

공학 수학 강의 노트

이재호

jaeho.lee@snu.ac.kr

마지막 수정: 2018년 10월 7일

7 Linear Algebra: Matrices, Vectors, Determinants. Linear Systems

2018년 9월 3일 Field는 수학과 물리학에서 지칭하는 대상이 다르다:

- 體: 실수체, 복소수체
- 場: 전자기장, 벡터장

Definition 1. 체는 $+, -, \times, \div$ 에 대해 닫혀 있는 수 집합을 말한다.

Example.

- \mathbb{Q} 는 조밀 (dense) 하다.
- \mathbb{R} 은 콤팩트 (complete) 있다.
- \mathbb{C} 는 대수적으로 닫혀 (closed) 있다.
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$

Definition 2. 벡터 공간은 (roughly) 덧셈 (+) 과 (어떤 체에 속하는) 상수배가 정의된 집합이다.

Example.

- $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ 은 덧셈에 대해 닫혀 있고, $k \in \mathbb{R}$ 의 곱에 대해 닫혀 있으므로 실수체에 대한 벡터 공간이다.

- \mathbb{R}^n 과 \mathbb{C}^n 은 실수체에 대한 벡터 공간이면서 유리수체에 대한 벡터 공간이다. 이를 각각 \mathbb{Q} -벡터 공간, \mathbb{R} -벡터 공간이라고 한다.
- $\mathcal{C}_I^0 = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{는 연속 함수, } I \subset \mathbb{R}\}$ 에서는, $x \mapsto \sin x$ 가 하나의 벡터이다.
- $\mathcal{C}_I^n = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists f^{(n)}, f^{(n)} \text{는 연속 함수, } I \subset \mathbb{R}\}$ 이며, $\mathcal{C}_I^0 > \mathcal{C}_I^1 > \dots > \mathcal{C}_I^\infty$ 이다.

Definition 2. 체 F 에 대한 벡터 공간 V 의 원소 $v_1, \dots, v_n \in V$ 에 대해서,

1. $c_1, \dots, c_k \in F$ 일 때

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$$

는 v_1, \dots, v_k 의 일차 결합, 혹은 선형 결합(linear combination)이라고 한다.

2. v_1, \dots, v_k 의 선형 생성

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

은 모든 일차 결합의 집합이다. 예를 들어, 어떤 평면 상의 평행하지 않은 두 벡터는 그 평면을 선형 생성한다.

3. $W \subset V$ 이면서 W 가 벡터 공간이면, W 는 V 의 부분 공간이라고 하며 $W < V$ 로 표기한다. 예를 들어, 실수 평면으로 나타내어지는 \mathbb{R}^2 벡터 공간의 부분 집합인 원점을 지나는 직선은 벡터 공간이므로 부분 공간이다. 반면, 원점을 지나지 않는 직선은 부분 집합이지만 벡터 공간은 아니므로 부분 공간이 아니다.
4. $W = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} < V$ 일 때, v_1, \dots, v_k 는 W 의 생성자(generator)라고 한다.
5. v_1, \dots, v_k 가 일차 종속(linearly dependent)라는 것은 어느 하나가 다른 벡터들의 일차 결합이라는 것이다. 일차 종속이 아니면 일차 독립(linearly independent)이라고 한다. 예를 들어, \mathbb{R}^3 에서 $(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)$ 는 일차 종속인 반면, $(1, 2, 3), (4, 5, 6)$ 은 일차 독립이다.

2018년 9월 5일 **Theorem 1.** 체 F 에 대한 벡터 공간 V 의 원소들 v_1, \dots, v_k 가 일차 독립이라는 것은, $c_1, \dots, c_k \in F$ 일 때

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = \dots = c_k = 0$$

이라는 것과 동치이다.

Proof. (\Rightarrow) (재배열 가능하여) $c_k \neq 0$ 이라고 가정하자. 그렇다면,

$$v_k = - \left(\frac{c_1}{c_k} v_1 + \cdots + \frac{c_{k-1}}{c_k} v_{k-1} \right)$$

이므로 v_1, \dots, v_k 가 일차 독립이라는 가정에 모순된다.

(\Leftarrow) v_1, \dots, v_k 가 일차 종속이라고 가정하자. 즉, (재배열 가능하여) 어떤 $a_1, \dots, a_{k-1} \in F$ 가 존재해서,

$$v_k = a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1}$$

이다. 그렇다면

$$a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1} + (-1)v_k = 0$$

이므로 모순이다. □

Example.

