

## 수학 및 연습 2

### 내용 요약

이재호

jaeho.lee@snu.ac.kr

마지막 수정: 2018년 10월 8일

## 10 다변수함수

### 1 그래프와 등위면

#### 1.1 다변수함수

정의 1.1.1.  $n$ -공간의 부분집합  $U$ 에서 정의된 함수

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}$$

가 주어졌다고 하자. 즉,  $U$ 의 각 점  $X = (x_1, \dots, x_n)$ 에 대하여 실수  $f(X) = f(x_1, \dots, x_n)$ 이 대응된다고 하자. 이때 함수  $f$ 를  $n$ 변수함수라 하고,  $n \geq 2$ 이면 다변수함수라고도 한다.

#### 1.2 함수와 그래프

정의 1.2.1.  $n$ -공간의 부분집합  $U$ 에서 정의된 다변수함수  $f$ 의 그래프는

$$\{(x_1, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \dots, x_n) \in U, z = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

으로 정의한다.

#### 1.3 일차함수의 기울기

정의 1.3.1. 이변수 일차함수  $z = ax + by + c$ 의 기울기는 기울기 벡터

$$(a, b) = ai + bj$$

로 나타낸다.

**정리 1.3.1.** 단위벡터  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ 에 대하여, 일차함수

$$z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + c = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + c$$

의  $\mathbf{v}$ -방향 기울기는

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$$

이다.

*Proof.* 일차함수  $z$ 의  $\mathbf{v}$ -방향 기울기는

$$\frac{z(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - z(\mathbf{x})}{t} = \frac{(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} + t\mathbf{v}) + c) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + c)}{t} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$$

이다. □

## 1.4 등위면

**정의 1.4.1.**  $n$ -공간의 한 부분집합  $U$ 에서 정의된 다변수함수  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 와 실수  $c$ 에 대하여,  $f$ 에 대한  $c$ 의 역상(inverse image)

$$f^{-1}(c) := \{X \in U \mid f(X) = c\}$$

를  $f$ 의  $c$ -등위면(level surface) 또는  $c$ -등가면이라고 부른다. 즉, 등위면은 함숫값이 같은 점들의 모임이다.

## 2 연속함수

**정의 2.0.1.**  $n$ -공간의 부분집합  $U$ 에서 정의된 함수  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 와  $U$ 의 한 점  $P$ 에 대하여

$$\lim_{X \rightarrow P} f(X) = f(P)$$

일 때,  $f$ 는 점  $P$ 에서 연속이라고 정의한다. 달리 쓰면,

$$\lim_{X \rightarrow P} |f(X) - f(P)| = 0$$

이다.

### 2.1 연속함수

**정의 2.1.1.** 함수  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 가 정의역  $U$ 의 모든 점에서 연속이면,  $f$ 를 연속함수라고 한다.

## 2.2 최대최소 정리

### 2.2.1 유계인 닫힌 집합

**정의 2.2.1.** 양수  $r$ 에 대하여  $n$ -공간의 한 점  $P$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가  $r$ 인 열린 공(open ball)은

$$\mathbb{B}^n(P, r) := \{X \in \mathbb{R}^n \mid |X - P| < r\}$$

를 뜻한다. 또  $n$ -공간의 한 점  $P$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가  $r$ 인 닫힌 공(closed ball)은

$$\overline{\mathbb{B}}^n(P, r) := \{X \in \mathbb{R}^n \mid |X - P| \leq r\}$$

를 뜻한다.

열린 공 또는 닫힌 공을 그냥 공이라고 하고, 1차원 공은 구간, 2차원 공은 원판이다.

**정의 2.2.2.**  $n$ -공간의 부분 집합  $U$ 가 유계(bounded)라는 것은  $U$ 를 포함하는 공이 존재한다는 뜻이다. 이는 함수

$$U \rightarrow \mathbb{R}, \quad X \mapsto |X|$$

가 유계 함수라는 것과 동치이다.

**정의 2.2.3.**  $n$ -공간에서 경계를 포함하는 부분집합을 닫힌 집합이라고 부른다.

**정리 2.2.1** (최대최소 정리).  $n$ -공간의 유계인 닫힌 집합에서 정의된 연속함수는 최댓값과 최솟값을 가진다.

## 3 방향미분과 편미분

**정의 3.0.1.**  $n$ -공간의 열린 집합  $U$ 에서 정의된 함수  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 와  $U$ 의 한 점  $P$  및 벡터  $\mathbf{v}$ 에 대하여, 극한값

$$D_{\mathbf{v}}f(P) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + t\mathbf{v}) - f(P)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(P + t\mathbf{v})$$

가 존재하면 이 값을 점  $P$ 에서  $f$ 의  $\mathbf{v}$ -방향미분계수 또는  $\mathbf{v}$ -방향 순간변화율이라고 한다. 단위벡터  $\mathbf{v}$ 에 대하여  $\mathbf{v}$ -방향미분계수의 기하학적 의미는 함수  $f$ 의 그래프를 직선  $P + t\mathbf{v}$  위에 한정하여 그렸을 때, 점  $(P, f(P))$ 에서  $f$ 의 그래프의 기울기를 뜻한다.

