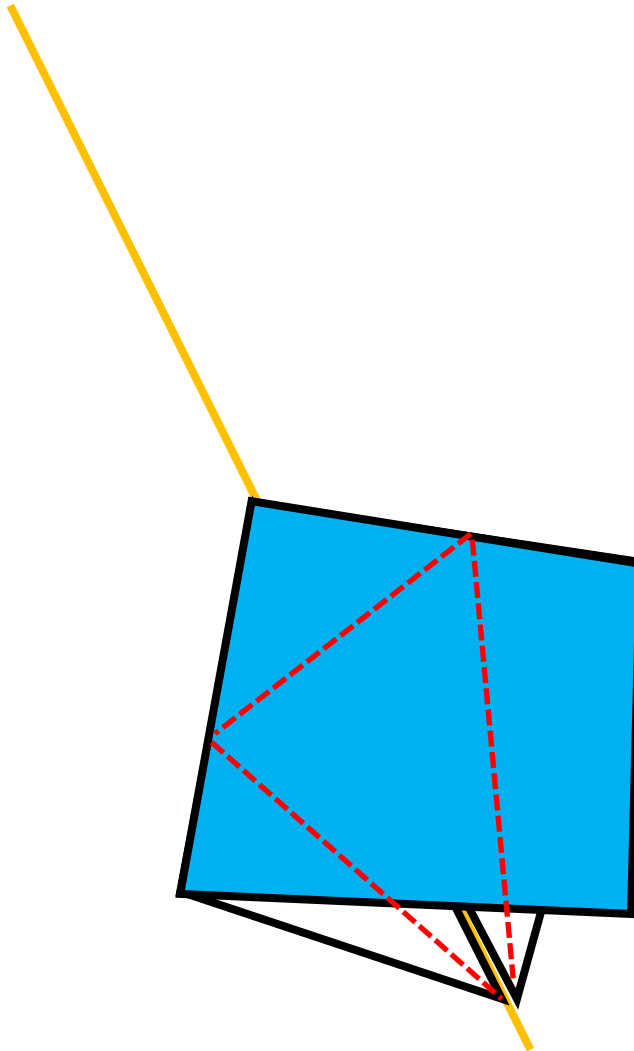
【実践】前川変形



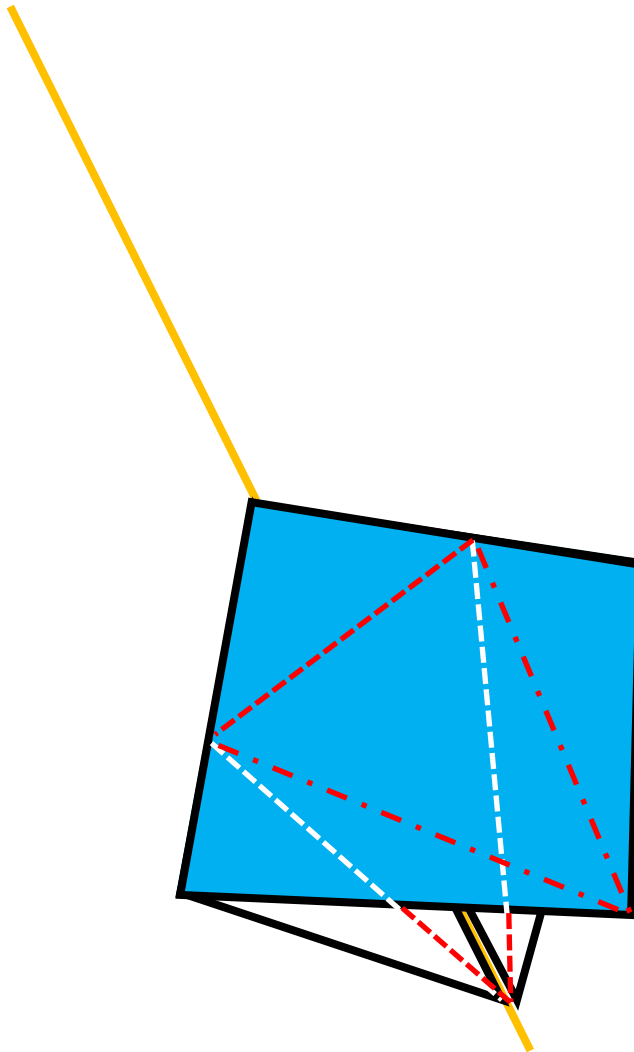
【実践】前川変形



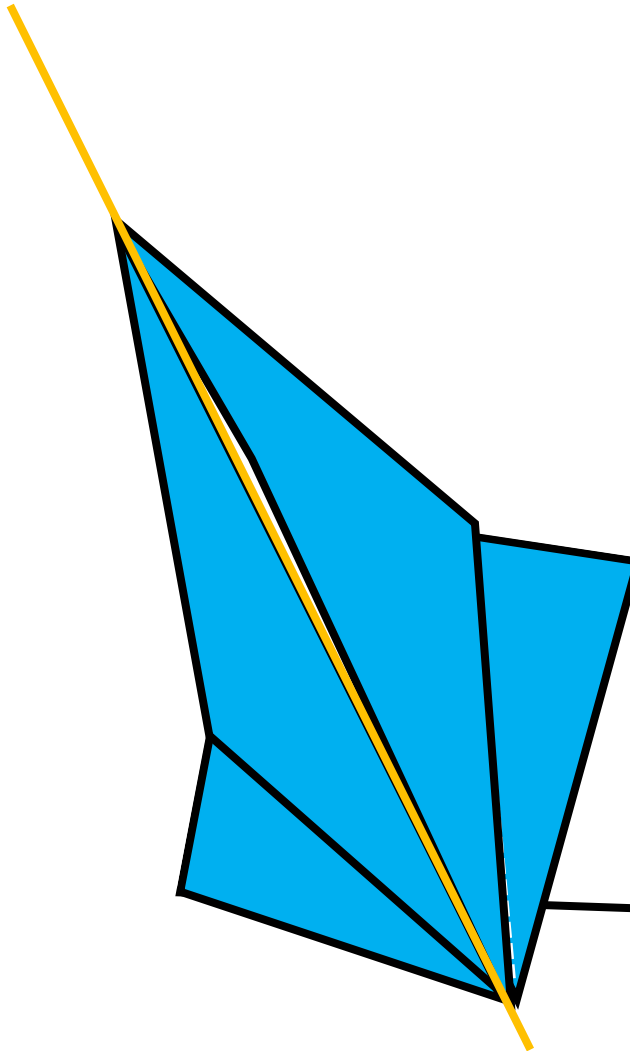
【実践】前川変形



【実践】前川変形

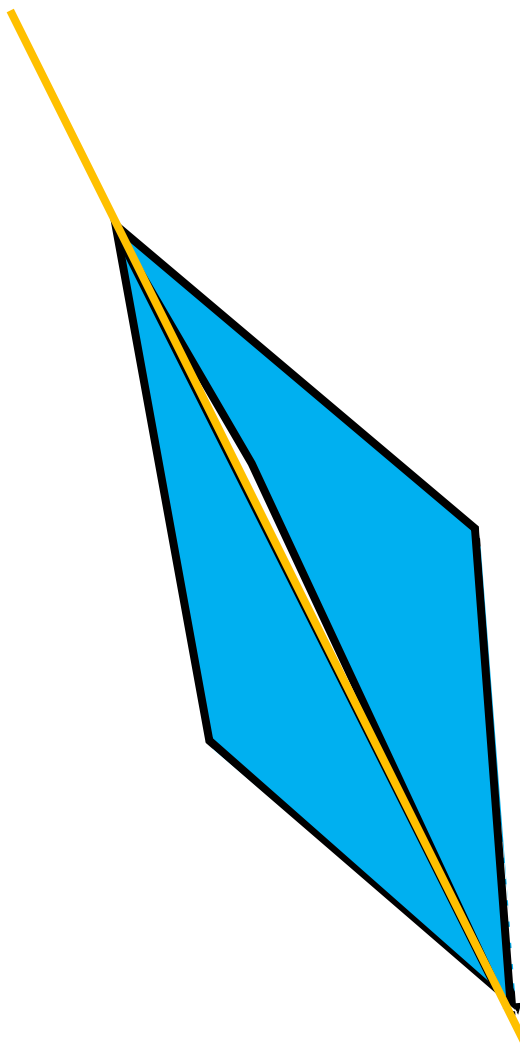


【実践】前川変形



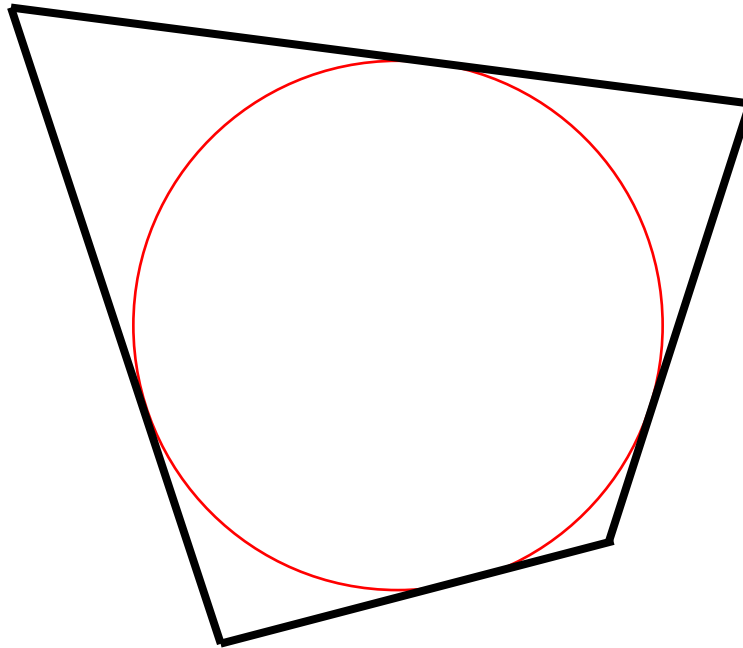
後ろも同様

【実践】前川変形

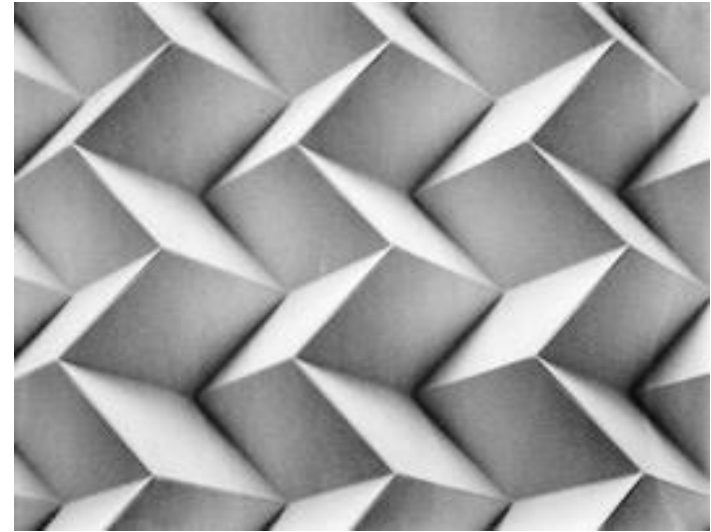


軸がそろい、基本形が完成。

内接四辺形



円が内接するような四角形であれば、「基本形」を折ることができる(難)。



