Excelで学ぶアート数学

― ランダム・アートとカオス編―

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

講師紹介

- **講師**

  岡本　健太郎　【数理学博士】

  （おかもと　けんたろう）

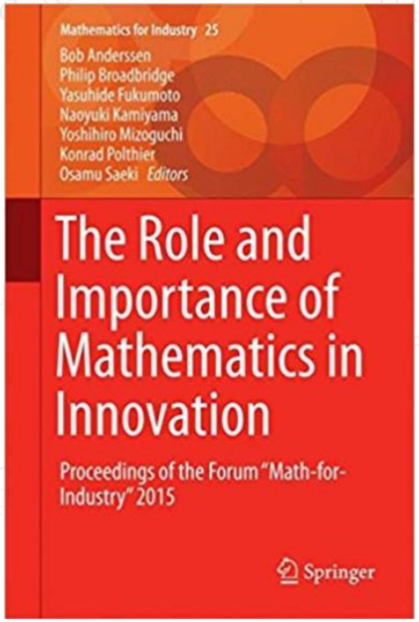
  ζWalker@walker0226

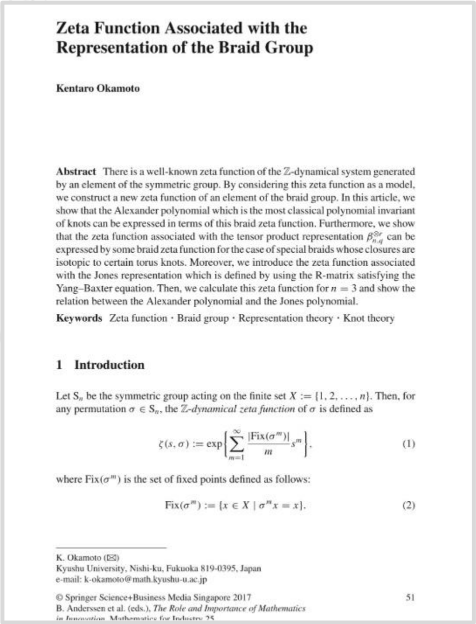
- **経歴**

  ・テュービンゲン大学（ドイツ）研究員

  ・ 日本学術振興会 特別研究員

  ・九州大学　博士後期課程修了（数理学）





Zeta Function Associated with the Representation of the Braid Group

Kentaro Okamoto

Abstract There is a well-known zeta function of the $\mathbb{Z}$-dynamical system generated by an element of the symmetric group. By considering this zeta function as a model, we construct a new zeta function of an element of the braid group. In this article, we show that the Alexander polynomial which is the most classical polynomial invariant of knots can be expressed in terms of this braid zeta function. Furthermore, we show that the zeta function associated with the tensor product representation $\beta_{n,q}^{\otimes r}$ can be expressed by some braid zeta function for the case of special braids whose closures are isotopic to certain torus knots. Moreover, we introduce the zeta function associated with the Jones representation which is defined by using the R-matrix satisfying the Yang–Baxter equation. Then, we calculate this zeta function for $n = 3$ and show the relation between the Alexander polynomial and the Jones polynomial.

Keywords Zeta function · Braid group · Representation theory · Knot theory

1 Introduction

Let S_n be the symmetric group acting on the finite set $X := \{1, 2, \ldots, n\}$. Then, for any permutation $\sigma \in S_n$, the *$\mathbb{Z}$-dynamical zeta function* of σ is defined as

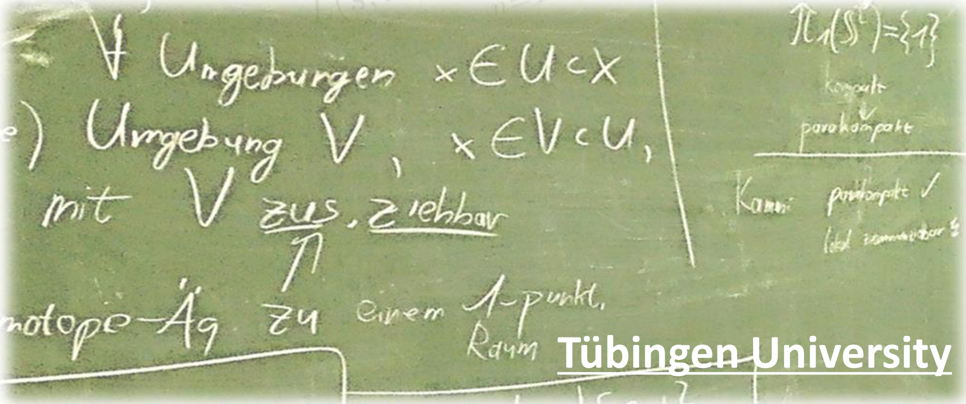
$$\zeta(s,\sigma) := \exp\left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Fix}(\sigma^m)|}{m} s^m\right]. \quad (1)$$

where $\mathrm{Fix}(\sigma^m)$ is the set of fixed points defined as follows:

$$\mathrm{Fix}(\sigma^m) := \{x \in X \mid \sigma^m x = x\}. \quad (2)$$

K. Okamoto (✉)
Kyushu University, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395, Japan
e-mail: k-okamoto@math.kyushu-u.ac.jp

© Springer Science+Business Media Singapore 2017 51
B. Anderssen et al. (eds.), *The Role and Importance of Mathematics in Innovation*, Mathematics for Industry 25



