수학 및 연습 2
내용 요약

이재호

jaeho.lee@snu.ac.kr

마지막 수정: 2018년 10월 19일

10 다변수함수

10.1 그래프와 등위면

10.1.1 다변수함수

정의 10.1.1.1. n-공간의 부분집합 U에서 정의된 함수

$$f : U \to \mathbb{R}$$

가 주어졌다고 하자. 즉, U의 각 점 $X = (x_1, \ldots, x_n)$에 대하여 실수 $f(X) = f(x_1, \ldots, x_n)$이 대응된다고 하자. 이때 함수 f를 n변수함수라 하고, $n \geq 2$이면 다변수함수라고도 한다.

10.1.2 함수와 그래프

정의 10.1.2.1. n-공간의 부분집합 U에서 정의된 다변수함수 f의 그래프는

$$\{(x_1, \ldots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in U,\ z = f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

으로 정의한다.

10.1.3 일차함수의 기울기

정의 10.1.3.1. 이변수 일차함수 $z = ax + by + c$의 기울기는 기울기 벡터

$$(a, b) = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$$

로 나타낸다.

정리 10.1.3.1. *단위벡터* $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ *에 대하여, 일차함수*

$$z = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + c = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + c$$

의 $\boldsymbol{v}$*-방향 기울기는*

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

이다.

증명. 일차함수 z 의 $\boldsymbol{v}$-방향 기울기는

$$\frac{z(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) - z(\boldsymbol{x})}{t} = \frac{(\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) + c) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + c)}{t} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}$$

이다. □

10.1.4 등위면

정의 10.1.4.1. n-공간의 한 부분집합 U 에서 정의된 다변수함수 $f : U \to \mathbb{R}$ 와 실수 c 에 대하여, f 에 대한 c 의 역상(inverse image)

$$f^{-1}(c) := \{X \in U \mid f(X) = c\}$$

를 f 의 c-등위면(level surface) 또는 c-등가면이라고 부른다. 즉, 등위면은 함숫값이 같은 점들의 모임이다.

10.2 연속함수

정의 10.2.0.1. n-공간의 부분집합 U 에서 정의된 함수 $f : U \to \mathbb{R}$ 와 U 의 한 점 P 에 대하여

$$\lim_{X \to P} f(X) = f(P)$$

일 때, f 는 점 P 에서 연속이라고 정의한다. 달리 쓰면,

$$\lim_{X \to P} |f(X) - f(P)| = 0$$

이다.

10.2.1 연속함수

정의 10.2.1.1. 함수 $f : U \to \mathbb{R}$ 가 정의역 U 의 모든 점에서 연속이면, f 를 연속함수라고 한다.

10.2.2 최대최소 정리

10.2.2.1 유계인 닫힌 집합

정의 10.2.2.1. 양수 r에 대하여 n-공간의 한 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 열린 공(open ball)은

$$\mathbb{B}^n(P, r) := \{X \in \mathbb{R}^n \mid |X - P| < r\}$$

를 뜻한다. 또 n-공간의 한 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 닫힌 공(closed ball)은

$$\overline{\mathbb{B}}^n(P, r) := \{X \in \mathbb{R}^n \mid |X - P| \le r\}$$

를 뜻한다.

열린 공 또는 닫힌 공을 그냥 공이라고 하고, 1차원 공은 구간, 2차원 공은 원판이다.

정의 10.2.2.2. n-공간의 부분 집합 U가 유계(bounded)라는 것은 U를 포함하는 공이 존재한다는 뜻이다. 이는 함수

$$U \to \mathbb{R}, \quad X \mapsto |X|$$

가 유계 함수라는 것과 동치이다.

정의 10.2.2.3. n-공간에서 경계를 포함하는 부분집합을 닫힌 집합이라고 부른다.

정리 10.2.2.1 (최대최소 정리). *n-공간의 유계인 닫힌 집합에서 정의된 연속함수는 최댓값과 최솟값을 가진다.*

10.3 방향미분과 편미분

정의 10.3.0.1. n-공간의 열린 집합 U에서 정의된 함수 $f : U \to \mathbb{R}$와 U의 한 점 P 및 벡터 $\boldsymbol{v}$에 대하여, 극한값

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(P) := \lim_{t \to 0} \frac{f(P + t\boldsymbol{v}) - f(P)}{t} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f(P + t\boldsymbol{v})$$

가 존재하면 이 값을 점 P에서 f의 $\boldsymbol{v}$-방향미분계수 또는 $\boldsymbol{v}$-방향 순간변화율이라고 한다. 단위벡터 $\boldsymbol{v}$에 대하여 $\boldsymbol{v}$-방향미분계수의 기하학적 의미는 함수 f의 그래프를 직선 $P + t\boldsymbol{v}$ 위에 한정하여 그렸을 때, 점 $(P, f(P))$에서 f의 그래프의 기울기를 뜻한다.