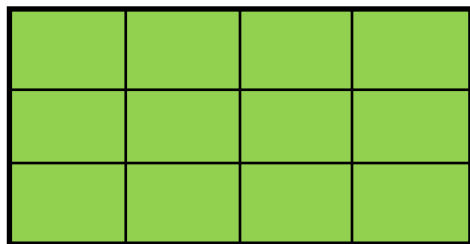
ミウラ折りの数理

ミウラ折りとは

紙を折りたたむとき

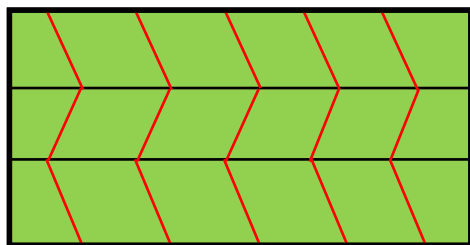
単純な方法

紙と垂直な直線で折り、一つ一つが長方形。



ミウラ折り

ジグザグな折り目で、1つ1つが平行四辺形。



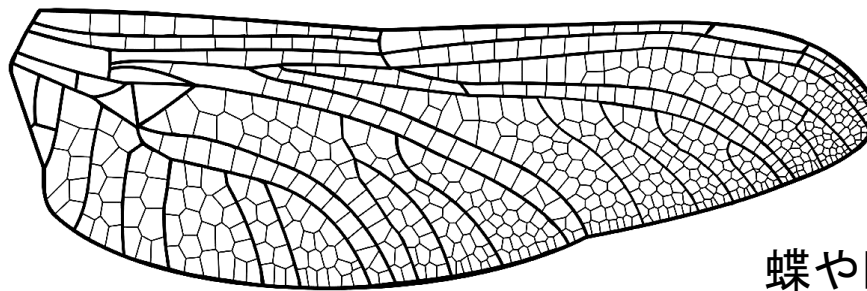
開閉に負担がない



地図やパンフレットに活用

ミウラ折りの応用

「折りたたみ」の
最も自然な構造



蝶やトンボなどの羽



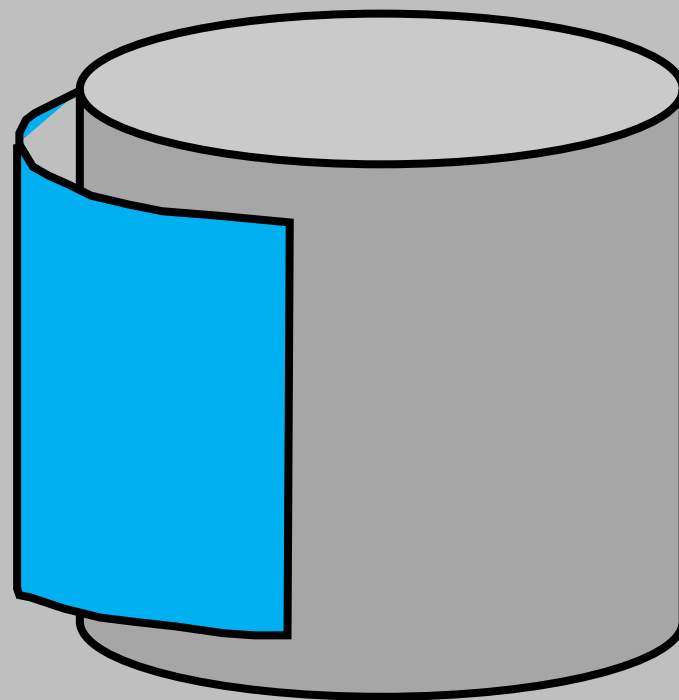
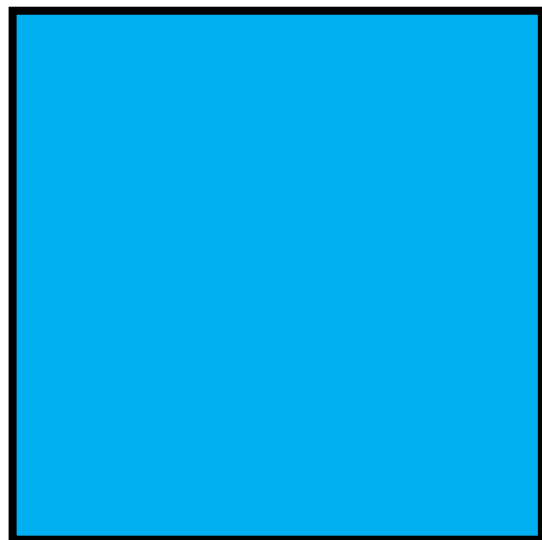
太陽光パネルの開閉に応用



