

**针对问题一**，我们构建了**阿基米德螺线**和**龙头运动学模型**来分别模拟板凳龙的运动轨迹和龙头的运动过程。首先，本文将盘入螺线转换为**极坐标方程，**根据题目中的已知条件将阿基米德螺线方程参数化，得到可用于求解微分的阿基米德螺线方程。紧接着，采用积分的方法建立起龙头前把手所处位置与速度和时间的关系，得到其每个时刻前把手的坐标。在数值求解方面，本文采用时间**离散化方法，**通过迭代计算获得了龙头前把手在时间点上的精确位置，逐步推导出相应把手在相应时刻的空间坐标。最后，本文根据板凳龙的**几何关系**，递推出其余把手在对应时刻的位置，并将结果储存至指定的文件。

对于问题一，首先，我们首先建立了极坐标方程系，因为螺旋线的半径会随着极角的增大而不断增大，符合极坐标的极径-极角系统，故我们选用极坐标来对该问题进行求解，在实际求解时，利用极坐标和二维坐标的关系来实现坐标系的转换。由于龙头前把手沿盘入螺线的行进速度恒定，可以结合已经建立起的极坐标方程，采用微积分的方式去确定其某段时间内走过的路径长度与走过的角度关系（极角随时间变化的方程），进而可以得到龙头前把手在极坐标下每一时刻的位置坐标。

由题目已知条件，同一板凳的前后把手中心沿板凳中心所在直线的速度是一样的，即前后把手沿板凳方向上的速度分量是相同的。利用这一几何特性，本文通过几何方法得到前后把手中心速度方向与板凳中心所在直线的夹角，当我们得到了同一板凳上前后把手中心的速度关系式，就可以由龙头前把手中心的速度递推出所有剩余把手的速度（其中要注意龙头、龙身、龙尾在集合形态上的区别），进而就可以建立起由前把手中心速度得到后把手中心速度的迭代公式。

# **5.1 问题一模型的建立与求解**

# **5.1.1 螺线方程**

我们首先建立了极坐标系来描述龙盘入螺线的运动轨迹。选择极坐标系的依据在于螺旋线的几何特性——其半径随着极角的增大而单调递增，这与极坐标中极径随极角变化的特性高度吻合。在具体实现时，我们通过极坐标与二维直角坐标的转换关系（x=rcosθ,y=rsinθ）来实现坐标系的灵活转换。

等距螺线的极坐标方程

其中，r为极径；为极角；a和b均为实数，由题意可知a=0。

螺距p的大小可表示为：

结合以上分析，得到

将极坐标转换为直角公式

这样，就可以计算出舞龙队在平面上任意角度下的具体位置。

# **5.1.2 求解龙头前把手的位置**

# 在极坐标下，一个点的位置与其和圆心的夹角（极角）至关重要，故我们想要得到龙头前把手在极坐标下的位置，必须要求解龙头前把手的极角随时间变化的关系。由于龙头前把手位于螺线之上，且沿着螺线运动，故其运动的轨迹是某一段螺线，我们可以采用积分的方式得到运动距离。由于龙头前把手的行进速度已知，故可以建立等式求出各个时刻该把手的位置。

# 由于d极小，dl我们可以近似看成线段，那么图中的扇形可以近似为一个三角形，我们再使用余弦定理对其进行判断可得：

# 其中，b为该螺线的螺线系数

# 由速度与角速度的关系：

# 联立可得（角速度）：

# 对螺线在一段角度下的积分可得：

# 通过已知的时间t，我们便可以得到对应的极角，进而就可以得到对应的极坐标，将极坐标与二维坐标进行转换便可以得到龙头前把手的二维坐标。

# **5.1.3 建立位置迭代公式**

# 我们假设所求得的龙头前把手t=t0时刻的坐标为（x0，y0），本文将通过板凳前后把手的几何关系来建立一个位置迭代公式。

# 假设在某一时刻下，某一板凳，其前后把手中心距离为l，前把手中心的坐标为（x1，y1）极角=1，极径ρ=ρ1，后把手中心的坐标为（x2，y2），极角=2，极径ρ=ρ2，我们采用极限的思想，两把手的中心所处的弧线距离近似等于两把手之间的实际距离l。在这种假设下，我们便可以将一段圆弧近似为一个等腰三角形，我们分别使用圆弧和余弦定理来求得l并联立，便可以得到后把手中心的极径和角，进而建立位置迭代公式。

# 根据螺线方程，其极径应满足方程：

# 在所构成三角形中，再通过余弦定理可得：

联立等式，即可得到后把手中心坐标

# **5.1.4 建立速度迭代公式**

# 速度迭代公式建立的关键点在于，同一板凳上前后把手中心沿板凳前后把手中心的速度是一样的，我们利用这一速度关联来建立速度迭代公式：

某一板凳，已知其前把手中心位置坐标为(x1，y1)，行过线在该点的切线斜率为k1，行进速度为v1。由螺线极坐标方程，可以得到k1为:

由上述迭代公式可以得到后把手中心B坐标为(x2，y2)，行过线在该点的切线斜率为k2，行进速度为v2。由螺线极坐标方程，可以得到k2为:

# 设螺线在点A、B处的切线与A、B所在直线的夹角分别为α、β。由点A、点B的坐标可以得到A、B所在直线的斜率k为：

# 从而可得到，α，β：

# 最后利用几何关系建立速度迭代公式：

# 通过已知把手的速度和迭代公式，便可以得到其余把手的速度