

수학 및 연습 2

내용 요약

이재호

jaeho.lee@snu.ac.kr

마지막 수정: 2018년 10월 8일

10 다변수함수

10.1 그래프와 등위면

10.1.1 다변수함수

정의 10.1.1.1. n -공간의 부분집합 U 에서 정의된 함수

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}$$

가 주어졌다고 하자. 즉, U 의 각 점 $X = (x_1, \dots, x_n)$ 에 대하여 실수 $f(X) = f(x_1, \dots, x_n)$ 이 대응된다고 하자. 이때 함수 f 를 n 변수함수라 하고, $n \geq 2$ 이면 다변수함수라고도 한다.

10.1.2 함수와 그래프

정의 10.1.2.1. n -공간의 부분집합 U 에서 정의된 다변수함수 f 의 그래프는

$$\{(x_1, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \dots, x_n) \in U, z = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

으로 정의한다.

10.1.3 일차함수의 기울기

정의 10.1.3.1. 이변수 일차함수 $z = ax + by + c$ 의 기울기는 기울기 벡터

$$(a, b) = ai + bj$$

로 나타낸다.

정리 10.1.3.1. 단위벡터 $v = (v_1, \dots, v_n)$ 에 대하여, 일차함수

$$z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + c = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + c$$

의 v -방향 기울기는

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$$

이다.

증명. 일차함수 z 의 v -방향 기울기는

$$\frac{z(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - z(\mathbf{x})}{t} = \frac{(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} + t\mathbf{v}) + c) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + c)}{t} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$$

이다. □

10.1.4 등위면

정의 10.1.4.1. n -공간의 한 부분집합 U 에서 정의된 다변수함수 $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 와 실수 c 에 대하여, f 에 대한 c 의 역상(inverse image)

$$f^{-1}(c) := \{X \in U \mid f(X) = c\}$$

를 f 의 c -등위면(level surface) 또는 c -등가면이라고 부른다. 즉, 등위면은 함숫값이 같은 점들의 모임이다.

10.2 연속함수

정의 10.2.0.1. n -공간의 부분집합 U 에서 정의된 함수 $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 와 U 의 한 점 P 에 대하여

$$\lim_{X \rightarrow P} f(X) = f(P)$$

일 때, f 는 점 P 에서 연속이라고 정의한다. 달리 쓰면,

$$\lim_{X \rightarrow P} |f(X) - f(P)| = 0$$

이다.

10.2.1 연속함수

정의 10.2.1.1. 함수 $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 가 정의역 U 의 모든 점에서 연속이면, f 를 연속함수라고 한다.

10.2.2 최대최소 정리

10.2.2.1 유계인 닫힌 집합

정의 10.2.2.1. 양수 r 에 대하여 n -공간의 한 점 P 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r 인 열린 공(open ball)은

$$\mathbb{B}^n(P, r) := \{X \in \mathbb{R}^n \mid |X - P| < r\}$$

를 뜻한다. 또 n -공간의 한 점 P 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r 인 닫힌 공(closed ball)은

$$\overline{\mathbb{B}}^n(P, r) := \{X \in \mathbb{R}^n \mid |X - P| \leq r\}$$

를 뜻한다.

열린 공 또는 닫힌 공을 그냥 공이라고 하고, 1차원 공은 구간, 2차원 공은 원판이다.

정의 10.2.2.2. n -공간의 부분 집합 U 가 유계(bounded)라는 것은 U 를 포함하는 공이 존재한다는 뜻이다. 이는 함수

$$U \rightarrow \mathbb{R}, \quad X \mapsto |X|$$

가 유계 함수라는 것과 동치이다.

정의 10.2.2.3. n -공간에서 경계를 포함하는 부분집합을 닫힌 집합이라고 부른다.

정리 10.2.2.1 (최대최소 정리). n -공간의 유계인 닫힌 집합에서 정의된 연속함수는 최댓값과 최솟값을 가진다.