10.3.1 편도함수

정의 10.3.1.1. n-공간의 표준단위벡터는

$$\boldsymbol{e}_1 := (1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_n := (0, 0, \ldots, 1)$$

을 말한다.

정의 10.3.1.2. 점 $P = (p_1, \ldots, p_n)$ 에서 함수 $f : U \to \mathbb{R}$ 의 $\boldsymbol{e}_k$-방향미분계수 $\mathrm{D}_{\boldsymbol{e}_k} f(P)$ 를 단순히

$$\mathrm{D}_k f(P)$$

로 쓰고, 점 P 에서의 f 의 k 번째 편미분계수라고 한다. 좌표의 성분을 써서 표시하면,

$$\mathrm{D}_k f(P) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f(p_1, \ldots, p_k + t, \ldots, p_n)$$

이다. 이 값은 $P = (p_1, \ldots, p_n)$ 의 k 번째 성분만 변화시켜 얻은 변화율이다. 이런 뜻에서 $\mathrm{D}_k f(P)$ 를 $\frac{\partial f}{\partial x_k}(P)$ 로 쓰기도 한다:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} := \mathrm{D}_k f.$$

함수 f 의 k 번째 편미분계수 $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ 는 k 번째 성분만을 변수로 하고, 나머지 변수는 상수로 보았을 때 얻은 미분계수이다.

정의 10.3.1.3. 함수 f 가 정의역 U 의 모든 점에 대하여 k 번째 편미분계수를 가지면 함수

$$\mathrm{D}_k f : U \to \mathbb{R}, \quad P \mapsto \mathrm{D}_k f(P)$$

를 f 의 k 번째 편도함수라고 한다.

10.3.2 기울기 벡터

정의 10.3.2.1. n 변수함수 f 의 모든 편미분계수가 점 P 에서 존재할 때, f 는 점 P 에서 편미분가능하다고 한다. 이때 벡터

$$\operatorname{grad} f(P) := (\mathrm{D}_1 f(P), \ldots, \mathrm{D}_n f(P))$$

를 P 에서 f 의 그레이디언트 벡터 (gradient vector) 또는 기울기 벡터라고 한다.

일변수함수 $f(x)$ 의 그래프에서 접선의 기울기가 바로 $f'(x)$ 이듯이, 다변수함수 $f(X)$ 의 그래프에서 "접평면"의 기울기 벡터가 바로 $\operatorname{grad} f(P)$ 이다.

grad f 를 ∇f 로 쓰기도 한다. 즉

$$\nabla = (\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

이다.

10.4 미분가능함수

정의 10.4.0.1. n-공간의 원점 근방에서 정의된 두 함수 $g(\boldsymbol{v})$, $h(\boldsymbol{v})$ 에 대하여

$$g(\boldsymbol{v}) = o(h(\boldsymbol{v}))$$

라는 것은 다음을 뜻한다:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \quad \big(0 < |\boldsymbol{v}| < \delta \Rightarrow |g(\boldsymbol{v})| \leq \epsilon |h(\boldsymbol{v})|\big)$$

정의 10.4.0.2. n-공간의 열린 집합 U 에서 정의된 함수 $f : U \to \mathbb{R}$ 와 U 의 점 P 에 대하여

$$\lim_{\boldsymbol{v} \to \mathbf{0}} \frac{|f(P + \boldsymbol{v}) - f(P) - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|} = 0, \tag{1}$$

즉

$$f(P + \boldsymbol{v}) = f(P) + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} + o(\boldsymbol{v}) \tag{2}$$

를 만족시키는 벡터 $\boldsymbol{a}$ 가 존재하면 f 는 점 P 에서 미분가능하다고 한다.

만약 f 가 정의역의 모든 점에서 미분가능하면 f 는 미분가능하다고 한다.

정리 10.4.0.1. *n-공간의 열린 집합 U 에서 정의된 함수 $f : U \to \mathbb{R}$ 가 점 $P \in U$ 에서 미분가능하면*

1. *f 는 점 P 에서 연속이다.*

2. *f 는 점 P 에서 모든 방향의 방향미분계수를 가지고*

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(P) = \operatorname{grad} f(P) \cdot \boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

이다.