- **所属学会**

  ・日本数学会

  ・日本アクチュアリー会

- **資格**

  ・高等学校数学教諭専修免許取得

  ・統計検定１級（数理統計）取得

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

講師紹介

- **講師**

　岡本　健太郎　【数理学博士】

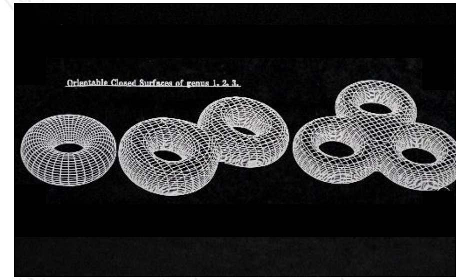
（おかもと　けんたろう）

ζWalker@walker0226

- **経歴**

・2019年の若手アーティスト104人に選出

・2020年2月, 代官山で切り絵の個展を開催



ー今後の展示予定ー

・2020年10月フランスのクロリュセ城

・2021年2月、東京上野の森美術館

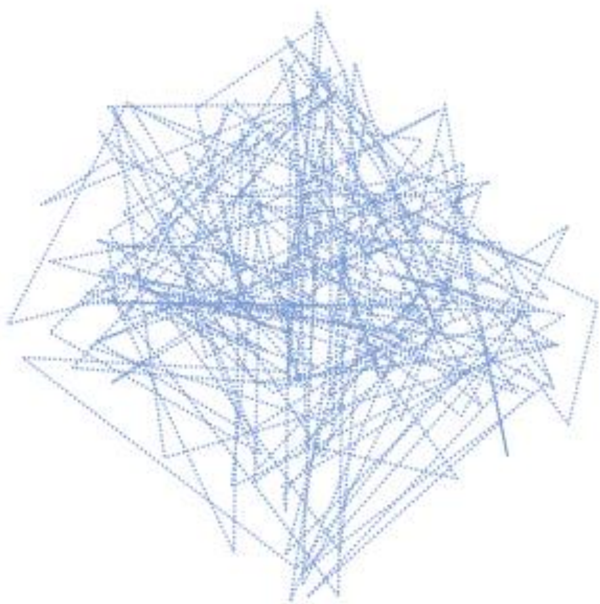
・2021年4月、京都、京セラ美術館

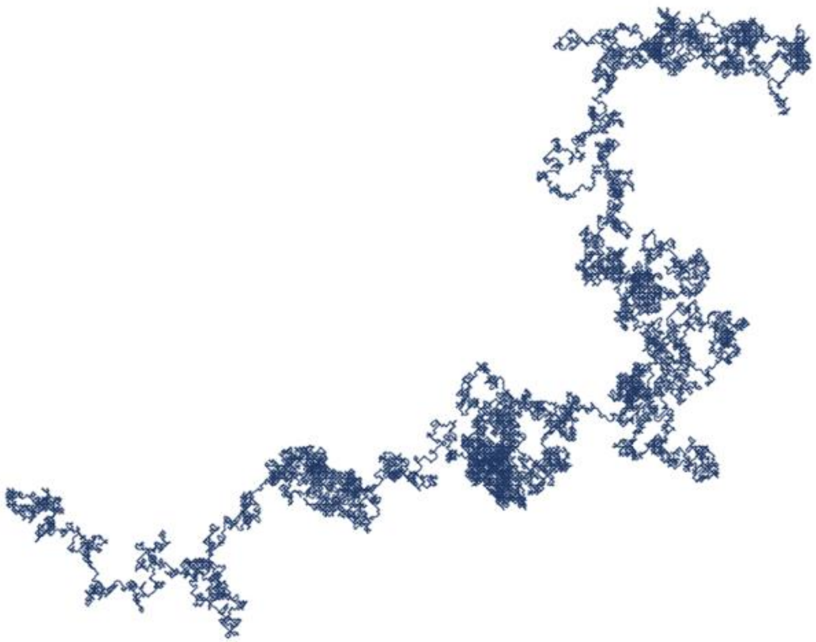
・2021年夏、イギリスロンドンのモール美術館

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

Excelを使ったランダム・アート

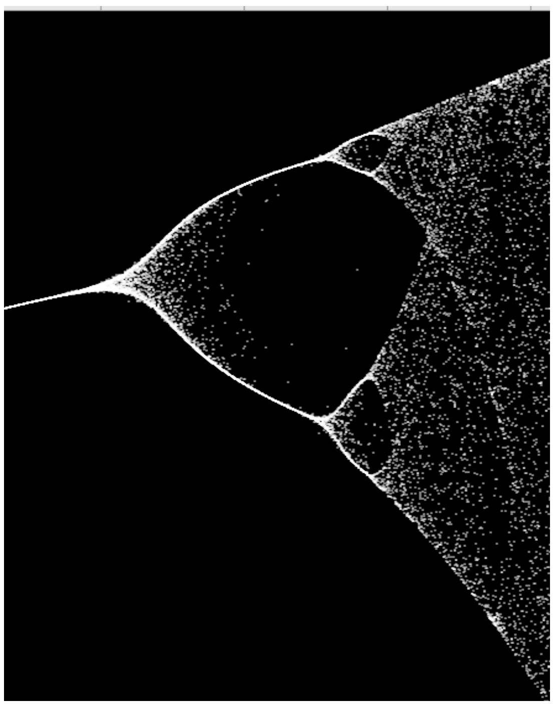
「**乱数**」を使った、偶発的なデザイン

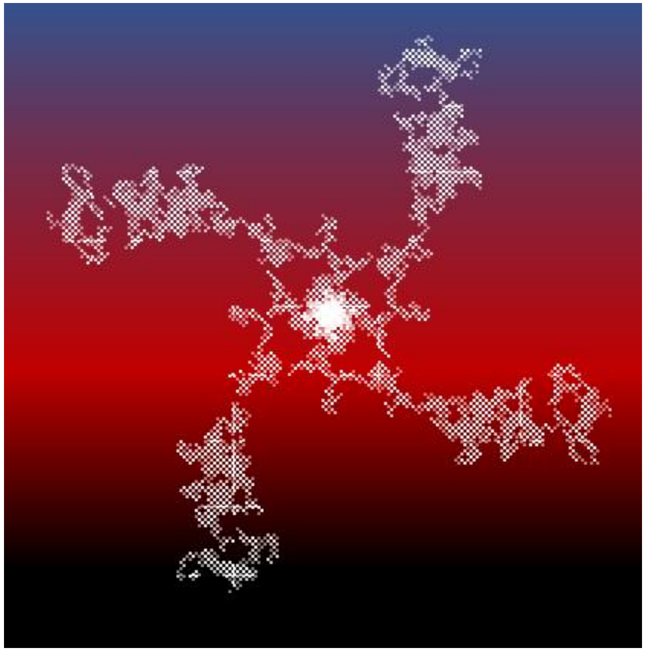




Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

カオス現象とアート





Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ランダムの歴史

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ランダムの歴史

ランダムと運命

古来より、人々は「**運命**」を決定するためにサイコロを投げた。

「ゲーム」へと進化

宗教、哲学、政治にも広がっていく。

微分積分の発展により、ランダム性の解析が行われるようになった。

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ランダムと数学

確率

偶然性の数学的記述のために「ランダム」が使われた。

統計学

標本（サンプル）の無作為抽出のためにランダム性が必要になる。

例：データの中のランダム性

時系列データ ＝ ベースライン ＋ 周期的な変動 ＋ ランダムな変動

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

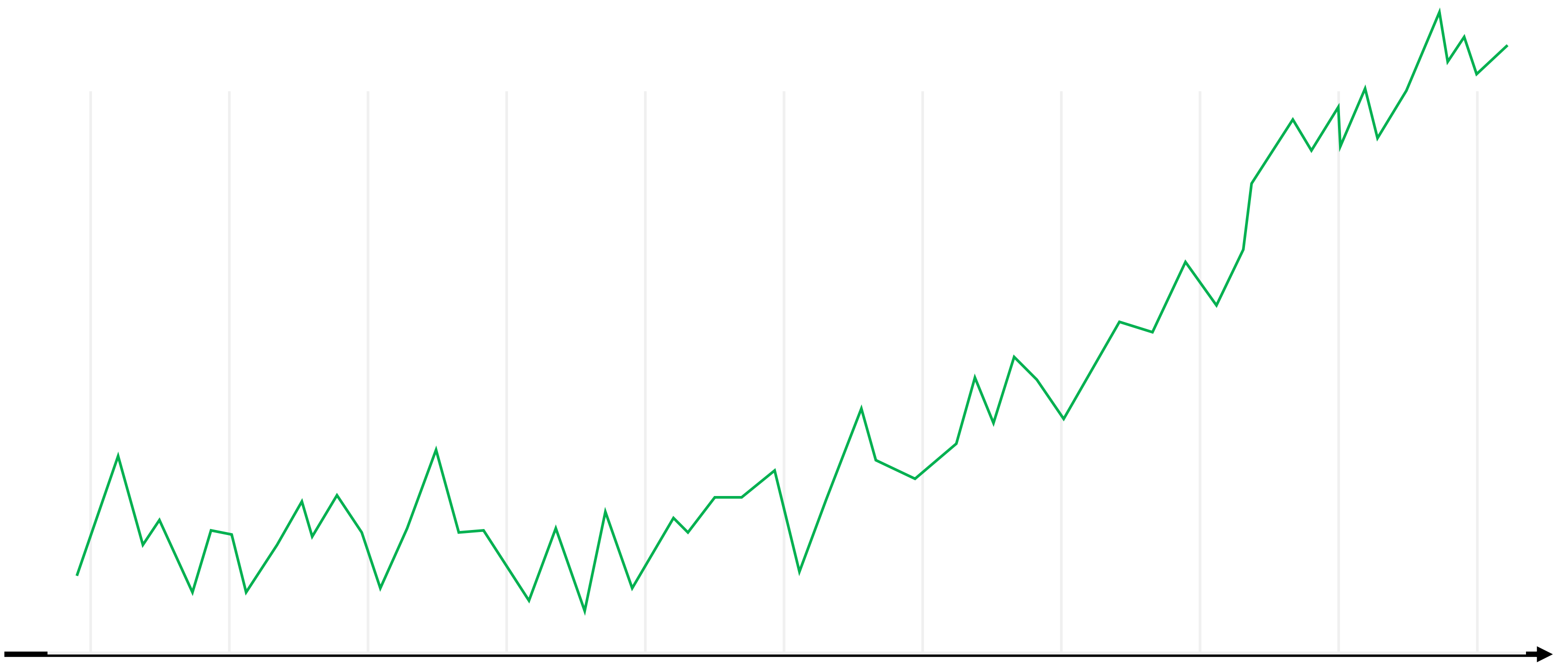
データの中のランダム性

時系列データ ＝ ベースライン ＋ 周期的な変動 ＋ ランダムな変動

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

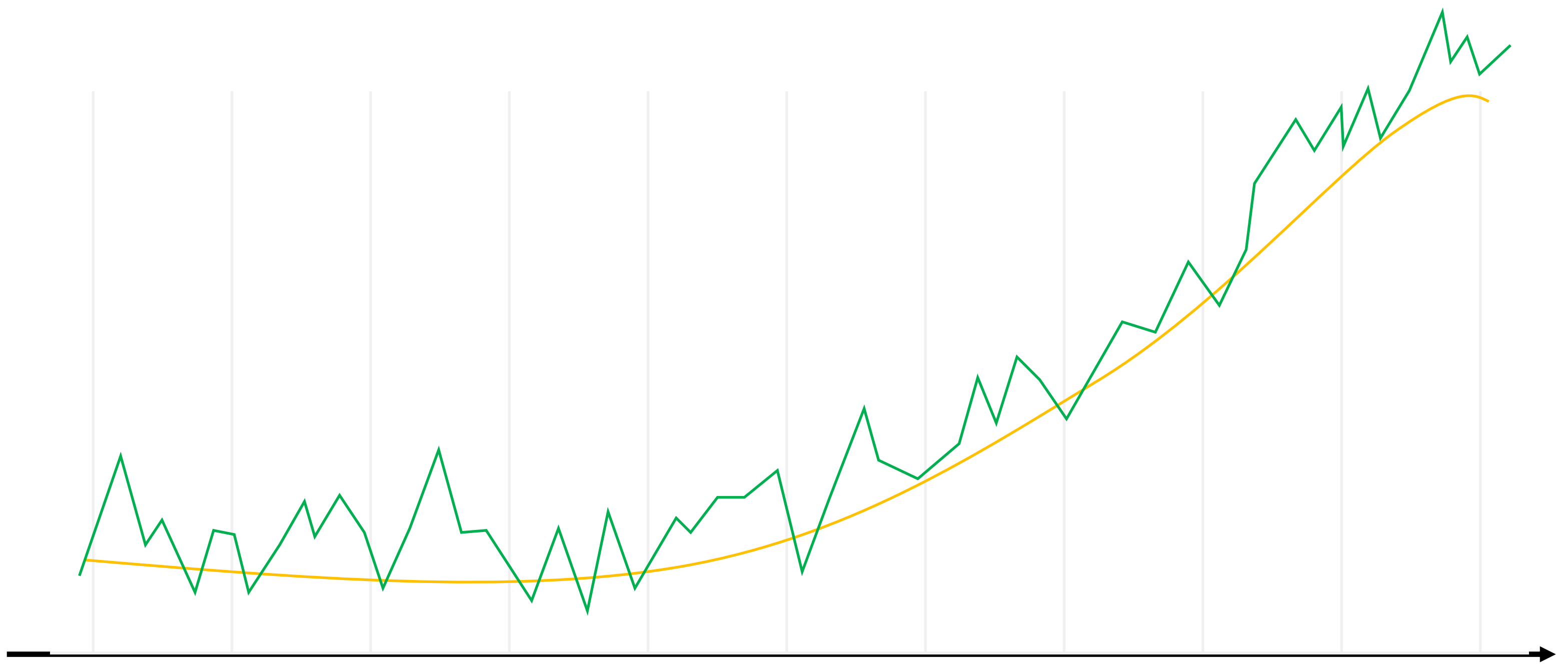
データの中のランダム性

時系列データ ＝ ベースライン ＋ 周期的な変動 ＋ ランダムな変動



データの中のランダム性

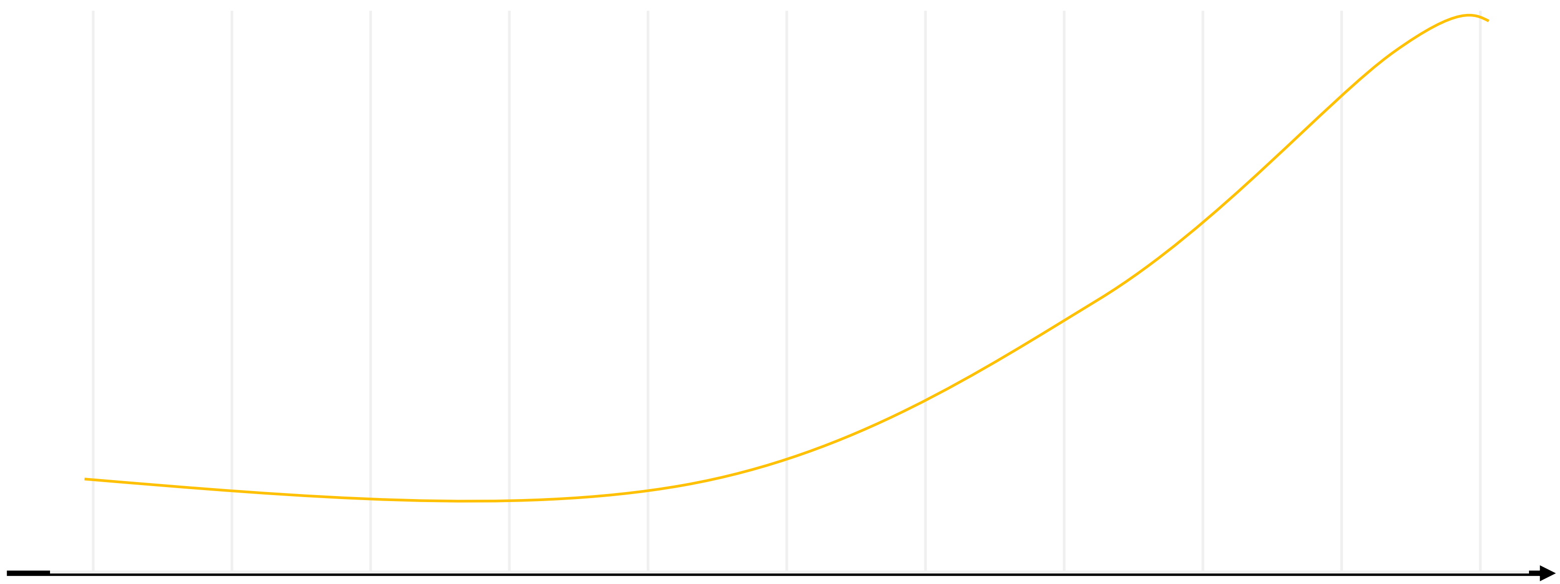
時系列データ ＝ ベースライン ＋ 周期的な変動 ＋ ランダムな変動



Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

データの中のランダム性

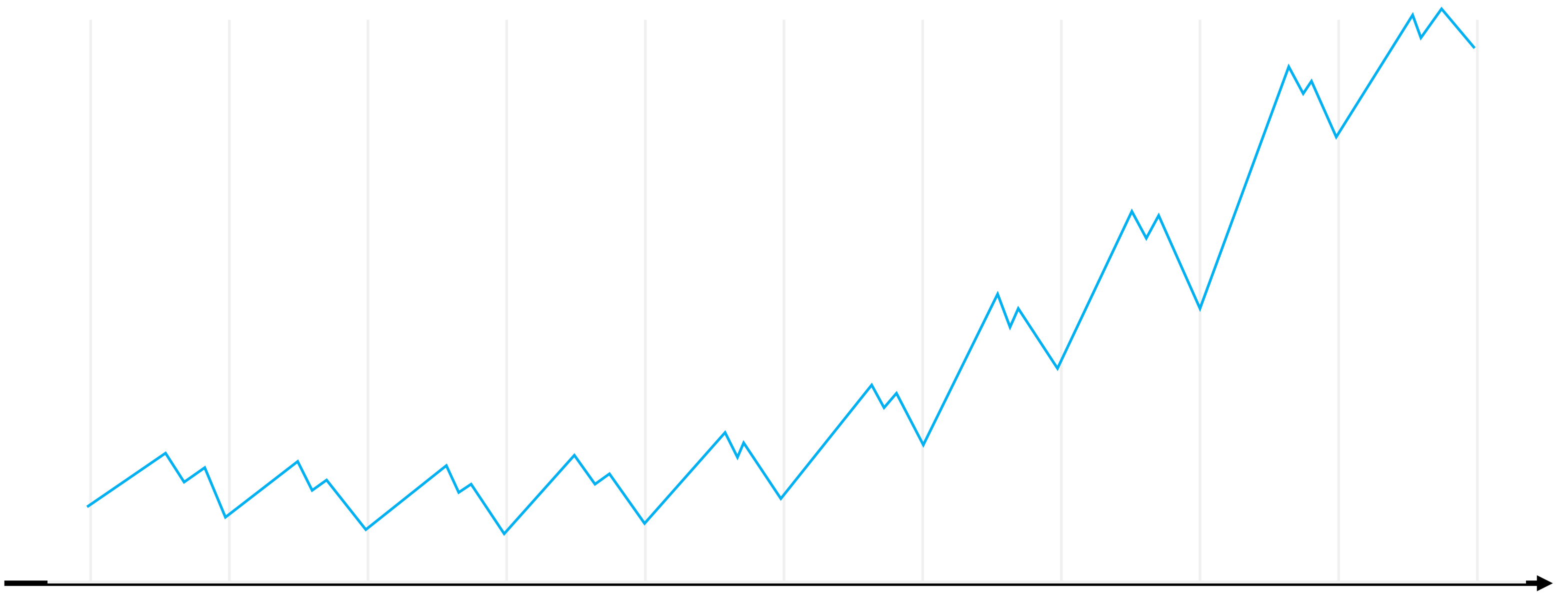
時系列データ ＝ ベースライン ＋ 周期的な変動 ＋ ランダムな変動



Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

データの中のランダム性

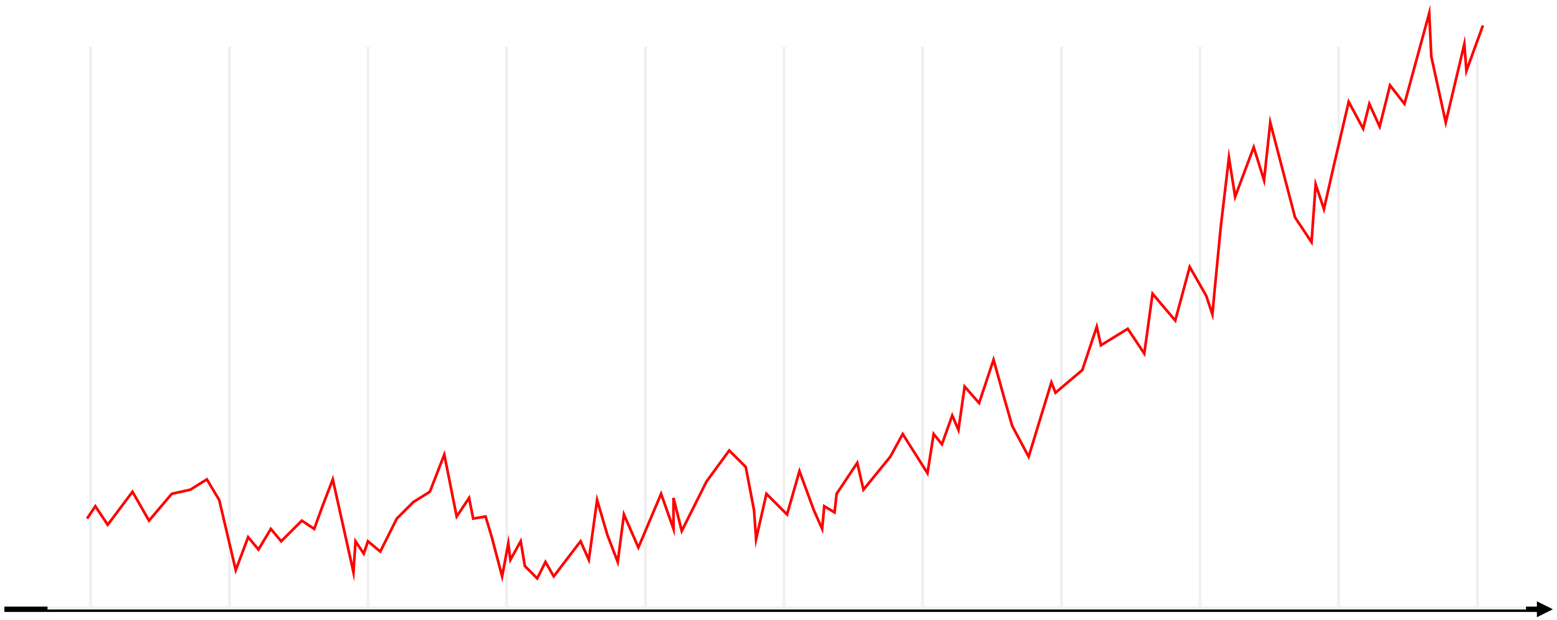
時系列データ ＝ ベースライン ＋ 周期的な変動 ＋ ランダムな変動



Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

データの中のランダム性

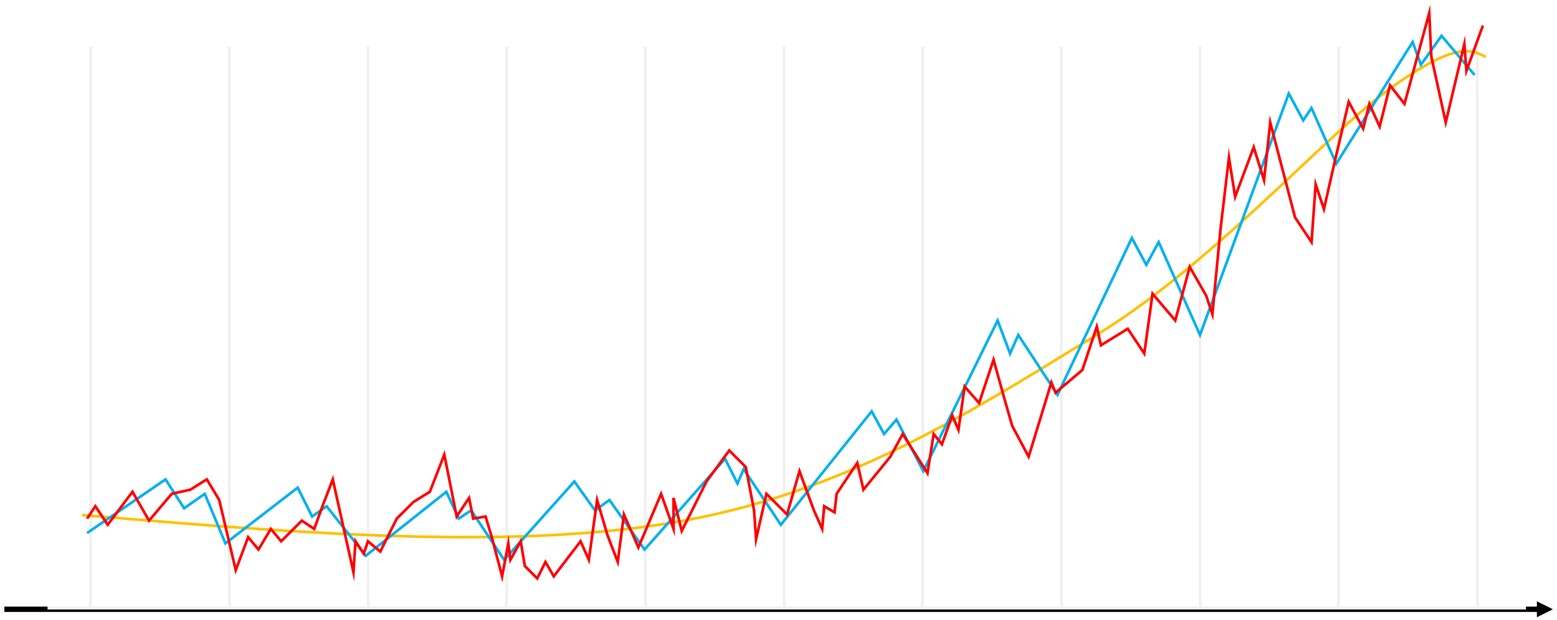
時系列データ ＝ ベースライン ＋ 周期的な変動 ＋ ランダムな変動



Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

データの中のランダム性

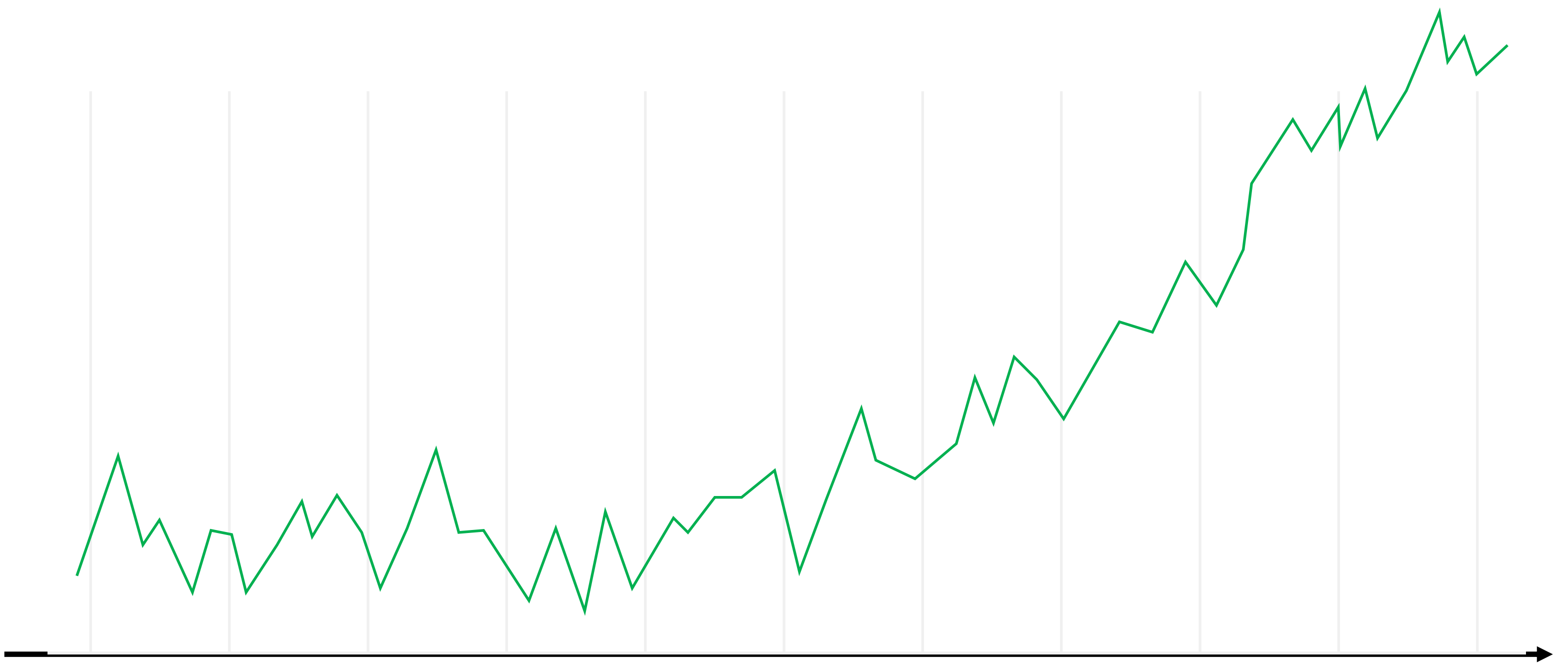
時系列データ ＝ ベースライン ＋ 周期的な変動 ＋ ランダムな変動



Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

データの中のランダム性

時系列データ ＝ ベースライン ＋ 周期的な変動 ＋ ランダムな変動



Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

乱数

乱数列

ランダムな数の列のこと。次に出力される数が予測できないもの。

Excelの関数

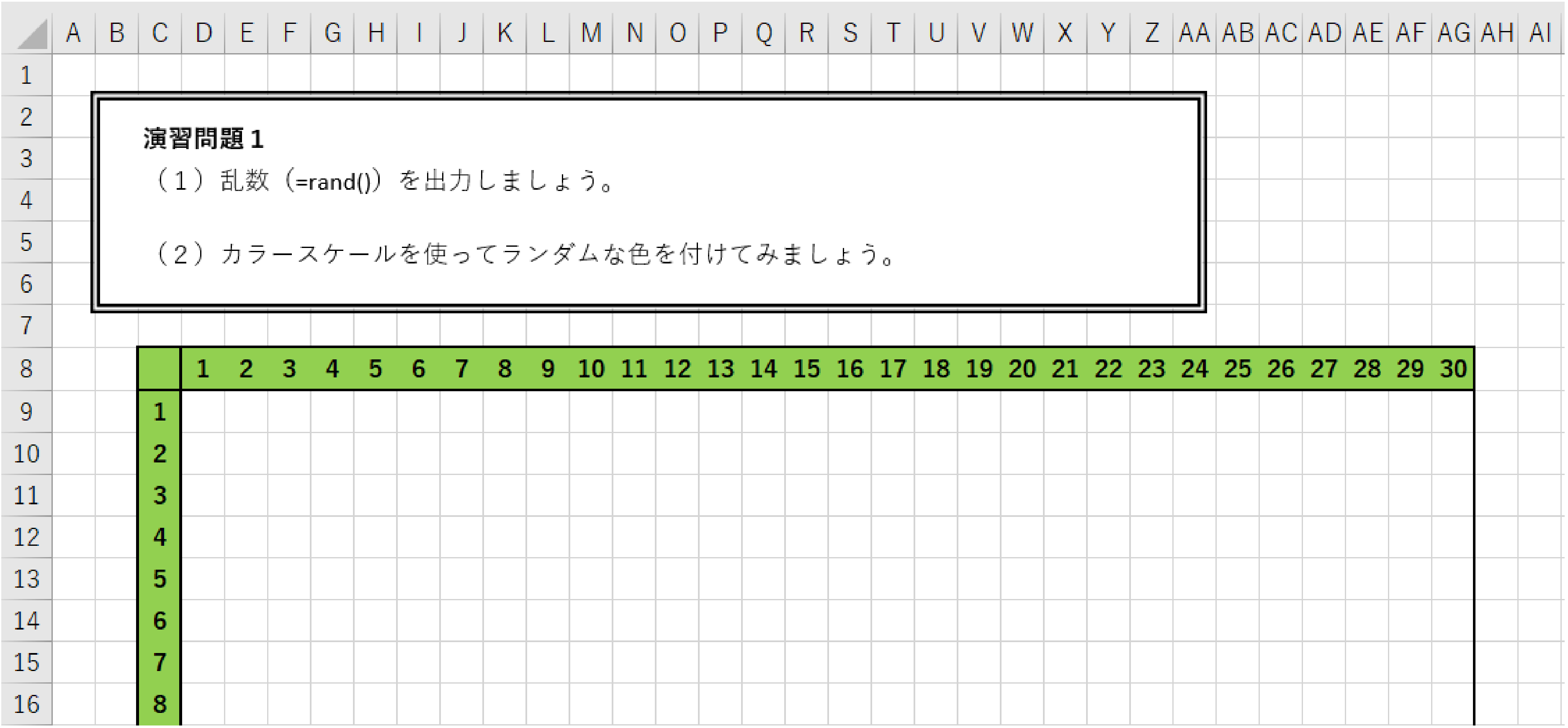
＝RAND()　→　0～1までの数をランダムに出力する。

余談

コンピュータが乱数を作り出しているように見えますが、実際に「アルゴリズム（ルール）」をもとに人工的に作り出しています（つまり完全にランダムではありません！）　しかし、ランダム性の基準をおおよそ満たすように整数論を駆使してアルゴリズムが構築されています。このような数列を「**疑似乱数**」といいます（例：メルセンヌ・ツイスター）。