10.3 방향미분과 편미분

정의 10.3.0.1. n -공간의 열린 집합 U 에서 정의된 함수 $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 와 U 의 한 점 P 및 벡터 v 에 대하여, 극한값

$$D_v f(P) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + tv) - f(P)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(P + tv)$$

가 존재하면 이 값을 점 P 에서 f 의 v -방향미분계수 또는 v -방향 순간변화율이라고 한다. 단위벡터 v 에 대하여 v -방향미분계수의 기하학적 의미는 함수 f 의 그래프를 직선 $P + tv$ 위에 한정하여 그렸을 때, 점 $(P, f(P))$ 에서 f 의 그래프의 기울기를 뜻한다.

10.3.1 편도함수

정의 10.3.1.1. n -공간의 표준단위벡터는

$$e_1 := (1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n := (0, 0, \dots, 1)$$

을 말한다.

정의 10.3.1.2. 점 $P = (p_1, \dots, p_n)$ 에서 함수 $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 의 e_k -방향미분계수 $D_{e_k}f(P)$ 를 단순히

$$D_k f(P)$$

로 쓰고, 점 P 에서의 f 의 k 번째 편미분계수라고 한다. 좌표의 성분을 써서 표시하면,

$$D_k f(P) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f(p_1, \dots, p_k + t, \dots, p_n)$$

이다. 이 값은 $P = (p_1, \dots, p_n)$ 의 k 번째 성분만 변화시켜 얻은 변화율이다. 이런 뜻에서 $D_k f(P)$ 를 $\frac{\partial f}{\partial x_k}(P)$ 로 쓰기도 한다:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} := D_k f.$$

함수 f 의 k 번째 편미분계수 $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ 는 k 번째 성분만을 변수로 하고, 나머지 변수는 상수로 보았을 때 얻은 미분계수이다.

정의 10.3.1.3. 함수 f 가 정의역 U 의 모든 점에 대하여 k 번째 편미분계수를 가지면 함수

$$D_k f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad P \mapsto D_k f(P)$$

를 f 의 k 번째 편도함수라고 한다.

10.3.2 기울기 벡터

정의 10.3.2.1. n 변수함수 f 의 모든 편미분계수가 점 P 에서 존재할 때, f 는 점 P 에서 편미분가능하다고 한다. 이때 벡터

$$\text{grad } f(P) := (D_1 f(P), \dots, D_n f(P))$$

를 P 에서 f 의 그래디언트 벡터(gradient vector) 또는 기울기 벡터라고 한다.

일변수함수 $f(x)$ 의 그래프에서 접선의 기울기가 바로 $f'(x)$ 이듯이, 다변수함수 $f(X)$ 의 그래프에서 “접평면”의 기울기 벡터가 바로 $\text{grad } f(P)$ 이다.

$\text{grad } f$ 를 ∇f 로 쓰기도 한다. 즉

$$\nabla = (D_1, \dots, D_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

이다.

10.4 미분가능함수

정의 10.4.0.1. n -공간의 원점 근방에서 정의된 두 함수 $g(v)$, $h(v)$ 에 대하여

$$g(v) = o(h(v))$$

라는 것은 다음을 뜻한다:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall v \quad (0 < |v| < \delta \Rightarrow |g(v)| \leq \epsilon |h(v)|)$$

정의 10.4.0.2. n -공간의 열린 집합 U 에서 정의된 함수 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 와 U 의 점 P 에 대하여

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|f(P+v) - f(P) - a \cdot v|}{|v|} = 0, \quad (1)$$

즉

$$f(P+v) = f(P) + a \cdot v + o(v) \quad (2)$$

를 만족시키는 벡터 a 가 존재하면 f 는 점 P 에서 미분가능하다고 한다.

만약 f 가 정의역의 모든 점에서 미분가능하면 f 는 미분가능하다고 한다.