3. *식 1을 만족시키는 벡터 $\boldsymbol{a}$ 는* grad $f(P)$ *이다.*

증명. 1. 식 2에서

$$\lim_{\boldsymbol{v} \to \mathbf{0}} f(P + \boldsymbol{v}) = \lim_{\boldsymbol{v} \to \mathbf{0}} \big(f(P) + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} + o(\boldsymbol{v})\big) = f(P)$$

이다.

2, 3. 식 1에 의하면, 어떤 벡터 $\boldsymbol{v}$에 대하여

$$\lim_{|t\boldsymbol{v}|\to 0} \frac{|f(P+t\boldsymbol{v}) - f(P) - \boldsymbol{a}\cdot t\boldsymbol{v}|}{|t\boldsymbol{v}|} = 0$$

을 만족한다. 즉,

$$\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\lim_{t\to 0} \frac{f(P+t\boldsymbol{v}) - f(P) - \boldsymbol{a}\cdot t\boldsymbol{v}}{t} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\lim_{t\to 0} \frac{f(P+t\boldsymbol{v}) - f(P)}{t} - \boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = 0$$

이다. 따라서 방향미분 $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f(P)$가 존재하고

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f(P) = \lim_{t\to 0}\frac{f(P+t\boldsymbol{v}) - f(P)}{t} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}$$

이다.

이제 $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$으로 두면

$$\mathrm{D}_i f(P) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{e}_i} f(P) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i = a_i$$

이고

$$\operatorname{grad} f(P) = \big(\mathrm{D}_1 f(P), \ldots, \mathrm{D}_n f(P)\big) = (a_1, \ldots, a_n) = \boldsymbol{a}$$

이다. 따라서

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f(P) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} f(P)\cdot\boldsymbol{v}$$

이다. $\square$

따라서, 함수 f가 점 P에서 미분가능할 필요충분조건은

1. $\operatorname{grad} f(P)$가 존재하고
2. $f(P+\boldsymbol{v}) - f(P) = \operatorname{grad} f(P)\cdot\boldsymbol{v} + o(\boldsymbol{v})$

인 것이다. 따라서 기울기 벡터 $\operatorname{grad} f(P)$를 점 P에서 f의 미분계수라고 하고, $f'(P)$ 또는 $\mathrm{D}f(P)$로 쓰기도 한다.

10.4.1 기울기 벡터와 함수의 변화율

정리 10.4.0.1에서 $\boldsymbol{v}$가 단위벡터이고, $\boldsymbol{v}$와 $\operatorname{grad} f(P)$가 이루는 각의 크기가 θ라면,

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f(P) = \operatorname{grad} f(P)\cdot\boldsymbol{v} = |\operatorname{grad} f(P)|\cos\theta$$

이므로, $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(P)$가 최대가 되는 단위벡터 $\boldsymbol{v}$는 $\cos\theta = 1$인 벡터, 즉 $\operatorname{grad} f(P)$와 같은 방향의 단위벡터이다. 이때 $\operatorname{grad} f(P)$의 크기가 $\boldsymbol{v}$-방향 변화율이다. 이러한 원리에서 $\operatorname{grad} f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)\right)$는 좌표계의 선택과 무관함을 알 수 있다. 또 $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(P)$가 최소가 되는 단위벡터 $\boldsymbol{v}$는 $\cos\theta = -1$인 벡터, 즉 $\boldsymbol{v}$가 $-\operatorname{grad} f(P)$와 같은 방향의 단위벡터임을 안다. 같은 이유에서 $\operatorname{grad} f(P)$와 수직인 방향으로의 순간변화율은 0이다.

10.4.2 일급미분가능함수

정의 10.4.2.1. n-공간의 한 열린 집합에서 정의된 함수 $f(x_1, \ldots, x_n)$의 각 편도함수

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

이 모두 연속함수이면, f를 일급함수 또는 $\mathcal{C}^1$ 함수라고 한다.

