공학 수학 강의 노트

이재호

jaeho.lee@snu.ac.kr

마지막 수정: 2018년 10월 7일

7 Linear Algebra: Matrices, Vectors, Determinants. Linear Systems

2018년 9월 3일 Field는 수학과 물리학에서 지칭하는 대상이 다르다:

- **체體**: 실수체, 복소수체
- **장場**: 전자기장, 벡터장

Definition 1. 체는 $+, -, \times, \div$에 대해 닫혀 있는 수 집합을 말한다.

Example.

- $\mathbb{Q}$는 조밀(dense)하다.
- $\mathbb{R}$은 꽉차(complete) 있다.
- $\mathbb{C}$는 대수적으로 닫혀(closed) 있다.
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$

Definition 2. 벡터 공간은 (roughly) 덧셈(+)과 (어떤 체에 속하는) 상수배가 정의된 집합이다.

Example.

- $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$은 덧셈에 대해 닫혀 있고, $k \in \mathbb{R}$의 곱에 대해 닫혀 있으므로 실수체에 대한 벡터 공간이다.

- $\mathbb{R}^n$ 과 $\mathbb{C}^n$ 은 실수체에 대한 벡터 공간이면서 유리수체에 대한 벡터 공간이다. 이를 각각 $\mathbb{Q}$–벡터 공간, $\mathbb{R}$–벡터 공간이라고 한다.

- $\mathcal{C}_I^0 = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f$는 연속 함수, $I \subset \mathbb{R}\}$ 에서는, $x \mapsto \sin x$가 하나의 벡터이다.

- $\mathcal{C}_I^n = \{f : I \to \mathbb{R} \mid \exists f^{(n)},\ f^{(n)}$는 연속 함수, $I \subset \mathbb{R}\}$ 이며, $\mathcal{C}_I^0 > \mathcal{C}_I^1 > \cdots > \mathcal{C}_I^\infty$ 이다.

Definition 2. 체 F에 대한 벡터 공간 V의 원소 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$에 대해서,

1. $c_1, \ldots, c_k \in F$일 때
$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k$$
는 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$의 일차 결합, 혹은 선형 결합 (linear combination) 이라고 한다.

2. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$의 선형 생성
$$\mathrm{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$$
은 모든 일차 결합의 집합이다. 예를 들어, 어떤 평면 상의 평행하지 않은 두 벡터는 그 평면을 선형 생성한다.

3. $W \subset V$이면서 W가 벡터 공간이면, W는 V의 부분 공간이라고 하며 $W < V$로 표기한다. 예를 들어, 실수 평면으로 나타내어지는 $\mathbb{R}^2$ 벡터 공간의 부분 집합인 원점을 지나는 직선은 벡터 공간이므로 부분 공간이다. 반면, 원점을 지나지 않는 직선은 부분 집합이지만 벡터 공간은 아니므로 부분 공간이 아니다.

4. $W = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} < V$일 때, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$는 W의 생성자 (generator) 라고 한다.

5. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$가 일차 종속 (linearly dependent) 라는 것은 어느 하나가 다른 벡터들의 일차 결합이라는 것이다. 일차 종속이 아니면 일차 독립 (linearly independent) 이라고 한다. 예를 들어, $\mathbb{R}^3$에서 $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)$는 일차 종속인 반면, $(1,2,3), (4,5,6)$은 일차 독립이다.

2018년 9월 5일 **Theorem 1.** *체 F에 대한 벡터 공간 V의 원소들 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$가 일차 독립이라는 것은, $c_1, \ldots, c_k \in F$일 때*
$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0} \ \Rightarrow\ c_1 = \cdots = c_k = 0$$
이라는 것과 동치이다.

Proof. ($\Rightarrow$) (재배열 가능하여) $c_k \neq 0$이라고 가정하자. 그렇다면,

$$\boldsymbol{v}_k = -\left(\frac{c_1}{c_k}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \frac{c_{k-1}}{c_k}\boldsymbol{v}_{k-1}\right)$$

이므로 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$가 일차 독립이라는 가정에 모순된다.

($\Leftarrow$) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$가 일차 종속이라고 가정하자. 즉, (재배열 가능하여) 어떤 $a_1, \ldots, a_{k-1} \in F$가 존재해서,

$$\boldsymbol{v}_k = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_{k-1}\boldsymbol{v}_{k-1}$$

이다. 그렇다면

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_{k-1}\boldsymbol{v}_{k-1} + (-1)\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}$$

이므로 모순이다. □

Example.

- $a, b, c \in \mathbb{R}$에 대해

  $$a(1,2,3) + b(4,5,6) + c(7,8,10) = (0,0,0)$$

  을 만족하는 a, b, c는 0밖에 없으므로 $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,10)$은 일차 독립이다.

- $\mathbf{0}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$는 일차 종속이다.

- $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$가 일차 독립이면 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 또한 일차 독립이다. (왜냐하면 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 가 종속이면 $\boldsymbol{v}_3 = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_4$이기 때문이다.)

Definition 3. 벡터 공간 V의 부분 공간 W가 일차 독립인 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$에 의해 생성될 때, $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$를 W의 기저(basis)라고 한다.