### 3.1 편도함수

정의 3.1.1.  $n$ -공간의 표준단위벡터는

$$e_1 := (1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n := (0, 0, \dots, 1)$$

을 말한다.

정의 3.1.2. 점  $P = (p_1, \dots, p_n)$  에서 함수  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  의  $e_k$ -방향미분계수  $D_{e_k}f(P)$  를 단순히

$$D_k f(P)$$

로 쓰고, 점  $P$  에서의  $f$  의  $k$  번째 편미분계수라고 한다. 좌표의 성분을 써서 표시하면,

$$D_k f(P) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(p_1, \dots, p_k + t, \dots, p_n)$$

이다. 이 값은  $P = (p_1, \dots, p_n)$  의  $k$  번째 성분만 변화시켜 얻은 변화율이다. 이런 뜻에서  $D_k f(P)$  를  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(P)$  로 쓰기도 한다:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} := D_k f.$$

함수  $f$  의  $k$  번째 편미분계수  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  는  $k$  번째 성분만을 변수로 하고, 나머지 변수는 상수로 보았을 때 얻은 미분계수이다.

정의 3.1.3. 함수  $f$  가 정의역  $U$  의 모든 점에 대하여  $k$  번째 편미분계수를 가지면 함수

$$D_k f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad P \mapsto D_k f(P)$$

를  $f$  의  $k$  번째 편도함수라고 한다.

### 3.2 기울기 벡터

정의 3.2.1.  $n$  변수함수  $f$  의 모든 편미분계수가 점  $P$  에서 존재할 때,  $f$  는 점  $P$  에서 편미분가능하다고 한다. 이때 벡터

$$\text{grad } f(P) := (D_1 f(P), \dots, D_n f(P))$$

를  $P$  에서  $f$  의 그래디언트 벡터(*gradient vector*) 또는 기울기 벡터라고 한다.

일변수함수  $f(x)$  의 그래프에서 접선의 기울기가 바로  $f'(x)$  이듯이, 다변수 함수  $f(X)$  의 그래프에서 “접평면”의 기울기 벡터가 바로  $\text{grad } f(P)$  이다.

$\text{grad } f$ 를  $\nabla f$ 로 쓰기도 한다. 즉

$$\nabla = (D_1, \dots, D_n) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

이다.

#### 4 미분가능함수

**정의 4.0.1.**  $n$ -공간의 원점 근방에서 정의된 두 함수  $g(v), h(v)$ 에 대하여

$$g(v) = o(h(v))$$

라는 것은 다음을 뜻한다:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall v \quad (0 < |v| < \delta \Rightarrow |g(v)| \leq \epsilon |h(v)|)$$

**정의 4.0.2.**  $n$ -공간의 열린 집합  $U$ 에서 정의된 함수  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 와  $U$ 의 점  $P$ 에 대하여

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|f(P+v) - f(P) - a \cdot v|}{|v|} = 0, \quad (1)$$

즉

$$f(P+v) = f(P) + a \cdot v + o(v) \quad (2)$$

를 만족시키는 벡터  $a$ 가 존재하면  $f$ 는 점  $P$ 에서 미분가능하다고 한다.

만약  $f$ 가 정의역의 모든 점에서 미분가능하면  $f$ 는 미분가능하다고 한다.

**정리 4.0.1.**  $n$ -공간의 열린 집합  $U$ 에서 정의된 함수  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 가 점  $P \in U$ 에서 미분가능하면

1.  $f$ 는 점  $P$ 에서 연속이다.
2.  $f$ 는 점  $P$ 에서 모든 방향의 방향미분계수를 가지고

$$D_v f(P) = \text{grad } f(P) \cdot v \quad (v \in \mathbb{R}^n)$$

이다.

3. 식 1을 만족시키는 벡터  $a$ 는  $\text{grad } f(P)$ 이다.

*Proof.* 1. 식 2에서

$$\lim_{v \rightarrow 0} f(P+v) = \lim_{v \rightarrow 0} (f(P) + a \cdot v + o(v)) = f(P)$$

이다.

