

공학 수학 강의 노트

이재호

jaeho.lee@snu.ac.kr

마지막 수정: 2018년 10월 25일

7 Linear Algebra: Matrices, Vectors, Determinants. Linear Systems

2018년 9월 3일 Field는 수학과 물리학에서 지칭하는 대상이 다르다:

- 체體: 실수체, 복소수체
- 장場: 전자기장, 벡터장

정의 1. 체는 $+$, $-$, \times , \div 에 대해 닫혀 있는 수 집합을 말한다.

예시.

- \mathbb{Q} 는 조밀(dense)하다.
- \mathbb{R} 은 콤팩트(compact)하다.
- \mathbb{C} 는 대수적으로 닫혀(closed) 있다.
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$

정의 2. 벡터공간은 (roughly) 덧셈(+)과 (어떤 체에 속하는) 상수배가 정의된 집합이다.

예시.

- $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ 은 덧셈에 대해 닫혀 있고, $k \in \mathbb{R}$ 의 곱에 대해 닫혀 있으므로 실수체에 대한 벡터공간이다.

- \mathbb{R}^n 과 \mathbb{C}^n 은 실수체에 대한 벡터공간이면서 유리수체에 대한 벡터공간이다. 이를 각각 \mathbb{Q} -벡터공간, \mathbb{R} -벡터공간이라고 한다.
- $\mathcal{C}_I^0 = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{는 연속 함수, } I \subset \mathbb{R}\}$ 에서는, $x \mapsto \sin x$ 가 하나의 벡터이다.
- $\mathcal{C}_I^n = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists f^{(n)}, f^{(n)} \text{는 연속 함수, } I \subset \mathbb{R}\}$ 이며, $\mathcal{C}_I^0 > \mathcal{C}_I^1 > \dots > \mathcal{C}_I^\infty$ 이다.

정의 2. 체 F 에 대한 벡터공간 V 의 원소 $v_1, \dots, v_n \in V$ 에 대해서,

1. $c_1, \dots, c_k \in F$ 일 때

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$$

는 v_1, \dots, v_k 의 일차결합, 혹은 선형결합 (linear combination) 이라고 한다.

2. v_1, \dots, v_k 의 선형 생성

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

은 모든 일차결합의 집합이다. 예를 들어, 어떤 평면 상의 평행하지 않은 두 벡터는 그 평면을 선형 생성한다.

3. $W \subset V$ 이면서 W 가 벡터공간이면, W 는 V 의 부분공간이라고 하며 $W < V$ 로 표기한다. 예를 들어, 실수 평면으로 나타내어지는 \mathbb{R}^2 벡터공간의 부분 집합인 원점을 지나는 직선은 벡터공간이므로 부분공간이다. 반면, 원점을 지나지 않는 직선은 부분집합이지만 벡터공간은 아니므로 부분공간이 아니다.
4. $W = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} < V$ 일 때, v_1, \dots, v_k 는 W 의 생성자(generator)라고 한다.
5. v_1, \dots, v_k 가 일차종속(linearly dependent)라는 것은 어느 하나가 다른 벡터들의 일차결합이라는 것이다. 일차종속이 아니면 일차독립(linearly independent)이라고 한다. 예를 들어, \mathbb{R}^3 에서 $(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)$ 는 일차종속인 반면, $(1, 2, 3), (4, 5, 6)$ 은 일차독립이다.

2018년 9월 5일 정리 1. 체 F 에 대한 벡터공간 V 의 원소들 v_1, \dots, v_k 가 일차독립이라는 것은, $c_1, \dots, c_k \in F$ 일 때

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = \dots = c_k = 0$$

이라는 것과 동치이다.

증명. (\Rightarrow) (재배열 가능하여) $c_k \neq 0$ 이라고 가정하자. 그렇다면,

$$v_k = - \left(\frac{c_1}{c_k} v_1 + \cdots + \frac{c_{k-1}}{c_k} v_{k-1} \right)$$

이므로 v_1, \dots, v_k 가 일차독립이라는 가정에 모순된다.

(\Leftarrow) v_1, \dots, v_k 가 일차종속이라고 가정하자. 즉, (재배열 가능하여) 어떤 $a_1, \dots, a_{k-1} \in F$ 가 존재해서,

$$v_k = a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1}$$

이다. 그렇다면

$$a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1} + (-1) v_k = 0$$

이므로 모순이다. □

예시.

- $a, b, c \in \mathbb{R}$ 에 대해

$$a(1, 2, 3) + b(4, 5, 6) + c(7, 8, 10) = (0, 0, 0)$$

을 만족하는 a, b, c 는 0밖에 없으므로 $(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 10)$ 은 일차독립이다.

- $0, v_1, \dots, v_k$ 는 일차종속이다.
- v_1, v_2, v_3, v_4 가 일차독립이면 v_1, v_2, v_3 또한 일차독립이다. (v_1, v_2, v_3 가 종속이면 $v_3 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + 0 v_4$ 이기 때문이다.)

정의 3. 벡터공간 V 의 부분공간 W 가 일차독립인 v_1, \dots, v_k 에 의해 생성될 때, $\{v_1, \dots, v_k\}$ 를 W 의 기저(basis)라고 한다.

정리 2 (차원(dimension) 정리). W 가 유한생성된(finitely generated) (부분) 공간이면 W 의 기저의 원소의 개수는 동일하다. 이 때, 기저의 원소 개수를 W 의 차원(dimension)이라고 하며, $\dim W$ 로 표기한다.

예시.

- $\mathcal{P}_n = \{n\text{차 이하 실계수 다항식}\}$ 일 때, $f \in \mathcal{P}_n$ 는 항상 $\mathcal{B} = \{1, x, \dots, x^n\}$ 의 원소의 상수배의 합으로 나타낼 수 있다. 또한,

$$c_0 \cdot 1 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$$

이면 $c_0 = \dots c_n = 0$ 이므로, \mathcal{B} 는 기저이다.

- $\mathcal{P} = \{\text{모든 다항식}\}$ 의 기저는 $\{1, x, x^2, \dots\}$ 이며 $\dim \mathcal{P} = \infty$ 이다.

숙제.

1. a_1, a_2, a_3 는 서로 다른 실수이다. 이 때, $(1, a_1, a_1^2), (1, a_2, a_2^2), (1, a_3, a_3^2)$ 이 일차독립임을 보여라.
2. a_1, \dots, a_n 는 서로 다른 실수이다. 이 때, $(1, a_1, a_1^2), \dots, (1, a_n, a_n^2)$ 이 일차독립임을 보여라.

정리 3. 체 F 에 대한 벡터공간 V 의 일차독립인 v_1, \dots, v_k 에 대해서, $w \in V \setminus \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ 이면 v_1, \dots, v_k, w 는 일차독립이다.

증명. $c_1, \dots, c_k, a \in F$ 일 때,

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k + a w = 0$$

이라고 가정하자. 만약 $a \neq 0$ 이라면

$$w = -\left(\frac{c_1}{a} v_1 + \dots + \frac{c_k}{a} v_k\right) \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

이므로 모순이다. 따라서 $a = 0$ 이며, v_1, \dots, v_k 는 일차독립이므로 $c_1 = \dots = c_k = a = 0$ 이다. 그러므로 v_1, \dots, v_k, w 는 일차독립이다. \square

정리 3에 따르면, 일차독립인 벡터들의 선형 생성에 포함되지 않는 벡터 또한 이들과 일차독립이다. 이에 따라 어떤 유한생성된 벡터공간 V 의 일차독립인 벡터들 v_1, \dots, v_k 가 주어졌을 때, 선형 생성에 속하지 않는 벡터 $w_{k+1}, \dots, w_{\dim V}$ 를 순차적으로 추가해서 기저를 구성할 수 있다. 이를 기저 확장(basis extension)이라고 부른다.