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

演習問題１（ランダムのイメージ）



Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

演習問題１（ランダムのイメージ）

各セルに0～1までの乱数を入力する。

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

演習問題１（ランダムのイメージ）

演習問題１

（１）乱数（=rand()）を出力しましょう。

（２）カラースケールを使ってランダムな色を付けてみましょう。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
3	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0
4	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0
5	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1
6	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0
7	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
8	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

演習問題１（ランダムのイメージ）

演習問題１

（１）乱数（=rand()）を出力しましょう。

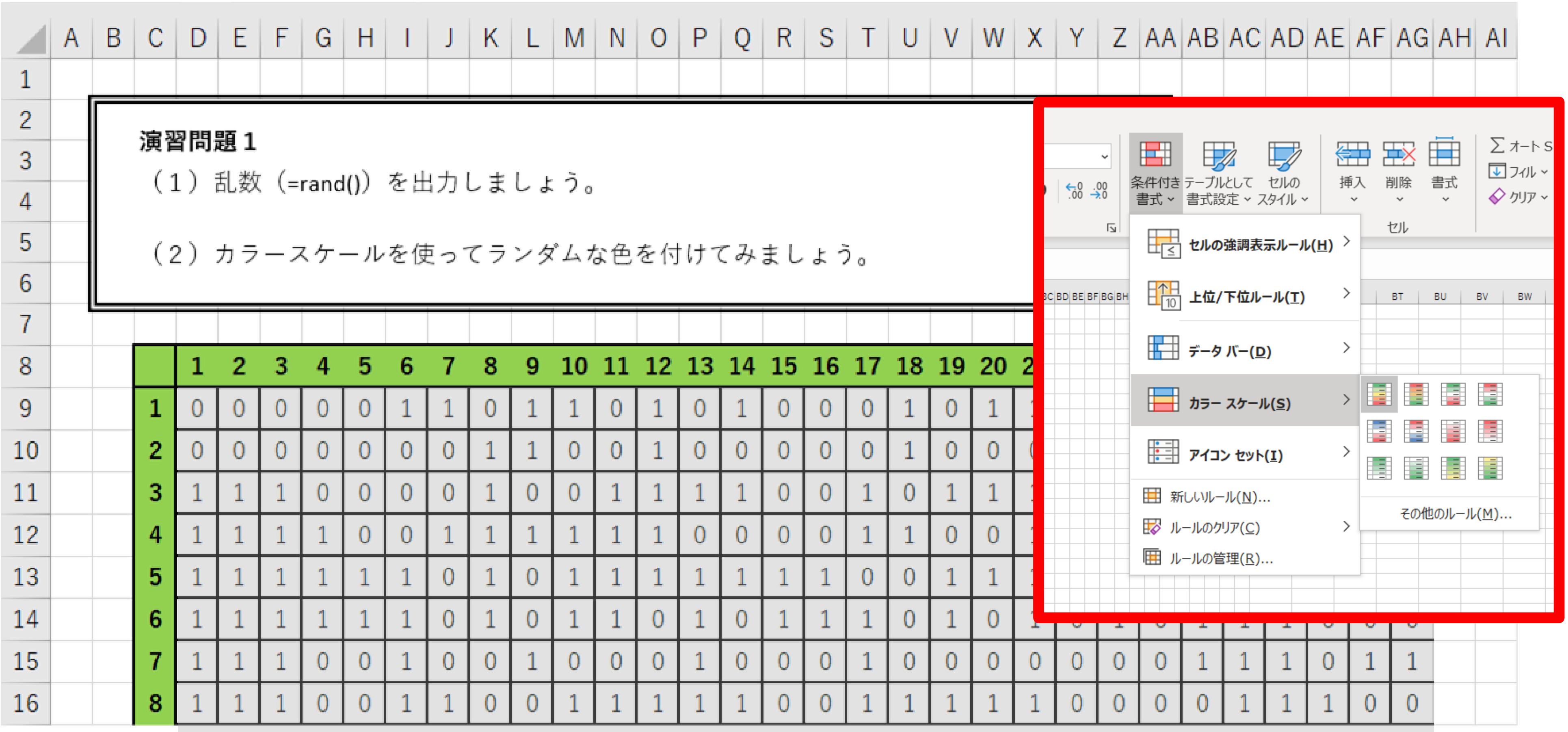
（２）カラースケールを使ってランダムな色を付けてみましょう。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
3	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0
4	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0
5	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1
6	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0
7	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
8	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0

データ内を全て選択し、「カラースケール」で色を付ける。

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

演習問題１（ランダムのイメージ）



データ内を全て選択し、「カラースケール」で色を付ける。

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

演習問題１（ランダムのイメージ）

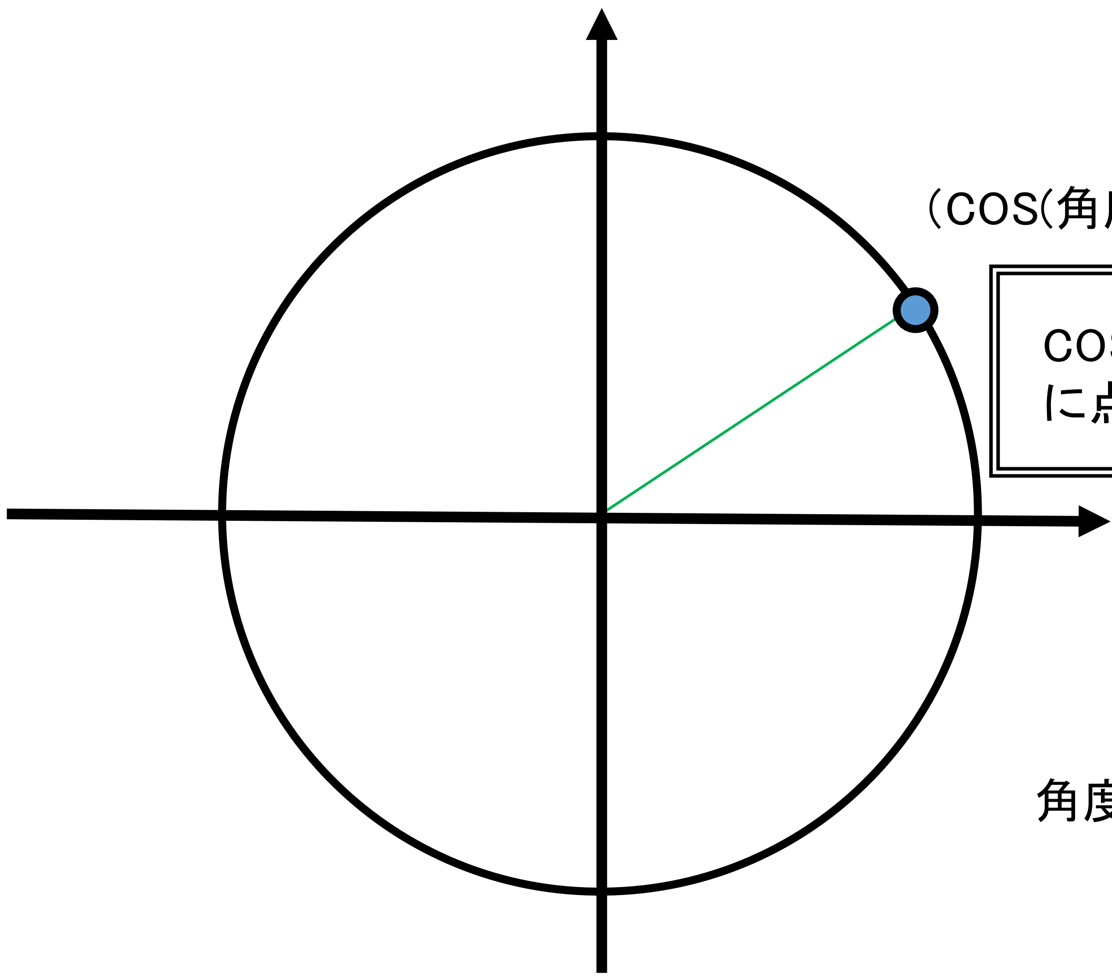
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
3	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0
4	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0
5	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1
6	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0
7	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
8	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
9	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
10	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0
11	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
12	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
13	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
14	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
15	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
16	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0
17	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
18	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
19	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
20	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
21	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0
22	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0
23	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1
24	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
25	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
26	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0
27	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
28	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
29	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
30	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0

数字の大きさによりグラデーションがつく。

※F9キーで乱数の更新ができます。

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

円上の点の配置

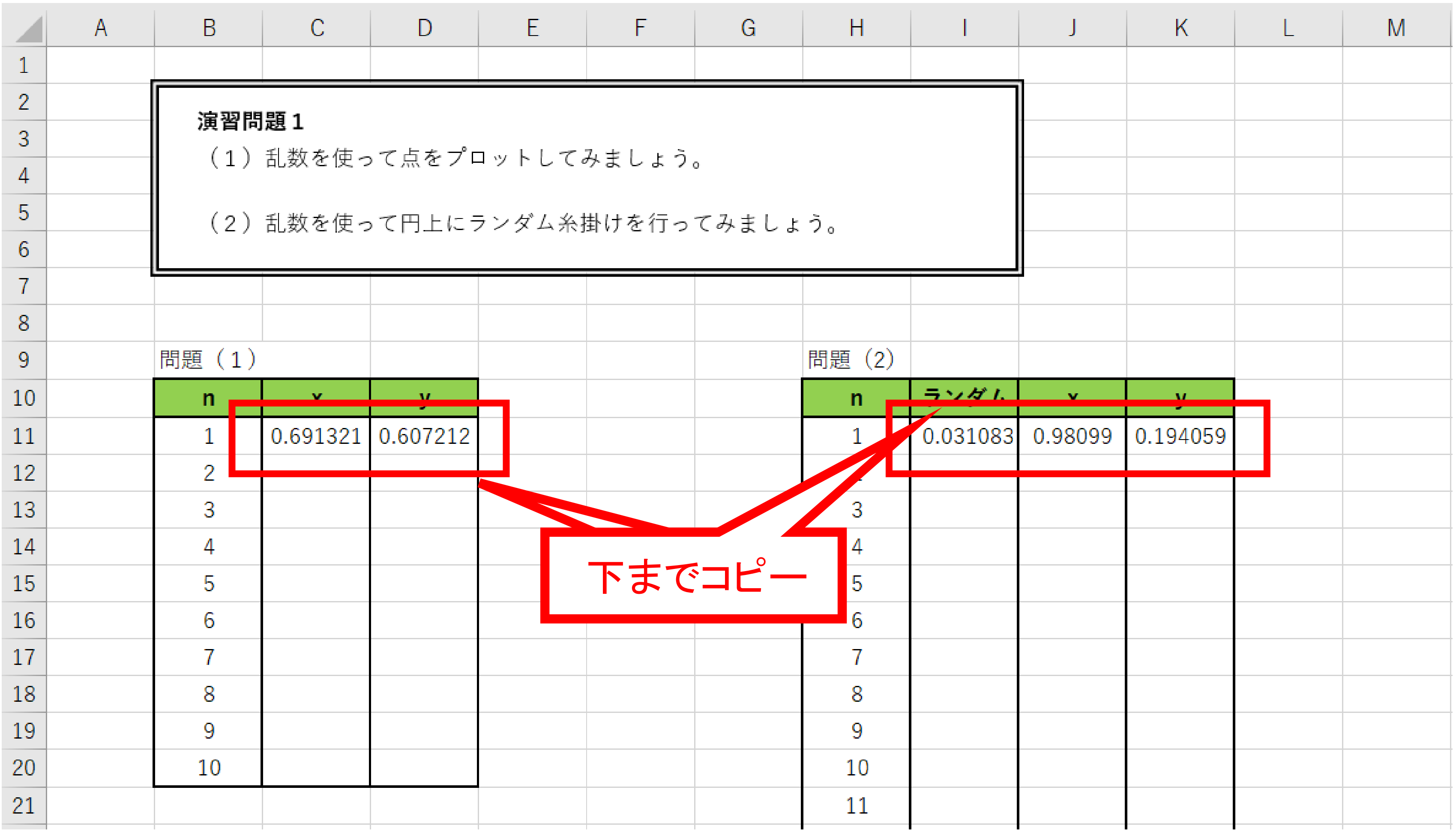


COS, SIN を使って、円周上に点を打つことができる。

角度をランダムにしてみる！

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

演習問題２（ランダム・プロット）



演習問題１

（１）乱数を使って点をプロットしてみましょう。

（２）乱数を使って円上にランダム糸掛けを行ってみましょう。

問題（１）

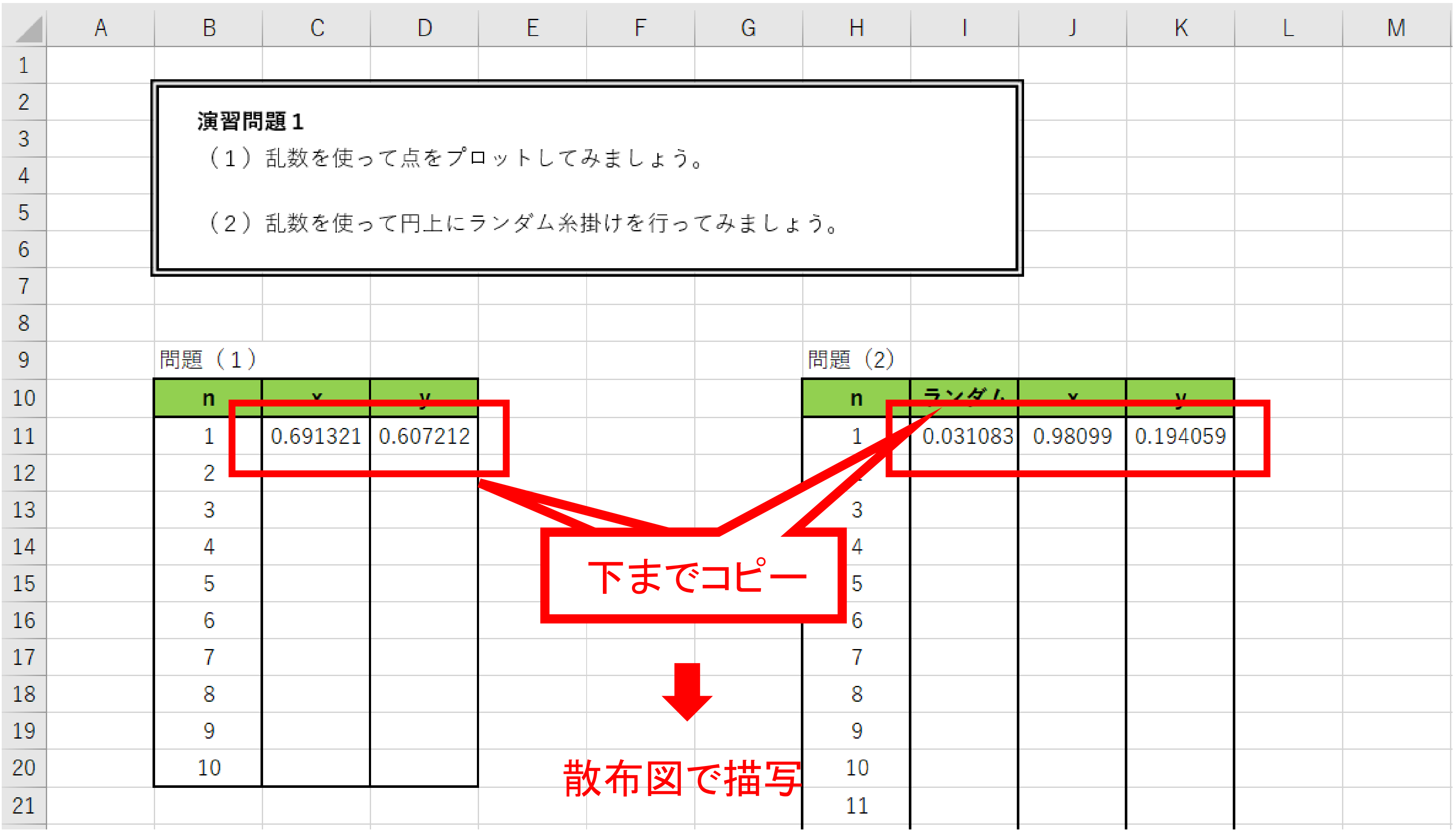
n	x	y
1	0.691321	0.607212
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

問題（2）

n	ランダム	x	y
1	0.031083	0.98099	0.194059
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

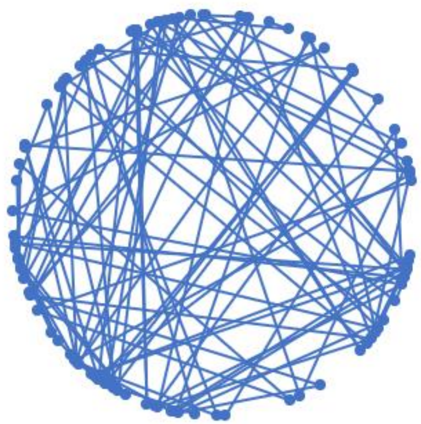
演習問題２（ランダム・プロット）



Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

演習問題２（ランダム・プロット）

問題1



問題2

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ランダム・ウォーク

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

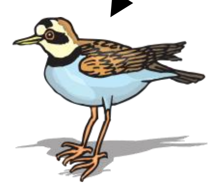
ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。

千鳥



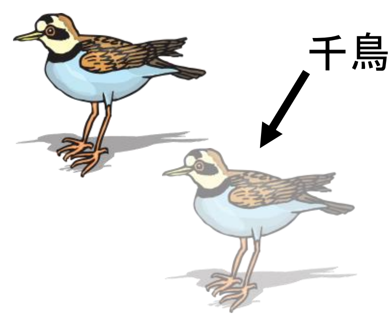
Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。



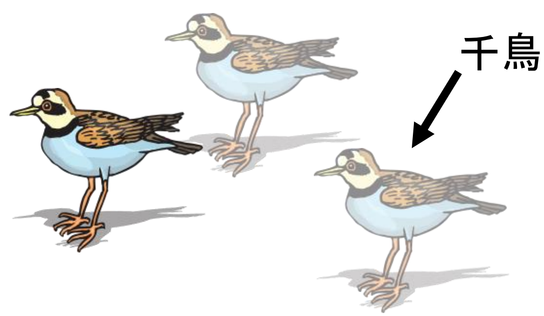
Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム(無作為)に決定されるような運動。

酔歩(すいほ)ともいう。



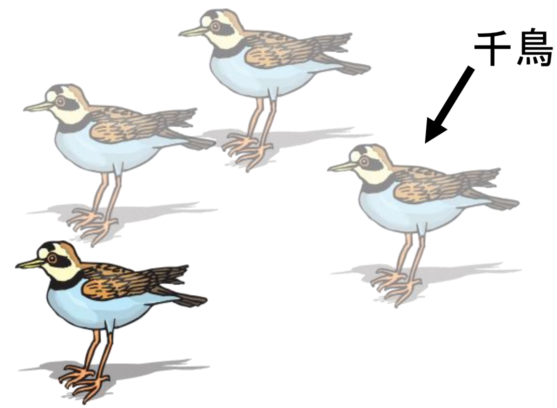
Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。