Theorem 2 (차원(dimension) 정리)**.** *W가 유한 생성 (finitely generated) (부분) 공간이면 W의 기저의 원소의 개수는 동일하다. 이 때, 기저의 원소의 개수를 W의 차원(dimension)이라고 하며,* $\dim W$*로 표기한다.*

Example.

- $\mathcal{P}_n = \{n$차 이하 실계수 다항식$\}$일 때, $f \in \mathcal{P}_n$는 항상 $\mathcal{B} = \{1, x, \ldots, x^n\}$의 원소의 상수배의 합으로 나타낼 수 있다. 또한,

  $$c_0 \cdot 1 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$$

  이면 $c_0 = \ldots c_n = 0$이므로, $\mathcal{B}$는 기저이다.

- $\mathcal{P} = \{\text{모든 다항식}\}$의 기저는 $\{1, x, x^2, \dots\}$이며 $\dim \mathcal{P} = \infty$이다.

Homework.

1. a_1, a_2, a_3는 서로 다른 실수이다. 이 때, $(1, a_1, a_1^2)$, $(1, a_2, a_2^2)$, $(1, a_3, a_3^2)$이 일차 독립임을 보여라.

2. $a_1, \dots, a_n$는 서로 다른 실수이다. 이 때, $(1, a_1, a_1^2)$, $\dots$, $(1, a_n, a_n^2)$이 일차 독립임을 보여라.

Theorem 3. *체 F에 대한 벡터 공간 V의 일차 독립인 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$에 대해서, $\boldsymbol{w} \in V \setminus \langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \rangle$이면 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}$는 일차 독립이다.*

Proof. $c_1, \dots, c_k, a \in F$일 때,

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k + a\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$$

이라고 가정하자. 만약 $a \neq 0$이라면

$$\boldsymbol{w} = -\left(\frac{c_1}{a}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \frac{c_k}{a}\boldsymbol{v}_k\right) \in \langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \rangle$$

이므로 모순이다. 따라서 $a = 0$이며, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$는 일차 독립이므로 $c_1 = \cdots = c_k = a = 0$이다. 그러므로 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}$는 일차 독립이다. □

Theorem 3에 따르면, 일차 독립인 벡터들의 선형 생성에 포함되지 않는 벡터 또한 이들과 일차 독립이다. 이에 따라 어떤 유한 생성 벡터 공간 V의 일차 독립인 벡터들 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$가 주어졌을 때, 선형 생성에 속하지 않는 벡터 $\boldsymbol{w}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{w}_{\dim V}$를 순차적으로 추가해서 기저를 구성할 수 있다. 이를 기저 확장 (basis extension) 이라고 부른다.

Theorem 4. *체 F에 대한 벡터 공간 V의 부분 공간 W_1, W_2가 주어졌을 때, $W_1 \cap W_2$ 또한 V의 부분 공간이다.*

Proof. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in W_1$이면서 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in W_2$이면, 각각 벡터 공간이므로 임의의 $c_1, c_2 \in F$에 대해서 $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 \in W_1$이면서 $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 \in W_2$이다. 즉,

$$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in W_1 \cap W_2 \;\Rightarrow\; \forall c_1, c_2 \in F \quad c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 \in W_1 \cap W_2$$

이다. 따라서, $W_1 \cap W_2 < V$가 성립한다. □

Definition 4. 벡터 공간 V의 부분 집합 W_1, W_2에 대해서 $W_1 + W_2$를 다음과 같이 정의한다:

$$W_1 + W_2 := \{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \mid \boldsymbol{v}_1 \in W_1, \boldsymbol{v}_2 \in W_2\}.$$

Example. 좌표 평면으로 나타내어지는 벡터 공간 $\mathbb{R}^2$의 부분 집합(이면서 부분 공간인) 인 원점을 지나는 직선을 W_1이라고 하자. 원점이 아닌 한 점만을 원소로 하는 집합 $W_2 \subset \mathbb{R}^2$가 주어졌을 때, $W_1 + W_2$는 W_1의 직선을 W_2의 (유일한) 원소의 점으로 평행 이동한 직선을 나타낸다.

Theorem 5. *체 F에 대한 벡터 공간 V의 부분 공간 W_1과 W_2에 대해서, $W_1 + W_2$도 V의 부분 공간이다.*

Proof. 임의의 $\boldsymbol{v}_1 \in W_1 + W_2$에 대해 어떤 $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$과 $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$가 존재하며, 마찬가지로 임의의 $\boldsymbol{v}_2 \in W_1 + W_2$에 대해 어떤 $\boldsymbol{u}_1 \in W_1$과 $\boldsymbol{u}_2 \in W_2$가 존재한다. W_1과 W_2는 부분 공간이므로 임의의 $c_1, c_2 \in F$에 대해

$$c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 \in W_1$$
$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 \in W_2$$

이고,

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = (c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2) + (c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2)$$

이므로,

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 \in W_1 + W_2$$

이다. 따라서 $W_1 + W_2 < V$이다. □

2018년 9월 10일 **Theorem 6** (그라스만(Graßmann) 공식)**.** *체 F에 대한 유한 생성 벡터 공간 U와 W에 대해, 다음이 성립한다:*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Proof. $l = \dim(U \cap W)$, $n = \dim U - l$, $m = \dim W - l$이라 하고, $U \cap W$의 기저를 $\mathcal{B}_\cap = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l\}$라고 하자. $\mathcal{B}_\cap$을 확장해 U의 기저 $\mathcal{B}_U = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$와 W의 기저 $\mathcal{B}_W = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$을 구성할 수 있다.