若葉

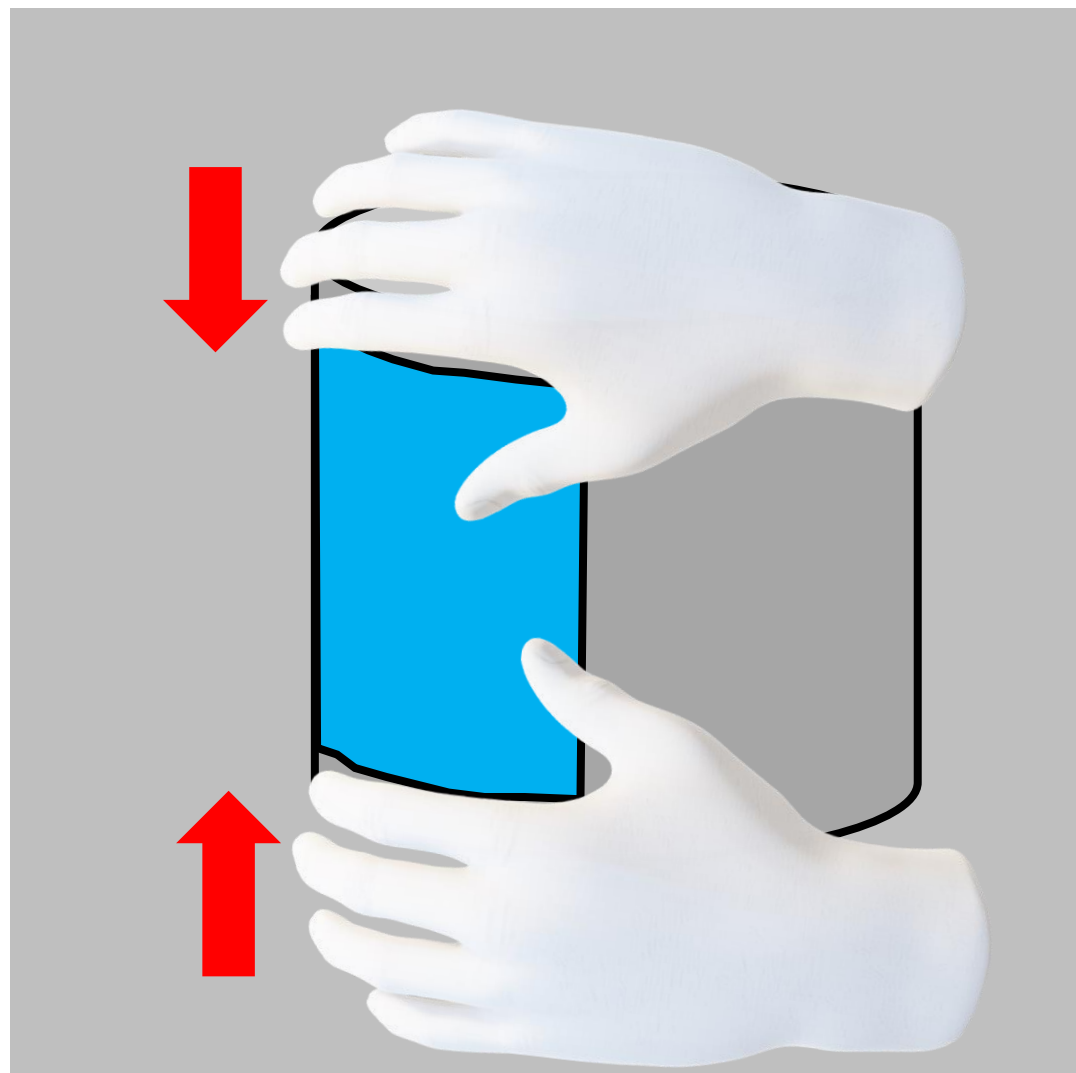
ミウラ折りができるまで

紙の構造を理解する



ミウラ折りができるまで

紙の構造が崩れる実験

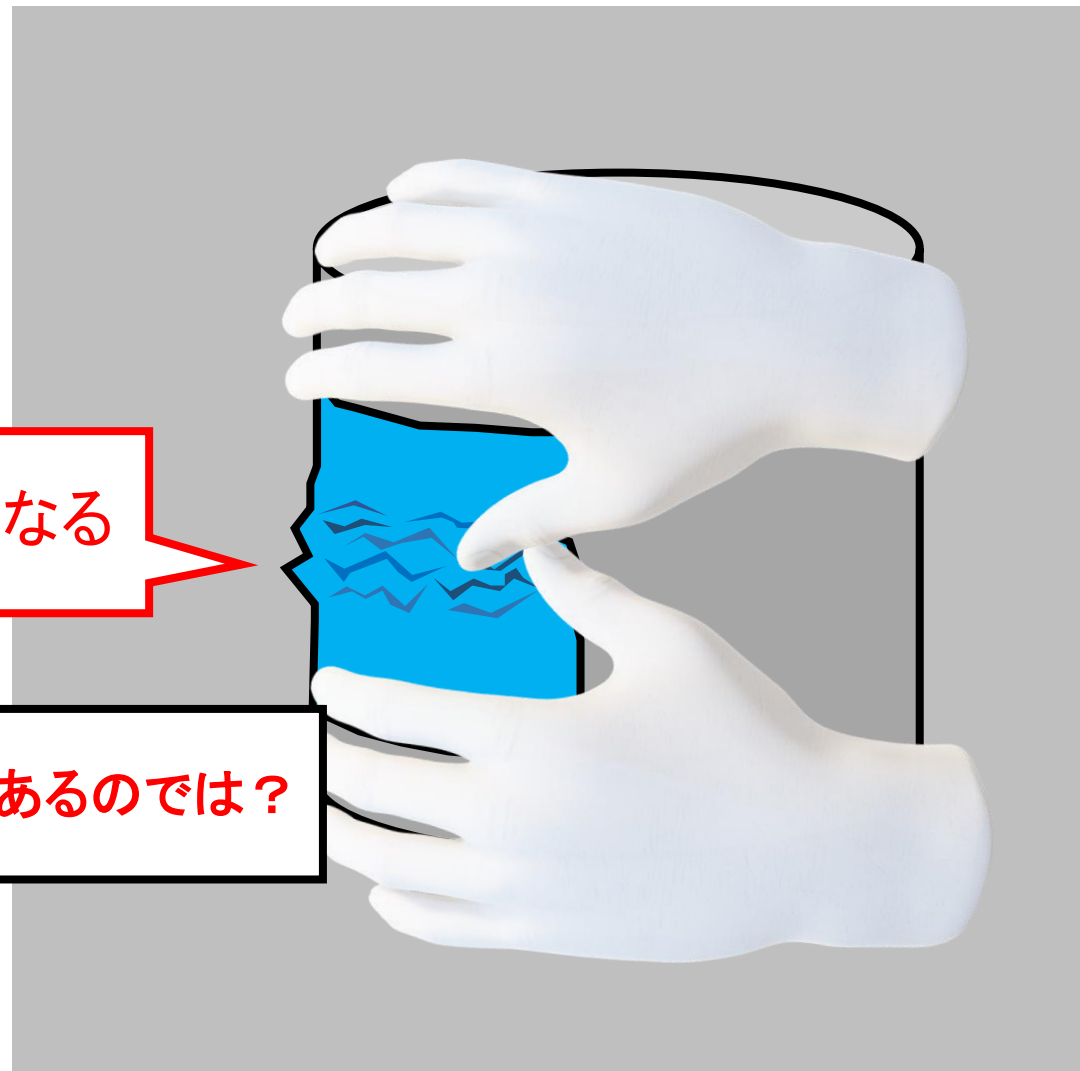


ミウラ折りができるまで

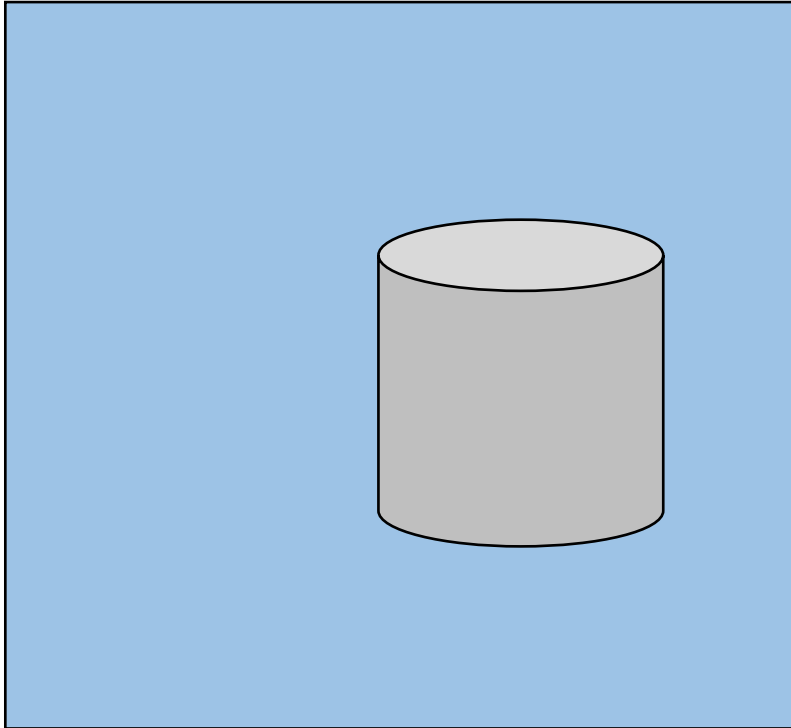
「ぐしゃっ」となる



「ぐしゃっ」にもパターンがあるのでは？



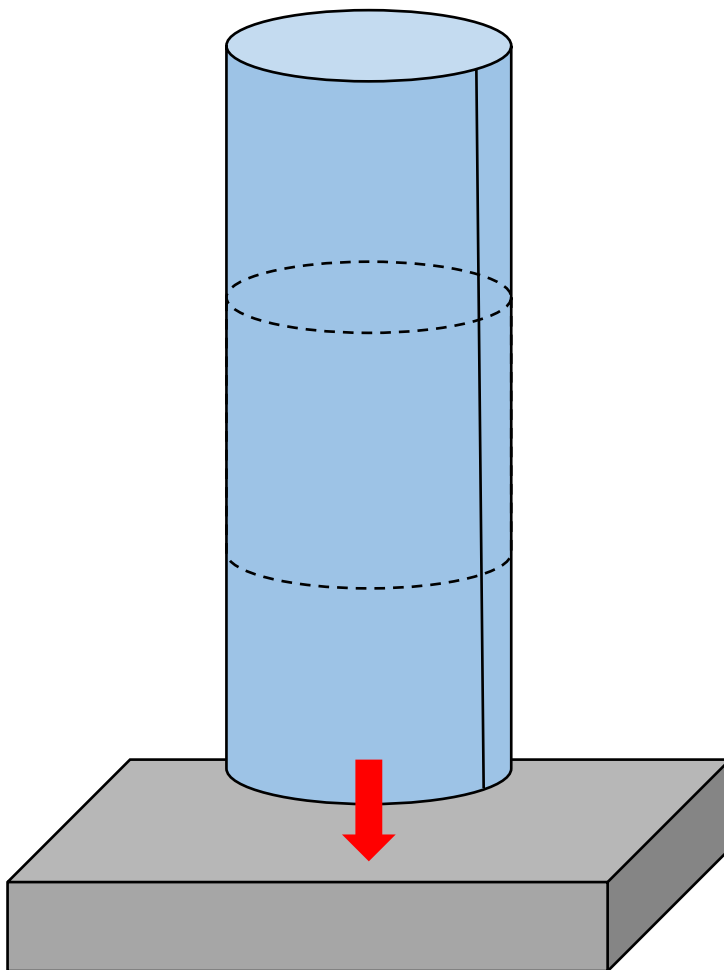
【実践】紙の構造破壊



①円柱形のものを用意(コップなど)

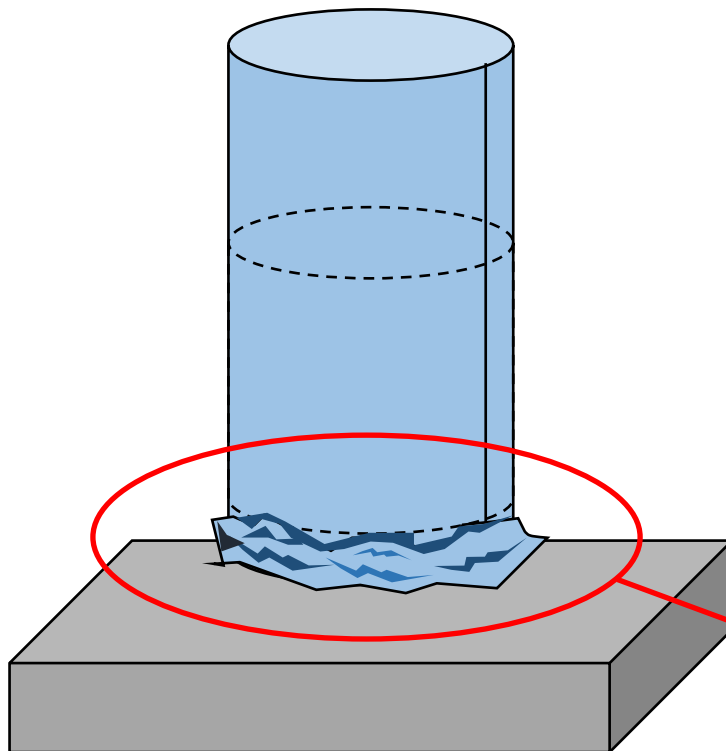
②紙を巻き付ける

【実践】紙の構造破壊



- ①円柱形のものを用意(コップなど)
- ②紙を巻き付ける
- ③台にたたきつける

【実践】紙の構造破壊



①円柱形のものを用意(コップなど)

