

공학 수학 강의 노트

이재호

jaeho.lee@snu.ac.kr

마지막 수정: 2018년 9월 28일

7 Linear Algebra: Matrices, Vectors, Determinants. Linear Systems

2018년 9월 3일 Field는 수학과 물리학에서 지칭하는 대상이 다르다:

- 체體: 실수체, 복소수체
- 장場: 전자기장, 벡터장

Definition 1. 체는 $+, -, \times, \div$ 에 대해 닫혀 있는 수 집합을 말한다.

Example.

- \mathbb{Q} 는 조밀(dense)하다.
- \mathbb{R} 은 콤팩트(compact)하다.
- \mathbb{C} 는 대수적으로 닫혀(closed) 있다.
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$

Definition 2. 벡터 공간은 (roughly) 덧셈(+)과 (어떤 체에 속하는) 상수배가 정의된 집합이다.

Example.

- $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ 은 덧셈에 대해 닫혀 있고, $k \in \mathbb{R}$ 의 곱에 대해 닫혀 있으므로 실수체에 대한 벡터 공간이다.

- \mathbb{R}^n 과 \mathbb{C}^n 은 실수체에 대한 벡터 공간이면서 유리수체에 대한 벡터 공간이다. 이를 각각 \mathbb{Q} -벡터 공간, \mathbb{R} -벡터 공간이라고 한다.
- $\mathcal{C}_I^0 = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{는 연속 함수}, I \subset \mathbb{R}\}$ 에서는, $x \mapsto \sin x$ 가 하나의 벡터이다.
- $\mathcal{C}_I^n = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists f^{(n)}, f^{(n)} \text{는 연속 함수}, I \subset \mathbb{R}\}$ 이며, $\mathcal{C}_I^0 > \mathcal{C}_I^1 > \dots > \mathcal{C}_I^\infty$ 이다.

Definition 2. 체 F 에 대한 벡터 공간 V 의 원소 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ 에 대해서,

1. $c_1, \dots, c_k \in F$ 일 때

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k$$

는 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 의 일차 결합, 혹은 선형 결합(linear combination)이라고 한다.

2. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 의 선형 생성

$$\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$$

은 모든 일차 결합의 집합이다. 예를 들어, 어떤 평면 상의 평행하지 않은 두 벡터는 그 평면을 선형 생성한다.

3. $W \subset V$ 이면서 W 가 벡터 공간이면, W 는 V 의 부분 공간이라고 하며 $W < V$ 로 표기한다. 예를 들어, 실수 평면으로 나타내어지는 \mathbb{R}^2 벡터 공간의 부분 집합인 원점을 지나는 직선은 벡터 공간이므로 부분 공간이다. 반면, 원점을 지나지 않는 직선은 부분 집합이지만 벡터 공간은 아니므로 부분 공간이 아니다.
4. $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} < V$ 일 때, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 는 W 의 생성자(generator)라고 한다.
5. $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 가 일차 종속(linearly dependent)라는 것은 어느 하나가 다른 벡터들의 일차 결합이라는 것이다. 일차 종속이 아니면 일차 독립(linearly independent)이라고 한다. 예를 들어, \mathbb{R}^3 에서 $(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)$ 는 일차 종속인 반면, $(1, 2, 3), (4, 5, 6)$ 은 일차 독립이다.

2018년 9월 5일 **Theorem 1.** 체 F 에 대한 벡터 공간 V 의 원소들 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 가 일차 독립이라는 것은, $c_1, \dots, c_k \in F$ 일 때

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = \dots = c_k = 0$$

이라는 것과 동치이다.

Proof. (\Rightarrow) (재배열 가능하여) $c_k \neq 0$ 이라고 가정하자. 그렇다면,

$$\mathbf{v}_k = - \left(\frac{c_1}{c_k} \mathbf{v}_1 + \cdots + \frac{c_{k-1}}{c_k} \mathbf{v}_{k-1} \right)$$

이므로 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 가 일차 독립이라는 가정에 모순된다.

(\Leftarrow) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 가 일차 종속이라고 가정하자. 즉, (재배열 가능하여) 어떤 $a_1, \dots, a_{k-1} \in F$ 가 존재해서,

$$\mathbf{v}_k = a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}$$

이다. 그렇다면

$$a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} + (-1) \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

이므로 모순이다. □

Example.

- $a, b, c \in \mathbb{R}$ 에 대해

$$a(1, 2, 3) + b(4, 5, 6) + c(7, 8, 10) = (0, 0, 0)$$

을 만족하는 a, b, c 는 0밖에 없으므로 $(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 10)$ 은 (일차) 독립이다.