이제 $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$[1]가 $U + W$의 기저임을 보이자. $U + W$의 원소 $\boldsymbol{v}$를 고르면, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$가 되는

$$\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_l\boldsymbol{v}_l + b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{u}_n$$

[1] 이를 위해서는 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$과 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$에 겹치는 원소가 없어야 한다. 이는 $\mathcal{B}_\cap = \mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$와 동치인데, 자명할수도 있겠지만 증명 후에 다루었다.

와

$$\boldsymbol{w} = a_1'\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_l'\boldsymbol{v}_l + c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{w}_m$$

가 존재하고, 이러한 $a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_n, a_1', \ldots, a_l', c_1, \ldots, c_m \in F$는 유일하다. 따라서,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{l} a_i\boldsymbol{v}_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{u}_j\right) + \left(\sum_{i=1}^{l} a_i'\boldsymbol{v}_i + \sum_{k=1}^{m} c_k\boldsymbol{w}_k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{l} \left(a_i + a_i'\right)\boldsymbol{v}_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{u}_j + \sum_{k=1}^{m} c_k\boldsymbol{w}_k
\end{aligned}$$

이므로 $\boldsymbol{v}$는 $\operatorname{Span}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W)$의 원소이고, $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$는 $U + W$를 생성한다.

이제

$$\sum_{i=1}^{l} a_i\boldsymbol{v}_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{u}_j + \sum_{k=1}^{m} c_k\boldsymbol{w}_k = \mathbf{0}$$

이라고 하자. $\boldsymbol{u}_j$ 항을 제외하고 모두 우변으로 이항하면

$$\sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{u}_j = \sum_{i=1}^{l} -a_i\boldsymbol{v}_i + \sum_{k=1}^{m} -c_k\boldsymbol{w}_k$$

이 되고, $\boldsymbol{z} = \sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{u}_j$라고 두자.

$$\sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{u}_j \in \operatorname{Span}\mathcal{B}_U = U$$

$$\sum_{i=1}^{l} -a_i\boldsymbol{v}_i + \sum_{k=1}^{m} -c_k\boldsymbol{w}_k \in \operatorname{Span}\mathcal{B}_W = W$$

이므로, $\boldsymbol{z} \in U \cap W = \operatorname{Span}\mathcal{B}_\cap = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l \rangle$이다. 즉

$$\boldsymbol{z} = d_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + d_l\boldsymbol{v}_l$$

이 되는 $d_1, \ldots, \boldsymbol{d}_l \in F$가 유일하게 존재한다. 그런데 $\mathcal{B}_U$와 $\mathcal{B}_W$는 일차 독립이므로 $j \in \{1, \ldots, l\}$에 대해 $b_j = 0$이고 $k \in \{1, \ldots, m\}$에 대해 $c_k = 0$이다. 이에 따라 $\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$이 되어 $i \in \{1, \ldots, l\}$에 대해서도 $a_i = 0$이다. 그러므로 $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$은 일차 독립이다.

$\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$는 $U+W$를 생성하고 일차 독립이므로, $U+W$의 기저이다. 결국

$$\begin{aligned}\dim(U+W) &= |\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W| \\ &= l+n+m \\ &= (l+n)+(l+m)-l \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)\end{aligned} \qquad \square$$

My remark. 위 증명에서 $\mathcal{B}_\cap = \mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$ 임을 보이자.[2] 위 증명이 성립하기 위해서는 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$와 $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$의 모든 원소가 달라야하기 때문이다. 먼저 $\mathcal{B}_\cap \subseteq \mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$ 임은 자명하다. $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$에 속하는 원소 $\boldsymbol{x}$를 고르자. $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W \subseteq U \cap W$이므로, $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Span} \mathcal{B}_\cap$이다. 나아가 $\mathcal{B}_U$와 $\mathcal{B}_W$의 원소인 $\boldsymbol{x}$는 $\mathcal{B}_\cap$의 모든 원소들과 일차 독립이므로, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}_\cap$이어야 한다. 따라서 $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W \subseteq B_\cap$이다.

Definition 5. 체 F에 대한 벡터 공간 V, W에서, 임의의 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$와 $c_1, c_2 \in F$에 대해

$$L(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) = c_1 L(\boldsymbol{v}_1) + c_2 L(\boldsymbol{v}_2)$$

을 만족하는 함수 $L : V \to W$을 선형 변환(linear transformation) 혹은 선형 사상(linear map)이라고 한다.

Example.

1. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$에 대해,

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \\ 5x+6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   은 선형 변환이다.

2. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$에 대해,

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \\ 5x+6y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   은 선형 변환이 아니다.

3. 어떤 사상 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$이 존재한다는 것은 어떤 $m \times n$ 행렬 A가 존재해서 $L(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$라는 것이다.