정리 10.4.2.1. *n-공간의 열린 집합에서 정의된 일급함수는 미분가능 함수이다.*

10.5 연쇄법칙

정리 10.5.0.1 (연쇄법칙)**.** *n-공간의 열린 집합 U에서 정의된 미분가능한 함수 f와 구간 I에서 정의된 미분가능한 곡선 $X : I \to U$에 대하여 다음이 성립한다:*

$$\forall t \in I \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(X(t)) = \operatorname{grad} f(X(t)) \cdot X'(t)$$

증명. 먼저 $t \in I$를 고정하면, 절댓값이 아주 작은 실수 Δt에 대하여

$$\begin{aligned}
&f\big(X(t+\Delta t)\big) - f\big(X(t)\big) \\
&= \operatorname{grad} f\big(X(t)\big) \cdot \big(X(t+\Delta t) - X(t)\big) + o(|X(t+\Delta t) - X(t)|) \\
&= \operatorname{grad} f\big(X(t)\big) \cdot \big(X'(t)\Delta t + o(\Delta t)\big) + o(\Delta t) \\
&= \operatorname{grad} f\big(X(t)\big) \cdot X'(t)\Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned}$$

이므로 원하는 결론을 얻는다. □

연쇄법칙을 좌표의 성분을 써서 표현하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$$

이다. 만약 $X = (x_1, \ldots, x_n)$가 두 개의 변수 s, t에 의존하면, 연쇄법칙은

$$\frac{\partial}{\partial s} f\big(x_1(s,t), \ldots, x_n(s,t)\big) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial s}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} f\big(x_1(s,t), \ldots, x_n(s,t)\big) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t}$$

으로 표현된다.

10.6 기울기 벡터와 등위면

정리 10.6.0.1. *n-공간의 열린 집합 U에서 정의된 일급함수 f에 대하여 점 P에서 기울기 벡터 $\operatorname{grad} f(P)$는 점 P가 속하는 등위면 $S := \{X \in U \mid f(X) = f(P)\}$에 수직이다.*

증명. 점 P에서 등위면 S의 접평면은 P를 지나는 S 속의 곡선들의 접선들로 이루어져 있다. 다시 말하면 미분가능한 곡선

$$X : \mathbb{R} \to S, \qquad X(0) = P$$

에 대하여 속도벡터 $X'(0)$은 점 P에서 S의 접평면에 속하고, 역으로 접평면의 원소들은 모두 이러한 방법으로 얻어진다. 따라서 이러한 곡선 X에 대하여

$$\operatorname{grad} f(P) \cdot X'(0) = 0$$

그런데 $X(t) \in S$이므로 $f(X(t)) = f(P)$이다. 이를 t에 대하여 미분하면, 연쇄법칙 덕분에 $\operatorname{grad} f(X(t)) \cdot X'(t) = 0$임을 안다. 이제 $t = 0$을 대입하여 원하는 결론을 얻는다. □

11 최대최소 문제와 고계미분

11.1 적분기호 속의 미분법

정리 11.1.0.1 (라이프니츠 정리). *직사각형 $[a,b] \times [c,d]$에서 정의된 일급함수 $f(x,y)$에 대하여 등식*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y$$

11.2 이계미분

정의 11.2.0.1. n-공간의 열린집합 U에서 정의된 일급함수 f의 일계 편도함수

$$\mathrm{D}_1 f, \ldots, \mathrm{D}_n f : U \to \mathbb{R}$$

가 모두

1. 미분가능함수이면, f를 두번 미분가능한 함수
2. 일급함수이면, f를 이급함수 또는 $\mathcal{C}^2$ 함수

라고 한다. 물론 이급함수는 두번 미분가능한 함수이다.

이때 f는 점 $P \in U$에서 모두 n^2개의 이계 편미분계수

$$\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

를 가진다. $\mathrm{D}_i\mathrm{D}_i f$는 줄여서 $\mathrm{D}_i^2 f$로 쓰기로 한다.

정리 11.2.0.1 (편미분 교환법칙). *n-공간의 열린집합에서 정의된 이급함수 (혹은 단지 두번 미분가능한 함수) f와 정의역의 임의의 점 P에 대하여*

$$\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(P) = \mathrm{D}_j\mathrm{D}_i f(P) \qquad (1 \leq i, j \leq n)$$

이다.

증명. i번째 변수와 j번째 변수 사이의 관계를 조사하므로 이변수함수 $f(x, y)$에 대하여 밝히면 된다. 먼저 정의역에 포함되는 조그만 직사각형 $[a, b] \times [c, d]$ 속에서

$$\begin{aligned}
\int_c^u \mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(x, t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\partial}{\partial x} \int_c^y \mathrm{D}_2 f(x, t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\big(f(x, y) - f(x, c)\big) \\
&= \mathrm{D}_1 f(x, y) - \mathrm{D}_1 f(x, c)
\end{aligned}$$

를 얻는다. 한편 이 식의 왼쪽항이 y에 대하여 미분가능하고 따라서 오른쪽항도 y에 대하여 미분가능하며, 이로부터 양변을 y로 미분하면

$$\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 f(x, y) = \mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(x, y)$$

를 얻는다. □

따름정리 11.2.0.1. *n-공간의 열린집합에서 정의된 k 급함수 f 의 고계편도함수*

$$\mathrm{D}_{i_1}\mathrm{D}_{i_2}\ldots\mathrm{D}_{i_k}f \qquad (1 \le i_1, i_2, \ldots, i_k \le n)$$

는 $\mathrm{D}_{i_1}, \mathrm{D}_{i_2}, \ldots, \mathrm{D}_{i_k}$ 의 순서를 바꾸어도 변화가 없다.