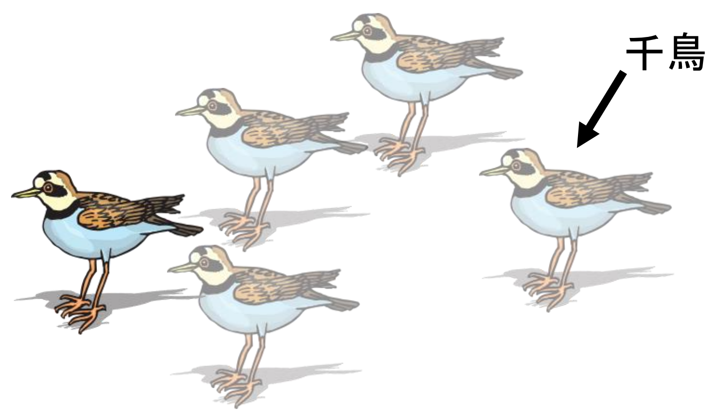
Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。



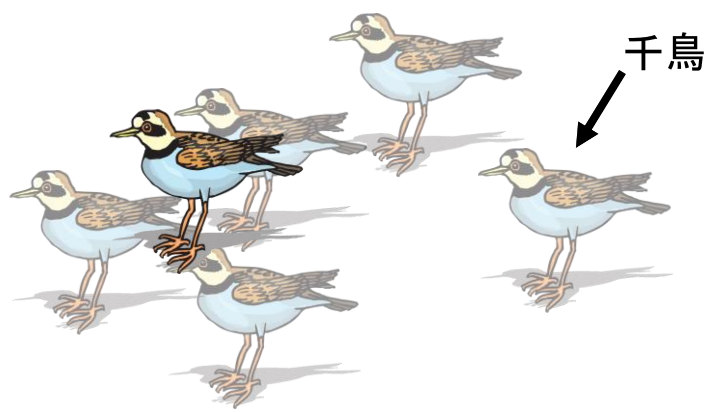
Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム(無作為)に決定されるような運動。

酔歩(すいほ)ともいう。



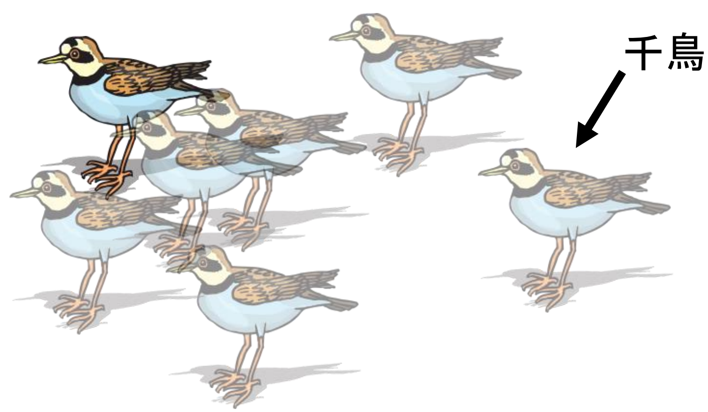
Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。



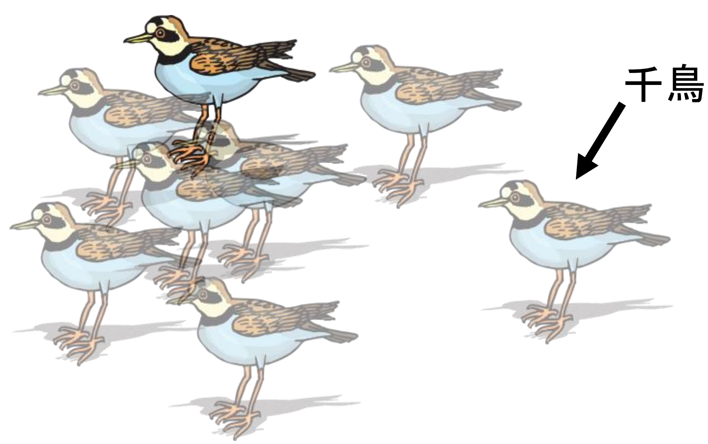
Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。



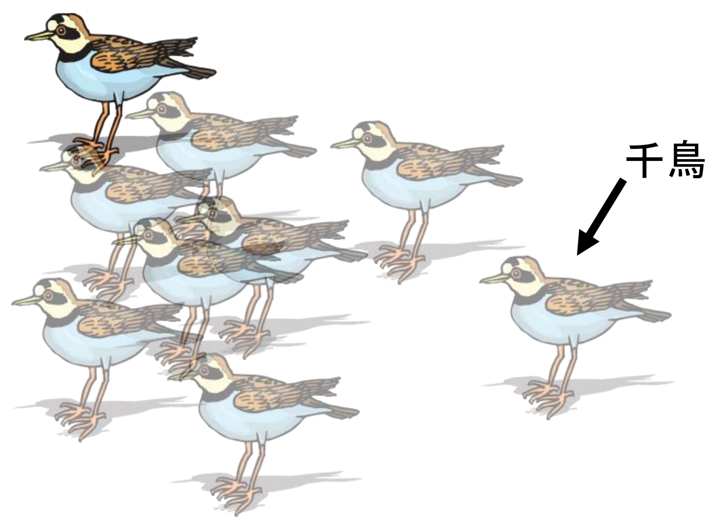
Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。



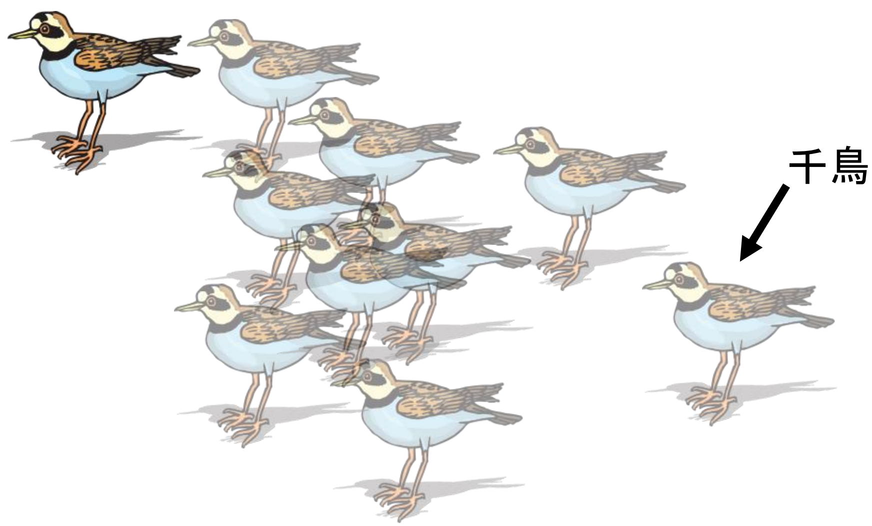
Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム(無作為)に決定されるような運動。

酔歩(すいほ)ともいう。



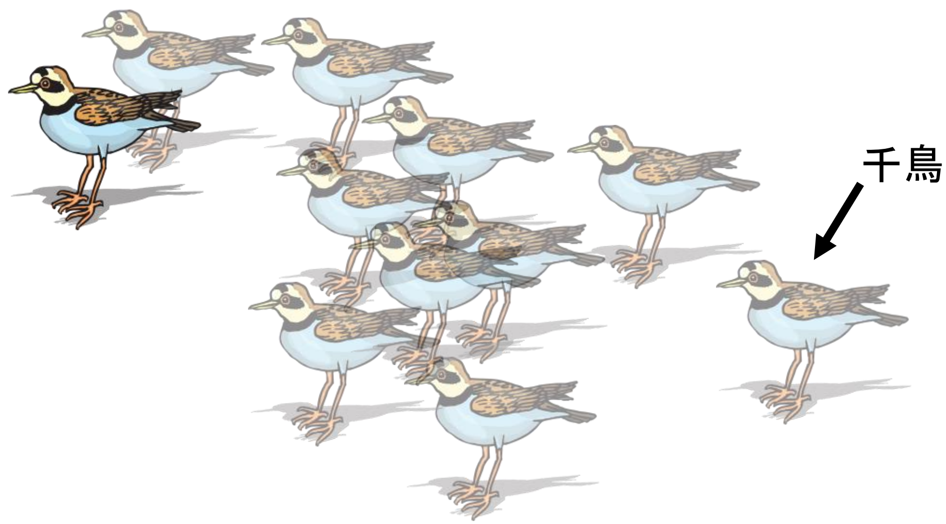
Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。



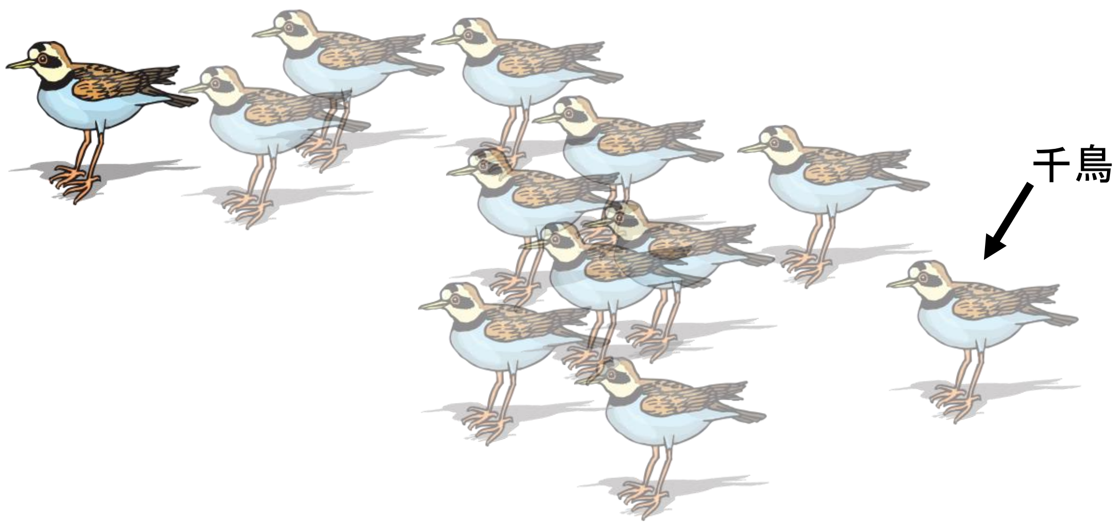
Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。



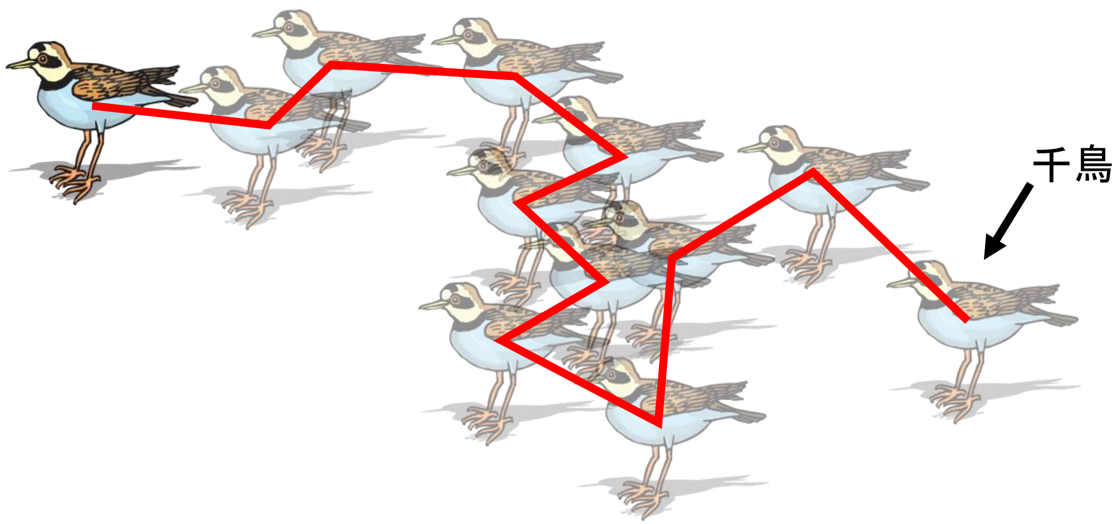
Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム(無作為)に決定されるような運動。

酔歩(すいほ)ともいう。



Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

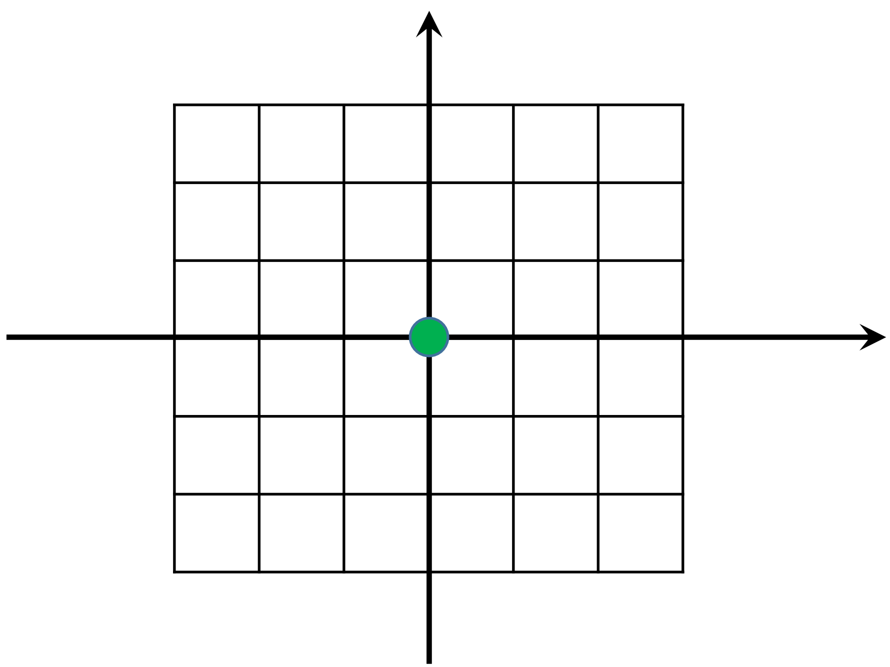
ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム(無作為)に決定されるような運動。

酔歩(すいほ)ともいう。

動く方向を絞る



Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

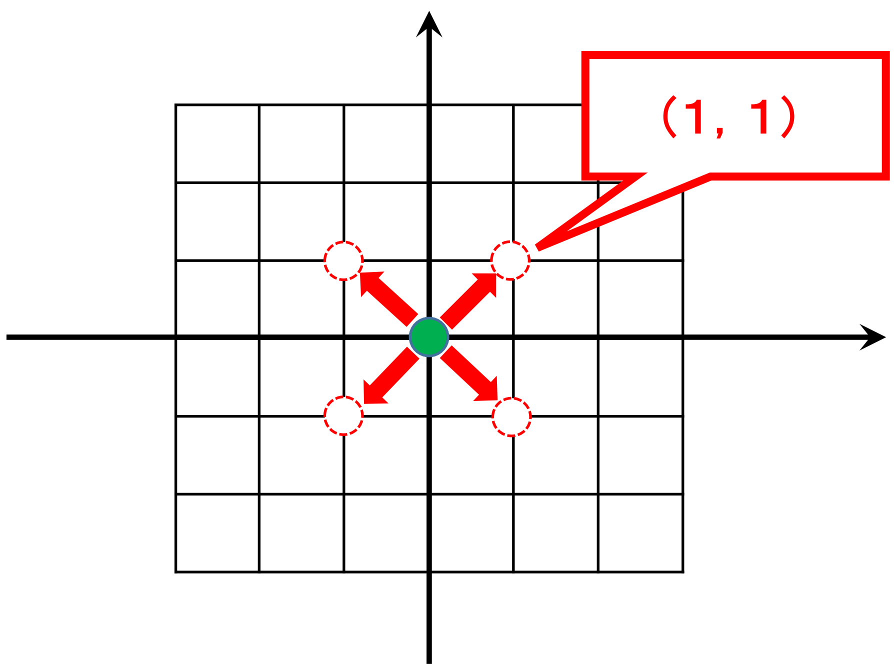
ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。

動く方向を絞る



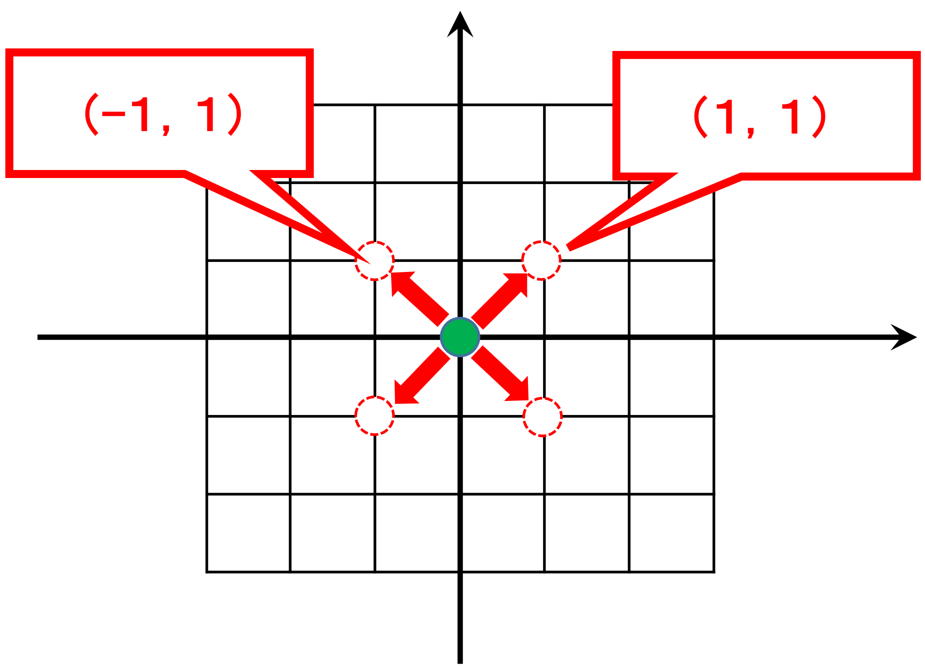
ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。

動く方向を絞る



Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

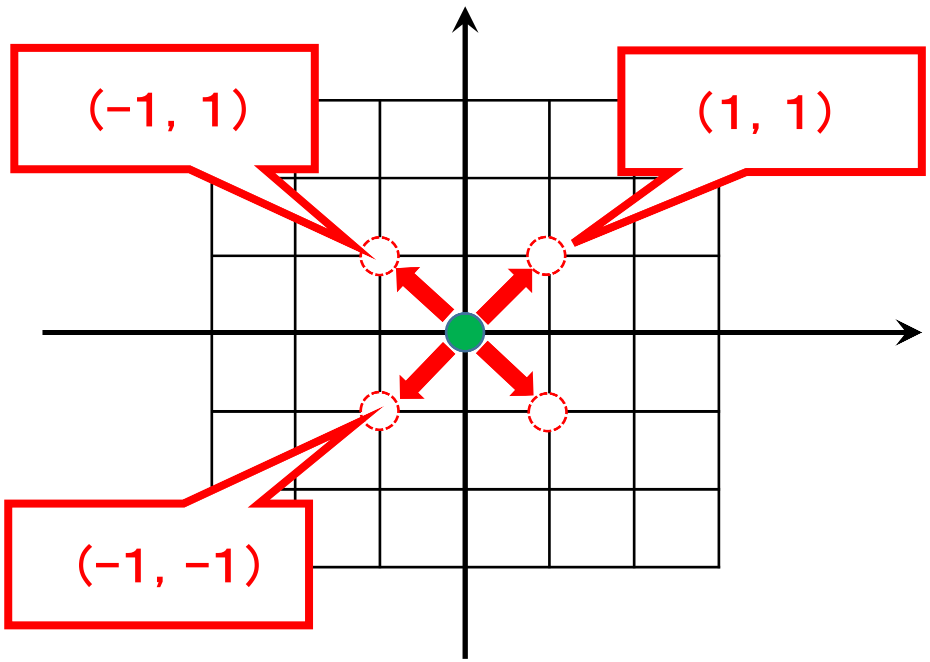
ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム(無作為)に決定されるような運動。