---

[2] 참고로, $\mathcal{B}_U \setminus \mathcal{B}_W$는 $U \setminus W$의 기저가 아니다. $\mathbf{0} \in U \cap W$임에 따라 $\mathbf{0} \notin U \setminus W$이므로, $U \setminus W$는 벡터 공간이 아니기 때문이다.

4. $f \mapsto f'$ 의 미분 연산자 $L : \mathcal{C}_I^\infty \to \mathcal{C}_I^\infty$ 는 $L(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 f_1' + c_2 f_2' = c_1 L(f_1) + c_2 L(f_2)$ 이므로 선형 변환이다.

5. $f(x) \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 의 적분 연산자 $L : \mathcal{C}_I^\infty \to \mathcal{C}_I^\infty$ 또한 선형 변환이다.

Definition 6. 두 벡터 공간 V 와 W 간의 선형 변환 $L : V \to W$ 에 대해 다음이 정의된다:

1. L 의 핵(kernel) 혹은 영 공간(null space)[3]

$$\ker L = \mathrm{N}(L) := \{\boldsymbol{v} \in V \mid L(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}.$$

2. L 의 치역(range) 혹은 상(image)[4]

$$\mathrm{R}(L) = \mathrm{Im}(L) := \{L(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in V\}.$$

3. L 이 일대일 함수(one-to-one function) 혹은 단사 함수(injective function, injection)라는 것은 다음을 의미한다:

$$\forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V \quad \big(L(\boldsymbol{v}_1) = L(\boldsymbol{v}_2) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2\big)$$

4. L 이 위로의(onto) 함수 혹은 단사 함수(surjective function, surjection)라는 것은 다음을 의미한다:

$$\forall \boldsymbol{w} \in W \quad \exists \boldsymbol{v} \in V \quad L(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$$

Example.

1. $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 일 때 $\ker L \ \big(= \mathrm{N}(L)\big)$ 을 구하시오.

[3] 영 공간이라는 용어는 보통 행렬에 국한되어 사용되고, 핵은 추상적인 선형 변환에 대해 많이 사용된다.

[4] 치역은 정의역의 상이다. 상은 정의역의 부분 집합에 대해서도 정의될 수 있다.

Solution.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{Echelon}} \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Reduce}} \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

즉

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} z$$

이 되어, $\mathrm{N}(L) = \langle(1,-2,1)\rangle$ 이다. ■

2. $\mathrm{R}(L)$ $\big(= \mathrm{Im}(L)\big)$ 을 구하시오.

Solution. $L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ 이므로,

$$\begin{aligned}L(\boldsymbol{e}_1) &= (1,4,7)\\ L(\boldsymbol{e}_2) &= (2,5,8)\\ L(\boldsymbol{e}_3) &= (3,6,9)\end{aligned}$$

가 된다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{R}(L) &= \{L(x,y,z) \mid (x,y,z) \in V\}\\ &= \{L(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3) \mid (x,y,z) \in V\}\\ &= \{xL(\boldsymbol{e}_1) + yL(\boldsymbol{e}_2) + zL(\boldsymbol{e}_3) \mid (x,y,z) \in V\}\\ &= \mathrm{Span}\{L(\boldsymbol{e}_1), L(\boldsymbol{e}_2), L(\boldsymbol{e}_3)\}\\ &= \langle(1,4,7),(2,5,8),(3,6,9)\rangle\\ &= \langle(1,4,7),(2,5,8)\rangle\end{aligned}$$

이다. ■

Theorem 7. *벡터 공간 V 와 W 간의 선형 사상 $L : V \to W$ 에 대해 $\mathrm{N}(L) < V$ 이고 $\mathrm{R}(L) < W$ 이다.*

Theorem 8 (계수 (rank)–퇴화 차수 (nullity) 정리)**.** *벡터 공간 V 와 W 간의 선형 사상 $L : V \to W$ 에 대해 다음이 성립한다:*

$$\dim \mathrm{N}(L) + \dim \mathrm{R}(L) = \dim V.$$[5]

Example. 이전 예시에서 $\mathrm{N}(L) = \langle(1, -2, 1)\rangle$ 이고 $\mathrm{R}(L) = \langle(1, 4, 7), (2, 5, 8)\rangle$ 이므로, $\dim \mathrm{N}(L) + \dim \mathrm{R}(L) = 1 + 2 = 3$ 이 성립한다.

2018년 9월 12일 **Theorem 9.** *벡터 공간 V 와 W 간의 선형 변환 $L : V \to W$ 에 대해서 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ 이 V 의 기저라면,*

$$\mathrm{R}(L) = \mathrm{Span}\{L(\boldsymbol{v}_1), \ldots, L(\boldsymbol{v}_n)\}$$

이다.

Remark. 위에서 $\{L(\boldsymbol{v}_1), \ldots, L(\boldsymbol{v}_n)\}$ 이 기저일 필요는 없다.

Theorem 10. *벡터 공간 V 와 W 간의 선형 변환 $L : V \to W$ 가 일대일이라는 것은 $\mathrm{N}(L) = \{\boldsymbol{0}\}$ 라는 것과 동치이다.*

Proof. ($\Rightarrow$) $L(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ 이고, L 은 일대일이므로 $L(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ 를 만족하는 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ 가 유일하다.