2, 3. 식 1에 의하면, 어떤 벡터  $\boldsymbol{v}$ 에 대하여

$$\lim_{|t\boldsymbol{v}| \rightarrow 0} \frac{|f(P + t\boldsymbol{v}) - f(P) - \boldsymbol{a} \cdot t\boldsymbol{v}|}{|t\boldsymbol{v}|} = 0$$

을 만족한다. 즉,

$$\frac{1}{|\boldsymbol{v}|} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + t\boldsymbol{v}) - f(P) - \boldsymbol{a} \cdot t\boldsymbol{v}}{t} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + t\boldsymbol{v}) - f(P)}{t} - \boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = 0$$

이다. 따라서 방향미분  $D_{\boldsymbol{v}}f(P)$ 가 존재하고

$$D_{\boldsymbol{v}}f(P) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + t\boldsymbol{v}) - f(P)}{t} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}$$

이다.

이제  $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$ 으로 두면

$$D_i f(P) = D_{\boldsymbol{e}_i} f(P) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_i = a_i$$

이고

$$\text{grad } f(P) = (D_1 f(P), \dots, D_n f(P)) = (a_1, \dots, a_n) = \boldsymbol{a}$$

이다. 따라서

$$D_{\boldsymbol{v}}f(P) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} = \text{grad } f(P) \cdot \boldsymbol{v}$$

이다. □

따라서, 함수  $f$ 가 점  $P$ 에서 미분가능할 필요충분조건은

1.  $\text{grad } f(P)$ 가 존재하고
2.  $f(P + \boldsymbol{v}) - f(P) = \text{grad } f(P) \cdot \boldsymbol{v} + o(\boldsymbol{v})$

인 것이다. 따라서 기울기 벡터  $\text{grad } f(P)$ 를 점  $P$ 에서  $f$ 의 미분계수라고 하고,  $f'(P)$  또는  $Df(P)$ 로 쓰기도 한다.

#### 4.1 기울기 벡터와 함수의 변화율

정리 4.0.1에서  $\boldsymbol{v}$ 가 단위벡터이고,  $\boldsymbol{v}$ 와  $\text{grad } f(P)$ 가 이루는 각의 크기가  $\theta$ 라면,

$$D_{\boldsymbol{v}}f(P) = \text{grad } f(P) \cdot \boldsymbol{v} = |\text{grad } f(P)| \cos \theta$$

이므로,  $D_v f(P)$ 가 최대가 되는 단위벡터  $v$ 는  $\cos \theta = 1$ 인 벡터, 즉  $\text{grad } f(P)$ 와 같은 방향의 단위벡터이다. 이때  $\text{grad } f(P)$ 의 크기가  $v$ -방향 변화율이다. 이러한 원리에서  $\text{grad } f(P) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right)$ 는 좌표계의 선택과 무관함을 알 수 있다. 또  $D_v f(P)$ 가 최소가 되는 단위벡터  $v$ 는  $\cos \theta = -1$ 인 벡터, 즉  $v$ 가  $-\text{grad } f(P)$ 와 같은 방향의 단위벡터임을 안다. 같은 이유에서  $\text{grad } f(P)$ 와 수직인 방향으로의 순간변화율은 0이다.

## 4.2 일급미분가능함수

**정의 4.2.1.**  $n$ -공간의 한 열린 집합에서 정의된 함수  $f(x_1, \dots, x_n)$ 의 각 편도함수

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

이 모두 연속함수이면,  $f$ 를 일급함수 또는  $C^1$  함수라고 한다.

**정리 4.2.1.**  $n$ -공간의 열린 집합에서 정의된 일급함수는 미분가능 함수이다.

## 5 연쇄법칙

**정리 5.0.1 (연쇄법칙).**  $n$ -공간의 열린 집합  $U$ 에서 정의된 미분가능한 함수  $f$ 와 구간  $I$ 에서 정의된 미분가능한 곡선  $X: I \rightarrow U$ 에 대하여 다음이 성립한다:

$$\forall t \in I \quad \frac{d}{dt} f(X(t)) = \text{grad } f(X(t)) \cdot X'(t)$$

*Proof.* 먼저  $t \in I$ 를 고정하면, 절댓값이 아주 작은 실수  $\Delta t$ 에 대하여

$$\begin{aligned} & f(X(t + \Delta t)) - f(X(t)) \\ &= \text{grad } f(X(t)) \cdot (X(t + \Delta t) - X(t)) + o(|X(t + \Delta t) - X(t)|) \\ &= \text{grad } f(X(t)) \cdot (X'(t)\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t) \\ &= \text{grad } f(X(t)) \cdot X'(t)\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

이므로 원하는 결론을 얻는다. □

연쇄법칙을 좌표의 성분을 써서 표현하면

$$\frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

이다. 만약  $X = (x_1, \dots, x_n)$ 가 두 개의 변수  $s, t$ 에 의존하면, 연쇄법칙은

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} f(x_1(s, t), \dots, x_n(s, t)) &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} f(x_1(s, t), \dots, x_n(s, t)) &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t}\end{aligned}$$

으로 표현된다.