- $\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 는 (일차) 종속이다.
- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 가 독립이면 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 또한 독립이다. (왜냐하면 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 가 종속이면 $\mathbf{v}_3 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + 0 \mathbf{v}_4$ 이기 때문이다.)

Definition 3. 벡터 공간 V 의 부분 공간 W 가 일차 독립인 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 에 의해 생성될 때, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ 를 W 의 기저(basis)라고 한다.

Theorem 2. W 가 유한 생성 (finitely generated) (부분) 공간이면 W 의 기저의 원소의 개수는 동일하다. 이 때, 기저의 원소의 개수를 W 의 차원(dimension)이라고 하며, $\dim W$ 로 표기한다.

Example.

- $\mathcal{P}_n = \{n\text{차 이하 실계수 다항식}\}$ 일 때, \mathcal{P}_n 의 원소 f 는 항상 $\mathcal{B} = \{1, x, \dots, x^n\}$ 의 원소의 상수배의 합으로 나타낼 수 있다. 또한,

$$c_0 \cdot 1 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$$

이면 $c_0 = \dots c_n = 0$ 이므로, \mathcal{B} 는 기저이다.

- $\mathcal{P} = \{\text{모든 다항식}\}$ 의 기저는 $\{1, x, x^2, \dots\}$ 이며 $\dim \mathcal{P} = \infty$ 이다.

Homework.

1. a_1, a_2, a_3 는 서로 다른 실수이다. 이 때, $(1, a_1, a_1^2), (1, a_2, a_2^2), (1, a_3, a_3^2)$ 이 독립임을 보여라.
2. a_1, \dots, a_n 는 서로 다른 실수이다. 이 때, $(1, a_1, a_1^2), \dots, (1, a_n, a_n^2)$ 이 독립임을 보여라.

Theorem 3. 체 F 에 대한 벡터 공간 V 의 독립인 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 에 대해서, $\mathbf{w} \in V \setminus \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$ 이면 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}$ 는 독립이다.

Proof. $c_1, \dots, c_k, a \in F$ 일 때,

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k + a \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

이라고 가정하자. 만약 $a \neq 0$ 이라면

$$\mathbf{w} = -\left(\frac{c_1}{a} \mathbf{v}_1 + \dots + \frac{c_k}{a} \mathbf{v}_k\right) \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$$

이므로 모순이다. 따라서 $a = 0$ 이며, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 는 독립이므로 $c_1 = \dots = c_k = a = 0$ 이다. 그러므로 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}$ 는 독립이다. \square

Theorem 3에 따르면, 독립인 벡터들의 선형 생성에 포함되지 않는 벡터 또한 이들과 독립이다. 이에 따라 어떤 유한 생성 벡터 공간 V 의 독립인 벡터들 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 가 주어졌을 때, 선형 생성에 속하지 않는 벡터 $\mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_{\dim V}$ 를 순차적으로 추가해서 기저를 구성할 수 있다. 이를 기저 확장(basis extension)이라고 부른다.

Theorem 4. 체 F 에 대한 벡터 공간 V 의 부분 공간 W_1, W_2 가 주어졌을 때, $W_1 \cap W_2$ 또한 V 의 부분 공간이다.

Proof. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W_1$ 이면서 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W_2$ 이면, 각각 벡터 공간이므로 임의의 $c_1, c_2 \in F$ 에 대해서 $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 \in W_1$ 이면서 $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 \in W_2$ 이다. 즉,

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow (\forall c_1, c_2 \in F) c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 \in W_1 \cap W_2$$

이다. 따라서, $W_1 \cap W_2 < V$ 가 성립한다. \square

Definition 4. 벡터 공간 V 의 부분 집합 W_1, W_2 에 대해서 $W_1 + W_2$ 를 다음과 같이 정의한다:

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_1 \in W_1, \mathbf{v}_2 \in W_2\}.$$

Example. 좌표 평면으로 나타내어지는 벡터 공간 \mathbb{R}^2 의 부분 집합(이면서 부분 공간인)인 원점을 지나는 직선을 W_1 이라고 하자. 원점이 아닌 한 점만을 원소로 하는 집합 $W_2 \subset \mathbb{R}^2$ 가 주어졌을 때, $W_1 + W_2$ 는 W_1 의 직선을 W_2 의 (유일한) 원소의 점으로 평행 이동한 직선을 나타낸다.

Theorem 5. 체 F 에 대한 벡터 공간 V 의 부분 공간 W_1 과 W_2 에 대해서, $W_1 + W_2$ 도 V 의 부분 공간이다.