정리 4. 체 F 에 대한 벡터공간 V 의 부분공간 W_1, W_2 가 주어졌을 때, $W_1 \cap W_2$ 또한 V 의 부분공간이다.

증명. $v_1, v_2 \in W_1$ 이면서 $v_1, v_2 \in W_2$ 이면, 각각 벡터공간이므로 임의의 $c_1, c_2 \in F$ 에 대해서 $c_1 v_1 + c_2 v_2 \in W_1$ 이면서 $c_1 v_1 + c_2 v_2 \in W_2$ 이다. 즉,

$$v_1, v_2 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \forall c_1, c_2 \in F \quad c_1 v_1 + c_2 v_2 \in W_1 \cap W_2$$

이다. 따라서, $W_1 \cap W_2 < V$ 가 성립한다. \square

정의 4. 벡터공간 V 의 부분집합 W_1, W_2 에 대해서 $W_1 + W_2$ 를 다음과 같이 정의한다:

$$W_1 + W_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in W_1, v_2 \in W_2\}.$$

예시. 좌표 평면으로 나타내어지는 벡터공간 \mathbb{R}^2 의 부분집합(이면서 부분공간인)인 원점을 지나는 직선을 W_1 이라고 하자. 원점이 아닌 한 점만을 원소로 하는 집합 $W_2 \subset \mathbb{R}^2$ 가 주어졌을 때, $W_1 + W_2$ 는 W_1 의 직선을 W_2 의 (유일한) 원소의 점으로 평행 이동한 직선을 나타낸다.

정리 5. 체 F 에 대한 벡터공간 V 의 부분공간 W_1 과 W_2 에 대해서, $W_1 + W_2$ 도 V 의 부분공간이다.

증명. 임의의 $v_1 \in W_1 + W_2$ 에 대해 어떤 $w_1 \in W_1$ 과 $w_2 \in W_2$ 가 존재하며, 마찬가지로 임의의 $v_2 \in W_1 + W_2$ 에 대해 어떤 $u_1 \in W_1$ 과 $u_2 \in W_2$ 가 존재한다. W_1 과 W_2 는 부분공간이므로 임의의 $c_1, c_2 \in F$ 에 대해

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 \in W_1$$

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 \in W_2$$

이고,

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = (c_1 w_1 + c_2 w_2) + (c_1 u_1 + c_2 u_2)$$

이므로,

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 \in W_1 + W_2$$

이다. 따라서 $W_1 + W_2 < V$ 이다. □

2018년 9월 10일 **정리 6** (그라스만(Graßmann) 공식). 체 F 에 대한 유한생성된 벡터공간 U 와 W 에 대해, 다음이 성립한다:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

증명.

$$l = \dim(U \cap W)$$

$$n = \dim U - l$$

$$m = \dim W - l$$

이라 하고, $U \cap W$ 의 기저를 $\mathcal{B}_\cap = \{v_1, \dots, v_l\}$ 라고 하자. \mathcal{B}_\cap 을 확장해 U 의 기저 $\mathcal{B}_U = \{v_1, \dots, v_l, u_1, \dots, u_n\}$ 와 W 의 기저 $\mathcal{B}_W = \{v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_m\}$ 을 구성할 수 있다.

이제 $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \{v_1, \dots, v_l, u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m\}$ ¹가 $U + W$ 의 기저임을

¹이를 위해서는 u_1, \dots, u_n 과 w_1, \dots, w_m 에 겹치는 원소가 없어야 한다. 이는 $\mathcal{B}_\cap = \mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$ 와 동치인데, 자명할수도 있겠지만 증명 후에 다루었다.

보이자. $U + W$ 의 원소 v 를 고르면, $v = u + w$ 가 되는

$$u = a_1 v_1 + \cdots + a_l v_l + b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n$$

와

$$w = a'_1 v_1 + \cdots + a'_l v_l + c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m$$

가 존재하고, 이러한 $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_n, a'_1, \dots, a'_l, c_1, \dots, c_m \in F$ 는 유일하다. 따라서,

$$\begin{aligned} v &= u + w \\ &= \left(\sum_{i=1}^l a_i v_i + \sum_{j=1}^n b_j u_j \right) + \left(\sum_{i=1}^l a'_i v_i + \sum_{k=1}^m c_k w_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^l (a_i + a'_i) v_i + \sum_{j=1}^n b_j u_j + \sum_{k=1}^m c_k w_k \end{aligned}$$

이므로 v 는 $\text{Span}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W)$ 의 원소이고, $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ 는 $U + W$ 를 생성한다.

이제

$$\sum_{i=1}^l a_i v_i + \sum_{j=1}^n b_j u_j + \sum_{k=1}^m c_k w_k = \mathbf{0}$$

이라고 하자. u_j 항을 제외하고 모두 우변으로 이항하면

$$\sum_{j=1}^n b_j u_j = \sum_{i=1}^l -a_i v_i + \sum_{k=1}^m -c_k w_k$$

이 되고, $z = \sum_{j=1}^n b_j u_j$ 라고 두자.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n b_j u_j &\in \text{Span } \mathcal{B}_U = U \\ \sum_{i=1}^l -a_i v_i + \sum_{k=1}^m -c_k w_k &\in \text{Span } \mathcal{B}_W = W \end{aligned}$$

이므로, $z \in U \cap W = \text{Span } \mathcal{B}_\cap = \langle v_1, \dots, v_l \rangle$ 이다. 즉

$$z = d_1 v_1 + \cdots + d_l v_l$$

이 되는 $d_1, \dots, d_l \in F$ 가 유일하게 존재한다. 그런데 \mathcal{B}_U 와 \mathcal{B}_W 는 일차독립이므로 $j \in \{1, \dots, l\}$ 에 대해 $b_j = 0$ 이고 $k \in \{1, \dots, m\}$ 에 대해 $c_k = 0$ 이다. 이에 따라 $z = \mathbf{0}$ 이 되어 $i \in \{1, \dots, l\}$ 에 대해서도 $a_i = 0$ 이다. 그러므로 $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ 은

일차독립이다.

$\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ 는 $U + W$ 를 생성하고 일차독립이므로, $U + W$ 의 기저이다. 결국

$$\begin{aligned}\dim(U + W) &= |\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W| \\ &= l + n + m \\ &= (l + n) + (l + m) - l \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)\end{aligned}\quad \square$$

나의 참고. 위 증명에서 $\mathcal{B}_\cap = \mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$ 임을 보이자.² 위 증명이 성립하기 위해서는 $\{u_1, \dots, u_n\}$ 와 $\{w_1, \dots, w_m\}$ 의 모든 원소가 달라야하기 때문이다. 먼저 $\mathcal{B}_\cap \subseteq \mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$ 임은 자명하다. $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$ 에 속하는 원소 x 를 고르자. $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W \subseteq U \cap W$ 이므로, $x \in \text{Span } \mathcal{B}_\cap$ 이다. 나아가 \mathcal{B}_U 와 \mathcal{B}_W 의 원소인 x 는 \mathcal{B}_\cap 의 모든 원소들과 일차독립이므로, $x \in \mathcal{B}_\cap$ 이어야 한다. 따라서 $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W \subseteq \mathcal{B}_\cap$ 이다.