酔歩(すいほ)ともいう。

動く方向を絞る



Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

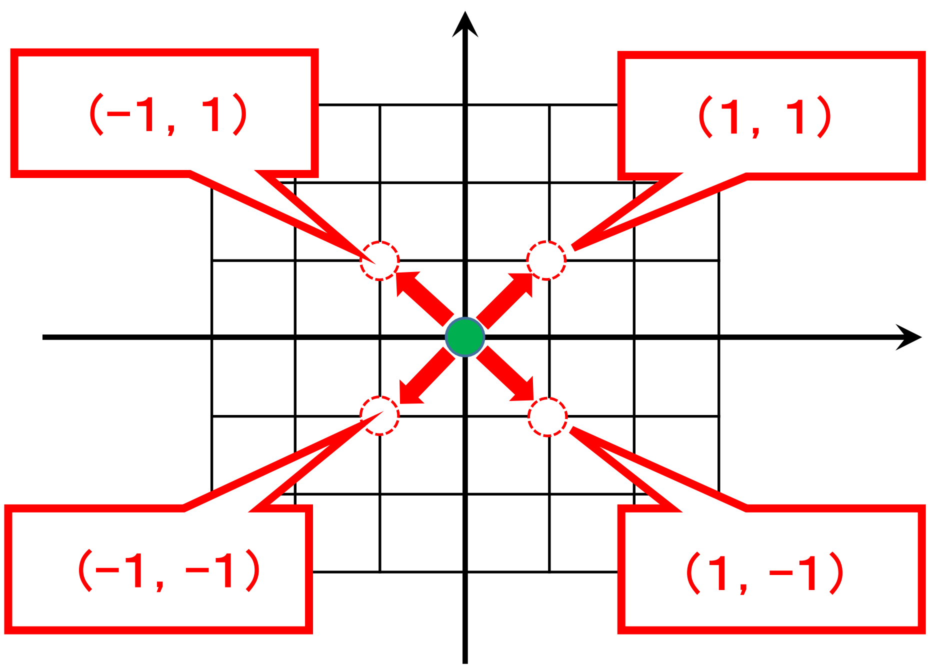
ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。

動く方向を絞る



2次元ランダム・ウォーク

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

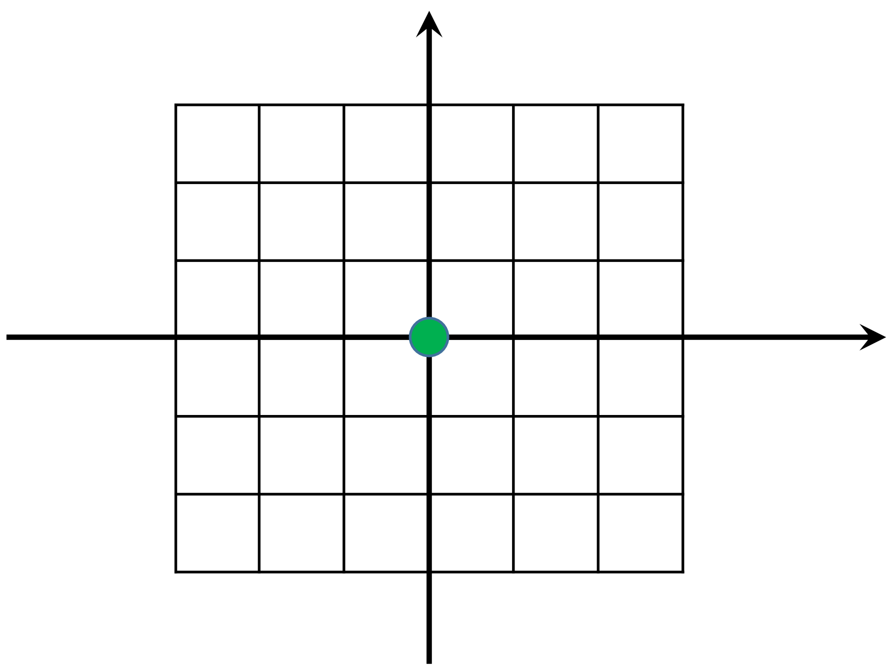
ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。

動く方向を絞る



（0，0）

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

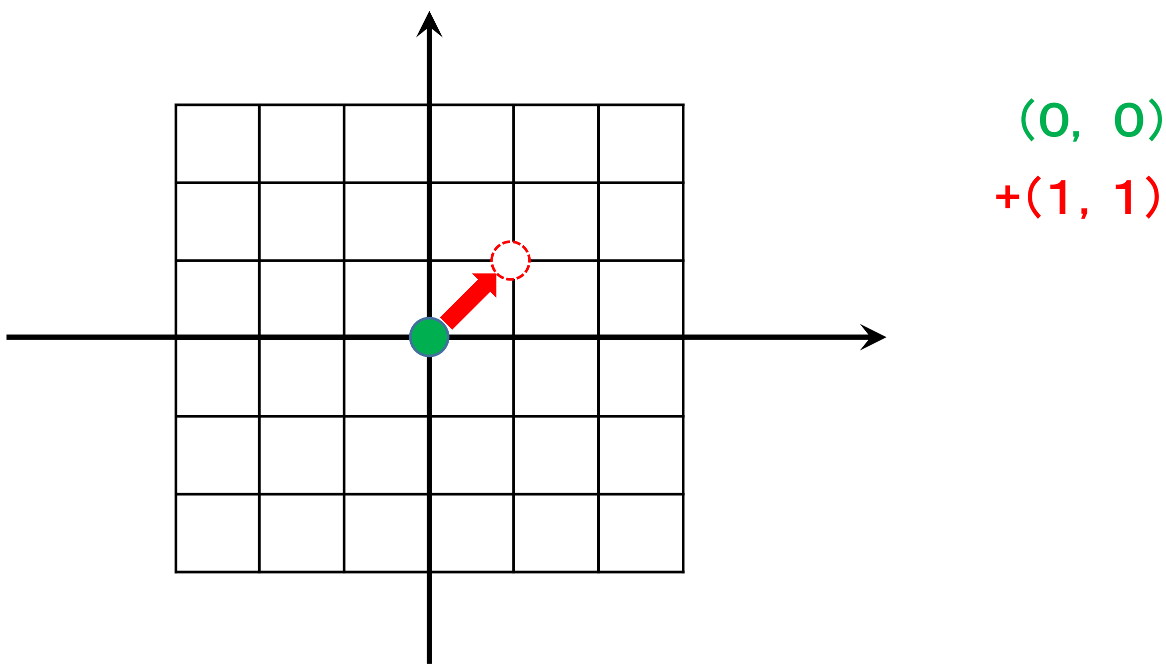
ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。

動く方向を絞る



Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

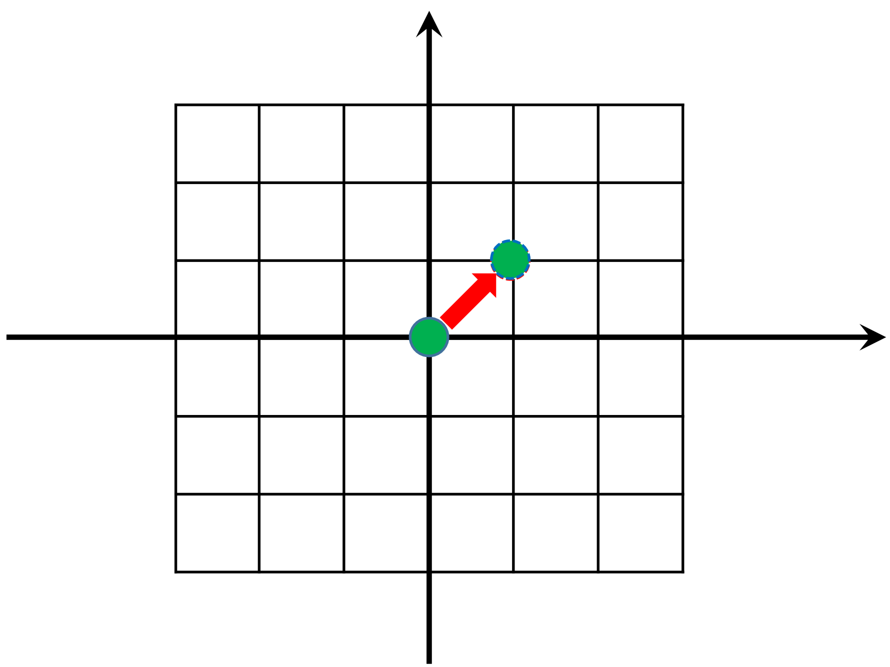
ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。

動く方向を絞る



(0, 0)

+(1, 1) =(1, 1)

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

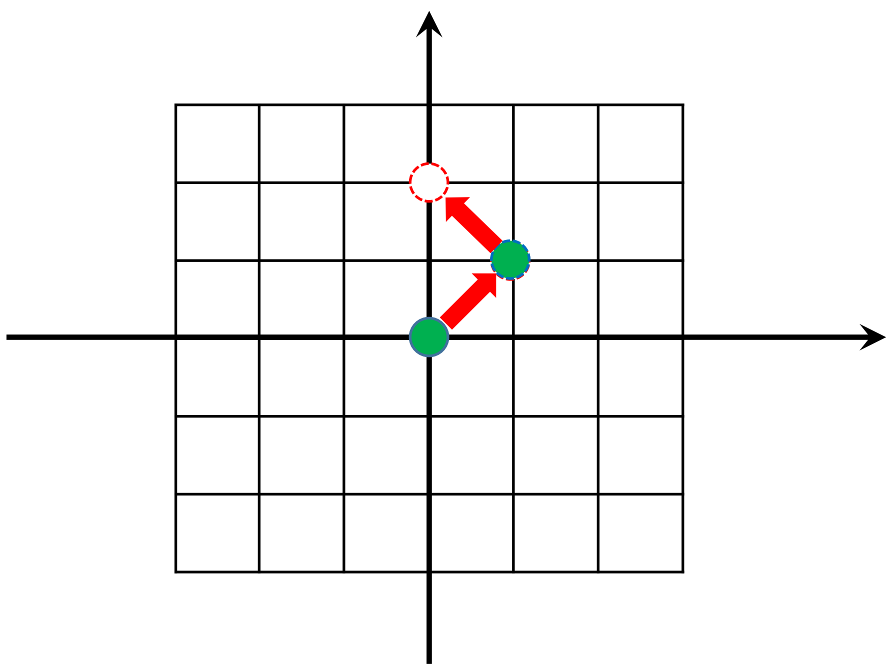
ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム(無作為)に決定されるような運動。

酔歩(すいほ)ともいう。

動く方向を絞る



(0, 0)

+(1, 1)　=(1, 1)

+(−1, 1)

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

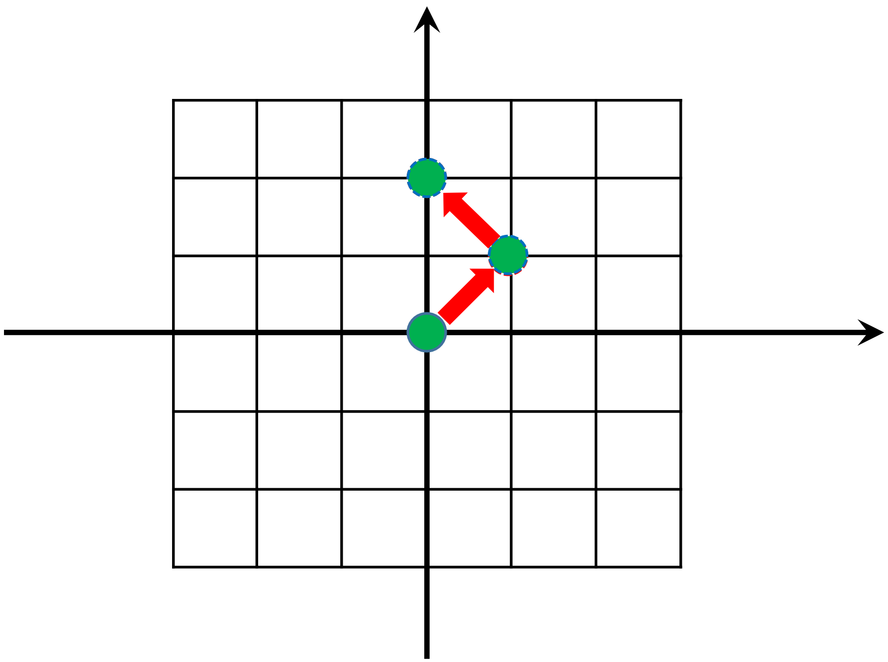
ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。

動く方向を絞る



（0，0）

＋（1，1）　＝（1，1）

＋（−1，1）＝（0，2）

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

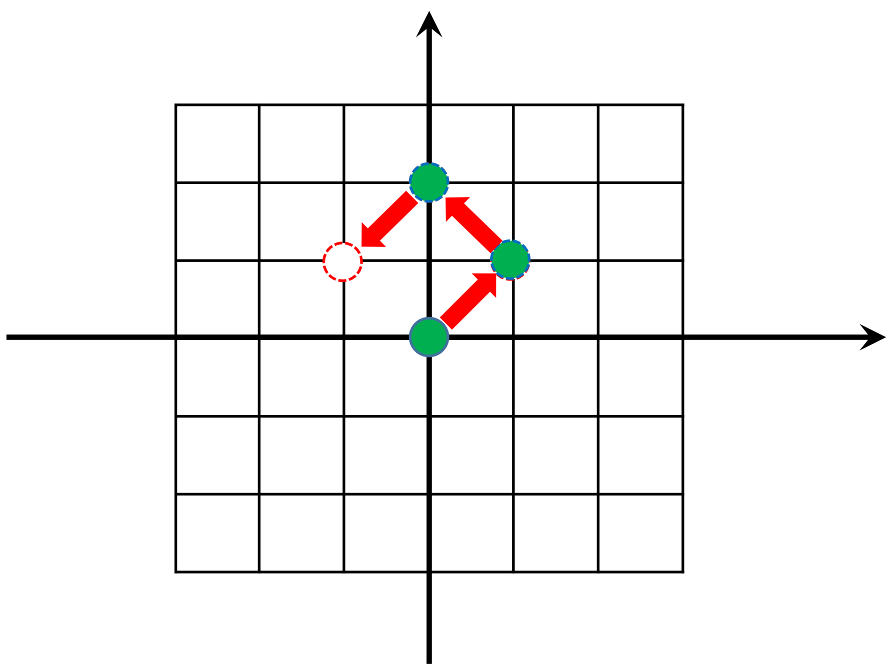
ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。

動く方向を絞る



（0, 0）

+（1, 1） ＝（1, 1）

+（−1, 1） ＝（0, 2）

+（−1,−1）

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

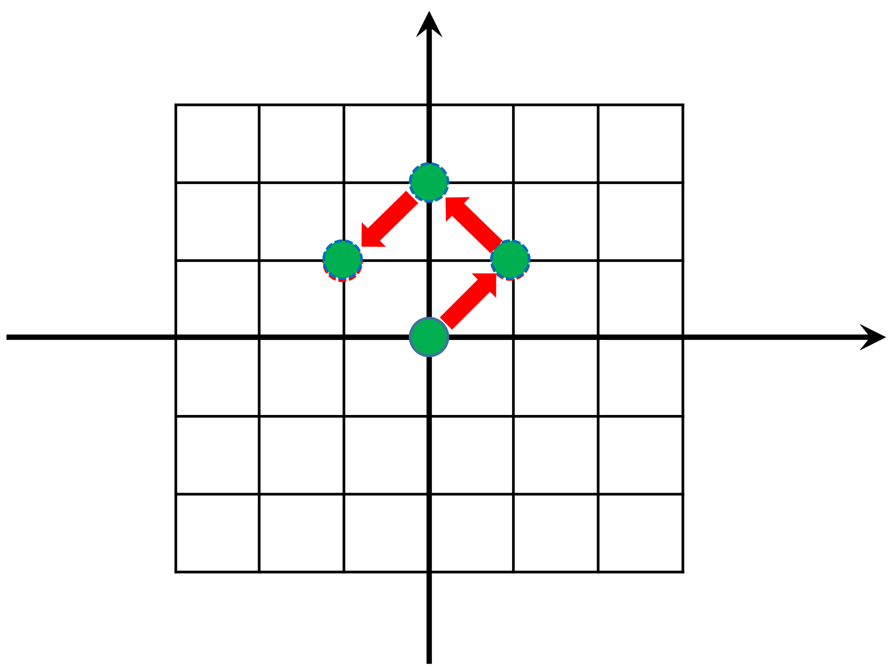
ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。

動く方向を絞る



（0，0）

+（1，1）＝（1，1）

+（−1，1）＝（0，2）

+（−1,−1）＝（−1，1）

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

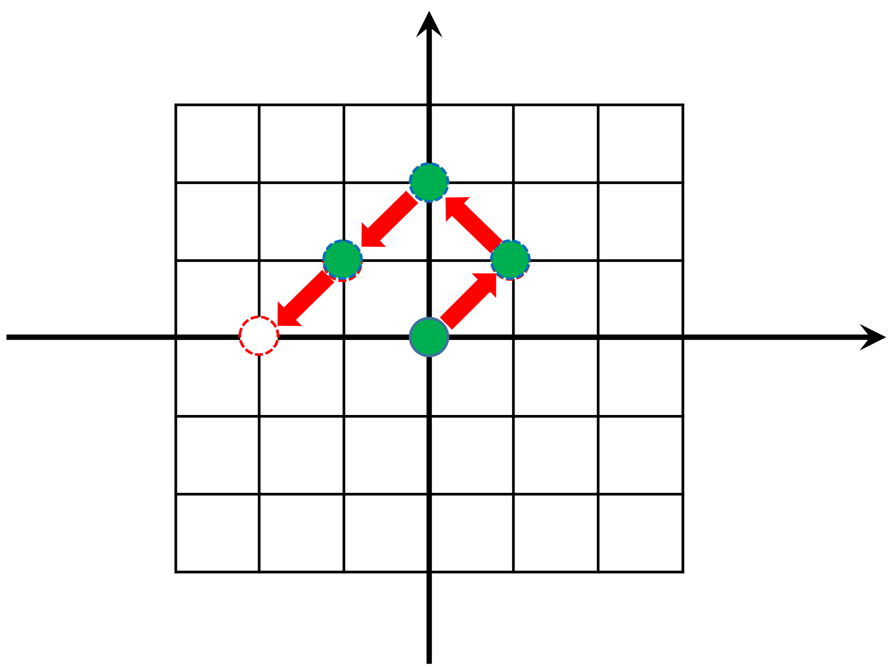
ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。