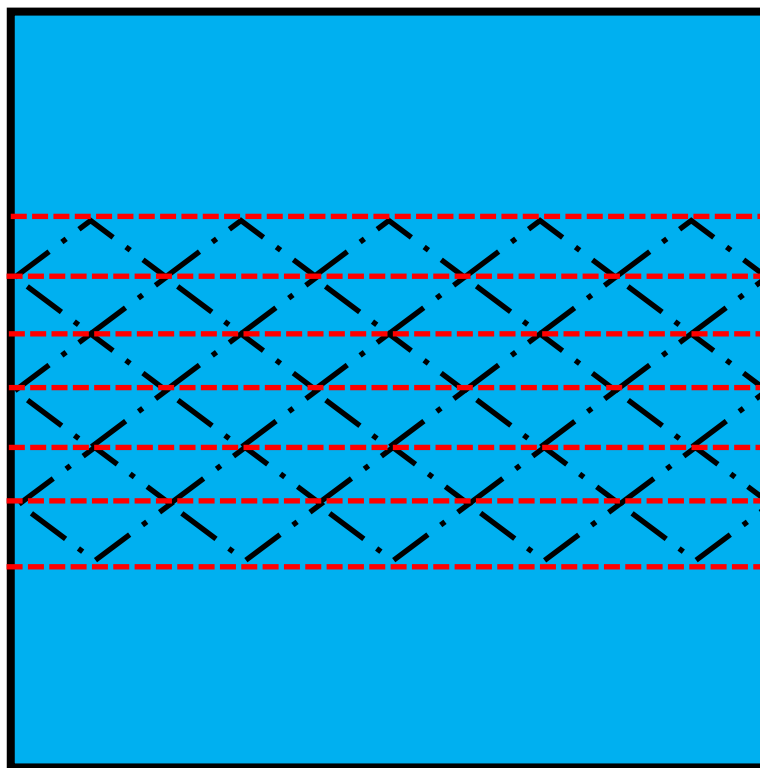
②紙を巻き付ける

③台にたたきつける

どんな模様ができるでしょう？

ヨシムラパターン

円筒の破壊構造の研究を行っていた吉村慶丸教授にちなんで「ヨシムラパターン」と呼びます。



----- 谷折り

- · - 山折り

ヨシムラパターン

様々なヨシムラパターン



ジーパンの膝裏のシワ

横方向の圧縮に強く頑丈



ダイヤモンドカット缶

ミウラ折りの着想

三浦公亮教授の発想

円筒上で「ぐしゃっ」



ヨシムラパターン



平面上で「ぐしゃっ」



?