정의 5. 체 F 에 대한 벡터공간 V, W 에서, 임의의 $v_1, v_2 \in V$ 와 $c_1, c_2 \in F$ 에 대해

$$L(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 L(v_1) + c_2 L(v_2)$$

을 만족하는 함수 $L : V \rightarrow W$ 을 선형변환(linear transformation) 혹은 선형사상(linear map)이라고 한다.

예시.

1. $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대해,

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \\ 5x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

은 선형변환이다.

2. $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대해,

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \\ 5x + 6y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

은 선형변환이 아니다.

²참고로, $\mathcal{B}_U \setminus \mathcal{B}_W$ 는 $U \setminus W$ 의 기저가 아니다. $0 \in U \cap W$ 임에 따라 $0 \notin U \setminus W$ 이므로, $U \setminus W$ 는 벡터공간이 아니기 때문이다.

3. 어떤 사상 $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 이 존재한다는 것은 어떤 $m \times n$ 행렬 A 가 존재해서 $L(x) = Ax$ 라는 것이다.
4. $f \mapsto f'$ 의 미분 연산자 $L: \mathcal{C}_I^\infty \rightarrow \mathcal{C}_I^\infty$ 는 $L(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1f_1' + c_2f_2' = c_1L(f_1) + c_2L(f_2)$ 이므로 선형변환이다.
5. $f(x) \mapsto \int_0^x f(t) dt$ 의 적분 연산자 $L: \mathcal{C}_I^\infty \rightarrow \mathcal{C}_I^\infty$ 또한 선형변환이다.

정의 6. 두 벡터공간 V 와 W 간의 선형변환 $L: V \rightarrow W$ 에 대해 다음이 정의된다:

1. L 의 핵(kernel) 혹은 영 공간(null space)³

$$\ker L = N(L) := \{v \in V \mid L(v) = 0\}.$$

2. L 의 치역(range) 혹은 상(image)⁴

$$R(L) = \text{Im}(L) := \{L(v) \mid v \in V\}.$$

3. L 이 일대일 함수(one-to-one function) 혹은 단사 함수(injective function, injection)라는 것은 다음을 의미한다:

$$\forall v_1, v_2 \in V \quad (L(v_1) = L(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2)$$

4. L 이 위로의(onto) 함수 혹은 단사 함수(surjective function, surjection)라는 것은 다음을 의미한다:

$$\forall w \in W \quad \exists v \in V \quad L(v) = w$$

예시.

1. $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 일 때 $\ker L (= N(L))$ 을 구하시오.

³영 공간이라는 용어는 보통 행렬에 국한되어 사용되고, 핵은 추상적인 선형변환에 대해 많이 사용된다.

⁴치역은 정의역의 상이다. 상은 정의역의 부분집합에 대해서도 정의될 수 있다.

풀이.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{Echelon}} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Reduce}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

즉

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

이 되어, $N(L) = \langle (1, -2, 1) \rangle$ 이다. ■

2. $R(L)$ ($= \text{Im}(L)$) 을 구하시오.

풀이. $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 이므로,

$$L(e_1) = (1, 4, 7)$$

$$L(e_2) = (2, 5, 8)$$

$$L(e_3) = (3, 6, 9)$$

가 된다. 따라서

$$\begin{aligned} R(L) &= \{L(x, y, z) \mid (x, y, z) \in V\} \\ &= \{L(xe_1 + ye_2 + ze_3) \mid (x, y, z) \in V\} \\ &= \{xL(e_1) + yL(e_2) + zL(e_3) \mid (x, y, z) \in V\} \\ &= \text{Span}\{L(e_1), L(e_2), L(e_3)\} \\ &= \langle (1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9) \rangle \\ &= \langle (1, 4, 7), (2, 5, 8) \rangle \end{aligned}$$

이다. ■

정리 7. 벡터공간 V 와 W 간의 선형사상 $L : V \rightarrow W$ 에 대해 $N(L) < V$ 이고 $R(L) < W$ 이다.

정리 8 (계수(rank)-퇴화 차수(nullity) 정리). 벡터공간 V 와 W 간의 선형사상 $L : V \rightarrow W$ 에 대해 다음이 성립한다:

$$\dim N(L) + \dim R(L) = \dim V.^5$$

예시. 이전 예시에서 $N(L) = \langle (1, -2, 1) \rangle$ 이고 $R(L) = \langle (1, 4, 7), (2, 5, 8) \rangle$ 이므로, $\dim N(L) + \dim R(L) = 1 + 2 = 3$ 이 성립한다.

2018년 9월 12일 **정리 9.** 벡터 공간 V 와 W 간의 선형변환 $L : V \rightarrow W$ 에 대해서 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 이 V 의 기저라면,

$$R(L) = \text{Span}\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$$

이다.

참고. 위에서 $\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ 이 기저일 필요는 없다.

정리 10. 벡터공간 V 와 W 간의 선형변환 $L : V \rightarrow W$ 가 일대일이라는 것은 $N(L) = \{0\}$ 라는 것과 동치이다.

증명. (\Rightarrow) $L(0) = 0$ 이고, L 은 일대일이므로 $L(v) = 0$ 를 만족하는 $v = 0$ 가 유일하다.

(\Leftarrow) $L(v_1) = L(v_2)$ 인 임의의 $v_1, v_2 \in V$ 를 고르자. 그렇다면

$$L(v_1) - L(v_2) = L(v_1 - v_2) = 0$$

인데, $N(L) = \{0\}$ 이므로 $v_1 - v_2 = 0$ 이다. 따라서 $v_1 = v_2$ 이며, L 은 일대일 함수이다. \square

정리 11. 벡터공간 V 와 W 간의 선형변환 $L : V \rightarrow W$ 가 일대일이라는 것은 $\dim R(L) = \dim V$ 라는 것과 동치이다.

증명. L 이 일대일이라는 것은 정리 10에 따라 $N(L) = \{0\}$, 즉 $\dim N(L) = 0$ 이라는 것과 동치이다.⁶ 그런데 정리 8에 따라서 $\dim N(L) + \dim R(L) = \dim V$ 이므로, $\dim R(L) = \dim V$ 가 성립한다. \square

정리 12. 벡터공간 V 와 W 간의 선형변환 $L : V \rightarrow W$ 가 전단사라는 것은 L 의 역함수 $L^{-1} : W \rightarrow V$ 가 존재한다는 것과 동치이다. 이 때, L^{-1} 도 선형이다.

증명. 전단사 함수가 역함수를 가진다는 증명은 생략한다. L^{-1} 이 선형임을 보인다.

⁵계수와 퇴화 차수에 대해서는 다음 강좌에 정의한다.

⁶ $\dim N(L) = 0 \Leftrightarrow N(L) = \{0\}$

W 에서 두 원소 w_1 와 w_2 를 고르자. 이 때,

$$\begin{aligned} L^{-1}(w_1) &= v_1 \\ L^{-1}(w_2) &= v_2 \end{aligned}$$

라고 하자. 그렇다면 w_1 과 w_2 의 선형결합은 다음과 같이 표현된다:

$$\begin{aligned} c_1 w_1 + c_2 w_2 &= c_1 L(v_1) + c_2 L(v_2) \\ &= L(c_1 v_1 + c_2 v_2) \end{aligned}$$

양변에 역함수를 취해주면

$$\begin{aligned} L^{-1}(c_1 w_1 + c_2 w_2) &= c_1 v_1 + c_2 v_2 \\ &= c_1 L^{-1}(w_1) + c_2 L^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

이 되어 L^{-1} 또한 선형변환임을 알 수 있다. □

정의 7. 벡터공간 V 와 W 간의 선형변환 $L : V \rightarrow W$ 에 대해서, L 의 계수

$$\text{rank } L := \dim R(L)$$

로 정의한다.