정리 10.4.0.1. n -공간의 열린 집합 U 에서 정의된 함수 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 가 점 $P \in U$ 에서 미분가능하면

1. f 는 점 P 에서 연속이다.
2. f 는 점 P 에서 모든 방향의 방향미분계수를 가지고

$$D_v f(P) = \text{grad } f(P) \cdot v \quad (v \in \mathbb{R}^n)$$

이다.

3. 식 1을 만족시키는 벡터 a 는 $\text{grad } f(P)$ 이다.

증명. 1. 식 2에서

$$\lim_{v \rightarrow 0} f(P+v) = \lim_{v \rightarrow 0} (f(P) + a \cdot v + o(v)) = f(P)$$

이다.

2, 3. 식 1에 의하면, 어떤 벡터 \mathbf{v} 에 대하여

$$\lim_{|t\mathbf{v}| \rightarrow 0} \frac{|f(P + t\mathbf{v}) - f(P) - \mathbf{a} \cdot t\mathbf{v}|}{|t\mathbf{v}|} = 0$$

을 만족한다. 즉,

$$\frac{1}{|\mathbf{v}|} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + t\mathbf{v}) - f(P) - \mathbf{a} \cdot t\mathbf{v}}{t} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + t\mathbf{v}) - f(P)}{t} - \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = 0$$

이다. 따라서 방향미분 $D_{\mathbf{v}}f(P)$ 가 존재하고

$$D_{\mathbf{v}}f(P) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + t\mathbf{v}) - f(P)}{t} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$$

이다.

이제 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ 으로 두면

$$D_i f(P) = D_{\mathbf{e}_i} f(P) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i = a_i$$

이고

$$\text{grad } f(P) = (D_1 f(P), \dots, D_n f(P)) = (a_1, \dots, a_n) = \mathbf{a}$$

이다. 따라서

$$D_{\mathbf{v}}f(P) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \text{grad } f(P) \cdot \mathbf{v}$$

이다. □

따라서, 함수 f 가 점 P 에서 미분가능할 필요충분조건은

1. $\text{grad } f(P)$ 가 존재하고
2. $f(P + \mathbf{v}) - f(P) = \text{grad } f(P) \cdot \mathbf{v} + o(|\mathbf{v}|)$

인 것이다. 따라서 기울기 벡터 $\text{grad } f(P)$ 를 점 P 에서 f 의 미분계수라고 하고, $f'(P)$ 또는 $Df(P)$ 로 쓰기도 한다.

10.4.1 기울기 벡터와 함수의 변화율

정리 10.4.0.1에서 \mathbf{v} 가 단위벡터이고, \mathbf{v} 와 $\text{grad } f(P)$ 가 이루는 각의 크기가 θ 라면,

$$D_{\mathbf{v}}f(P) = \text{grad } f(P) \cdot \mathbf{v} = |\text{grad } f(P)| \cos \theta$$

이므로, $D_v f(P)$ 가 최대가 되는 단위벡터 v 는 $\cos \theta = 1$ 인 벡터, 즉 $\text{grad } f(P)$ 와 같은 방향의 단위벡터이다. 이때 $\text{grad } f(P)$ 의 크기가 v -방향 변화율이다. 이러한 원리에서 $\text{grad } f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right)$ 는 좌표계의 선택과 무관함을 알 수 있다. 또 $D_v f(P)$ 가 최소가 되는 단위벡터 v 는 $\cos \theta = -1$ 인 벡터, 즉 v 가 $-\text{grad } f(P)$ 와 같은 방향의 단위벡터임을 안다. 같은 이유에서 $\text{grad } f(P)$ 와 수직인 방향으로의 순간변화율은 0이다.

10.4.2 일급미분가능함수

정의 10.4.2.1. n -공간의 한 열린 집합에서 정의된 함수 $f(x_1, \dots, x_n)$ 의 각 편도함수

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

이 모두 연속함수이면, f 를 일급함수 또는 C^1 함수라고 한다.

정리 10.4.2.1. n -공간의 열린 집합에서 정의된 일급함수는 미분가능 함수이다.

