수학 및 연습 2
내용 요약

이재호

jaeho.lee@snu.ac.kr

마지막 수정: 2018년 10월 8일

10 다변수함수

1 그래프와 등위면

1.1 다변수함수

정의 1.1.1. n-공간의 부분집합 U에서 정의된 함수

$$f : U \to \mathbb{R}$$

가 주어졌다고 하자. 즉, U의 각 점 $X = (x_1, \ldots, x_n)$에 대하여 실수 $f(X) = f(x_1, \ldots, x_n)$이 대응된다고 하자. 이때 함수 f를 n변수함수라 하고, $n \geq 2$이면 다변수함수라고도 한다.

1.2 함수와 그래프

정의 1.2.1. n-공간의 부분집합 U에서 정의된 다변수함수 f의 그래프는

$$\{(x_1, \ldots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in U,\ z = f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

으로 정의한다.

1.3 일차함수의 기울기

정의 1.3.1. 이변수 일차함수 $z = ax + by + c$의 기울기는 기울기 벡터

$$(a, b) = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$$

로 나타낸다.

정리 1.3.1. *단위벡터* $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ *에 대하여, 일차함수*

$$z = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + c = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + c$$

의 $\boldsymbol{v}$*-방향 기울기는*

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

이다.

Proof. 일차함수 z의 $\boldsymbol{v}$-방향 기울기는

$$\frac{z(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) - z(\boldsymbol{x})}{t} = \frac{(\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) + c) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + c)}{t} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}$$

이다. □

1.4 등위면

정의 1.4.1. n-공간의 한 부분집합 U에서 정의된 다변수함수 $f : U \to \mathbb{R}$와 실수 c에 대하여, f에 대한 c의 역상(inverse image)

$$f^{-1}(c) := \{X \in U \mid f(X) = c\}$$

를 f의 c-등위면(level surface) 또는 c-등가면이라고 부른다. 즉, 등위면은 함숫값이 같은 점들의 모임이다.

2 연속함수

정의 2.0.1. n-공간의 부분집합 U에서 정의된 함수 $f : U \to \mathbb{R}$와 U의 한 점 P에 대하여

$$\lim_{X \to P} f(X) = f(P)$$

일 때, f는 점 P에서 연속이라고 정의한다. 달리 쓰면,

$$\lim_{X \to P} |f(X) - f(P)| = 0$$

이다.

2.1 연속함수

정의 2.1.1. 함수 $f : U \to \mathbb{R}$가 정의역 U의 모든 점에서 연속이면, f를 연속함수라고 한다.

2.2 최대최소 정리

2.2.1 유계인 닫힌 집합

정의 2.2.1. 양수 r에 대하여 n-공간의 한 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 열린 공(open ball)은

$$\mathbb{B}^n(P,r) := \{X \in \mathbb{R}^n \mid |X-P| < r\}$$

를 뜻한다. 또 n-공간의 한 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 닫힌 공(closed ball)은

$$\overline{\mathbb{B}}^n(P,r) := \{X \in \mathbb{R}^n \mid |X-P| \le r\}$$

를 뜻한다.

열린 공 또는 닫힌 공을 그냥 공이라고 하고, 1차원 공은 구간, 2차원 공은 원판이다.

정의 2.2.2. n-공간의 부분 집합 U가 유계(bounded)라는 것은 U를 포함하는 공이 존재한다는 뜻이다. 이는 함수

$$U \to \mathbb{R}, \quad X \mapsto |X|$$

가 유계 함수라는 것과 동치이다.

정의 2.2.3. n-공간에서 경계를 포함하는 부분집합을 닫힌 집합이라고 부른다.

정리 2.2.1 (최대최소 정리)**.** *n-공간의 유계인 닫힌 집합에서 정의된 연속함수는 최댓값과 최솟값을 가진다.*

3 방향미분과 편미분

정의 3.0.1. n-공간의 열린 집합 U에서 정의된 함수 $f : U \to \mathbb{R}$와 U의 한 점 P 및 벡터 $\boldsymbol{v}$에 대하여, 극한값

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(P) := \lim_{t\to 0} \frac{f(P+t\boldsymbol{v}) - f(P)}{t} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f(P+t\boldsymbol{v})$$

가 존재하면 이 값을 점 P에서 f의 $\boldsymbol{v}$-방향미분계수 또는 $\boldsymbol{v}$-방향 순간변화율이라고 한다. 단위벡터 $\boldsymbol{v}$에 대하여 $\boldsymbol{v}$-방향미분계수의 기하학적 의미는 함수 f의 그래프를 직선 $P+t\boldsymbol{v}$ 위에 한정하여 그렸을 때, 점 $(P, f(P))$에서 f의 그래프의 기울기를 뜻한다.

3.1 편도함수

정의 3.1.1. n-공간의 표준단위벡터는

$$\boldsymbol{e}_1 := (1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_n := (0, 0, \ldots, 1)$$

을 말한다.