紙が崩れる物理法則は同じであるはずなので、何か規則的な模様ができるはず。

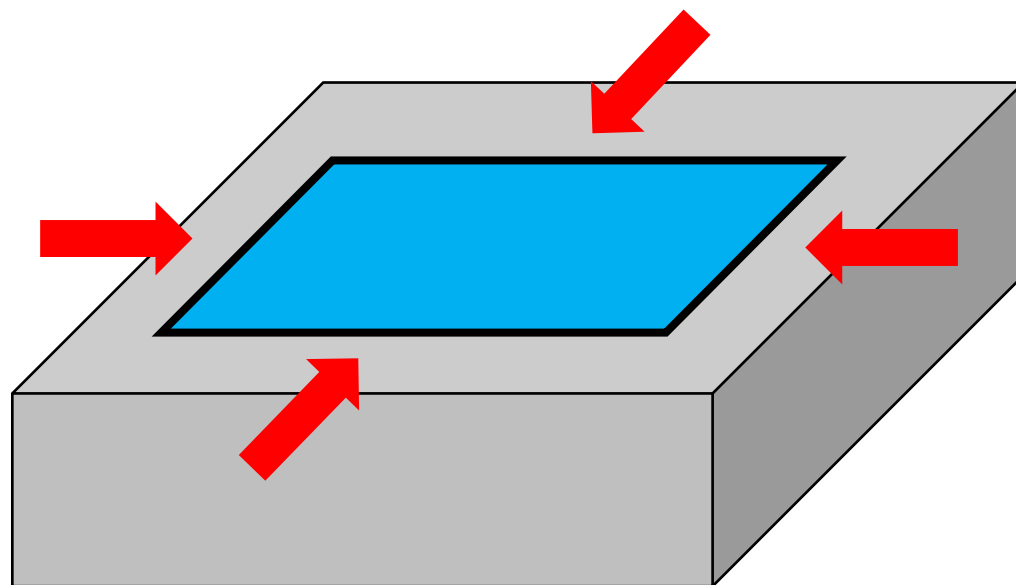


三浦公亮教授
1930～

NASAで宇宙ステーションの設計にも携わる

ミウラ折りの着想

平面上で「ぐしゃっ」とするイメージ

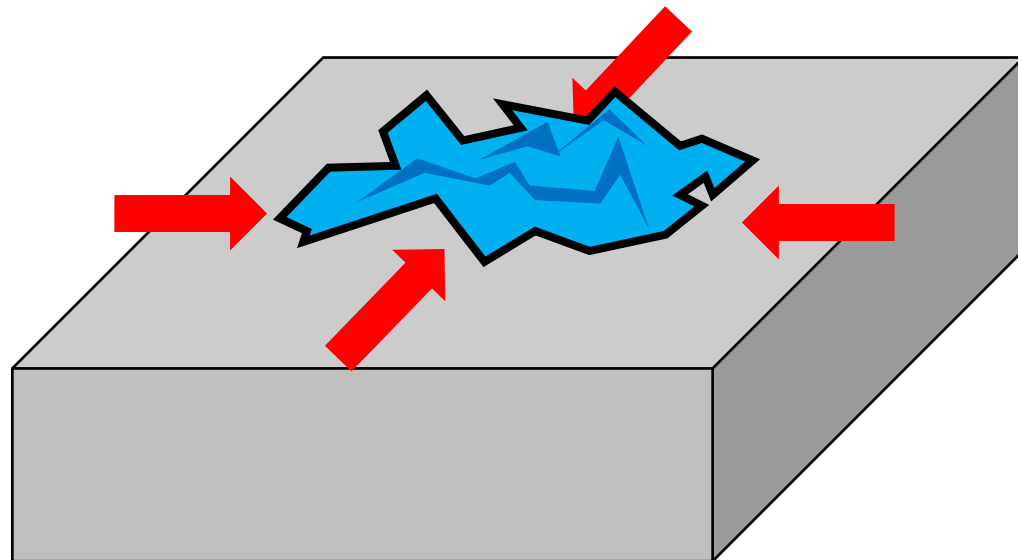


ミウラ折りの着想

平面上で「ぐしゃっ」とするイメージ

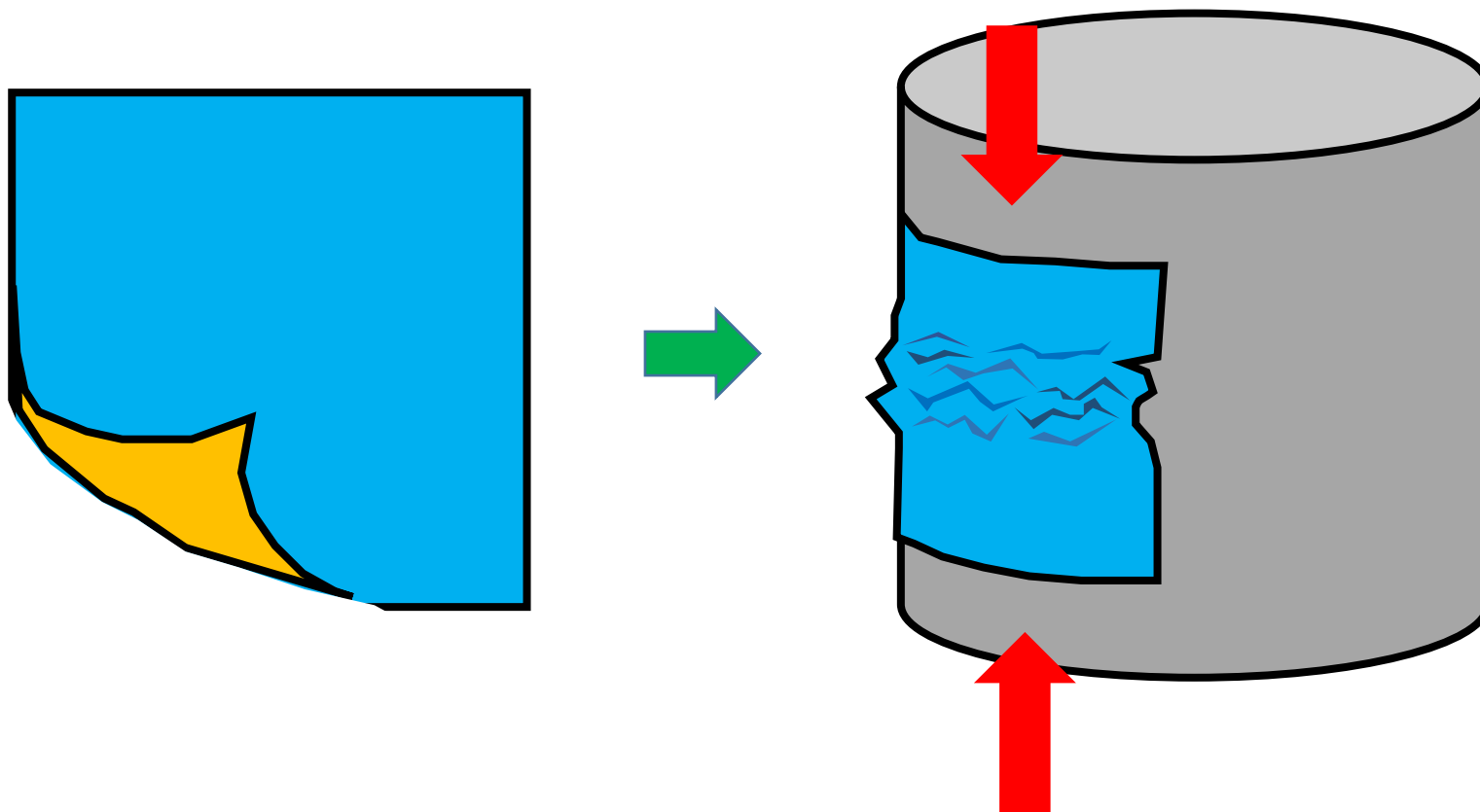


なかなかうまくいかない…。



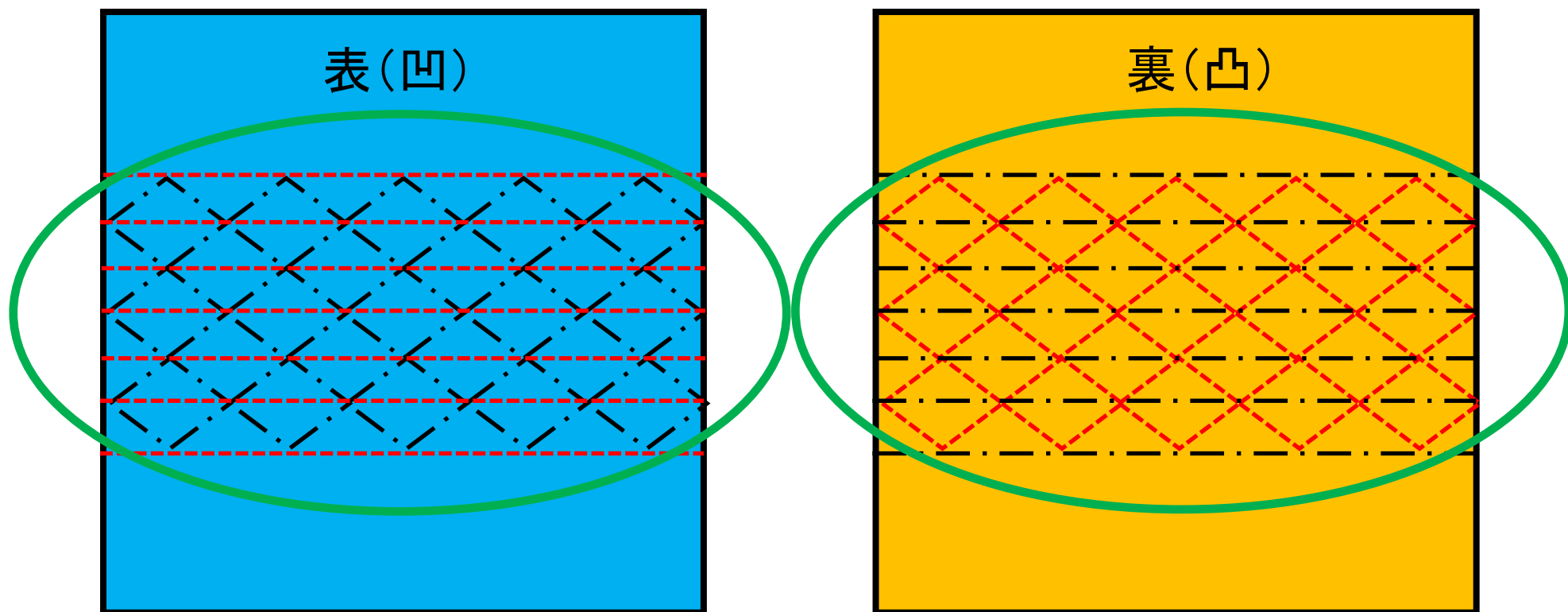
ミウラ折りの着想

裏表のヨシムラパターンを観察する



ミウラ折りの着想