動く方向を絞る



（0, 0）

+（1, 1） ＝（1, 1）

+（−1, 1） ＝（0, 2）

+（−1,−1） ＝（−1, 1）

+（−1,−1）

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

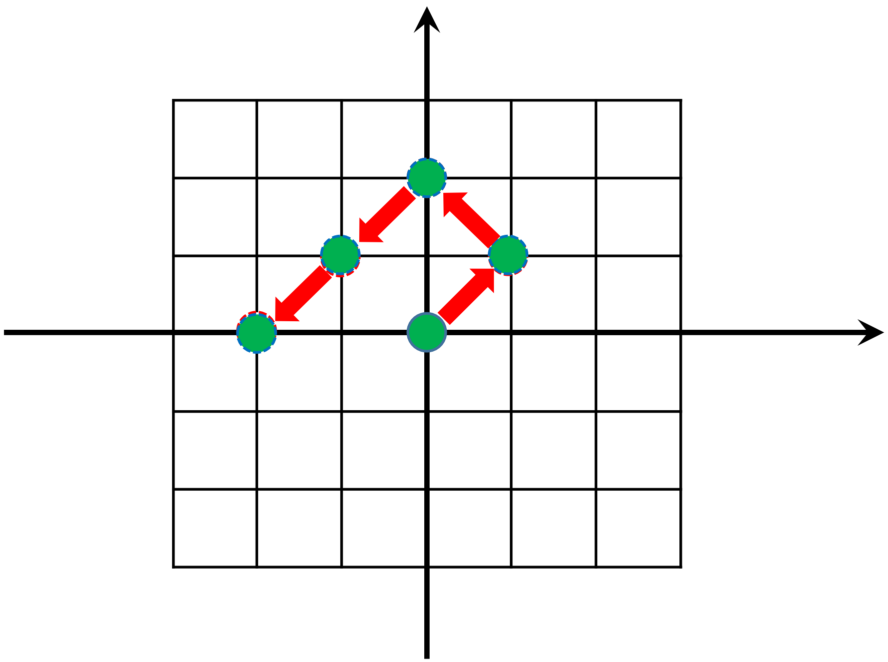
ランダム・ウォーク

ランダム・ウォーク

次の位置がランダム（無作為）に決定されるような運動。

酔歩（すいほ）ともいう。

動く方向を絞る

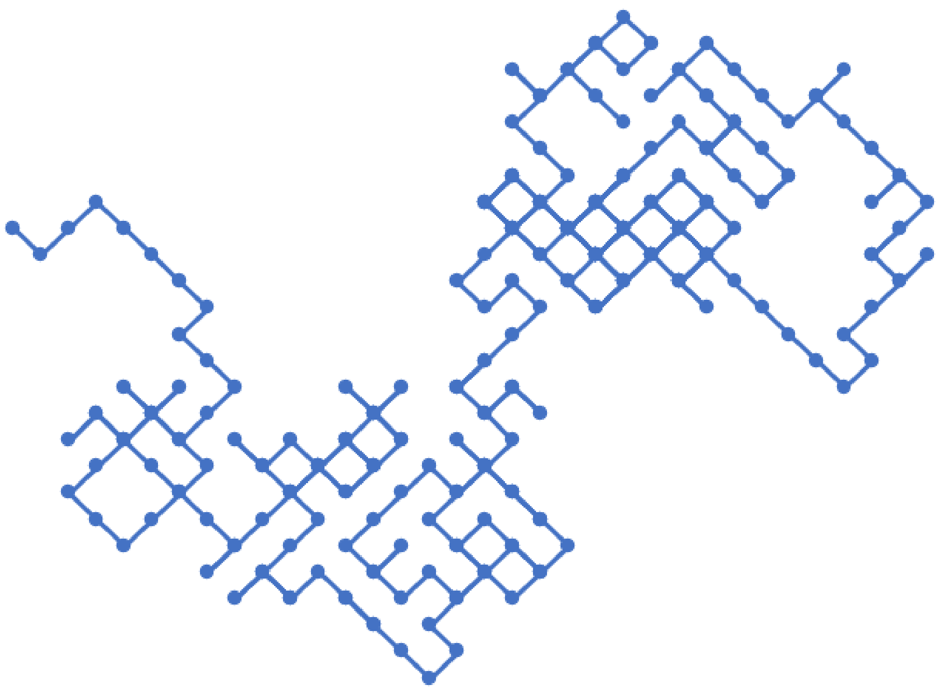


（0, 0）
+（1, 1） ＝（1, 1）
+（−1, 1） ＝（0, 2）
+（−1,−1） ＝（−1, 1）
+（−1,−1） ＝（−2, 0）

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

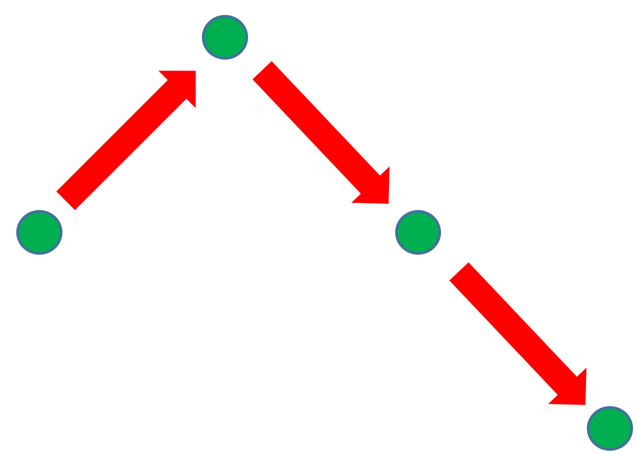
２次元ランダム・ウォーク

２次元ランダム・ウォーク



動く方向：（直交する）４方向

歩幅：一定



Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

演習問題３（ランダム・ウォーク）

演習問題３

ランダム・ウォークを完成させましょう。

n	x	y
0	0	0
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

初期状態

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

演習問題３（ランダム・ウォーク）

演習問題３

ランダム・ウォークを完成させましょう。

n	x	y
0	0	0
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

初期状態

=D9+IF(RAND()>0.5,1,-1)

１つ前の値＋（乱数が0.5より大きければ1、そうでなければー1）

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

演習問題３（ランダム・ウォーク）

演習問題３

ランダム・ウォークを完成させましょう。

n	x	y
0	0	0
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

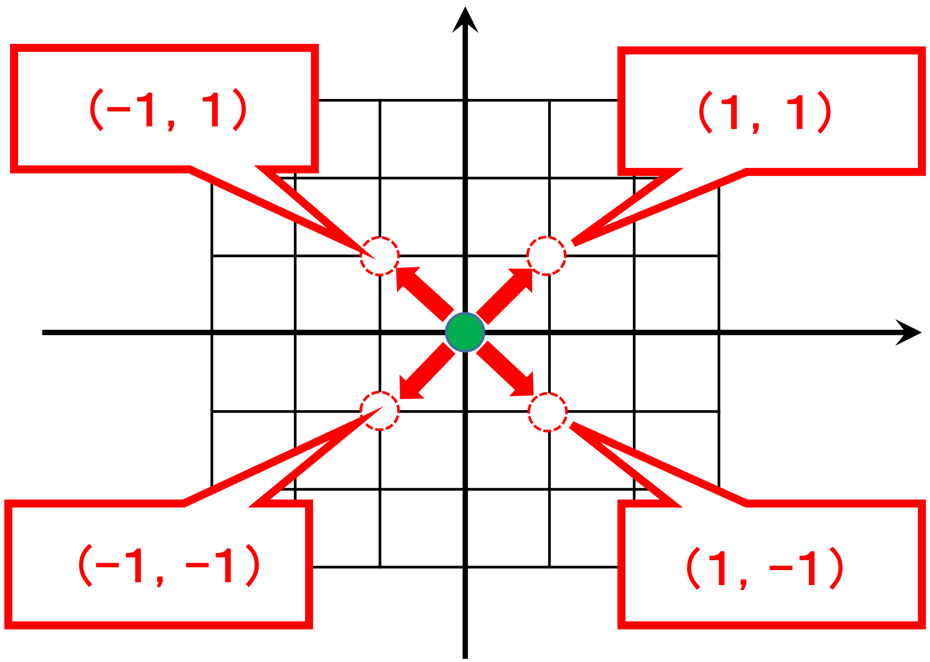
初期状態

=E9+IF(RAND()>0.5,1,-1)

１つ前の値＋（乱数が0.5より大きければ1、そうでなければー1）

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

演習問題３（ランダム・ウォーク）



乱数とIF関数を使って、1/4の確率で各方向をランダムに決めることができる。

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

演習問題３（ランダム・ウォーク）

演習問題３

ランダム・ウォークを完成させましょう。

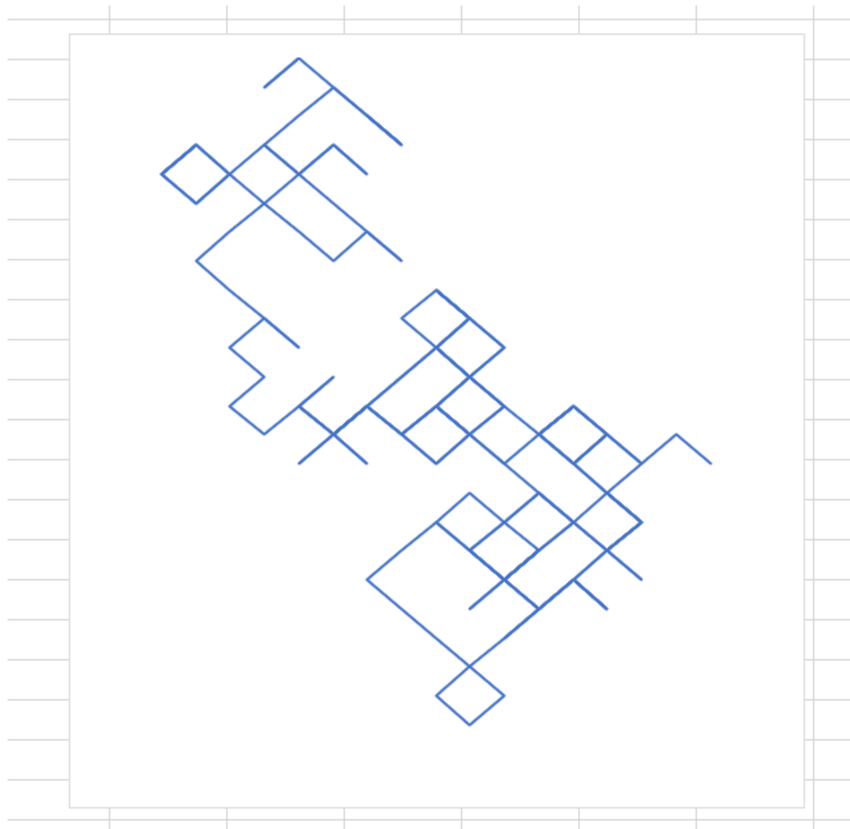
n	x	y
0	0	0
1	1	1
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