11.2.1 방향미분작용소

일급함수 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 와 벡터 $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n$ 에 대하여

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f = \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} f = (v_1\mathrm{D}_1 + \cdots + v_n\mathrm{D}_n)f$$

임을 알고 있다. 이 식을

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} = v_1\mathrm{D}_1 + \cdots + v_n\mathrm{D}_n$$

으로 쓰기로 한다.

f 가 이급이면

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\mathrm{D}_i\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} v_iv_j\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j$$

이다. 이차원에서는 벡터 $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} = (a, b)$ 에 대하여

$$\mathrm{D}_{(a,b)}^2 = a^2\mathrm{D}_1^2 + 2ab\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 + b^2\mathrm{D}_2^2$$

을 얻는다.

함수의 일계미분계수가 함수의 순간변화율 또는 "기울기"를 나타내듯이 함수의 이계미분계수는 함수의 오목·볼록성을 말하여 준다. 다변수함수인 경우에는 오목·볼록성을 조사하기 위하여 여전히 방향이 주어져야 하고, 이때 $\boldsymbol{v}$-방향 이계미분계수는

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}^2 f(P)$$

이다.

도움정리 11.2.1.1. *n-공간의 열린 집합에서 정의된 이급함수 f 와 정의역의 임의의 점 P 및 벡터 $\boldsymbol{v}$ 에 대하여*

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\right|_0 f(P + t\boldsymbol{v}) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}^2 f(P)$$

이다.

증명. 연쇄법칙에서

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(P+t\boldsymbol{v}) = \operatorname{grad} f(P+t\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v} = \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f(P+t\boldsymbol{v})$$

임을 안다. 따라서

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(P+t\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f)(P+t\boldsymbol{v}) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}(\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f)(P+t\boldsymbol{v})$$

이다. 이제 $t=0$ 으로 두면 원하는 결론을 얻는다. □

이 정리에서

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}^2 f(P) > 0 \text{이면, } f\text{는 점 } P\text{에서 } \boldsymbol{v}\text{방향으로 볼록}\\&\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}^2 f(P) < 0 \text{이면, } f\text{는 점 } P\text{에서 } \boldsymbol{v}\text{방향으로 오목}\end{aligned}$$

임을 안다.

11.2.2 고계미분계수

함수 $f(x,y)$ 가 삼급함수이면 벡터 $\boldsymbol{v}=(a,b)$ 에 대하여

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}^3 f &:= \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}\big(\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}^2 f\big)\\&= (a\mathrm{D}_1 + b\mathrm{D}_2)\big(a^2\mathrm{D}_1^2 f + 2ab\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 f + b^2\mathrm{D}_2^2 f\big)\\&= a^3\mathrm{D}_1^3 f + 3a^2b\mathrm{D}_1^2\mathrm{D}_2 f + 3ab^2\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2^2 f + b^3\mathrm{D}_2^3 f\end{aligned}$$

이다.

11.3 테일러 전개와 근삿값 이론

정의 11.3.0.1. 함수 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 가 정의역의 한 점 P 에서 미분가능하다고 하자. 이때 벡터 $\boldsymbol{v}$ 의 크기가 작으면,

$$f(P+\boldsymbol{v}) \approx f(P) + \operatorname{grad} f(P)\cdot\boldsymbol{v}$$

이다. 여기에서

$$f(P) + \operatorname{grad} f(P)\cdot\boldsymbol{v}$$

를 점 P 에서 $f(P+\boldsymbol{v})$ 의 일차근삿값이라고 부른다.

정리 11.3.0.1 (테일러 정리). *n-공간의 열린집합 U 에서 정의된 k 번 미분가능한 함수 f 가 주어져 있다. 이때 U 의 한 점 P 와 벡터 $\boldsymbol{v}$ 에 대하여 선분 $[P, P+\boldsymbol{v}] :=$*

$\{P + t\boldsymbol{v} \mid 0 \le t < 1\}$ 이 U 에 포함된다고 하자. 그러면 등식

$$f(P+\boldsymbol{v}) = f(P) + \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(P) + \frac{1}{2!}\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}^2 f(P) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}^{k-1} f(P) + \frac{1}{k!}\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}^k f(P + t^*\boldsymbol{v})$$

를 만족시키는 t^* 가 0과 1 사이에 존재한다.