山・谷が逆になっている2つのパターンをうまく合わせればいいのでは！

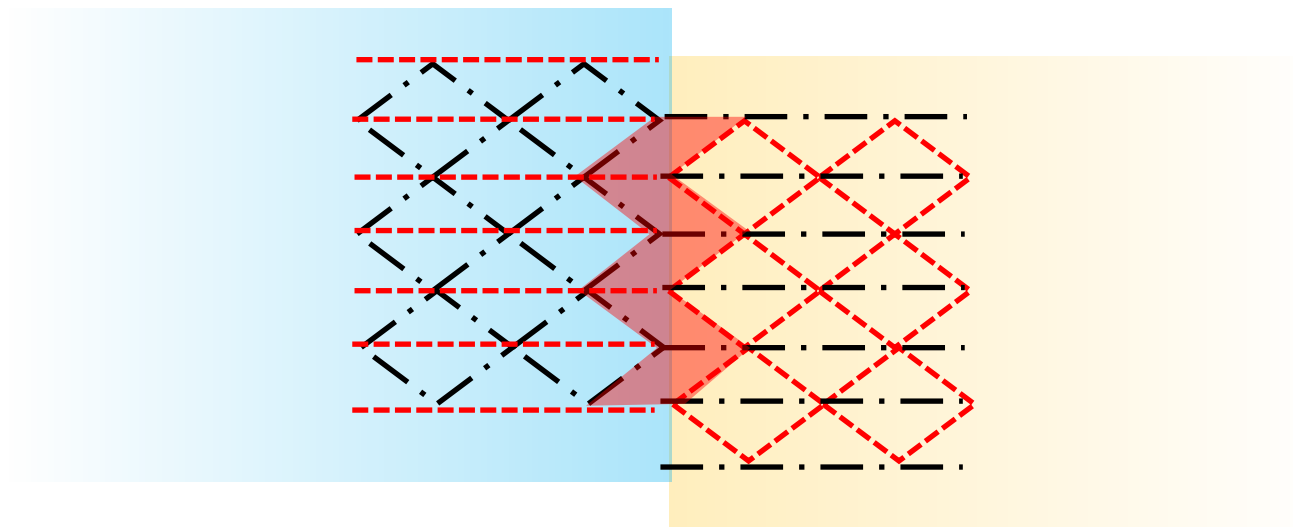


----- 谷折り - · - 山折り

----- 谷折り - · - 山折り

ミウラ折りの着想

1段ずらして組み合わせる

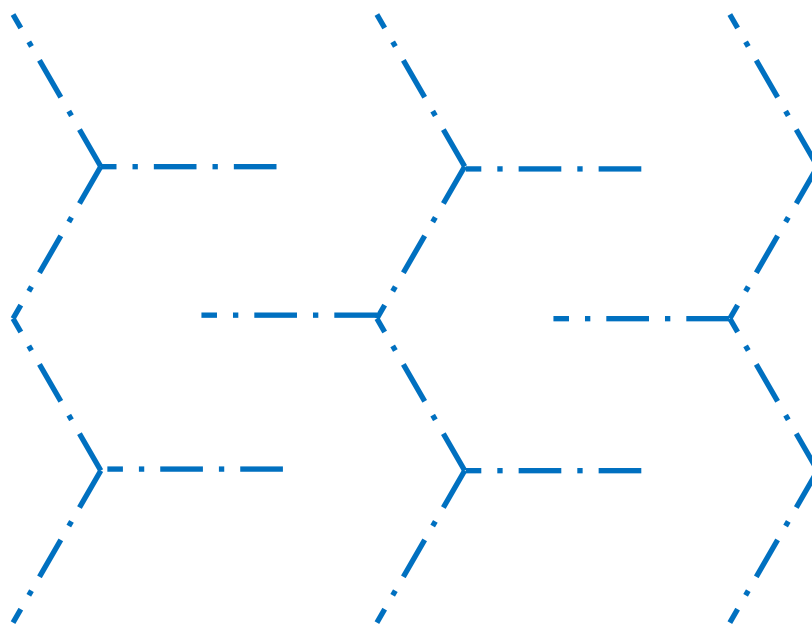


平行四辺形が現れる

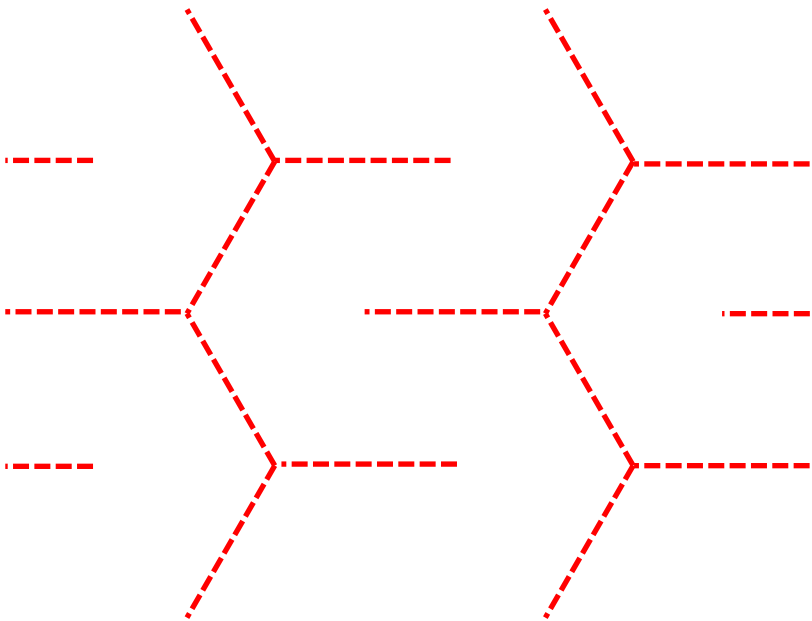


ミウラ折り誕生の瞬間

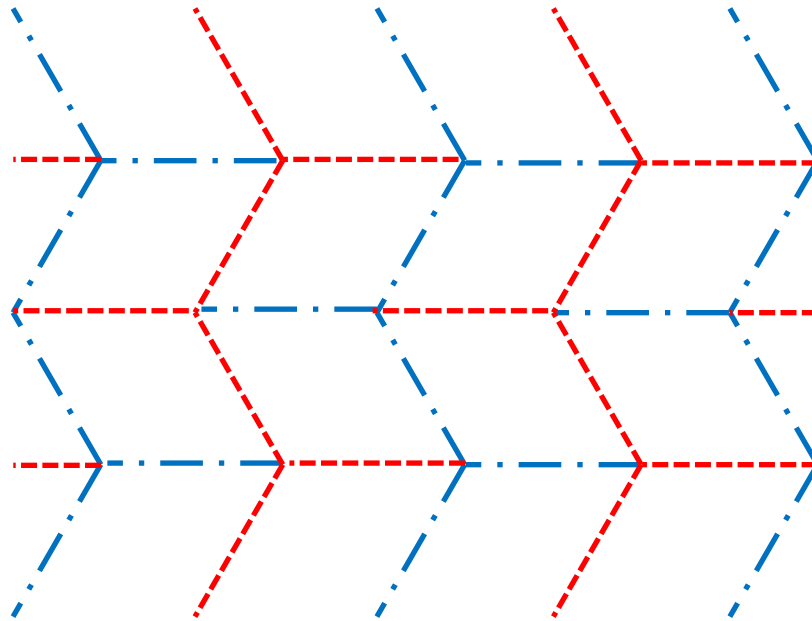
ミウラ折り



ミウラ折り

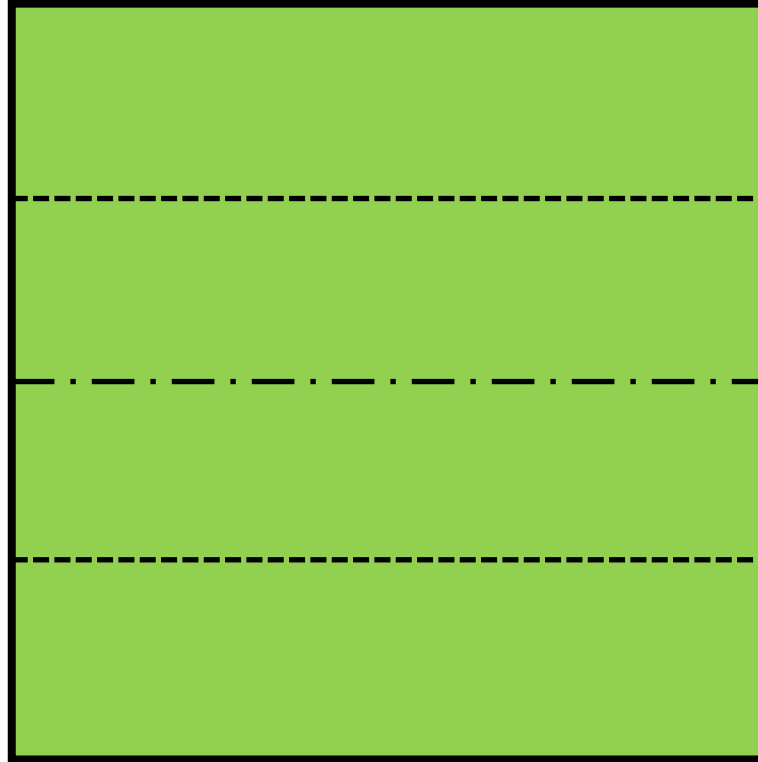


ミウラ折り



ミウラ折りの基本構造