정리 13. 벡터공간 U, V, W 에 대해 선형변환 $L_1 : U \rightarrow V$ 와 $L_2 : V \rightarrow W$ 이 주어졌다고 하자. 만약 L_2 가 일대일 함수라면, 다음이 성립한다:

$$\text{rank}(L_2 \circ L_1) = \text{rank } L_1$$

증명. 정리 7에 의해 $R(L_1)$ 은 벡터공간이므로, 선형변환 $\tilde{L}_2 : R(L_1) \rightarrow W$ 를 정의하자:

$$\forall v \in R(L_1) \subset V \quad \tilde{L}_2(v) = L_2(v)$$

따라서 \tilde{L}_2 또한 일대일 선형변환임을 알 수 있다. 정리 11에 따라

$$\dim R(\tilde{L}_2) = \dim R(L_1)$$

이다. 그런데

$$\begin{aligned} R(\tilde{L}_2) &= \{\tilde{L}_2(v) \mid v \in R(L_1)\} \\ &= \{L_2(v) \mid v \in R(L_1)\} \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} R(L_2 \circ L_1) &= \{(L_2 \circ L_1)(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in U\} \\ &= \{L_2(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} = L_1(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in U\} \\ &= \{L_2(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in R(L_1)\} \end{aligned}$$

이므로 $R(\tilde{L}_2) = R(L_2 \circ L_1)$ 이다. 따라서 $\dim R(\tilde{L}_2) = \dim R(L_2 \circ L_1) = \dim R(L_1)$ 이 성립한다. \square

참고. 위 증명에서 $R(L_2 \circ L_1)$ 의 기저와 $R(L_1)$ 의 기저의 개수가 같음을 보이면 되므로 $R(L_1)$ 의 기저 각각에 L_2 를 취한 벡터들이 다시 $R(L_2 \circ L_1)$ 의 기저가 됨을 보여도 된다.

정의 8. $m \times n$ 행렬 (matrix)이란, m 개의 행과 n 개의 열로 이루어진 원소들의 나열이다:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

두 행렬의 곱은 각각의 행렬에 대응되는 선형변환의 합성에 대응된다. 즉, 어떤 선형변환 $L_A : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$ 이 $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ 로 대응시키고 $L_B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 이 $A\mathbf{x} \mapsto B(A\mathbf{x}) = BA\mathbf{x}$ 로 대응시킨다면, BA 는 $L_B \circ L_A$ 에 대응된다.

$n \times n$ 행렬 A, B 에 대해서 $AB = BA = I$ 이라면, $A = B^{-1}$ 이고 $B = A^{-1}$ 이다. 이 때,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

을 말한다.

정의 9. 선형변환 L_A 에 대응되는 행렬 A 에 대해서, 열공간(column space)은 A 의 열벡터들의 생성이다. 이 때 열공간의 차원을 열계수(column rank)라고 부른다. 마찬가지로, 행공간(row space)은 A 의 행벡터들의 생성이다. 이 때 행공간의 차원을 행계수(row rank)라고 부른다.

예시. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 에서 열벡터 $(1, 4, 7)$ 과 $(3, 6, 9)$ 는 일차독립이고, $(2, 5, 8)$ 은 두 벡터의 합의 절반이므로 일차종속이다. 따라서 열계수는 2이다. 또한 행벡터

(1,2,3)과 (7,8,9)는 일차독립이고, (4,5,6)은 두 벡터의 합의 절반이므로 일차종속이다. 따라서 행계수도 2이다.

정리 14. 선형변환 L_A 에 대응되는 행렬 A 에 대해서, 열공간은 $R(L_A)$ 와 동일하다. 따라서 열계수는 L_A 의 계수 $\dim R(L_A) = \text{rank } L_A$ 와 같다.

정리 15. 선형변환 L_A 에 대응되는 행렬 A 에 대해서, 열계수와 행계수는 동일하다. 즉, 열계수와 행계수 모두 $\text{rank } L_A$ 로 나타내어지며 바로 행렬 A 를 사용해 $\text{rank } A$ 라고 쓸 수 있다.

두 행을 교환하거나, 어떤 행의 상수배를 다른 행에 더하거나, 한 행에 0이 아닌 상수를 곱하는 연산을 행렬의 기본 행 연산이라고 한다. 마찬가지로 열에 대해서도 기본 열 연산을 정의할 수 있다.

정리 16. 두 행렬 A 와 B 의 곱을 C 라고 하자. 행렬 A 에 기본 행 연산을 취한 새로운 행렬을 \tilde{A} 라고 하자. 행렬 C 에 동일한 기본 행 연산을 취한 새로운 행렬을 \tilde{C} 라고 하면, 여전히 $\tilde{A}B = \tilde{C}$ 가 성립한다.

정의 10. 항등행렬 I 에 기본 행/열 연산을 한 번한 것을 기본 행렬이라고 부른다.

예시. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 은 모두 계수가 3인 기본 행렬들이다.

정리 17. $n \times n$ 기본 행렬의 계수는 n 이다.

증명. $n \times n$ 항등행렬 I 에 대해서, 각 열벡터를 e_1, \dots, e_n 이라고 하자. 이 때 열벡터들은 서로 독립이므로 $\text{rank } I = n$ 이다.

I 에 어떤 기본 열 연산을 하여 기본 행렬 A 를 만들었다고 하자. 기본 열 연산이 1. 열의 교환인 경우, 2. 열의 상수배를 하여 다른 열에 더한 경우, 3. 열에 0이 아닌 상수를 곱한 경우에 대해서 생각하자.

1. 열을 교환했을 경우

i 번째 열과 j 번째 열을 교환했다고 하자. 그렇다면 A 의 열벡터들은 $e_1, \dots, e_j(i \text{ 번째}), \dots, e_i(j \text{ 번째}), \dots, e_n$ 이 된다. 그런데 e_1, \dots, e_n 은 순서와 상관없이 일차독립이므로 A 의 열벡터들도 일차독립이다.

2. 열의 상수배를 하여 다른 열에 더한 경우

i 번째 열에 k 배를 하여 j 열에 더했다고 하자. ($k \neq 0$ 이다.) 그렇다면 A 의 열벡터들은 $e_1, \dots, e_j + ke_i, \dots, e_n$ 이 된다. 다음의 선형결합을 생각하자:

$$c_1 e_1 + \dots + c_j(e_j + ke_i) + \dots + c_n e_n = 0$$

만약 c_j 가 0이 아니라면, 다음과 같이 식을 재작성할 수 있다:

$$\mathbf{e}_j = -\frac{1}{c_j} (c_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + c_{j-1} \mathbf{e}_{j-1} + c_{j+1} \mathbf{e}_{j+1} + \cdots + c_n \mathbf{e}_n) + \frac{k}{c_j} \mathbf{e}_1$$

이 때 $\frac{k}{c_j} \neq 0$ 이므로 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 이 독립이라는 것에 모순이다. 따라서 $c_j = 0$ 이다. 결국,

$$c_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + c_{j-1} \mathbf{e}_{j-1} + c_{j+1} \mathbf{e}_{j+1} + \cdots + c_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

가 되어, $c_1 = \cdots = c_{j-1} = c_{j+1} = \cdots = c_n = 0$ 이다. 그런데 $c_j = 0$ 이므로 $c_1 = \cdots = c_n = 0$ 이어서, A 의 열벡터들도 일차독립이다.