증명. 도움정리 11.2.1.1에서 살펴보았듯이, 함수

$$g(t) := f(P + t\boldsymbol{v})$$

에 대하여

$$g^{(i)}(t) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}^i f(P + t\boldsymbol{v}), \quad i = 0, 1, \ldots, k$$

임을 귀납법을 사용하여 알 수 있다.

먼저 $i = 0$일 때는 당연히 성립함을 알 수 있다. 그리고 귀납법 가정에 의하여

$$g^{(i+1)}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}^i f\big)(P + t\boldsymbol{v}) = \big(\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}\big(\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}^i f\big)\big)(P + t\boldsymbol{v})$$

이므로 원하는 결론을 얻는다.

이제 $g(t)$ 에 일변수 테일러 전개를 응용하면

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \cdots + \frac{g^{k-1}(0)}{(k-1)!}t^{k-1} + \frac{g^{(k)}(t^*)}{k!}t^k$$

을 만족시키는 $t^* \in (0, t)$ 의 존재를 안다. 여기서 $t = 1$로 두면 증명이 끝난다. □

11.3.1 근사다항식과 잉여항

정의 11.3.1.1. n-공간의 점 P 근방에서 정의된 k급 함수 $f(X)$ 에 대하여

$$T_k f(P, \boldsymbol{v}) := f(P) + \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(P) + \cdots + \frac{1}{k!}\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}^k f(P)$$

를 점 P에서 $f(P + \boldsymbol{v})$ 의 k차 근삿값이라고 부른다.

위 식에서 $\boldsymbol{v} = X - P = (x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n)$ 로 두면

$$X \mapsto T_k f(P, X - P)$$

는 점 P에서 $f(X)$ 의 k차 근사 (다항) 식이다.

11.3.1.1 잉여항

정의 11.3.1.2. 함수 f의 테일러 전개에서

$$R_k f(P,\boldsymbol{v}) := f(P+\boldsymbol{v}) - T_k f(P,\boldsymbol{v})$$

를 k차 잉여항 또는 k차 나머지항이라고 부른다.

따름정리 11.3.1.1. *n-공간의 열린집합 U에서 정의된 이급함수 f와 U에 포함되는 선분 $\{P+t\boldsymbol{v} \mid 0 \le t \le 1\}$에 대하여*

$$M_2 := \max\{|\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(P+t\boldsymbol{v})| \mid 1 \le i,j \le n,\ 0 \le t \le 1\}$$

이라 하자. 그러면 f의 일차 잉여항 $R_1 f(P,\boldsymbol{v})$는 부등식

$$|R_1 f(P,\boldsymbol{v})| \le \frac{M_2}{2}(|v_1| + \cdots + |v_n|)^2$$

을 만족시킨다.

증명. 테일러 정리 11.3.0.1에서

$$R_1 f(P,\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\mathrm{D}_v^2 f(P^*)$$

인 P^*가 선분 $[P, P+\boldsymbol{v}] = \{P+t\boldsymbol{v} \mid 0 \le t \le 1\}$이 존재한다. 그런데

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{D}_v^2 f(P^*)\right| &= \left|\sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(P^*)\right| \\
&\le \sum_{i,j=1}^{n} |v_i||v_j||\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(P^*)| \\
&\le M_2 \sum_{i,j=1}^{n} |v_i||v_j| \\
&= M_2\big(|v_1| + \cdots + |v_n|\big)^2
\end{aligned}$$

이므로

$$|R_1 f(P,\boldsymbol{v})| \le M_2\big(|v_1| + \cdots + |v_n|\big)^2$$

이다. □

따름정리 11.3.1.2. *따름정리 11.3.1.1에서 f가 $k+1$급 함수라고 하면, 등식*

$$R_k f(P,\boldsymbol{v}) = \frac{1}{(k+1)!}\mathrm{D}_v^{k+1} f(P^*)$$

을 만족시키는 $P^* \in [P, P+\boldsymbol{v}]$ 가 존재한다. 이때

$$\begin{aligned} M_{k+1} &:= M_{k+1} f(P, \boldsymbol{v}) \\ &:= \max\{|\mathrm{D}_{i_0} \ldots \mathrm{D}_{i_k} f(P + t\boldsymbol{v})| \mid 1 \le i_0, \ldots, i_k \le n,\ 0 \le t \le 1\} \end{aligned}$$