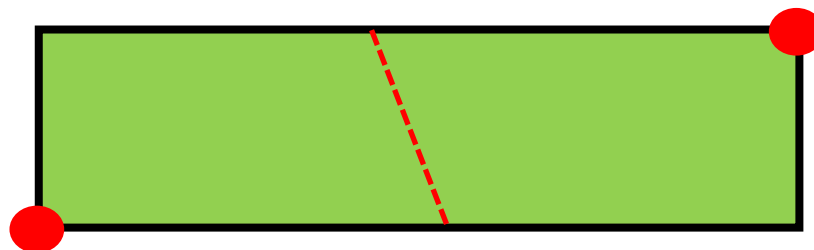
【実践】折り紙でミウラ折り



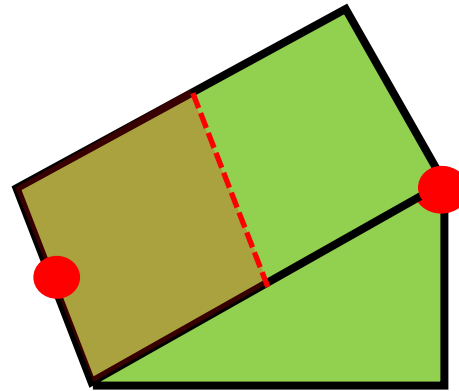
【実践】折り紙でミウラ折り



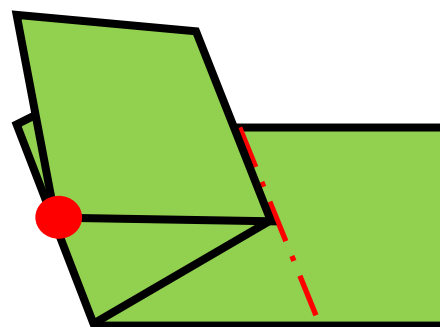
【実践】折り紙でミウラ折り



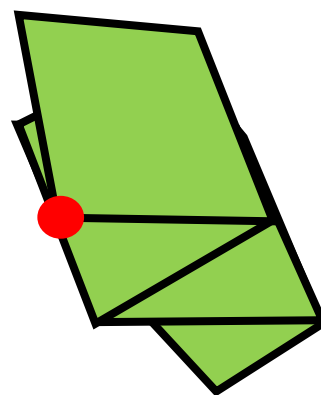
【実践】折り紙でミウラ折り



【実践】折り紙でミウラ折り

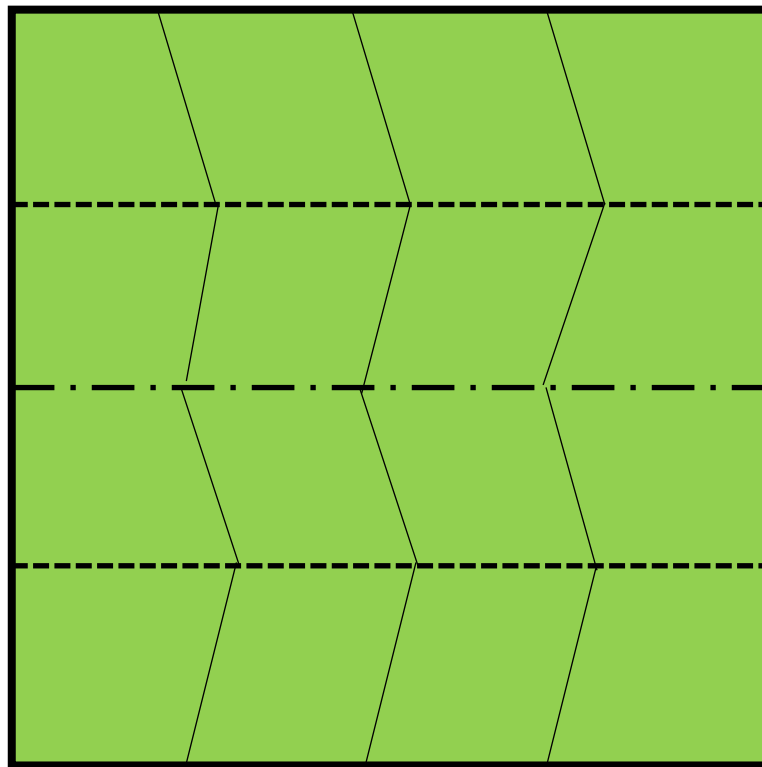


【実践】折り紙でミウラ折り



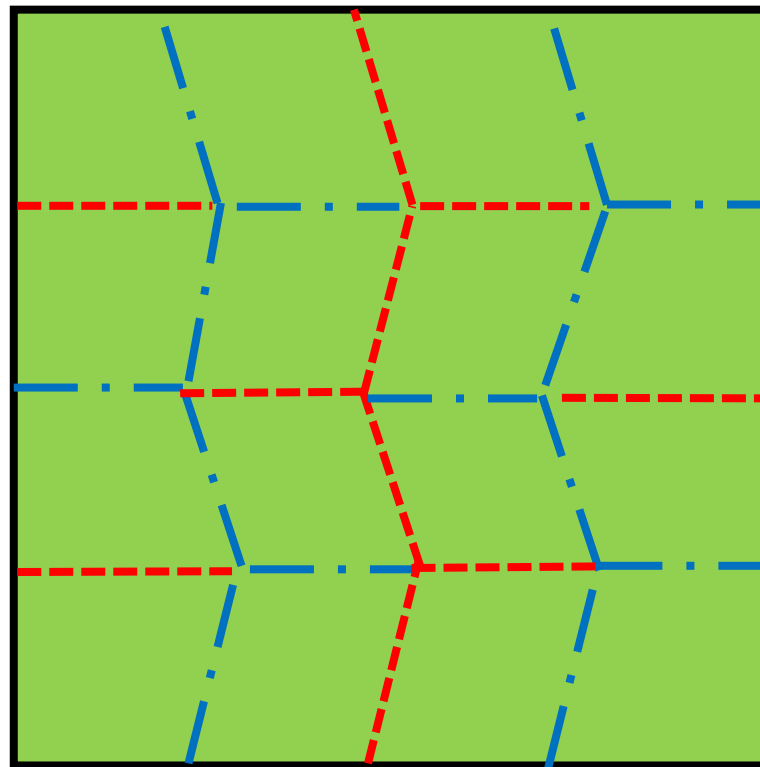
開く

【実践】折り紙でミウラ折り



山折り谷折りを決める