10.5 연쇄법칙

정리 10.5.0.1 (연쇄법칙). n -공간의 열린 집합 U 에서 정의된 미분가능한 함수 f 와 구간 I 에서 정의된 미분가능한 곡선 $X: I \rightarrow U$ 에 대하여 다음이 성립한다:

$$\forall t \in I \quad \frac{d}{dt}f(X(t)) = \text{grad } f(X(t)) \cdot X'(t)$$

증명. 먼저 $t \in I$ 를 고정하면, 절댓값이 아주 작은 실수 Δt 에 대하여

$$\begin{aligned} & f(X(t + \Delta t)) - f(X(t)) \\ &= \text{grad } f(X(t)) \cdot (X(t + \Delta t) - X(t)) + o(|X(t + \Delta t) - X(t)|) \\ &= \text{grad } f(X(t)) \cdot (X'(t)\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t) \\ &= \text{grad } f(X(t)) \cdot X'(t)\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

이므로 원하는 결론을 얻는다. □

연쇄법칙을 좌표의 성분을 써서 표현하면

$$\frac{d}{dt}f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

이다. 만약 $X = (x_1, \dots, x_n)$ 가 두 개의 변수 s, t 에 의존하면, 연쇄법칙은

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} f(x_1(s, t), \dots, x_n(s, t)) &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} f(x_1(s, t), \dots, x_n(s, t)) &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t}\end{aligned}$$

으로 표현된다.

10.6 기울기 벡터와 등위면

정리 10.6.0.1. n -공간의 열린 집합 U 에서 정의된 일급함수 f 에 대하여 점 P 에서 기울기 벡터 $\text{grad } f(P)$ 는 점 P 가 속하는 등위면 $S := \{X \in U \mid f(X) = f(P)\}$ 에 수직이다.

증명. 점 P 에서 등위면 S 의 접평면은 P 를 지나는 S 속의 곡선들의 접선들로 이루어져 있다. 다시 말하면 미분가능한 곡선

$$X: \mathbb{R} \rightarrow S, \quad X(0) = P$$

에 대하여 속도벡터 $X'(0)$ 은 점 P 에서 S 의 접평면에 속하고, 역으로 접평면의 원소들은 모두 이러한 방법으로 얻어진다. 따라서 이러한 곡선 X 에 대하여

$$\text{grad } f(P) \cdot X'(0) = 0$$

그런데 $X(t) \in S$ 이므로 $f(X(t)) = f(P)$ 이다. 이를 t 에 대하여 미분하면, 연쇄법칙 덕분에 $\text{grad } f(X(t)) \cdot X'(t) = 0$ 임을 안다. 이제 $t = 0$ 을 대입하여 원하는 결론을 얻는다. \square

11 최대최소 문제와 고계미분

11.1 적분기호 속의 미분법

정리 11.1.0.1 (라이프니츠 정리). 직사각형 $[a, b] \times [c, d]$ 에서 정의된 일급함수 $f(x, y)$ 에 대하여 등식

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$$

11.2 이계미분

정의 11.2.0.1. n -공간의 열린집합 U 에서 정의된 일급함수 f 의 일계 편도함수

$$D_1f, \dots, D_nf : U \rightarrow \mathbb{R}$$

가 모두

1. 미분가능함수이면, f 를 두번 미분가능한 함수
2. 일급함수이면, f 를 이급함수 또는 \mathcal{C}^2 함수

라고 한다. 물론 이급함수는 두번 미분가능한 함수이다.

이때 f 는 점 $P \in U$ 에서 모두 n^2 개의 이계 편미분계수

$$D_i D_j f(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

를 가진다. $D_i D_j f$ 는 줄여서 $D_i^2 f$ 로 쓰기로 한다.

정리 11.2.0.1 (편미분 교환법칙). n -공간의 열린집합에서 정의된 이급함수 (혹은 단지 두번 미분가능한 함수) f 와 정의역의 임의의 점 P 에 대하여

$$D_i D_j f(P) = D_j D_i f(P) \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

이다.