($\Leftarrow$) $L(\boldsymbol{v}_1) = L(\boldsymbol{v}_2)$ 인 임의의 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ 를 고르자. 그렇다면

$$L(\boldsymbol{v}_1) - L(\boldsymbol{v}_2) = L(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{0}$$

인데, $\mathrm{N}(L) = \{\boldsymbol{0}\}$ 이므로 $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ 이다. 따라서 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ 이며, L 은 일대일 함수이다. □

Theorem 11. *벡터 공간 V 와 W 간의 선형 변환 $L : V \to W$ 가 일대일이라는 것은 $\dim \mathrm{R}(L) = \dim V$ 라는 것과 동치이다.*

Proof. L 이 일대일이라는 것은 Theorem 10에 따라 $\mathrm{N}(L) = \{\boldsymbol{0}\}$, 즉 $\dim \mathrm{N}(L) = 0$ 이라는 것과 동치이다.[6] 그런데 Theorem 8에 따라서 $\dim \mathrm{N}(L) + \dim \mathrm{R}(L) = \dim V$ 이므로, $\dim \mathrm{R}(L) = \dim V$ 가 성립한다. □

Theorem 12. *벡터 공간 V 와 W 간의 선형 변환 $L : V \to W$ 가 전단사라는 것은 L 의 역함수 $L^{-1} : W \to V$ 가 존재한다는 것과 동치이다. 이 때, L^{-1} 도 선형이다.*

Proof. 전단사 함수가 역함수를 가진다는 증명은 생략한다. L^{-1} 이 선형임을 보인다.

---

[5] 계수와 퇴화 차수에 대해서는 다음 강좌에 정의한다.

[6] $\dim \mathrm{N}(L) = 0 \iff \mathrm{N}(L) = \{\boldsymbol{0}\}$

W에서 두 원소 $\boldsymbol{w}_1$와 $\boldsymbol{w}_2$를 고르자. 이 때,

$$\begin{aligned} L^{-1}(\boldsymbol{w}_1) &= \boldsymbol{v}_1 \\ L^{-1}(\boldsymbol{w}_2) &= \boldsymbol{v}_2 \end{aligned}$$

라고 하자. 그렇다면 $\boldsymbol{w}_1$과 $\boldsymbol{w}_2$의 선형 결합은 다음과 같이 표현된다:

$$\begin{aligned} c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 &= c_1L(\boldsymbol{v}_1) + c_2L(\boldsymbol{v}_2) \\ &= L(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) \end{aligned}$$

양변에 역함수를 취해주면

$$\begin{aligned} L^{-1}(c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2) &= c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 \\ &= c_1L^{-1}(\boldsymbol{w}_1) + c_2L^{-1}(\boldsymbol{w}_2) \end{aligned}$$

이 되어 L^{-1} 또한 선형 변환임을 알 수 있다. □

Definition 7. 벡터 공간 V와 W간의 선형 변환 $L : V \to W$에 대해서, L의 계수

$$\operatorname{rank} L := \dim \mathrm{R}(L)$$

로 정의한다.

Theorem 13. *벡터 공간 U, V, W에 대해 선형 변환 $L_1 : U \to V$와 $L_2 : V \to W$이 주어졌다고 하자. 만약 L_2가 일대일 함수라면, 다음이 성립한다:*

$$\operatorname{rank}(L_2 \circ L_1) = \operatorname{rank} L_1$$

Proof. 정리 7에 의해 $\mathrm{R}(L_1)$은 벡터 공간이므로, 선형 변환 $\tilde{L}_2 : \mathrm{R}(L_1) \to W$를 정의하자:

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{R}(L_1) < V \qquad \tilde{L}_2(\boldsymbol{v}) = L_2(\boldsymbol{v})$$

따라서 $\tilde{L}_2$ 또한 일대일 선형 변환임을 알 수 있다. 정리 11에 따라

$$\dim \mathrm{R}(\tilde{L}_2) = \dim \mathrm{R}(L_1)$$

이다. 그런데

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(\tilde{L}_2) &= \{\tilde{L}_2(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in \mathrm{R}(L_1)\} \\ &= \{L_2(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in \mathrm{R}(L_1)\} \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}\mathrm{R}(L_2 \circ L_2) &= \{(L_2 \circ L_1)(\boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{u} \in U\} \\ &= \{L_2(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} = L_1(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{u} \in U\} \\ &= \{L_2(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in \mathrm{R}(L_1)\}\end{aligned}$$

이므로 $\mathrm{R}(\tilde{L}_2) = \mathrm{R}(L_2 \circ L_1)$ 이다. 따라서 $\dim \mathrm{R}(\tilde{L}_2) = \dim \mathrm{R}(L_2 \circ L_1) = \dim \mathrm{R}(L_1)$ 이 성립한다. □

Remark. 위 증명에서 $\mathrm{R}(L_2 \circ L_1)$ 의 기저와 $\mathrm{R}(L_1)$ 의 기저의 개수가 같음을 보이면 되므로 $\mathrm{R}(L_1)$ 의 기저 각각에 L_2 를 취한 벡터들이 다시 $\mathrm{R}(L_2 \circ L_1)$ 의 기저가 됨을 보여도 된다.