Proof. 임의의 $\mathbf{v}_1 \in W_1 + W_2$ 에 대해 어떤 $\mathbf{w}_1 \in W_1$ 과 $\mathbf{w}_2 \in W_2$ 가 존재하며, 마찬가지로 임의의 $\mathbf{v}_2 \in W_1 + W_2$ 에 대해 어떤 $\mathbf{u}_1 \in W_1$ 과 $\mathbf{u}_2 \in W_2$ 가 존재한다. W_1 과 W_2 는 부분 공간이므로 임의의 $c_1, c_2 \in F$ 에 대해

$$c_1 \mathbf{w}_1 + c_2 \mathbf{w}_2 \in W_1$$

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 \in W_2$$

이고,

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 = (c_1 \mathbf{w}_1 + c_2 \mathbf{w}_2) + (c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2)$$

이므로,

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 \in W_1 + W_2$$

이다. 따라서 $W_1 + W_2 < V$ 이다. □

2018년 9월 10일 **Theorem 6.** 유한 생성 벡터 공간 U 와 W 에 대해, 다음이 성립한다:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Proof. $l = \dim(U \cap W)$, $n = \dim U - l$, $m = \dim W - l$ 이라 하고, $U \cap W$ 의 기저를 $\mathcal{B}_\cap = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l\}$ 라고 하자. \mathcal{B}_\cap 을 확장해 U 의 기저 $\mathcal{B}_U = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ 와 W 의 기저 $\mathcal{B}_W = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ 을 구성할 수 있다.

우선 $\mathcal{B}_\cap = \mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$ 임을 보이자.¹ 먼저 $\mathcal{B}_\cap \subseteq \mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$ 임은 자명하다. $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$ 에 속하는 원소 \mathbf{x} 를 고르자. $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W \subseteq U \cap W$ 이므로, $\mathbf{x} \in \text{Span } \mathcal{B}_\cap$ 이다. 나아가 \mathcal{B}_U 와 \mathcal{B}_W 의 원소인 \mathbf{x} 는 \mathcal{B}_\cap 의 모든 원소들과 독립이므로, $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_\cap$ 이어야 한다. 따라서 $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W \subseteq \mathcal{B}_\cap$ 이다. 이제 $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ 가 $U + W$ 의 기저임을 보이자.

¹하지만 $\mathcal{B}_U \setminus \mathcal{B}_W$ 는 $U \setminus W$ 의 기저가 아니다. $\mathbf{0} \in U \cap W$ 임에 따라 $\mathbf{0} \notin U \setminus W$ 이므로, $U \setminus W$ 는 벡터 공간이 아니기 때문이다.

$U + W$ 의 원소 \mathbf{v} 를 고르면, $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ 가 되는 $\mathbf{u} \in U$ 와 $\mathbf{w} \in W$ 가 존재한다. 따라서,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{u} + \mathbf{w} \\ &= \left(\sum_{i=1}^l a_i \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{u}_j \right) + \left(\sum_{i=1}^l a'_i \mathbf{v}_i + \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{w}_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^l (a_i + a'_i) \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{u}_j + \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{w}_k\end{aligned}$$

이므로 \mathbf{v} 는 $\text{Span}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W)$ 의 원소이고, $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ 는 $U + W$ 를 생성한다.

이제

$$\sum_{i=1}^l a_i \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{u}_j + \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{w}_k = \mathbf{0}$$

이라고 하자. \mathbf{u}_j 항을 제외하고 모두 우변으로 이항하면

$$\sum_{j=1}^n b_j \mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^l -a_i \mathbf{v}_i + \sum_{k=1}^m -c_k \mathbf{w}_k$$

이 되고, $\mathbf{z} = \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{u}_j$ 라고 두자.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n b_j \mathbf{u}_j &\in \text{Span } \mathcal{B}_U = U \\ \sum_{i=1}^l -a_i \mathbf{v}_i + \sum_{k=1}^m -c_k \mathbf{w}_k &\in \text{Span } \mathcal{B}_W = W\end{aligned}$$

이므로, $\mathbf{z} \in U \cap W = \text{Span } \mathcal{B}_\cap = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \rangle$ 이다. 따라서 $j \in \{1, \dots, l\}$ 에 대해 $b_j = 0$ 이고 $k \in \{1, \dots, m\}$ 에 대해 $c_k = 0$ 이다. 이에 따라 $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ 이 되어 $i \in \{1, \dots, l\}$ 에 대해서도 $a_i = 0$ 이다. 그러므로 $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ 은 일차 독립이다.

$\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ 는 $U + W$ 를 생성하고 일차 독립이므로, $U + W$ 의 기저이다. 결국

$$\begin{aligned}\dim(U + W) &= |\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W| \\ &= |\mathcal{B}_U| + |\mathcal{B}_W| - |\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W| \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)\end{aligned}$$

□