증명. i 번째 변수와 j 번째 변수 사이의 관계를 조사하므로 이변수함수 $f(x, y)$ 에 대하여 밝히면 된다. 먼저 정의역에 포함되는 조그만 직사각형 $[a, b] \times [c, d]$ 속에서

$$\begin{aligned} \int_c^u D_i D_j f(x, t) dt &= \frac{\partial}{\partial x} \int_c^y D_2 f(x, t) dt \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (f(x, y) - f(x, c)) \\ &= D_1 f(x, y) - D_1 f(x, c) \end{aligned}$$

를 얻는다. 한편 이 식의 왼쪽항이 y 에 대하여 미분가능하고 따라서 오른쪽항도 y 에 대하여 미분가능하며, 이로부터 양변을 y 로 미분하면

$$D_1 D_2 f(x, y) = D_2 D_1 f(x, y)$$

를 얻는다. □

따름정리 11.2.0.1. n -공간의 열린집합에서 정의된 k 급함수 f 의 고계편도함수

$$D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} f \quad (1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n)$$

는 $D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_k}$ 의 순서를 바꾸어도 변화가 없다.

11.2.1 방향미분작용소

일급함수 $f(x_1, \dots, x_n)$ 와 벡터 $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + \dots + v_n \mathbf{e}_n$ 에 대하여

$$D_{\mathbf{v}} f = \mathbf{v} \cdot \text{grad } f = (v_1 D_1 + \dots + v_n D_n) f$$

임을 알고 있다. 이 식을

$$D_{\mathbf{v}} = v_1 D_1 + \dots + v_n D_n$$

으로 쓰기로 한다.

f 가 이급이면

$$D_{\mathbf{v}}^2 = \left(\sum_{i=1}^n v_i D_i \right)^2 = \sum_{i,j=1}^n v_i v_j D_i D_j$$

이다. 이차원에서는 벡터 $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = (a, b)$ 에 대하여

$$D_{(a,b)}^2 = a^2 D_1^2 + 2ab D_1 D_2 + b^2 D_2^2$$

을 얻는다.

함수의 일계미분계수가 함수의 순간변화율 또는 “기울기”를 나타내듯이 함수의 이계미분계수는 함수의 오목·볼록성을 말하여 준다. 다변수함수인 경우에는 오목·볼록성을 조사하기 위하여 여전히 방향이 주어져야 하고, 이때 \mathbf{v} -방향 이계미분계수는

$$D_{\mathbf{v}}^2 f(P)$$

이다.

도움정리 11.2.1.1. n -공간의 열린 집합에서 정의된 이급함수 f 와 정의역의 임의의 점 P 및 벡터 \mathbf{v} 에 대하여

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_0 f(P + t\mathbf{v}) = D_{\mathbf{v}}^2 f(P)$$

이다.

증명. 연쇄법칙에서

$$\frac{d}{dt}f(P + tv) = \text{grad } f(P + tv) \cdot v = D_v f(P + tv)$$

임을 안다. 따라서

$$\frac{d^2}{dt^2}f(P + tv) = \frac{d}{dt}(D_v f)(P + tv) = D_v(D_v f)(P + tv)$$

이다. 이제 $t = 0$ 으로 두면 원하는 결론을 얻는다. □

이 정리에서

$D_v^2 f(P) > 0$ 이면, f 는 점 P 에서 v 방향으로 볼록

$D_v^2 f(P) < 0$ 이면, f 는 점 P 에서 v 방향으로 오목

임을 안다.

11.2.2 고계미분계수

함수 $f(x, y)$ 가 삼급함수이면 벡터 $v = (a, b)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} D_v^3 f &:= D_v(D_v^2 f) \\ &= (aD_1 + bD_2)(a^2 D_1^2 f + 2ab D_1 D_2 f + b^2 D_2^2 f) \\ &= a^3 D_1^3 f + 3a^2 b D_1^2 D_2 f + 3ab^2 D_1 D_2^2 f + b^3 D_2^3 f \end{aligned}$$

이다.