Definition 8. $m \times n$ 행렬 (matrix) 이란, m 개의 행과 n 개의 열로 이루어진 원소들의 나열이다:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

두 행렬의 곱은 각각의 행렬에 대응되는 선형 변환의 합성에 대응된다. 즉, 어떤 선형 변환 $L_A : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ 이 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ 로 대응시키고 $L_B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 이 $A\boldsymbol{x} \mapsto B(A\boldsymbol{x}) = BA\boldsymbol{x}$ 로 대응시킨다면, BA 는 $L_B \circ L_A$ 에 대응된다.

$n \times n$ 행렬 A, B 에 대해서 $AB = BA = I$ 이라면, $A = B^{-1}$ 이고 $B = A^{-1}$ 이다. 이 때,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

을 말한다.

Definition 9. 선형 변환 L_A 에 대응되는 행렬 A 에 대해서, 열공간 (column space) 은 A 의 열벡터들의 생성이다. 따라서 열공간은 $\mathrm{R}(L_A)$ 와 동일하다. 이 때 열공간의 차원을 열계수 (column rank) 라고 부르며, L_A 의 계수 $\dim \mathrm{R}(L_A) = \operatorname{rank} L_A$ 와 같다.

마찬가지로, 행공간 (row space) 은 A 의 행벡터들의 생성이다. 이 때 행공간의 차원을 행계수 (row rank) 라고 부른다.

Example. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 에서 열벡터 $(1,4,7)$과 $(3,6,9)$는 일차 독립이고, $(2,5,8)$은 두 벡터의 합의 절반이므로 일차 종속이다. 따라서 열계수는 2이다. 또한 행벡터 $(1,2,3)$과 $(7,8,9)$는 일차 독립이고, $(4,5,6)$은 두 벡터의 합의 절반이므로 일차 종속이다. 따라서 행계수도 2이다.

Theorem 14. *선형 변환 L_A에 대응되는 행렬 A에 대해서, 열계수와 행계수는 동일하다. 즉, 열계수와 행계수 모두 $\operatorname{rank} L_A$로 나타내어지며 바로 행렬 A를 사용해 $\operatorname{rank} A$라고 쓸 수 있다.*

두 행을 교환하거나, 어떤 행의 상수배를 다른 행에 더하거나, 한 행에 0이 아닌 상수를 곱하는 연산을 행렬의 기본 행 연산이라고 한다. 마찬가지로 열에 대해서도 기본 열 연산을 정의할 수 있다.

Theorem 15. *두 행렬 A와 B의 곱을 C라고 하자. 행렬 A에 기본 행 연산을 취한 새로운 행렬을 $\tilde{A}$라고 하자. 행렬 C에 동일한 기본 행 연산을 취한 새로운 행렬을 $\tilde{C}$라고 하면, 여전히 $\tilde{A}B = \tilde{C}$가 성립한다.*

Definition 10. 항등행렬 I에 기본 행/열 연산을 한 번한 것을 기본 행렬이라고 부른다.

Example. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 은 모두 계수가 3인 기본 행렬들이다.

Theorem 16. *$n \times n$ 기본 행렬의 계수는 n이다.*

Proof. $n \times n$ 항등행렬 I에 대해서, 각 열벡터를 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$이라고 하자. 이 때 열벡터들은 서로 독립이므로 $\operatorname{rank} I = n$이다.

I에 어떤 기본 열 연산을 하여 기본 행렬 A를 만들었다고 하자. 기본 열 연산이 1. 열의 교환인 경우, 2. 열의 상수배를 하여 다른 열에 더한 경우, 3. 열에 0이 아닌 상수를 곱한 경우에 대해서 생각하자.

1. 열을 교환했을 경우
   i 번째 열과 j 번째 열을 교환했다고 하자. 그렇다면 A의 열벡터들은 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_j(i \text{ 번째}), \ldots, \boldsymbol{e}_i(j \text{ 번째}), \ldots, \boldsymbol{e}_n$이 된다. 그런데 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$은 순서와 상관없이 일차 독립이므로 A의 열벡터들도 일차 독립이다.

2. 열의 상수배를 하여 다른 열에 더한 경우
   i 번째 열에 k배를 하여 j 열에 더했다고 하자. ($k \neq 0$이다.) 그렇다면 A의

열벡터들은 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_j + k\boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 이 된다. 다음의 선형 결합을 생각하자:

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_j(\boldsymbol{e}_j + k\boldsymbol{e}_1) + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}$$

만약 c_j 가 0이 아니라면, 다음과 같이 식을 재작성할 수 있다:

$$\boldsymbol{e}_j = -\frac{1}{c_j}\left(c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_{j-1}\boldsymbol{e}_{j-1} + c_{j+1}\boldsymbol{e}_{j+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n\right) + \frac{k}{c_j}\boldsymbol{e}_1$$

이 때 $\frac{k}{c_j} \neq 0$ 이므로 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 이 독립이라는 것에 모순이다. 따라서 $c_j = 0$ 이다. 결국,

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_{j-1}\boldsymbol{e}_{j-1} + c_{j+1}\boldsymbol{e}_{j+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}$$

가 되어, $c_1 = \cdots = c_{j-1} = c_{j+1} = \cdots = c_n = 0$ 이다. 그런데 $c_j = 0$ 이므로 $c_1 = \cdots = c_n = 0$ 이어서, A 의 열벡터들도 일차 독립이다.