3. 열에 0이 아닌 상수를 곱한 경우

i 번째 열에 $k \neq 0$ 을 곱했다고 하자. 그렇다면 A 의 열벡터들은 $\mathbf{e}_1, \dots, k\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_n$ 이 된다. 다음의 선형결합을 생각하자:

$$c_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + c_i (k\mathbf{e}_i) + \cdots + c_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 의 독립성에 의해 $c_1 = \cdots = c_i k = \cdots = c_n = 0$ 이 된다. 그런데 $k \neq 0$ 이므로 $c_1 = \cdots = c_n = 0$ 이다. 따라서 A 의 열벡터들도 일차독립이다.

따라서, A 의 열공간의 차원은 n 이고 정리 15 의해 $\text{rank } A = n$ 이다. 마찬가지로 기본 행 연산의 경우에도 모든 과정을 행벡터에 대입하여 진행하면 동일하게 계수가 n 임을 알 수 있다. \square

정리 18. 어떤 유한생성된 벡터공간 V 와 부분공간 W 가 주어졌다고 하자. 그렇다면, 다음이 성립한다:

$$\dim W = \dim V \Rightarrow W = V$$

증명. $\dim W = \dim V = n$ 일 때, 벡터공간 W 의 기저 $\mathcal{B} = \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ 를 구성하자. $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ 은 일차독립이고 V 의 원소이기도 하므로, 기저 확장을 통해 V 의 기저를 구성할 수 있다. 그런데 이미 $|\mathcal{B}| = \dim V$ 이므로, \mathcal{B} 는 V 의 기저이다. 따라서 $\text{Span } \mathcal{B} = W = V$ 이다. \square

정리 19. 선형변환 $L: V \rightarrow V$ 에 대해서, 다음의 명제는 동치이다:

1. L 는 일대일 함수이다.
2. L 는 위로의 함수이다.
3. $\text{rank } L = \dim V$ 이다.

증명. 정리 11에 의해 L 가 일대일 함수라는 것은 $\dim R(L) = \dim V$, 즉 $\text{rank } L = \dim V$ 라는 것과 동치이다. 따라서 1과 3은 동치이다.

이제 2와 3이 동치임을 보이자. 만약 L 가 위로의 함수이면, 공역과 치역이 동일하다. 즉, $R(L) = V$ 다. 따라서 $\text{rank } L = \dim R(L) = \dim V$ 이 성립한다.

역으로, $\text{rank } L = \dim V$ 라고 하자. $\dim R(L) = \dim V$ 이므로, 정리 18에 따라 $R(L) = V$ 이다. 그러므로 L 는 위로의 함수이다.

따라서, 1, 2, 3은 모두 동치이다. \square

2018년 9월 17일 지금까지의 내용을 간략히 요약하고, 약간의 내용을 덧붙인다. 체란 간단히 가감승제에 대해서 닫힌 집합이고, 벡터공간은 덧셈과 스칼라 곱에 대해 닫힌 집합이다. 또한 일차결합, 일차독립, 일차종속과 기저 등에 대해서 다루었다.

정리에는 기저의 원소의 개수가 항상 일정하다는 정리 2), 벡터공간의 교집합도 벡터공간이라는 것을 보여주는 정리 4, 벡터공간의 합 또한 벡터공간이며 (정리 5) 그 차원은 각각의 차원의 합에서 교집합의 차원을 제한 것이라는 정리 6이 있었다. 어떤 선형사상의 영공간과 치역은 각각 정의역과 공역의 부분공간이며 (정리 7), 그 차원의 합은 정의역의 차원임을 알려주는 정리 8가 있었다. 또한 행렬의 행계수, 열계수, 그리고 대응되는 선형변환의 계수가 모두 같다는 정리 15가 있었다.

정리 20. 벡터공간 V 와 W 간의 선형변환 $L : V \rightarrow W$ 이 일대일 함수라는 것은 임의의 일차독립인 벡터들 $v_1, \dots, v_k \in V$ 을 골랐을 때, $L(v_1), \dots, L(v_k)$ 또한 일차독립이라는 것과 동치이다.

증명. 먼저 L 이 일대일 함수라고 가정하자. 임의의 일차독립인 벡터들 v_1, \dots, v_k 에 선형변환 L 을 취한 벡터들의 선형결합

$$c_1 L(v_1) + \dots + c_n L(v_n) = \mathbf{0}$$

를 생각하자. 그렇다면,

$$L(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = \mathbf{0}$$

인데, 정리 10에 따라 $N(L) = \{\mathbf{0}\}$ 이므로

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = \mathbf{0}$$

임을 알 수 있다. 그런데 v_1, \dots, v_n 은 일차독립이므로 $c_1 = \dots = c_n = 0$ 이다. 따라서 $L(v_1), \dots, L(v_k)$ 는 일차독립이다.

이제 임의의 일차독립인 벡터들 v_1, \dots, v_k 에 대해서 $L(v_1), \dots, L(v_k)$ 가 일차독립이라고 가정하자. $L(v_1) = L(v_2)$ 인 $v_1, v_2 \in V$ 를 고르자. 그런데 $L(v_1) =$

$L(v_2)$ 이므로, 가정한 명제의 대우에 따라서 v_1 과 v_2 는 일차종속이다. 따라서

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = \mathbf{0}$$

인 $(0,0)$ 이 아닌 (c_1, c_2) 가 존재한다. 일반성을 잃지 않고 $c_1 \neq 0$ 이라고 하면,

$$v_1 = -\frac{c_2}{c_1} v_2$$

가 성립한다. 그런데 $L(v_1 - v_2) = \mathbf{0}$ 이므로,

$$\begin{aligned} L(v_1 - v_2) &= L\left(-\frac{c_2}{c_1} v_2 - v_2\right) \\ &= L\left(-\left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right) v_2\right) \\ &= -\left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right) L(v_2) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

이다. 여기서 $L(v_2) = \mathbf{0}$ 일 경우는 모든 벡터에 대한 함숫값이 $\mathbf{0}$ 라는 것이고, 가정이 성립하려면 V 와 W 는 자명한 벡터공간 $\{\mathbf{0}\}$ 이어야만 한다. 이 경우 가능한 선형변환은 유일하며, $\mathbf{0} \in V$ 를 $\mathbf{0} \in W$ 와 대응시키는 일대일(이면서 위로의) 함수이다. 자명하지 않은 벡터공간의 경우, $\frac{c_2}{c_1} = -1$ 이어야 하고 따라서 $v_1 = v_2$ 이다. 따라서 L 은 일대일 함수이다. \square

정리 21. 체 F 에 대한 벡터공간 V 가 v_1, \dots, v_n 에 의해 생성될 때, $\dim V \leq n$ 이다. 만약 $\dim V = n$ 이라면 v_1, \dots, v_n 은 기저를 이룬다.⁷

증명. $\{v_1, \dots, v_n\}$ 의 부분집합 중 일차독립인 최대인 $\{v_1, \dots, v_r\}$ 을 고르고, \mathcal{B} 라고 쓰자. (즉 $r \leq n$ 이며, 원소의 순서는 재배열되었을 수 있다.) V 의 임의의 원소 v 에 대해서, $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ 이므로

$$\exists c_1, \dots, c_n \in F \quad v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

이다. 그런데 v_{r+1}, \dots 은 \mathcal{B} 와 일차종속이므로 v_1, \dots, v_r 로 다시 쓸 수 있다. (일차독립이라면 해당 벡터를 \mathcal{B} 에 추가하여도 여전히 일차독립이어야 하는데, 그러면

⁷강의 내용에 없었으나 본인의 필요에 따라 추가하였다.