①下までコピー

②ｘとｙの２列に対して散布図を作成する

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

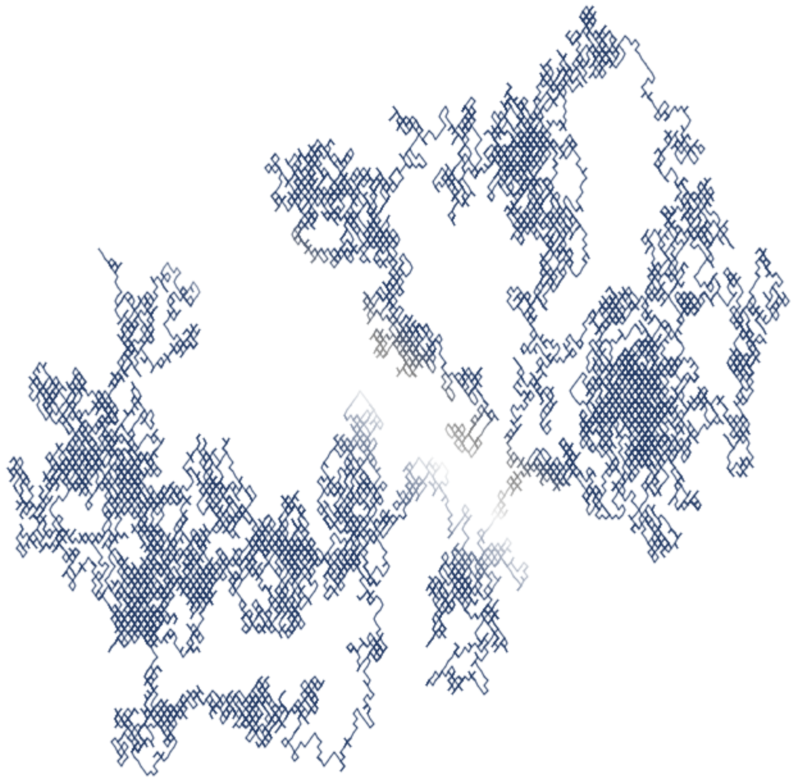
演習問題３（ランダム・ウォーク）



200歩の場合のランダムウォーク

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ランダム・ウォークの作成例

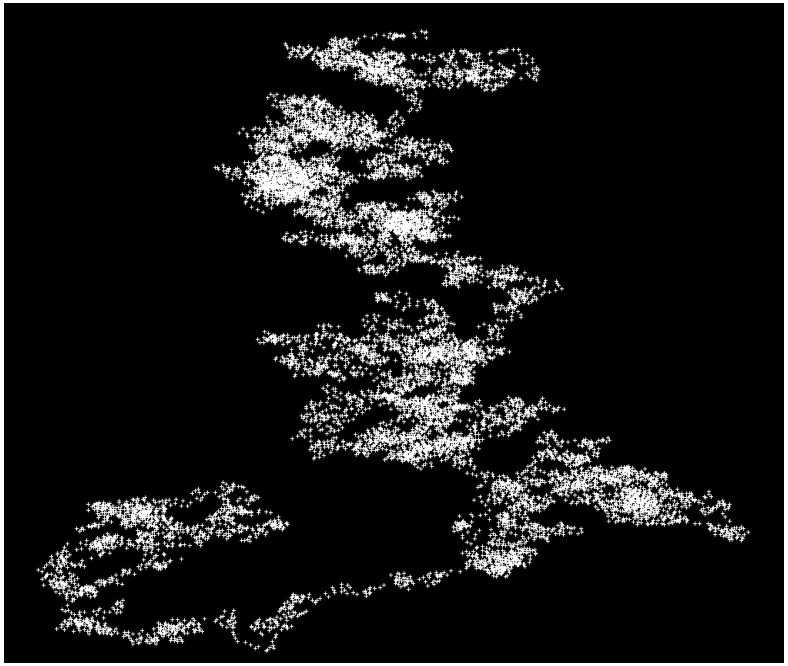


20000歩の場合のランダムウォーク

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

レヴィのダスト

レヴィのダスト

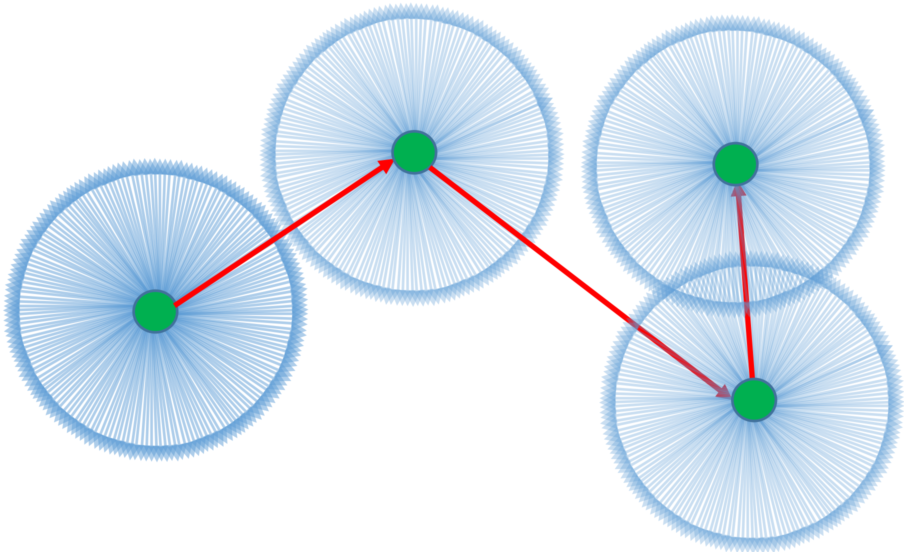


ランダム・ウォークの一種

宇宙空間上の星の分布のモデル

動く方向：360° 自由

歩幅：指数関数的にランダム

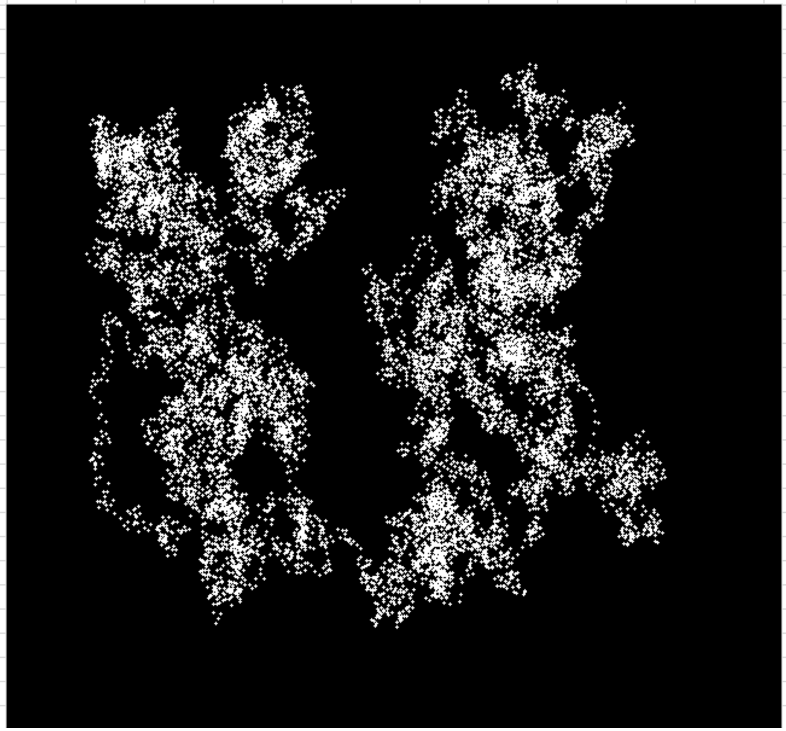


Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

付録１（レヴィのダスト）

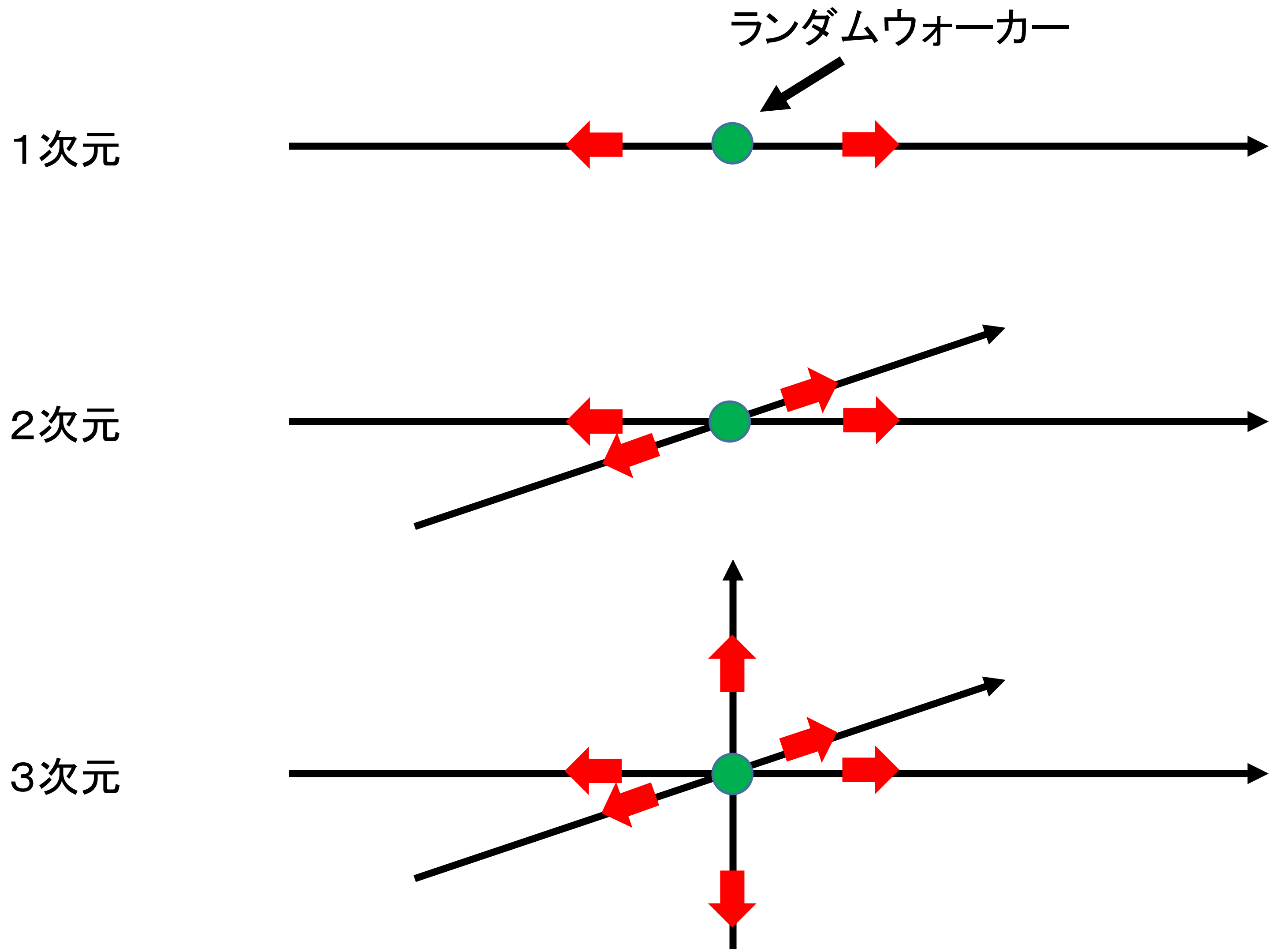
r	3

n	rand1	rand2	r	x	y
1	0.64579	0.61366	2.03292	-1.5362	-1.3315
グラフ エリア	0.67562	0.54042	2.10064	-3.5695	-1.8592
3	0.56817	0.7106	1.86675	-4.0268	-3.6691
4	0.67301	0.67153	2.09464	-5.0183	-5.5142
5	0.10849	0.76574	1.12659	-4.907	-6.6353
6	0.71128	0.54851	2.18457	-6.9909	-7.2909
7	0.01612	0.7871	1.01786	-6.7557	-8.2812
8	0.92176	0.73385	2.75291	-7.0346	-11.02
9	0.51972	0.68583	1.76999	-7.729	-12.648
10	0.96906	0.51937	2.89975	-10.607	-13
11	0.5413	0.38218	1.81245	-11.945	-11.778
12	0.33027	0.6262	1.43741	-12.954	-12.802
13	0.61239	0.36254	1.95968	-14.227	-11.312
14	0.56384	0.06881	1.85789	-12.54	-10.533
15	0.03591	0.83469	1.04023	-12.012	-11.43
16	0.08622	0.1333	1.09936	-11.277	-10.613
17	0.75993	0.42939	2.30452	-13.358	-9.6237
18	0.32518	0.40223	1.42939	-14.526	-8.7998
19	0.41248	0.42746	1.57327	-15.939	-8.1073
20	0.3332	0.47006	1.44203	-17.355	-7.8376
21	0.66995	0.8984	2.08761	-15.679	-9.0816
22	0.81536	0.03837	2.44922	-13.301	-8.4968
23	0.06368	0.22583	1.07247	-13.138	-7.4367
24	0.95045	0.91325	2.84107	-10.709	-8.9097
25	0.2975	0.46782	1.38657	-12.067	-8.6312
26	0.15197	0.25827	1.1817	-12.129	-7.4511
27	0.74099	0.71008	2.25704	-12.689	-9.6375
28	0.22826	0.47914	1.28502	-13.963	-9.4696
29	0.69275	0.46288	2.14054	-16.045	-8.9749
30	0.14103	0.47615	1.16758	-17.2	-8.8006



Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

様々な次元のランダム・ウォーク



Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

様々な次元のランダム・ウォーク

ランダム・ウォークの再帰性問題

ランダムウォーカーが元の位置に戻ってくるだろうか？

事実

１次元、２次元のランダム・ウォークに関しては再帰性があり、３次元以上の場合、再帰性はない。

１、２次元のランダムウォークは100％の確率で元の場所に戻ってくる（**再帰性**）。

３次元の場合、100％ではない（必ずしも戻ってくるとは限らない）。　**約34％**

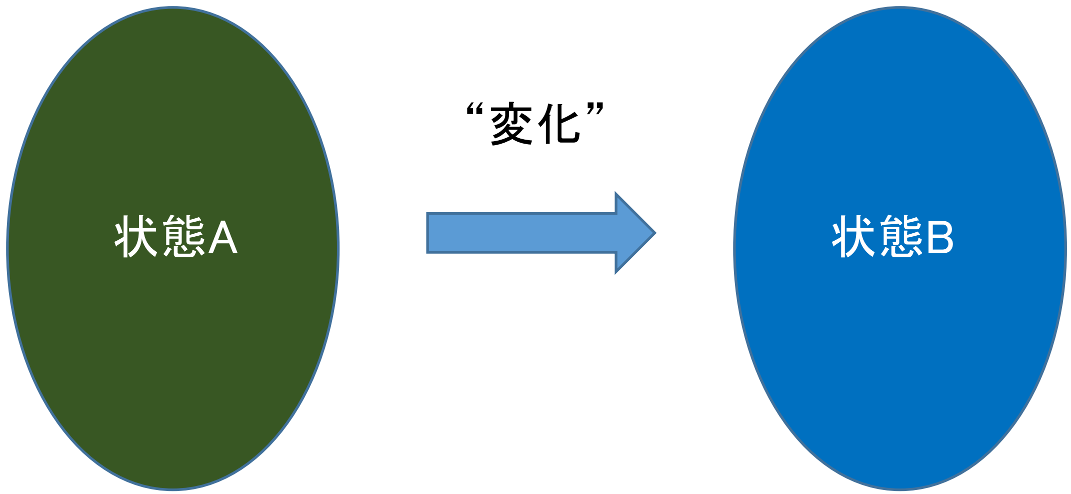
Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

カオス現象

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

状態変化と力学系

「力学系(Dynamical System)」



例:時間による変化

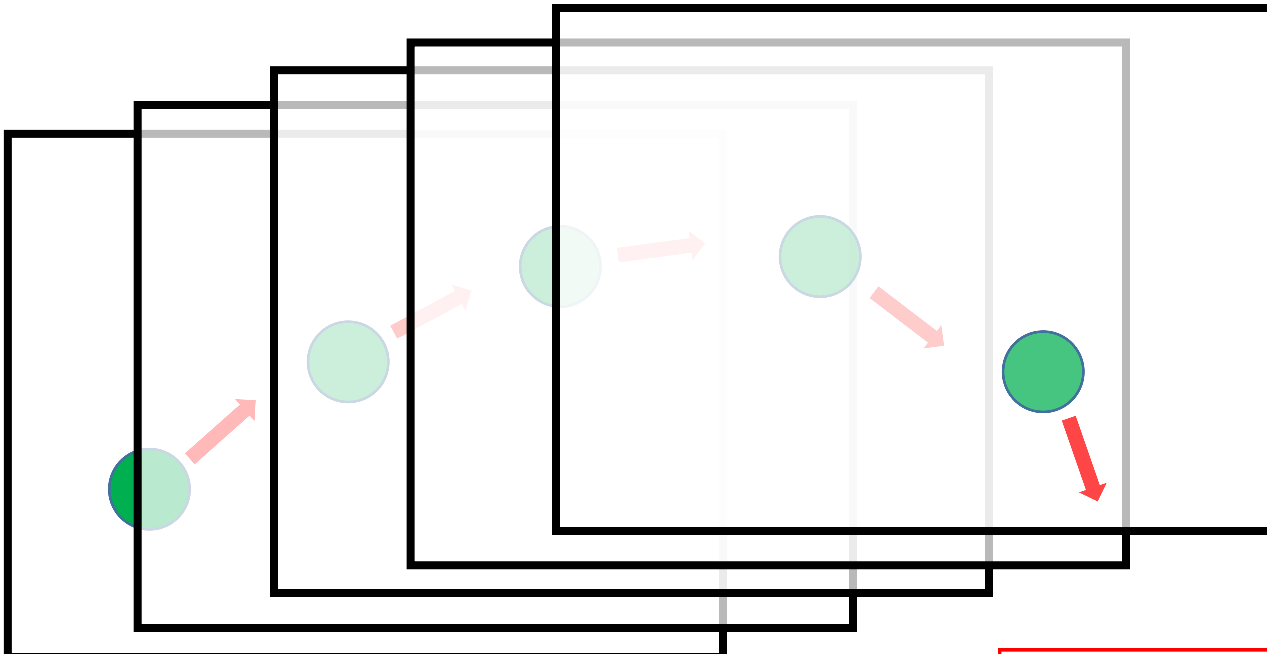
投げたボールの
時刻Aにおける位置

投げたボールの
時刻Bにおける位置

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

状態変化と力学系

「力学系(Dynamical System)」



投げたボールの位置

数学・物理

初期状態がわかれば、指定された時刻におけるボールの位置を割り出すことができる

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

状態変化と力学系

「力学系(Dynamical System)」

初期状態がわかれば、数式でどんな
状態でも決定することができる！

↓

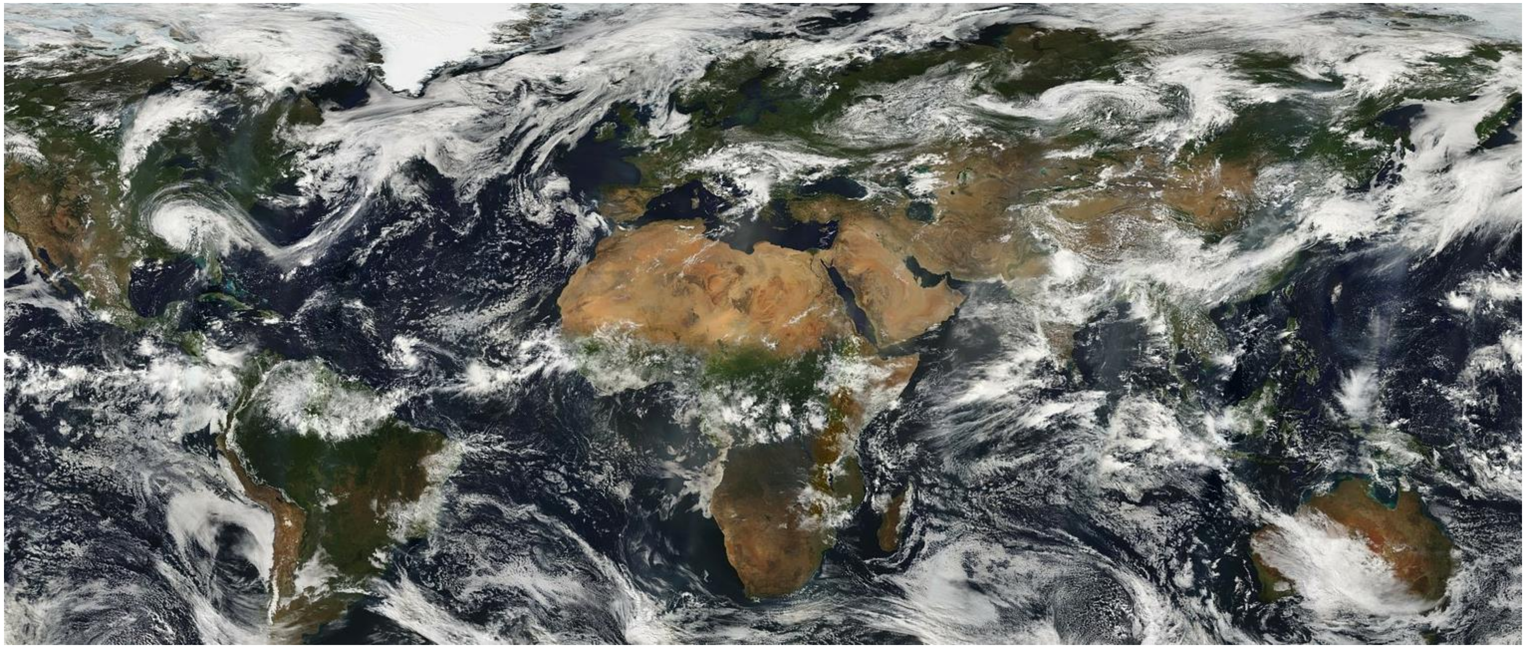
決定論的力学系

本当にできるのか？

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

複雑な状態変化

気象

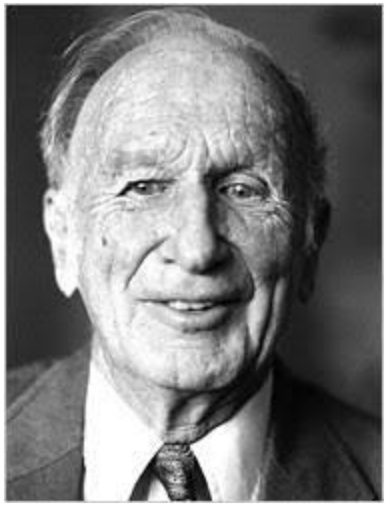


わずかな条件の違い（山頂・海水の温度、風の向き、火山活動など）により、天候は複雑な変化をみせる。

天気予報の困難さ

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

カオスの登場



エドワード・ローレンツ
1917～2008
気象学者

気象モデルの研究により、複雑すぎる挙動を発見

少し値を変えただけで全く予想がつかない動きをする

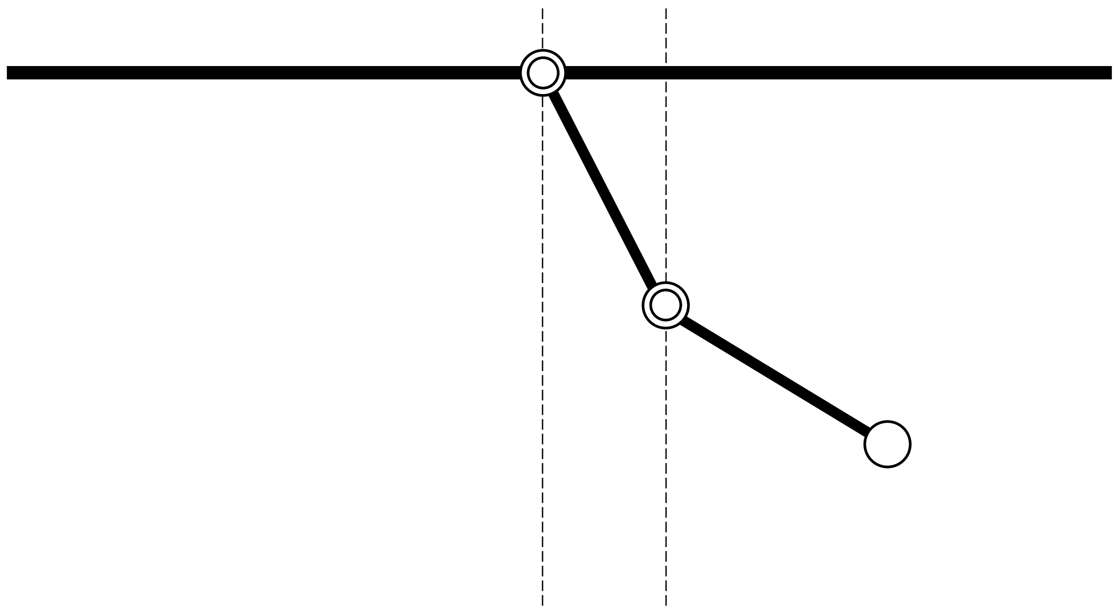
“バタフライ効果”

「*Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?*」

「ブラジルの1匹の蝶の羽ばたきがテキサスで竜巻を引き起こす？」

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

複雑な力学系の例



身近な例：２重振り子

https://www.youtube.com/watch?v=25feOUNQB2Y

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

カオスとは

ジェームズ・A・ヨーク
1941～

リー・ティエンイエン
1945～2020

1975年の論文「Period three implies chaos」において、
「カオス」の数学的な定義が導入された。

その後、ロバート・デバニーによって定義が整備された。

位相的(直感的)なカオスの定義

① 初期値鋭敏依存性(初期値により大きく結末が変わる)

② 位相的推移性(変化によりどんな値もとる)

③ 周期点の稠密性(周期的なふるまいをする点はたくさんある)

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ロジスティック写像

0~4 までの定数

$$X_{n+1} = aX_n(1 - X_n)$$

$n+1$番目の数　　n番目の数

生物の個体数が世代を重ねることでどう変化していくかを表すモデル

初期値X_1と定数aを定め、X_nがどのような結末を迎えるのかを観察する。

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ロジスティック写像

0~4 までの定数

$$X_{n+1} = aX_n(1 - X_n)$$

$n+1$番目の数　　n番目の数

例 : $a = 0.5$, 初期値 $X_1 = 0.5$

$$X_2 = 0.5X_1(1 - X_1) = 0.5 \times 0.5 \times (1 - 0.5) = 0.125$$

$$X_3 = 0.5X_2(1 - X_2) = 0.5 \times 0.125 \times (1 - 0.125) = 0.0546875$$

$$X_{30} = 3.66 \times 10^{10}$$

0 に近づく

実は初期値をどんな値にしても0に近づく！

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ロジスティック写像

0~4 までの定数

$$X_{n+1} = aX_n(1 - X_n)$$

$n+1$番目の数　　n番目の数

例 : $a = 2.5$, 初期値 $X_1 = 0.5$

$$X_2 = 2.5X_1(1 - X_1) = 2.5 \times 0.5 \times (1 - 0.5) = 0.625$$

$$X_3 = 2.5X_2(1 - X_2) = 2.5 \times 0.625 \times (1 - 0.625) = 0.5859375$$

$$X_{30} = 0.6$$

0.6 に近づく

実は初期値をどんな値にしても0.6に近づく！

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ロジスティック写像

0~4 までの定数

$$X_{n+1} = aX_n(1 - X_n)$$

$n+1$番目の数

n番目の数

例 : $a = 0.5$ ➡ **初期値によらず、結末は0**

例 : $a = 2.5$ ➡ **初期値によらず、結末は0.6**

例 : $a = 1.5$ ➡ **初期値によらず、結末は0.333333**

例 : $a = 2.8$ ➡ **初期値によらず、結末は0.642857**

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ロジスティック写像

0~4 までの定数

$$X_{n+1} = aX_n(1 - X_n)$$

$n+1$番目の数

n番目の数

実はaの値が3を超えた途端に結末が2つに分かれる。

例 : $a = 3.3$ ➡ 初期値によらず、結末は $\begin{cases} 0.479427019824234 \\ 0.823603283206069 \end{cases}$