3. 열에 0이 아닌 상수를 곱한 경우
   i 번째 열에 $k \neq 0$ 을 곱했다고 하자. 그렇다면 A 의 열벡터들은 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, k\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_n$ 이 된다. 다음의 선형 결합을 생각하자:

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_i(k\boldsymbol{e}_i) + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}$$

   $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 의 독립성에 의해 $c_1 = \cdots = c_i k = \cdots = c_n = 0$ 이 된다. 그런데 $k \neq 0$ 이므로 $c_1 = \cdots = c_n = 0$ 이다. 따라서 A 의 열벡터들도 일차 독립이다.

따라서, A 의 열공간의 차원은 n 이고 정리 14 의해 $\operatorname{rank} A = n$ 이다. 마찬가지로 기본 행 연산의 경우에도 모든 과정을 행벡터에 대입하여 진행하면 동일하게 계수가 n 임을 알 수 있다. □

Theorem 17. *어떤 유한 생성 벡터 공간 V 와 부분 공간 W 가 주어졌다고 하자. 그렇다면, 다음이 성립한다:*

$$\dim W = \dim V \Rightarrow W = V$$

Proof. $\dim W = \dim V = n$ 일 때, 벡터 공간 W 의 기저 $\mathcal{B} = \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ 를 구성하자. $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ 은 일차 독립이고 V 의 원소이기도 하므로, 기저 확장을 통해 V 의 기저를 구성할 수 있다. 그런데 이미 $|\mathcal{B}| = \dim V$ 이므로, $\mathcal{B}$는 V 의 기저이다. 따라서 $\operatorname{Span}\mathcal{B} = W = V$ 이다. □

Theorem 18. *선형 변환 $L : V \to V$ 에 대해서, 다음의 명제는 동치이다:*

1. *L는 일대일 함수이다.*

2. *L는 위로의 함수이다.*

3. $\operatorname{rank} L = \dim V$ *이다.*

Proof. 정리 11에 의해 L가 일대일 함수라는 것은 $\dim \mathrm{R}(L) = \dim V$, 즉 $\operatorname{rank} L = \dim V$라는 것과 동치이다. 따라서 1과 3은 동치이다.

이제 2와 3이 동치임을 보이자. 만약 L가 위로의 함수이면, 공역과 치역이 동일하다. 즉, $\mathrm{R}(L) = V$다. 따라서 $\operatorname{rank} L = \dim \mathrm{R}(L) = \dim V$이 성립한다.

역으로, $\operatorname{rank} L = \dim V$라고 하자. $\dim \mathrm{R}(L) = \dim V$이므로, 정리 17에 따라 $\mathrm{R}(L) = V$이다. 그러므로 L는 위로의 함수이다.

따라서, 1, 2, 3은 모두 동치이다. □

2018년 9월 17일

지금까지의 내용을 간략히 요약하고, 약간의 내용을 덧붙인다. 체란 간단히 가감승제에 대해서 닫힌 집합이고, 벡터 공간은 덧셈과 스칼라 곱에 대해 닫힌 집합이다. 또한 일차 결합, 일차 독립, 일차 종속과 기저 등에 대해서 다루었다.

정리에는 기저의 원소의 개수가 항상 일정하다는 정리 2), 벡터 공간의 교집합도 벡터 공간이라는 것을 보여주는 정리 4, 벡터 공간의 합 또한 벡터 공간이며 (정리 5) 그 차원은 각각의 차원의 합에서 교집합의 차원을 제한 것이라는 정리 6이 있었다. 어떤 선형 사상의 영공간과 치역은 각각 정의역과 공역의 부분 공간이며 (정리 7), 그 차원의 합은 정의역의 차원임을 알려주는 정리 8가 있었다. 또한 행렬의 행계수, 열계수, 그리고 대응되는 선형 변환의 계수가 모두 같다는 정리 14가 있었다.

Theorem 19. *벡터 공간 V와 W 간의 선형 변환 $L : V \to W$이 일대일 함수라는 것은 임의의 일차 독립인 벡터들 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$을 골랐을 때, $L(\boldsymbol{v}_1), \ldots, L(\boldsymbol{v}_k)$ 또한 일차 독립이라는 것과 동치이다.*

Proof. 먼저 L이 일대일 함수라고 가정하자. 임의의 일차 독립인 벡터들 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$에 선형 변환 L을 취한 벡터들의 선형 결합

$$c_1 L(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_n L(\boldsymbol{v}_n) = \mathbf{0}$$

를 생각하자. 그렇다면,

$$L(c_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n \boldsymbol{v}_n) = \mathbf{0}$$

인데, 정리 10에 따라 $\mathrm{N}(L) = \{\mathbf{0}\}$이므로

$$c_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

임을 알 수 있다. 그런데 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$은 일차 독립이므로 $c_1 = \cdots = c_n = 0$이다. 따라서 $L(\boldsymbol{v}_1), \dots, L(\boldsymbol{v}_k)$는 일차 독립이다.