\mathcal{B} 가 최대인 일차독립 부분집합이라는 가정에 모순된다.) 따라서,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_r \mathbf{v}_r + c_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} + \cdots \\ &= c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_r \mathbf{v}_r + c_{r+1} \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{v}_i + \cdots \\ &= (c_1 + \alpha_1(c_{r+1} + \cdots)) \mathbf{v}_1 + \cdots + (c_r + \alpha_r(c_{r+1} + \cdots)) \mathbf{v}_r \end{aligned}$$

로 표현되어 $\text{Span } \mathcal{B} = V$ 이다. 결국 \mathcal{B} 는 V 의 기저이며, $\dim V = r \leq n$ 이다.

이렇게 구성된 \mathcal{B} 의 크기가 n 이라고 하자. $\mathcal{B} \subseteq \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 인데 $|\mathcal{B}| = |\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}|$ 이므로, $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 이다. 따라서, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 은 기저를 이룬다. \square

참고. 지금까지의 내용에 따라서, 벡터공간 V 와 W 간의 선형변환 L 에 대해서 다음의 명제들은 서로 동치이다:

1. L 은 일대일 함수이다.
2. $N(L) = \{\mathbf{0}\}$ 이다. (정리 10)
3. $\text{rank } L = \dim V$ 이다. (정리 11)
4. 임의의 선형독립인 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ 에 대해서, $L(\mathbf{v}_1), \dots, L(\mathbf{v}_k)$ 도 선형독립이다. (정리 20)

만약 $V = W$ 이고, V 가 유한생성된 벡터공간이라면, 다음의 명제들도 위 명제들과 동치이다:

5. L 은 위로의 함수이다. (정리 19)
6. L 은 일대일 대응이다. (1과 5로부터)
7. L 은 가역(invertible)이다. (정리 12)

나아가 $V = W = \mathbb{R}^n$ 일 경우, 선형변환 L 에 대응되는 $n \times n$ 행렬 A 가 있어서 다음의 명제들도 위 명제들과 동치이다:

8. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad L^{-1}(\mathbf{v}) = A^{-1}\mathbf{v}$ 이다. (7로부터)
9. A 의 열벡터들은 일차독립이다. (정리 15와 21)

2018년 9월 19일 정리 22. 벡터 공간 U, V, W 에 대해 선형변환 $L_1 : U \rightarrow V$ 와 $L_2 : V \rightarrow W$ 이 주어졌다고 하자. 만약 L_1 가 위로의 함수라면, 다음이 성립한다:

$$\text{rank}(L_2 \circ L_1) = \text{rank } L_2$$

증명. $R(L_2 \circ L_1)$ 은 $L_2 \circ L_1$ 에 대한 U 의 상이다. 즉,

$$\begin{aligned} R(L_2 \circ L_1) &= \{(L_2 \circ L_1)(u) \mid u \in U\} \\ &= \{L_2(v) \mid v = L_1(u), u \in U\} \end{aligned}$$

이다. 그런데 L_1 은 위로의 함수이므로

$$\forall v \in V \quad \exists u \in U \quad L_1(u) = v$$

가 성립한다. 따라서

$$\{L_2(v) \mid v = L_1(u), u \in U\} = \{L_2(v) \mid v \in V\} = R(L_2)$$

이다. 따라서 $R(L_2 \circ L_1) = R(L_2)$ 이며, $\text{rank}(L_2 \circ L_1) = \text{rank } L_2$ 이 성립함을 알 수 있다. \square

정리 23. $m \times n$ 행렬 A 의 계수는 기본 행/열 연산에 대해 불변이다.

증명. 기본 행/열 연산에 대응되는 기본 행렬을 E 라고 하고, A 에 기본 행/열 연산을 취한 행렬을 \tilde{A} 라고 하면,

$$EA = \tilde{A}$$

이다. 이 때 E 는 $m \times n$ 행렬을 $m \times n$ 행렬로 보내는 $m \times m$ 행렬이다. 각 행렬 E, A, \tilde{A} 에 대응되는 행렬을 $L_E, L_A, L_{\tilde{A}}$ 라고 하자. 이 때 $\tilde{A} = EA$ 이므로 $L_{\tilde{A}} = L_E \circ L_A$ 이다. 정리 14와 17에 따라 $\text{rank } E = \text{rank } L_E = m$ 이고, 따라서 정리 10에 따라 L_E 는 일대일이다. 그러므로 정리 13에 의해

$$\text{rank } L_{\tilde{A}} = \text{rank}(L_E \circ L_A) = \text{rank } L_A$$

임을 알 수 있다. 따라서 정리 14에 의해 $\text{rank } A = \text{rank } \tilde{A}$ 이다. \square

정리 24. $m \times n$ 행렬 A 의 행계수는 기본 행/열 연산에 대해 불변이다.

증명. 정리 15에 의해 자명하다.

혹은, 좀 더 직접적으로 정리 23에서 각 행렬에 전치를 취한 후, 기본 행 연산은 기본 열 연산으로, 기본 열 연산은 기본 행 연산으로 바꾼다면 행계수를 열계수로 바꾸어 생각할 수 있다. \square

다음의 연립방정식

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 6 \\4x + 5y + 6z &= 15 \\7x + 8y + 9z &= 24\end{aligned}$$

은 다음과 같이 행렬로 표현할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$$

정리 16에 의해 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 와 $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$ 에 동일한 기본 행 연산을 하여도 등식은 성립한다. 따라서

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이 된다. 위와 같은 형태를 행사다리꼴(row echelon form)이라고 한다. 여기서 z 는 유일하게 정해지지 않으므로 $z = a$ 라고 놓으면, 후진 대입법을 통해서 y 와 x 를 구할 수 있다:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 3 - 2a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

혹은 여기서 그치지 않고 다음과 같이 기본 행 연산을 더 할 수도 있다:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

위와 같은 행태를 기약행 사다리꼴(reduced row echelon form)이라고 한다. 여

기서 바로 $z = a$ 로 둔다면, 쉽게 위와 동일한 해를 구할 수 있다.⁸ 따라서 해집합은

$$\left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

임을 알 수 있다.

정리 25. 계수 행렬 A 와 변수 열벡터 \mathbf{x} , 그리고 상수 열벡터 \mathbf{b} 가 주어졌을 때, 방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 의 해집합은

$$N(L_A) + \mathbf{x}_0$$

이 때, L_A 는 행렬 A 에 대응되는 선형변환이고, \mathbf{x}_0 는 특수해(particular solution)이다.

증명. \mathbf{x} 를 임의의 해, \mathbf{x}_0 를 특수해라고 하자. 즉,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$$

이다. 따라서

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

과 같이 정리할 수 있고, 정의에 따라 $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \in N(L_A)$ 임을 알 수 있다. 즉 $\mathbf{x} \in N(L_A) + \mathbf{x}_0$ 이고, 해집합은 $N(L_A) + \mathbf{x}_0$ 의 부분집합이다.