## 6 기울기 벡터와 등위면

**정리 6.0.1.**  $n$ -공간의 열린 집합  $U$ 에서 정의된 일급함수  $f$ 에 대하여 점  $P$ 에서 기울기 벡터  $\text{grad } f(P)$ 는 점  $P$ 가 속하는 등위면  $S := \{X \in U \mid f(X) = f(P)\}$ 에 수직이다.

*Proof.* 점  $P$ 에서 등위면  $S$ 의 접평면은  $P$ 를 지나는  $S$  속의 곡선들의 접선들로 이루어져 있다. 다시 말하면 미분가능한 곡선

$$X: \mathbb{R} \rightarrow S, \quad X(0) = P$$

에 대하여 속도벡터  $X'(0)$ 은 점  $P$ 에서  $S$ 의 접평면에 속하고, 역으로 접평면의 원소들은 모두 이러한 방법으로 얻어진다. 따라서 이러한 곡선  $X$ 에 대하여

$$\text{grad } f(P) \cdot X'(0) = 0$$

그런데  $X(t) \in S$ 이므로  $f(X(t)) = f(P)$ 이다. 이를  $t$ 에 대하여 미분하면, 연쇄법칙 덕분에  $\text{grad } f(X(t)) \cdot X'(t) = 0$ 임을 안다. 이제  $t = 0$ 을 대입하여 원하는 결론을 얻는다.  $\square$

## 11 최대최소 문제와 고계미분

### 1 적분기호 속의 미분법

**정리 1.0.1** (라이프니츠 정리). 직사각형  $[a, b] \times [c, d]$ 에서 정의된 일급함수  $f(x, y)$ 에 대하여 등식

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$$

### 2 이계미분

**정의 2.0.1.**  $n$ -공간의 열린집합  $U$ 에서 정의된 일급함수  $f$ 의 일계 편도함수

$$D_1 f, \dots, D_n f: U \rightarrow \mathbb{R}$$



가 모두

1. 미분가능함수이면,  $f$ 를 두번 미분가능한 함수
2. 일급함수이면,  $f$ 를 이급함수 또는  $C^2$  함수

라고 한다. 물론 이급함수는 두번 미분가능한 함수이다.

이때  $f$ 는 점  $P \in U$ 에서 모두  $n^2$ 개의 이계 편미분계수

$$D_i D_j f(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

를 가진다.  $D_i D_j f$ 는 줄여서  $D_i^2 f$ 로 쓰기로 한다.

**정리 2.0.1** (편미분 교환법칙).  $n$ -공간의 열린집합에서 정의된 이급함수 (혹은 단지 두번 미분가능한 함수)  $f$ 와 정의역의 임의의 점  $P$ 에 대하여

$$D_i D_j f(P) = D_j D_i f(P) \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

이다.

*Proof.*  $i$ 번째 변수와  $j$ 번째 변수 사이의 관계를 조사하므로 이변수함수  $f(x, y)$ 에 대하여 밝히면 된다. 먼저 정의역에 포함되는 조그만 직사각형  $[a, b] \times [c, d]$  속에서

$$\begin{aligned} \int_c^u D_i D_j f(x, t) dt &= \frac{\partial}{\partial x} \int_c^y D_2 f(x, t) dt \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (f(x, y) - f(x, c)) \\ &= D_1 f(x, y) - D_1 f(x, c) \end{aligned}$$

를 얻는다. 한편 이 식의 왼쪽항이  $y$ 에 대하여 미분가능하고 따라서 오른쪽항도  $y$ 에 대하여 미분가능하며, 이로부터 양변을  $y$ 로 미분하면

$$D_1 D_2 f(x, y) = D_2 D_1 f(x, y)$$

를 얻는다. □

**따름정리 2.0.1.**  $n$ -공간의 열린집합에서 정의된  $k$ 급함수  $f$ 의 고계편도함수

$$D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} f \quad (1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n)$$

는  $D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_k}$ 의 순서를 바꾸어도 변화가 없다.