로 두면

$$\left|D_{\boldsymbol{v}}^{k+1} f(P^*)\right| \le M_{k+1}(|v_1| + \cdots + |v_n|)^{k+1}$$

이다. 특히 다음 부등식을 얻는다:

$$|R_k f(P, \boldsymbol{v})| \le M_{k+1} \frac{(|v_1| + \cdots + |v_n|)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

위 정리의 마지막 식에서 $\lim_{\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{0}} \frac{(|v_1|+\cdots+|v_n|)^{k+1}}{|\boldsymbol{v}|^k} = 0$이므로 다음 정리는 f가 $k+1$급 함수일 때에는 자명하고, k급일 때에는

$$R_k f(P, \boldsymbol{v}) = R_{k-1} f(P, \boldsymbol{v}) - \frac{1}{k!} \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}^k f(P) = \frac{1}{k!} \big(\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}^k f(P^*) - \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}^k f(P)\big) = o(|\boldsymbol{v}|^k)$$

이므로 다음을 얻는다.

따름정리 11.3.1.3. *k급 함수 f 에 대하여 점 P 에서 k차 잉여함수*

$$\boldsymbol{v} \mapsto R_k f(P, \boldsymbol{v})$$

는 $o(|\boldsymbol{v}|^k)$ 이다.

11.3.2 테일러 전개의 유일성

정리 11.3.2.1 (테일러 전개의 유일성). *함수 f 가 n-공간의 한 점 P 근방에서 정의된 k급 함수이면, 등식*

$$f(P + \boldsymbol{x}) = T_x(\boldsymbol{x}) + R_k(\boldsymbol{x}) \quad (|\boldsymbol{x}| \ll 1)$$

를 만족시키는 차수가 k 이하인 다항식 $T_k(\boldsymbol{x})$ 와 $o(|\boldsymbol{x}|^k)$ 인 함수 $R_k(\boldsymbol{x})$ 가 각각 유일하게 존재한다.

증명. 함수 T_k 와 R_k 의 존재성은 보았으므로, 유일성만 밝히면 된다. 함수 $f(P+\boldsymbol{x})$ 가 차수 k 이하의 또 다른 다항함수 $\tilde{T}_k(\boldsymbol{x})$ 와 $o\big(|\boldsymbol{x}|^k\big)$ 인 $\tilde{R}_k(\boldsymbol{x})$ 의 합으로 나타내어진다고 하자. 그러면

$$T_k(\boldsymbol{x}) - \tilde{T}_k(\boldsymbol{x}) = \tilde{R}_k(\boldsymbol{x}) - R_k(\boldsymbol{x})$$

이다. 좌변은 k차 이하의 다항함수인 반면 우변은 $o\left(|\boldsymbol{x}|^k\right)$이므로, 양변 모두 영함수이다. 따라서

$$T_k(\boldsymbol{x}) = \tilde{T}_k(\boldsymbol{x}), \qquad R_k(\boldsymbol{x}) = \tilde{R}_k(\boldsymbol{x})$$

이다. □

11.4 임계점 정리

11.4.1 최대점과 최소점

정의 11.4.1.1. 주어진 실숫값 함수에 대하여 정의역의 점 중에서 함숫값이 최대인 점을 그 함수의 최대점이라 한다. 즉, 점 P가 함수 $f : U \to \mathbb{R}$의 최대점이라는 것은 $P \in U$이고, U의 임의의 점 Q에 대하여

$$f(P) \geq f(Q)$$

라는 뜻이다. 함수의 최대점에서 함숫값을 그 함수의 최댓값이라고 한다.

마찬가지로, 주어진 실숫값 함수에 대하여 정의역의 점 중에서 함숫값이 최소인 점을 그 함수의 최소점이라 한다. 즉, 점 P가 함수 $f : U \to \mathbb{R}$의 최소점이라는 것은 $P \in U$이고, U의 임의의 점 Q에 대하여

$$f(P) \leq f(Q)$$

라는 뜻이다. 함수의 최소점에서 함숫값을 그 함수의 최솟값이라고 한다.

11.4.2 극점

정의 11.4.2.1. 주어진 실숫값 함수에 대하여 함숫값이 국소적으로 최대인 점을 극대점이라 하고, 국소적으로 최소인 점을 극소점이라 한다. 극대점과 극소점을 통틀어 극점이라고 부른다. 극대점에서의 함숫값과 극소점에서의 함숫값을 각각 극댓값, 극솟값이라고 부른다. 또 극점에서의 함숫값을 극값이라고 한다.