이제 $N(L_A) + \mathbf{x}_0$ 의 한 원소 \mathbf{x} 를 고르자. 즉, $N(L_A)$ 에 속하는 한 원소 \mathbf{x}_h 에 대해서

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_0$$

를 만족한다. 양변에 행렬 A 를 왼쪽에 곱해주면

$$A\mathbf{x} = A(\mathbf{x}_h + \mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}_h + A\mathbf{x}_0$$

이다. 그런데 $\mathbf{x}_h \in N(L_A)$ 이므로 $A\mathbf{x}_h = \mathbf{0}$ 이고, \mathbf{x}_0 는 특수해이므로 $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ 이다. 따라서

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} + \mathbf{b}$$

이어서, \mathbf{x} 는 해집합에 속한다. 따라서 $N(L_A) + \mathbf{x}_0$ 는 해집합의 부분집합이며, 위에서 해집합 또한 $N(L_A) + \mathbf{x}_0$ 의 부분집합임을 보였으므로 둘은 같은 집합이다. \square

⁸사실 동일한 표현이 나오는 것은 특수한 경우지만, 결과적으로는 동일한 해집합을 구하게 된다.

예시. 방정식 $2x + y = 3$, 혹은

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3$$

의 해는 방정식 $2x + y = 0$ 의 해를 좌표 평면에 나타냈을 때 그려지는 직선을 평행 이동한 것이다. 특히 특수해 $(0, 3)$, $(\frac{3}{2}, 0)$, $(1, 1)$ 등에서 하나를 골라 원래 그래프가 해당 점을 지나도록 평행 이동한 것이다.

정리 25에서 상수 열벡터 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 인 경우의 방정식을 동차 연립 일차 방정식 (homogeneous system of linear equations), $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 인 경우를 비동차 연립 일차 방정 (nonhomogeneous system of linear equations) 라고 한다. 다음의 동립 연립 일차 방정식

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

을 풀면,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = a(2, 0, -2, -1, -1, 1) + b(-2, 1, 0, 0, 0, 0) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

이 해가 된다. 이 때 a 와 b 는 자유 변수이다. 따라서, 위 계수 행렬의 영공간은

$$\langle (2, 0, -2, -1, -1, 1), (-2, 1, 0, 0, 0, 0) \rangle$$

임을 알 수 있다. 여기서 주목할 사실은 변수 벡터의 원소 개수가 6, 즉 차원이 6인 벡터공간에 있다는 것이고, 해공간 혹은 영공간의 차원⁹이 2라는 것이다. 이 둘의 차이 $6 - 2 = 4$ 는 계수 행렬의 계수(rank)와 같은데, 이는 우연이 아니라 계수-퇴화 차수 정리(정리 8)에 의한 것이다.

정의 11. 어떤 $n \times n$ 행렬 A 에 대해서 $n \times n$ 행렬 B 가 존재해서

$$AB = I$$

일 때, A 를 가역 행렬이라 하고 B 를 A 의 역행렬이라고 한다.

가역 행렬 A 의 역행렬 B 를 찾는 것은 식 $AB = I$ 에서 A 를 I 로 만드는 일련의

⁹또는 자유변수의 개수, 즉 자유도

기본 행연산들을 A 와 I 에 동일하게 취하는 것이다. I 에 해당 기본 행연산들을 취한 결과를 C 라고 하면, 식 $AB = I$ 는 $IB = C$ 가 된다. 따라서 C 는 A 의 역행렬 B 가 됨을 알 수 있다.

2018년 10월 1일 이렇게 역행렬을 구할 수 있으려면 기본 행연산들을 통해 A 를 I 로 만들 수 있어야 한다. 그런데 정리 24에 따르면 기본 행연산으로 행계수가 바뀌지 않으므로, A 의 행계수가 A 의 행/열의 개수와 같지 않으면 I 로 변형할 수 없다. 따라서, A 의 역행렬이 존재할 조건은 A 의 계수가 행/열의 개수와 같은 것이다.

정의 12. 벡터공간 V_1, \dots, V_n, W 에 대해 어떤 함수 $f : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ 가 다중선형사상(multilinear map)이라는 것은 모든 $i \in \{1, \dots, n\}$ 에 대한 $v_i \in V_i$ 에 대해

$$f(v_1, \dots, cv_i + \tilde{c}\tilde{v}_i, \dots, v_n) = cf(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \tilde{c}f(v_1, \dots, \tilde{v}_i, \dots, v_n)$$

을 만족한다는 것이다. 즉, 다중선형사상은 각각의 v_i 에 대해 f 가 선형사상이다.

정의 13. 벡터공간 V 와 W 에 대한 다중선형사상 $f : V^n \rightarrow W$ 가

$$(\exists i, j \in \{1, \dots, n\} \quad v_i = v_j) \Rightarrow f(v_1, \dots, v_n) = 0$$

를 만족하면 f 를 교대다중선형사상(alternating multilinear map)이라고 부른다.

정리 26. 벡터공간 V 와 W 에 대한 교대다중선형사상 $f : V^n \rightarrow W$ 은 두 벡터를 교환하면 부호가 바뀐다. 즉,

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

이다.

증명. 교대다중선형사상에서 두 벡터가 동일하면 그 함숫값은 0이므로,

$$f(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_n) = 0$$

이다. 이는 다중선형성에 의해

$$\begin{aligned} & f(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_n) \\ &= f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_n) \\ &\quad + f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) \\ &= f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

이다. 따라서,

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

를 만족한다. □

예시. 교대다중선형사상 $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대해서, f 가 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 의 열벡터를 인자로 받는다고 하자. 이를 계산하면

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= f(ae_1 + ce_2, be_1 + de_2) \\ &= abf(e_1, e_1) + adf(e_1, e_2) + cbf(e_2, e_1) + cdf(e_2, e_2) \\ &= (ad - bc)f(e_1, e_2) \\ &= (ad - bc)f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

정의 14. 교대다중선형사상 $f : (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대해서 $n \times n$ 단위행렬 I 의 함숫값이 1, 즉 $f(I) = 1$ 이면 f 를 행렬식(determinant)이라고 하고, \det 라고 표기한다.

행렬식을 계산할 때는 다중선형성(정의 12) 및 교대다중선형성(정의 13와 정리 26)에 따라 각 열벡터들의 원소들을 행이 겹치지 않도록 골라서 계산할 수 있다. 예를 들어

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}\right) &= aej \det(e_1, e_2, e_3) + bfg \det(e_3, e_1, e_2) + cdh \det(e_2, e_3, e_1) \\ &\quad + bdj \det(e_2, e_1, e_3) + ceg \det(e_3, e_2, e_1) + afh \det(e_1, e_3, e_2) \\ &= ((aej + bfg + cdh) - (bdj + ceg + afh)) \det I \end{aligned}$$

와 같이 계산하면 된다.

도움정리 1. $\text{Sym}(\{1, 2, \dots, n\})$ 의 항등 순열(permutation) $(1\ 2 \dots n)$ 의 원소 두 개씩을 서로 교환(transposition)하여 다시 항등 순열을 만들 때, 교환 횟수는 항상 짝수번이다.

정리 27. $\text{Sym}(\{1, 2, \dots, n\})$ 의 순열 σ_1 에서 σ_2 를 만드는 교환은 홀짝성을 보존한다.