이제 임의의 일차 독립인 벡터들 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$에 대해서 $L(\boldsymbol{v}_1), \dots, L(\boldsymbol{v}_k)$가 일차 독립이라고 가정하자. $L(\boldsymbol{v}_1) = L(\boldsymbol{v}_2)$인 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$를 고르자. 그런데 $L(\boldsymbol{v}_1) = L(\boldsymbol{v}_2)$이므로, 가정한 명제의 대우에 따라서 $\boldsymbol{v}_1$과 $\boldsymbol{v}_2$는 일차 종속이다. 따라서

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$$

인 $(0,0)$이 아닌 (c_1, c_2)가 존재한다. 일반성을 잃지 않고 $c_1 \neq 0$이라고 하면,

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\boldsymbol{v}_2$$

가 성립한다. 그런데 $L(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0}$이므로,

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) &= L\left(-\frac{c_2}{c_1}\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_2\right) \\ &= L\left(-\left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right)\boldsymbol{v}_2\right) \\ &= -\left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right)L(\boldsymbol{v}_2) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

이다. 여기서 $L(\boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0}$일 경우는 모든 벡터에 대한 함숫값이 $\mathbf{0}$라는 것이고, 가정이 성립하려면 V와 W는 자명한 벡터 공간 $\{\mathbf{0}\}$이어야만 한다. 이 경우 가능한 선형 변환은 유일하며, $\mathbf{0} \in V$를 $\mathbf{0} \in W$와 대응시키는 일대일(이면서 위로의) 함수이다. 자명하지 않은 벡터 공간의 경우, $\frac{c_2}{c_1} = -1$이어야 하고 따라서 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$이다. 따라서 L은 일대일 함수이다. □

Theorem 20. *체 F에 대한 벡터 공간 V가 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$에 의해 생성될 때, $\dim V \leq n$이다. 만약 $\dim V = n$이라면 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$은 기저를 이룬다.*[7]

Proof. $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$의 부분 집합 중 일차 독립인 최대인 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r\}$을 고르고, $\mathcal{B}$라고 쓰자. (즉 $r \leq n$이며, 원소의 순서는 재배열되었을 수 있다.) V의 임의의 원소 $\boldsymbol{v}$에 대해서, $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle$이므로

$$\exists c_1, \dots c_n \in F \quad \boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

이다. 그런데 $\boldsymbol{v}_{r+1}, \dots$은 $\mathcal{B}$와 일차 종속이므로 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$로 다시 쓸 수 있다. (일차 독립이라면 해당 벡터를 $\mathcal{B}$에 추가하여도 여전히 일차 독립이어야 하는데,

[7] 강의 내용에 없었으나 본인의 필요에 따라 추가하였다.

그러면 $\mathcal{B}$가 최대인 일차 독립 부분 집합이라는 가정에 모순된다.) 따라서,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{v}_r + c_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1} + \dots \\
&= c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{v}_r + c_{r+1}\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\boldsymbol{v}_i + \dots \\
&= \big(c_1 + \alpha_1(c_{r+1} + \dots)\big)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \big(c_r + \alpha_r(c_{r+1} + \dots)\big)\boldsymbol{v}_r
\end{aligned}
$$

로 표현되어 $\operatorname{Span} B = V$이다. 결국 $\mathcal{B}$는 V의 기저이며, $\dim V = r \leq n$이다.

이렇게 구성한 $\mathcal{B}$의 크기가 n이라고 하자. $\mathcal{B} \subseteq \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$인데 $|\mathcal{B}| = \big|\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}\big|$이므로, $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$이다. 따라서, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$은 기저를 이룬다. $\square$

지금까지의 내용에 따라서, 벡터 공간 V와 W간의 선형 변환 L에 대해서 다음의 명제들은 서로 동치이다:

1. L은 일대일 함수이다.
2. $\mathrm{N}(L) = \{\boldsymbol{0}\}$이다. (정리 10)
3. $\operatorname{rank} L = \dim V$이다. (정리 11)
4. 임의의 선형 독립인 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in V$에 대해서, $L(\boldsymbol{v}_1), \dots, L(\boldsymbol{v}_n)$도 선형 독립이다. (정리 19)

만약 $V = W$이고, V가 유한 생성 벡터 공간이라면, 다음의 명제들도 위 명제들과 동치이다:

5. L은 위로의 함수이다. (정리 18)
6. L은 일대일 대응이다. (1과 5로부터)
7. L은 가역(invertible)이다. (정리 12)

나아가 $V = W = \mathbb{R}^n$일 경우, 선형 변환 L에 대응되는 $n \times n$ 행렬 A가 있어서 다음의 명제들도 위 명제들과 동치이다:

8. $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \quad L^{-1}(\boldsymbol{v}) = A^{-1}\boldsymbol{v}$이다. (7로부터)
9. A의 열벡터들은 일차 독립이다. (정리 14와 20)