11.4.3 임계점

정의 11.4.3.1. n-공간의 열린 집합에서 정의된 미분가능한 함수 f에서 모든 방향 미분계수가 영인 점을 함수 f의 임계점이라고 부른다.

정리 11.4.3.1 (임계점 정리). *n-공간의 열린 집합에서 정의된 미분가능한 함수의 극점은 임계점이다.*

11.5 헤세 판정법

11.5.1 안장점

정리 11.5.1.1. *임계점이지만 극점이 아닌 점을 안장점이라고 한다.*

11.5.2 헤세 행렬

정의 11.5.2.1. 이급함수 $f(x_1, \ldots, x_n)$에 대하여, 정의역의 점 P에서의 이계 편미분계수들로 이루어진 $n \times n$차 행렬

$$f''(P) := \big(\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(P)\big) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)\right)_{1\le i,j\le n}$$

11.5.3 행렬의 음양

정의 11.5.3.1. 이차 대칭행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$에서

1. $ac - b^2 > 0$이고 $a > 0$일 때, A를 양행렬이라 하고 $A > O$으로 쓴다.
2. $ac - b^2 > 0$이고 $a < 0$일 때, A를 음행렬이라 하고 $A < O$으로 쓴다.

도움정리 11.5.3.1. *대칭행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$에 대응되는 이차형식*

$$q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

에 대하여

1. *$A > O$이면, 원점 $(0,0)$은 $q(x,y)$의 최소점이다.*
2. *$A < O$이면, 원점 $(0,0)$은 $q(x,y)$의 최대점이다.*
3. *$\det A < 0$이면, 원점 $(0,0)$은 $q(x,y)$의 안장점이다.*

증명. 먼저 $a \neq 0$인 경우를 보자.

$$q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a^2}y^2\right)$$

으로 쓸 수 있다. 따라서 $A > O$이면 $ac - b^2 > 0$이므로 $(x,y) \neq (0,0)$일 때 $q(x,y) > 0$이며 원점에서 최소점이다. 또한 $A < O$이면 원점에서 최대점이다. $\det A < 0$일 때 $q(x,y)$는 양의 값과 음의 값을 동시에 가지며, 원점은 임계점이므로 안장점이다.

$a = 0$의 경우, $\det A = -b^2 \leq 0$이므로 $\det A < 0$의 경우만 고려한다.

$$q(x,y) = 2bxy + cy^2 = by\left(2x + \frac{c}{b}y\right)$$

는 양과 음의 값을 모두 가지며 원점은 임계점이므로 원점이 안장점이다. □

정리 11.5.3.1 (헤세 판정법). *좌표평면의 열린집합에서 정의된 이급함수 $f(x,y)$는 임계점 P에서*

1. *$f''(P) > O$ 이면, P는 극소점이다.*
2. *$f''(P) < O$ 이면, P는 극대점이다.*
3. *$\det f''(P) < 0$ 이면, P는 안장점이다.*

증명. 이급함수 f에 대해서 $f''(P) > O$이면 f의 이차 편도함수 $\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f$는 연속이다. 따라서 P 근방의 점 P^*에 대해서도 $f''(P^*) > O$이다. $|\boldsymbol{v}| \ll 1$인 $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2$에 대해서 P에서 $f(P+\boldsymbol{v})$의 테일러 전개는 P가 임계점이므로

$$f(P+\boldsymbol{v}) = f(P) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} v_i v_j \mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(P + t^*\boldsymbol{v})$$

인 $t^* \in (0,1)$이 존재한다. 이 때 함수 $g_{\boldsymbol{v}}$를

$$g_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) := \sum_{i,j=1}^{2} \mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(P + t^*\boldsymbol{v}) x_i x_j$$

와 같이 정의하자. $\boldsymbol{v}$는 매우 작으므로 $f''(P + t^*\boldsymbol{v}) > O$이고, 도움정리 11.5.3.1에 의해 $g_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})$은 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$일 때 최솟값이다. 그런데 $g_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{0}) = 0$이므로 $g_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) \geq 0$이며,

$$f(P+\boldsymbol{v}) - f(P) = \frac{g_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})}{2} \geq 0$$

이다. 그러므로 $|\boldsymbol{v}| \ll 1$인 임의의 $\boldsymbol{v}$에 대해서

$$f(P+\boldsymbol{v}) - f(P) \geq 0$$

이고, 따라서 P는 극소점이다. □