정의 3.1.2. 점 $P = (p_1, \ldots, p_n)$에서 함수 $f : U \to \mathbb{R}$의 $\boldsymbol{e}_k$-방향미분계수 $\mathrm{D}_{\boldsymbol{e}_k} f(P)$를 단순히

$$\mathrm{D}_k f(P)$$

로 쓰고, 점 P에서의 f의 k번째 편미분계수라고 한다. 좌표의 성분을 써서 표시하면,

$$\mathrm{D}_k f(P) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f(p_1, \ldots, p_k + t, \ldots, p_n)$$

이다. 이 값은 $P = (p_1, \ldots, p_n)$의 k번째 성분만 변화시켜 얻은 변화율이다. 이런 뜻에서 $\mathrm{D}_k f(P)$를 $\frac{\partial f}{\partial x_k}(P)$로 쓰기도 한다:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} := \mathrm{D}_k f.$$

함수 f의 k번째 편미분계수 $\frac{\partial f}{\partial x_k}$는 k번째 성분만을 변수로 하고, 나머지 변수는 상수로 보았을 때 얻은 미분계수이다.

정의 3.1.3. 함수 f가 정의역 U의 모든 점에 대하여 k번째 편미분계수를 가지면 함수

$$\mathrm{D}_k f : U \to \mathbb{R}, \quad P \mapsto \mathrm{D}_k f(P)$$

를 f의 k번째 편도함수라고 한다.

3.2 기울기 벡터

정의 3.2.1. n변수함수 f의 모든 편미분계수가 점 P에서 존재할 때, f는 점 P에서 편미분가능하다고 한다. 이때 벡터

$$\operatorname{grad} f(P) := (\mathrm{D}_1 f(P), \ldots, \mathrm{D}_n f(P))$$

를 P에서 f의 그레이디언트 벡터 (gradient vector) 또는 기울기 벡터라고 한다.

일변수함수 $f(x)$의 그래프에서 접선의 기울기가 바로 $f'(x)$이듯이, 다변수함수 $f(X)$의 그래프에서 "접평면"의 기울기 벡터가 바로 $\operatorname{grad} f(P)$이다.

grad f를 ∇f로 쓰기도 한다. 즉

$$\nabla = (\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

이다.

4 미분가능함수

정의 4.0.1. n-공간의 원점 근방에서 정의된 두 함수 $g(\boldsymbol{v})$, $h(\boldsymbol{v})$에 대하여

$$g(\boldsymbol{v}) = o(h(\boldsymbol{v}))$$

라는 것은 다음을 뜻한다:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \quad \big(0 < |\boldsymbol{v}| < \delta \Rightarrow |g(\boldsymbol{v})| \leq \epsilon |h(\boldsymbol{v})|\big)$$

정의 4.0.2. n-공간의 열린 집합 U에서 정의된 함수 $f : U \to \mathbb{R}$와 U의 점 P에 대하여

$$\lim_{\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{0}} \frac{|f(P + \boldsymbol{v}) - f(P) - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|} = 0, \tag{1}$$

즉

$$f(P + \boldsymbol{v}) = f(P) + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} + o(\boldsymbol{v}) \tag{2}$$

를 만족시키는 벡터 $\boldsymbol{a}$가 존재하면 f는 점 P에서 미분가능하다고 한다.

만약 f가 정의역의 모든 점에서 미분가능하면 f는 미분가능하다고 한다.

정리 4.0.1. *n-공간의 열린 집합 U에서 정의된 함수 $f : U \to \mathbb{R}$가 점 $P \in U$에서 미분가능하면*

1. *f는 점 P에서 연속이다.*
2. *f는 점 P에서 모든 방향의 방향미분계수를 가지고*

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(P) = \operatorname{grad} f(P) \cdot \boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

   이다.

3. *식 1을 만족시키는 벡터 $\boldsymbol{a}$는 grad $f(P)$ 이다.*

Proof. 1. 식 2에서

$$\lim_{\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{0}} f(P + \boldsymbol{v}) = \lim_{\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{0}} \big(f(P) + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} + o(\boldsymbol{v})\big) = f(P)$$

이다.

2, 3. 식 1에 의하면, 어떤 벡터 $\boldsymbol{v}$에 대하여

$$\lim_{|t\boldsymbol{v}|\to 0} \frac{|f(P+t\boldsymbol{v}) - f(P) - \boldsymbol{a}\cdot t\boldsymbol{v}|}{|t\boldsymbol{v}|} = 0$$

을 만족한다. 즉,

$$\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\lim_{t\to 0} \frac{f(P+t\boldsymbol{v}) - f(P) - \boldsymbol{a}\cdot t\boldsymbol{v}}{t} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\lim_{t\to 0} \frac{f(P+t\boldsymbol{v}) - f(P)}{t} - \boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = 0$$

이다. 따라서 방향미분 $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f(P)$가 존재하고

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f(P) = \lim_{t\to 0}\frac{f(P+t\boldsymbol{v}) - f(P)}{t} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}$$

이다.