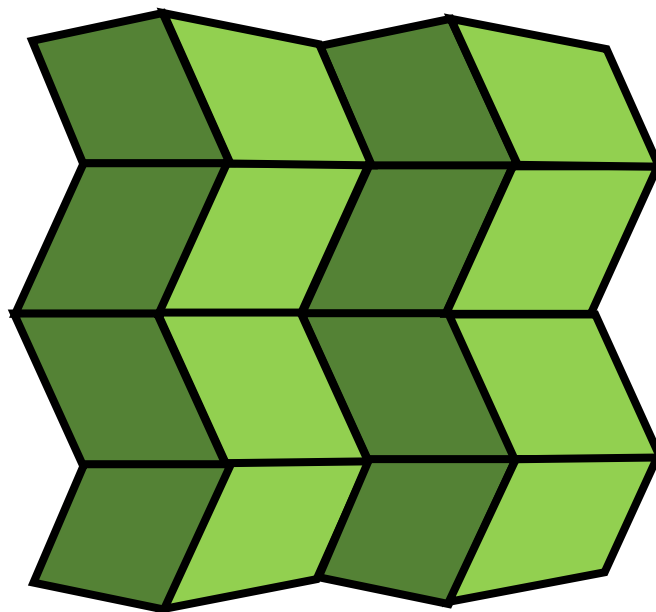
【実践】折り紙でミウラ折り



— · — 山折り

- - - 谷折り

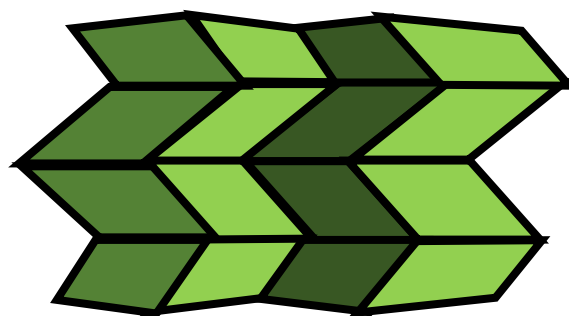
【実践】折り紙でミウラ折り



— . . 山折り

- - - 谷折り

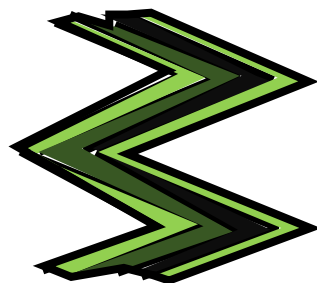
【実践】折り紙でミウラ折り



— · · 山折り

----- 谷折り

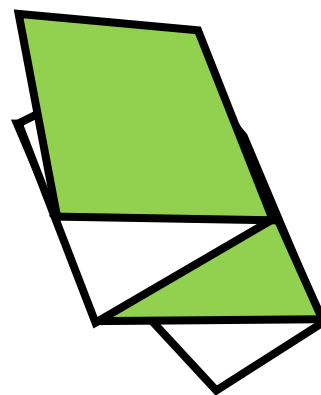
【実践】折り紙でミウラ折り



— . . 山折り

- - - - 谷折り

【実践】折り紙でミウラ折り



完成

注: 地図などでは利便性のため奇数等分で折られます