2018년 10월 5일 **정리 28.** \mathbb{R}^n 에 속하는 벡터 v_1, \dots, v_n 와 $n \times n$ 행렬 A, B 에 대해서, 다음이 성립한다:

1. $\det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_i + kv_j, \dots, v_n)$
2. $\det(A^t) = \det(A)$
3. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ ¹⁰

정리 29. $n \times n$ 행렬 A 의 행렬식에 대해서,

1. 두 행을 바꾸는 기본 행 연산은 행렬식의 부호를 바꾸며
2. 어떤 행에 k 를 곱하는 기본 행 연산은 행렬식의 값에 k 배를 하며
3. 어떤 행의 상수 배를 하여 다른 행에 더하는 연산에 대해 불변이다.¹¹

참고. 행렬식을 계산할 때 다중선형성과 교대다중선형성만을 사용해 계산하면 긴 계산을 거쳐야 하지만, 위의 정리 29을 사용하면 계산이 단순해질 수 있다. 이는 어떤 행렬

$$A = \begin{pmatrix} a & e & f & g \\ 0 & b & h & i \\ 0 & 0 & c & j \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

에 대해서 $\det A = abcd$ 이기 때문이다. 따라서, 정리 29에 따라 기본 행 연산을 통해 이와 같이 대각선 밑의 모든 원소가 0 (혹은 위의 모든 원소)인 꼴을 만들면 대각선의 곱을 통해 행렬식을 계산할 수 있다. 이러한 꼴을 상삼각행렬 (혹은 하삼각행렬)이라고 부른다.

일반적으로 행렬식 계산은 이렇게 상삼각행렬과 하삼각행렬의 곱으로 분해하는 과정 (LU 분해)을 통해 행렬을 곱하는데 필요한 시간복잡도와 동일하게 계산할 수 있다.

정리 30. $n \times n$ 행렬 A 에 대응되는 선형변환 L_A 가 일대일 함수라는 것은 $\det A$ 가 0이 아니라는 것과 동치이다.

증명. 만약 행렬 A 에서 어떤 행의 k 배를 하여 다른 행에 더하는 기본 행 연산을 반복하였을 때 상(하)삼각행렬을 만들었다고 하자. 상삼각행렬은 다시 어떤 행의 k 배를 하여 다른 행에 더하는 기본 행 연산을 반복하여 (후진대입을 하는 것과 같이) 대각선 이외의 모든 원소를 0으로 만들 수 있다. 이렇게 만들어진 행렬을 \tilde{A} 라고 하자. 이 때 정리 29에 따라 $\det A = \det \tilde{A}$ 이다.

$\det \tilde{A} = 0$, 즉 \tilde{A} 의 대각선의 한 원소가 0이라고 가정하자. 이는 \tilde{A} 의 열벡터들이 서로 독립이 아니라는 것과 동치이다. (\tilde{A} 의 대각선 이외의 모든 원소들은 0

¹⁰원래 수업에서는 누락되었던 부분이지만, 2018년 10월 24일 수업에 추가로 언급하신 내용이다.

¹¹정리 28의 2에 따라, 정리 29의 기본 열 연산 버전을 만들 수 있다.

이기 때문이다.) 정리 23에 따라 기본 행 연산을 통해 열벡터들의 독립성이 바뀌지 않으므로, A 의 열벡터들도 서로 독립이 되지 않는다. 따라서 A 에 대응되는 L_A 는 일대일 함수가 되지 않는다 (17쪽의 참고 9). \square

참고. 17쪽의 참고를 다시 옮긴다. 벡터공간 V 와 W 간의 선형변환 L 에 대해서 다음의 명제들은 서로 동치이다:

1. L 은 일대일 함수이다.
2. $N(L) = \{0\}$ 이다. (정리 10)
3. $\text{rank } L = \dim V$ 이다. (정리 11)
4. 임의의 선형독립인 $v_1, \dots, v_k \in V$ 에 대해서, $L(v_1), \dots, L(v_k)$ 도 선형독립이다. (정리 20)

만약 $V = W$ 이고, V 가 유한생성된 벡터공간이라면, 다음의 명제들도 위 명제들과 동치이다:

5. L 은 위로의 함수이다. (정리 19)
6. L 은 일대일 대응이다. (1과 5로부터)
7. L 은 가역(invertible)이다. (정리 12)

나아가 $V = W = \mathbb{R}^n$ 일 경우, 선형변환 L 에 대응되는 $n \times n$ 행렬 A 가 있어서 다음의 명제들도 위 명제들과 동치이다:

8. $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad L^{-1}(v) = A^{-1}v$ 이다. (7로부터)
9. A 의 열벡터들은 일차독립이다. (정리 15와 21)
10. $Ax = 0$ 인 x 가 0 로 유일하게 존재한다. (정리 10)
11. $Ax = b$ 인 x 가 유일하게 존재한다. (10과 정리 25)
12. $\det A$ 가 0이 아니다. (정리 30)

정리 31. $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ 에 대해서 다음이 성립한다:

$$(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c) = \det(a, b, c)$$

증명. 다음과 같이 놓자:

$$a = (a_1, a_2, a_3)$$

$$b = (b_1, b_2, b_3)$$

$$c = (c_1, c_2, c_3)$$

이 때,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

이며, 따라서

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 \\ &= \det(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ &= \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \end{aligned}$$

이다. 마찬가지로 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 도 성분별로 계산을 해보면 $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 임을 알 수 있다. \square

정리 32. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ 가 이루는 평행체의 부피 $\text{Vol}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 는 $|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$ 이다.

증명. \mathbf{a} 와 \mathbf{b} 가 밑면을 이룬다고 하면, 그 면적은

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

이다. 이 때 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 와 \mathbf{c} 가 θ 의 각도를 이룬다고 하면, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 가 이루는 평행체의 부피는

$$\text{Vol}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \theta = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$$

이다. 그런데 정리 31에 따라 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ 이므로,

$$\text{Vol}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$$

이 성립한다. \square

정의 15. 벡터 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ 이 양향(positively oriented)라는 것은

$$\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) > 0$$

이라는 것이고, 음향(negatively oriented)이라는 것은

$$\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) < 0$$

이라는 것이다.

이 때 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 에 의해 생성되는 평행체의 부호수를 가지는 부피(signed volume) $\widetilde{\text{Vol}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ 는

$$\widetilde{\text{Vol}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

으로 정의된다.

참고. 부호수를 가지는 부피 $\widetilde{\text{Vol}}$ 는 행렬식으로 정의되었으므로, 정리 28와 29가 그대로 적용된다:

1. $\widetilde{\text{Vol}}(\mathbf{a}, k\mathbf{b}, \mathbf{c}) = k \widetilde{\text{Vol}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
2. $\widetilde{\text{Vol}}(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{c}) = \widetilde{\text{Vol}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \widetilde{\text{Vol}}(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{c})$
3. $\widetilde{\text{Vol}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -\widetilde{\text{Vol}}(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})$

정의 16. $n \times n$ 행렬 A 에 대해서 i 행과 j 열을 지운 행렬 M_{ij} 를 소행렬식(minor)이라고 부르고, $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 를 여인수(cofactor)이라고 한다.

정리 33. $n \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})$ 에 대해서, 라플라스 전개(Laplace expansion) 혹은 여인수 전개(cofactor expansion)는 다음과 같이 행렬식을 계산하는 것을 말한다:

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik} C_{ik}$$

예시. 다음은 3 행렬의 2행을 중심으로 여인수 전개를 한 것이다:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = (-1)^{2+1} d \det \begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} e \det \begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} f \det \begin{pmatrix} a & b \\ g & h \end{pmatrix}$$

정리 34. 행렬 A 가 가역행렬일 때, 다음과 같이 역행렬을 구할 수 있다:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (C_{ij})^t$$

이 때 (C_{ij}) 는 여인수들의 행렬이다.