이제 $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$으로 두면

$$\mathrm{D}_i f(P) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{e}_i} f(P) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i = a_i$$

이고

$$\operatorname{grad} f(P) = \big(\mathrm{D}_1 f(P), \ldots, \mathrm{D}_n f(P)\big) = (a_1, \ldots, a_n) = \boldsymbol{a}$$

이다. 따라서

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f(P) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} f(P)\cdot\boldsymbol{v}$$

이다. □

따라서, 함수 f가 점 P에서 미분가능할 필요충분조건은

1. $\operatorname{grad} f(P)$가 존재하고
2. $f(P+\boldsymbol{v}) - f(P) = \operatorname{grad} f(P)\cdot\boldsymbol{v} + o(\boldsymbol{v})$

인 것이다. 따라서 기울기 벡터 $\operatorname{grad} f(P)$를 점 P에서 f의 미분계수라고 하고, $f'(P)$ 또는 $\mathrm{D}f(P)$로 쓰기도 한다.

4.1 기울기 벡터와 함수의 변화율

정리 4.0.1에서 $\boldsymbol{v}$가 단위벡터이고, $\boldsymbol{v}$와 $\operatorname{grad} f(P)$가 이루는 각의 크기가 θ라면,

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f(P) = \operatorname{grad} f(P)\cdot\boldsymbol{v} = |\operatorname{grad} f(P)|\cos\theta$$

이므로, $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(P)$가 최대가 되는 단위벡터 $\boldsymbol{v}$는 $\cos\theta = 1$인 벡터, 즉 $\operatorname{grad} f(P)$와 같은 방향의 단위벡터이다. 이때 $\operatorname{grad} f(P)$의 크기가 $\boldsymbol{v}$-방향 변화율이다. 이러한 원리에서 $\operatorname{grad} f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)\right)$는 좌표계의 선택과 무관함을 알 수 있다. 또 $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(P)$가 최소가 되는 단위벡터 $\boldsymbol{v}$는 $\cos\theta = -1$인 벡터, 즉 $\boldsymbol{v}$가 $-\operatorname{grad} f(P)$와 같은 방향의 단위벡터임을 안다. 같은 이유에서 $\operatorname{grad} f(P)$와 수직인 방향으로의 순간변화율은 0이다.

4.2 일급미분가능함수

정의 4.2.1. n-공간의 한 열린 집합에서 정의된 함수 $f(x_1, \ldots, x_n)$의 각 편도함수

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

이 모두 연속함수이면, f를 일급함수 또는 $\mathcal{C}^1$ 함수라고 한다.

정리 4.2.1. *n-공간의 열린 집합에서 정의된 일급함수는 미분가능 함수이다.*

5 연쇄법칙

정리 5.0.1 (연쇄법칙)**.** *n-공간의 열린 집합 U에서 정의된 미분가능한 함수 f와 구간 I에서 정의된 미분가능한 곡선 $X : I \to U$에 대하여 다음이 성립한다:*

$$\forall t \in I \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(X(t)) = \operatorname{grad} f(X(t)) \cdot X'(t)$$

Proof. 먼저 $t \in I$를 고정하면, 절댓값이 아주 작은 실수 Δt에 대하여

$$\begin{aligned}
&f\big(X(t+\Delta t)\big) - f\big(X(t)\big) \\
&= \operatorname{grad} f\big(X(t)\big) \cdot \big(X(t+\Delta t) - X(t)\big) + o(|X(t+\Delta t) - X(t)|) \\
&= \operatorname{grad} f\big(X(t)\big) \cdot \big(X'(t)\Delta t o(\Delta t)\big) + o(\Delta t) \\
&= \operatorname{grad} f\big(X(t)\big) \cdot X'(t)\Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned}$$

이므로 원하는 결론을 얻는다. □

연쇄법칙을 좌표의 성분을 써서 표현하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$$

이다. 만약 $X = (x_1, \ldots, x_n)$가 두 개의 변수 s, t에 의존하면, 연쇄법칙은

$$\frac{\partial}{\partial s} f\big(x_1(s,t), \ldots, x_n(s,t)\big) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial s}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} f\big(x_1(s,t), \ldots, x_n(s,t)\big) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t}$$

으로 표현된다.

6 기울기 벡터와 등위면

정리 6.0.1. *n-공간의 열린 집합 U에서 정의된 일급함수 f에 대하여 점 P에서 기울기 벡터 $\operatorname{grad} f(P)$는 점 P가 속하는 등위면 $S := \{X \in U \mid f(X) = f(P)\}$에 수직이다.*

Proof. 점 P에서 등위면 S의 접평면은 P를 지나는 S 속의 곡선들의 접선들로 이루어져 있다. 다시 말하면 미분가능한 곡선

$$X : \mathbb{R} \to S, \qquad X(0) = P$$

에 대하여 속도벡터 $X'(0)$은 점 P에서 S의 접평면에 속하고, 역으로 접평면의 원소들은 모두 이러한 방법으로 얻어진다. 따라서 이러한 곡선 X에 대하여

$$\operatorname{grad} f(P) \cdot X'(0) = 0$$

그런데 $X(t) \in S$이므로 $f(X(t)) = f(P)$이다. 이를 t에 대하여 미분하면, 연쇄법칙 덕분에 $\operatorname{grad} f(X(t)) \cdot X'(t) = 0$임을 안다. 이제 $t = 0$을 대입하여 원하는 결론을 얻는다. $\square$