例 : $a = 3.4$ ➡ 初期値によらず、結末は $\begin{cases} 0.451962927917861 \\ 0.842154294999636 \end{cases}$

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ロジスティック写像

0~4 までの定数

$$X_{n+1} = aX_n(1 - X_n)$$

$n+1$番目の数

n番目の数

aの値が3.4494…($=1+\sqrt{6}$)を超えた途端に結末が**4つ**に分かれる。

➡ 結末が**8つ**に分かれる。 ➡ 結末が**16つ**に分かれる。 …

aの値が3.56995 を超えると急激に複雑化する

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

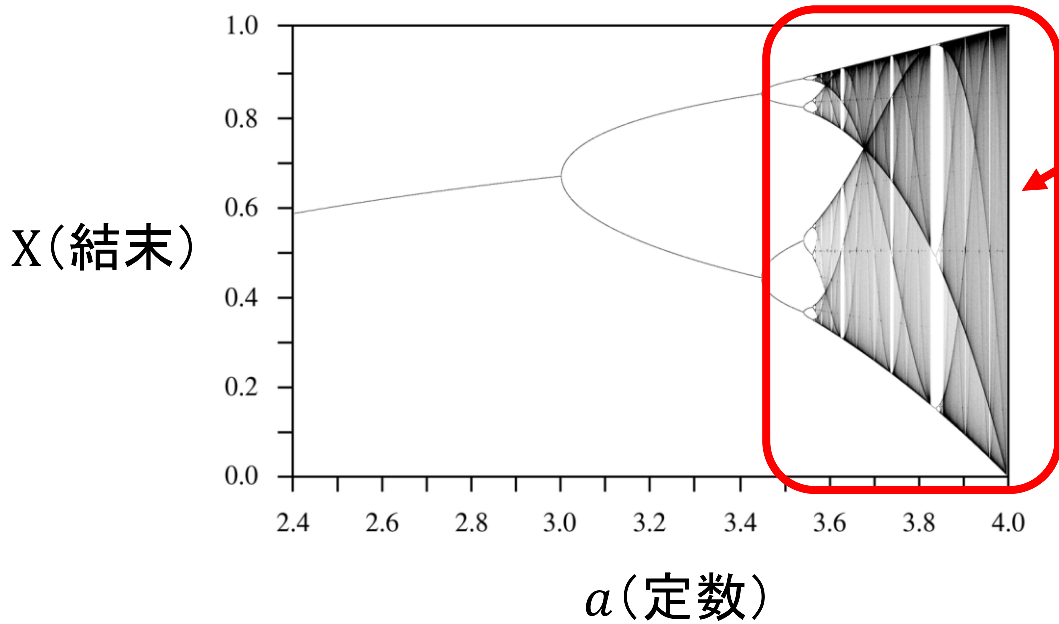
ロジスティック写像

0~4 までの定数

$$X_{n+1} = aX_n(1 - X_n)$$

$n+1$番目の数

n番目の数

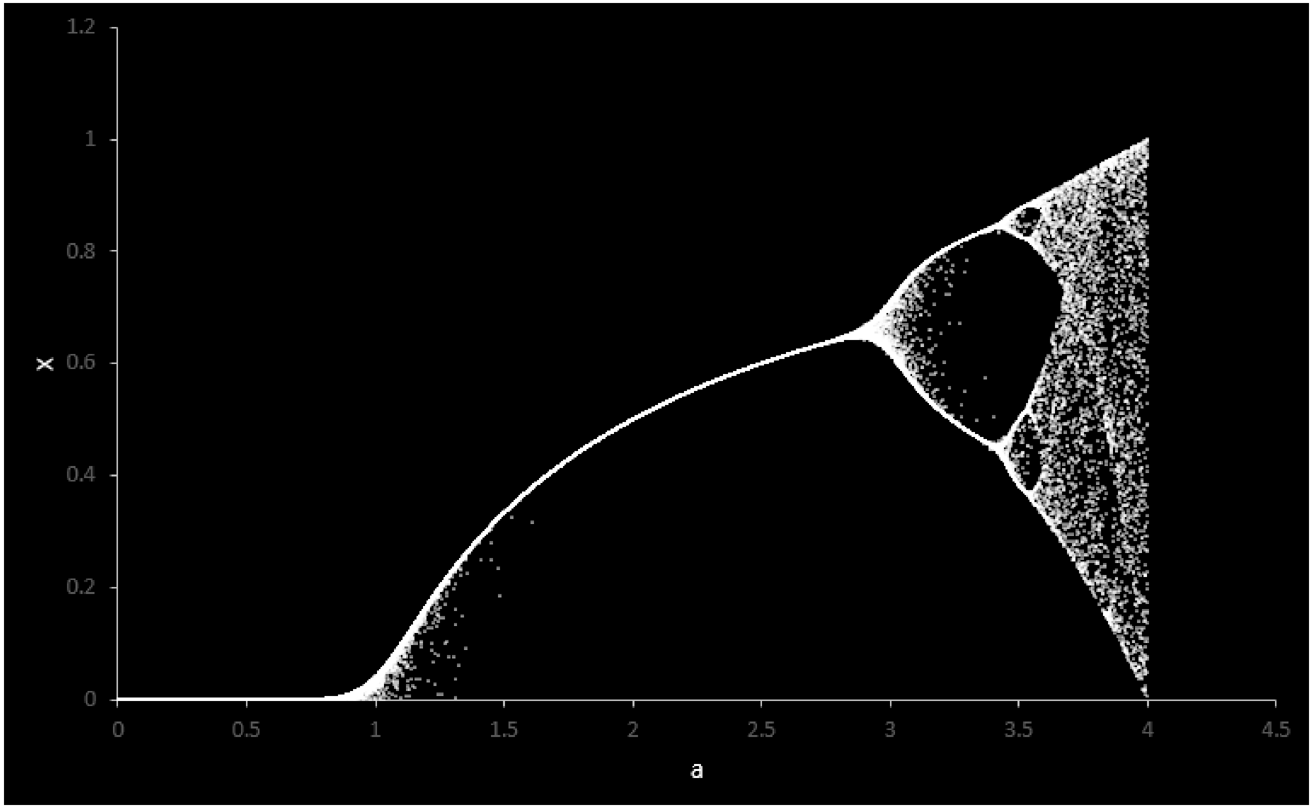


初期値によって結末が大きく変わってくる

“カオス現象”

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

付録２（ロジスティック写像）



Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

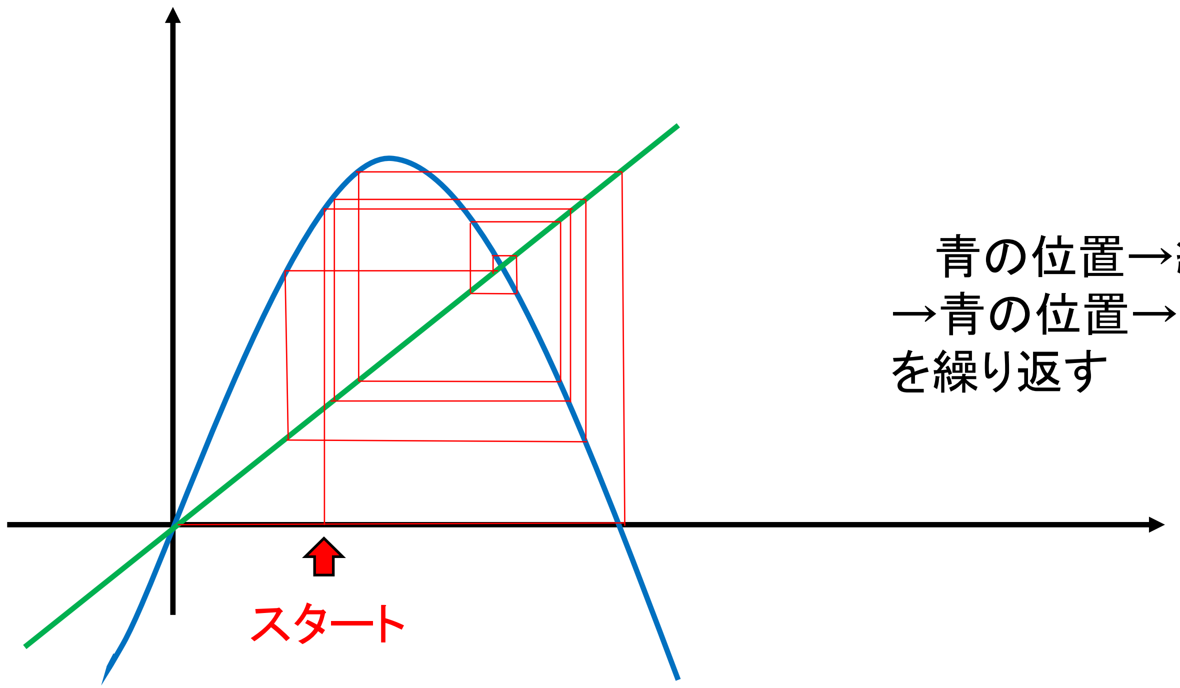
アトラクター

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

アトラクター

アトラクター

力学系の時間発展の集合　＝　状態変化の様子を描いたもの



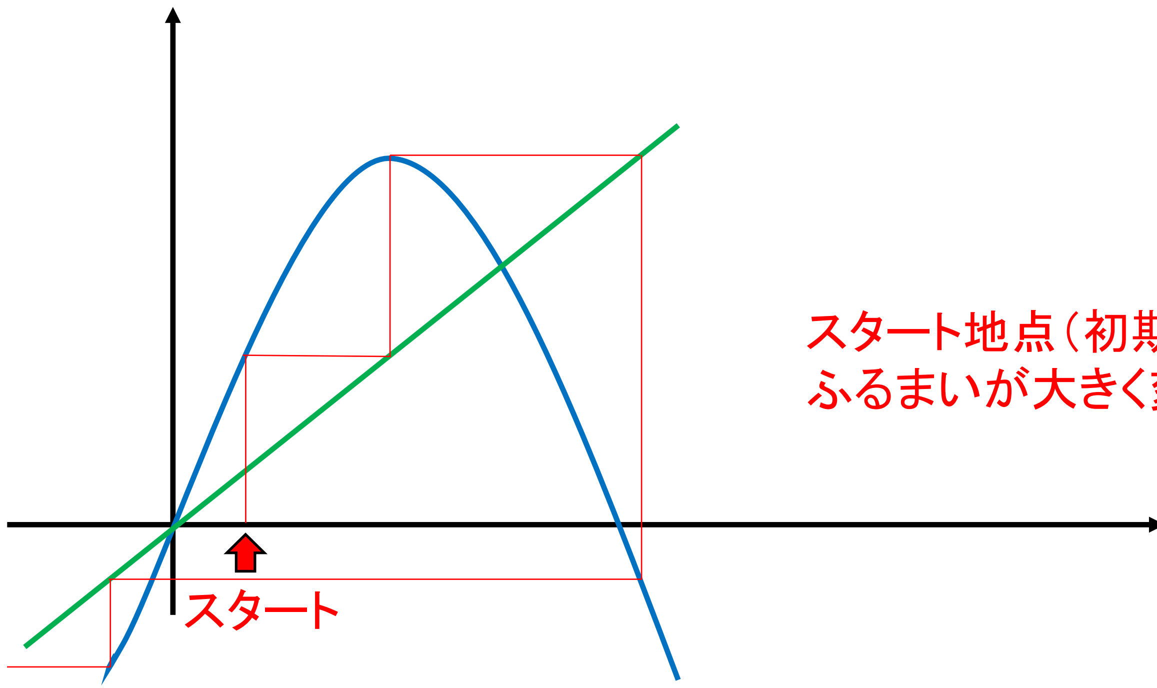
青の位置→緑の位置
→青の位置→緑の位置→･･･
を繰り返す

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

アトラクター

アトラクター

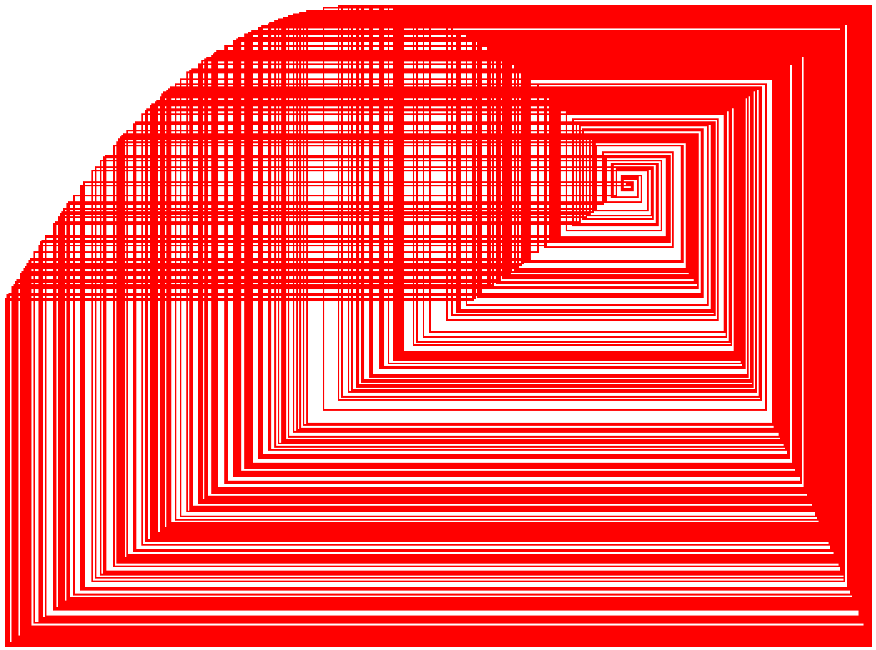
力学系の時間発展の集合　＝　状態変化の様子を描いたもの



スタート地点（初期値）によって、
ふるまいが大きく変わる

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

付録３（アトラクター）



初期値と係数aによって大きく様子が変わる。

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

アトラクター

アトラクター

力学系の時間発展の集合　＝　状態変化の様子を描いたもの

カオス的なふるまいを持つアトラクターを「**ストレンジアトラクター**」という。

初期値によって大きく値が変わるような関数
を使ってアトラクターを描いてみる

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

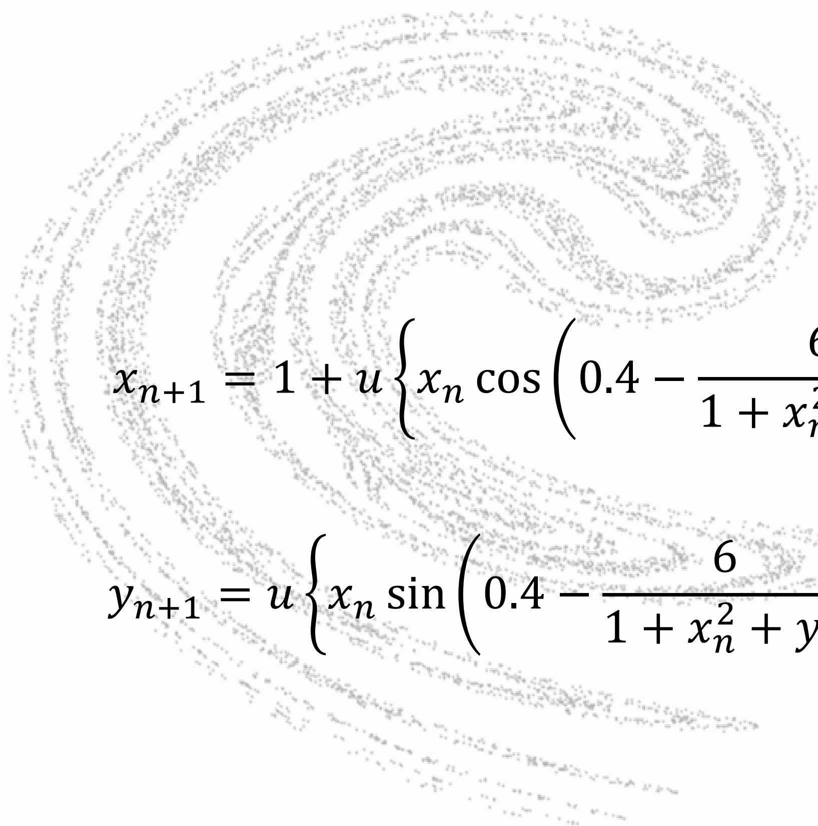
ストレンジアトラクター

例：池田写像

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

ストレンジアトラクター

例：池田写像



$$x_{n+1} = 1 + u\left\{x_n \cos\left(0.4 - \frac{6}{1 + x_n^2 + y_n^2}\right) - y_n \sin\left(0.4 - \frac{6}{1 + x_n^2 + y_n^2}\right)\right\}$$

$$y_{n+1} = u\left\{x_n \sin\left(0.4 - \frac{6}{1 + x_n^2 + y_n^2}\right) + y_n \cos\left(0.4 - \frac{6}{1 + x_n^2 + y_n^2}\right)\right\}$$

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

演習問題４（池田写像）

演習問題４

池田写像を使って、アトラクターを描いてみましょう。

n	x	y
1	0	0
2	1	0
3		
4		
5		
6		

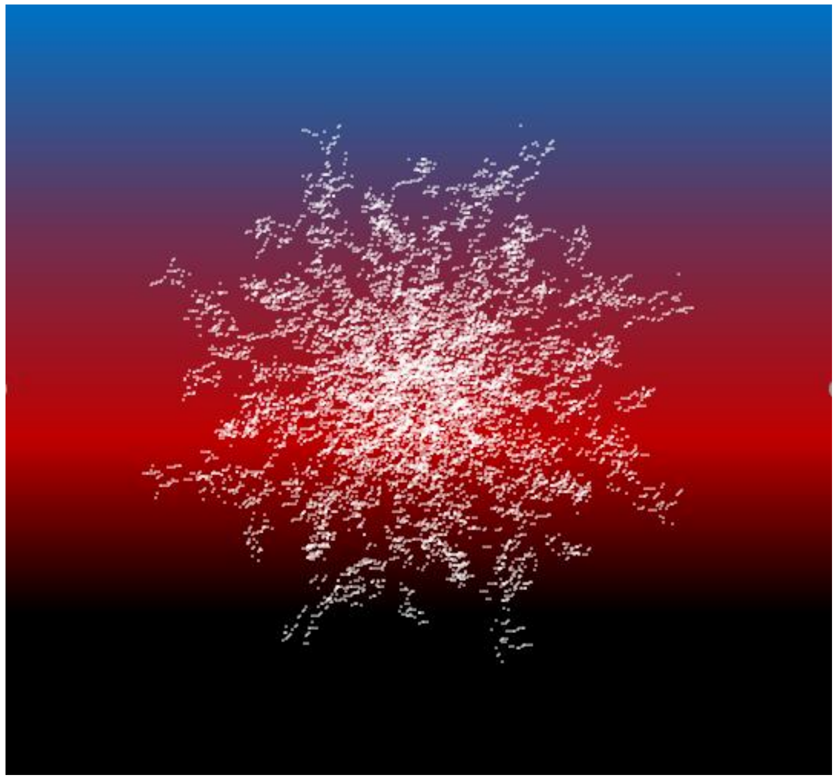
u	0.9

① 関数を確認し、下までコピー

② 散布図を作成

Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.

付録４（カオスを描く（オリジナル））



Copyright © 2020 Wakara Corp. All Rights Reserved.