- $a, b, c \in \mathbb{R}$ 에 대해

$$a(1, 2, 3) + b(4, 5, 6) + c(7, 8, 10) = (0, 0, 0)$$

을 만족하는 a, b, c 는 0밖에 없으므로 $(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 10)$ 은 일차 독립이다.

- $0, v_1, \dots, v_k$ 는 일차 종속이다.
- v_1, v_2, v_3, v_4 가 일차 독립이면 v_1, v_2, v_3 또한 일차 독립이다. (왜냐하면 v_1, v_2, v_3 가 종속이면 $v_3 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + 0v_4$ 이기 때문이다.)

Definition 3. 벡터 공간 V 의 부분 공간 W 가 일차 독립인 v_1, \dots, v_k 에 의해 생성될 때, $\{v_1, \dots, v_k\}$ 를 W 의 기저(basis)라고 한다.

Theorem 2 (차원(dimension) 정리). W 가 유한 생성(finitely generated) (부분)공간이면 W 의 기저의 원소의 개수는 동일하다. 이 때, 기저의 원소의 개수를 W 의 차원(dimension)이라고 하며, $\dim W$ 로 표기한다.

Example.

- $\mathcal{P}_n = \{n\text{차 이하 실계수 다항식}\}$ 일 때, $f \in \mathcal{P}_n$ 는 항상 $\mathcal{B} = \{1, x, \dots, x^n\}$ 의 원소의 상수배의 합으로 나타낼 수 있다. 또한,

$$c_0 \cdot 1 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$$

이면 $c_0 = \dots c_n = 0$ 이므로, \mathcal{B} 는 기저이다.

- $\mathcal{P} = \{\text{모든 다항식}\}$ 의 기저는 $\{1, x, x^2, \dots\}$ 이며 $\dim \mathcal{P} = \infty$ 이다.

Homework.

1. a_1, a_2, a_3 는 서로 다른 실수이다. 이 때, $(1, a_1, a_1^2), (1, a_2, a_2^2), (1, a_3, a_3^2)$ 이 일차 독립임을 보여라.
2. a_1, \dots, a_n 는 서로 다른 실수이다. 이 때, $(1, a_1, a_1^2), \dots, (1, a_n, a_n^2)$ 이 일차 독립임을 보여라.

Theorem 3. 체 F 에 대한 벡터 공간 V 의 일차 독립인 v_1, \dots, v_k 에 대해서, $w \in V \setminus \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ 이면 v_1, \dots, v_k, w 는 일차 독립이다.

Proof. $c_1, \dots, c_k, a \in F$ 일 때,

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k + a w = 0$$

이라고 가정하자. 만약 $a \neq 0$ 이라면

$$w = -\left(\frac{c_1}{a} v_1 + \dots + \frac{c_k}{a} v_k\right) \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

이므로 모순이다. 따라서 $a = 0$ 이며, v_1, \dots, v_k 는 일차 독립이므로 $c_1 = \dots = c_k = a = 0$ 이다. 그러므로 v_1, \dots, v_k, w 는 일차 독립이다. \square

Theorem 3에 따르면, 일차 독립인 벡터들의 선형 생성에 포함되지 않는 벡터 또한 이들과 일차 독립이다. 이에 따라 어떤 유한 생성 벡터 공간 V 의 일차 독립인 벡터들 v_1, \dots, v_k 가 주어졌을 때, 선형 생성에 속하지 않는 벡터 $w_{k+1}, \dots, w_{\dim V}$ 를 순차적으로 추가해서 기저를 구성할 수 있다. 이를 기저 확장(basis extension)이라고 부른다.

Theorem 4. 체 F 에 대한 벡터 공간 V 의 부분 공간 W_1, W_2 가 주어졌을 때, $W_1 \cap W_2$ 또한 V 의 부분 공간이다.

Proof. $v_1, v_2 \in W_1$ 이면서 $v_1, v_2 \in W_2$ 이면, 각각 벡터 공간이므로 임의의 $c_1, c_2 \in F$ 에 대해서 $c_1 v_1 + c_2 v_2 \in W_1$ 이면서 $c_1 v_1 + c_2 v_2 \in W_2$ 이다. 즉,

$$v_1, v_2 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \forall c_1, c_2 \in F \quad c_1 v_1 + c_2 v_2 \in W_1 \cap W_2$$

이다. 따라서, $W_1 \cap W_2 < V$ 가 성립한다. \square

Definition 4. 벡터 공간 V 의 부분 집합 W_1, W_2 에 대해서 $W_1 + W_2$ 를 다음과 같이 정의한다:

$$W_1 + W_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in W_1, v_2 \in W_2\}.$$

Example. 좌표 평면으로 나타내어지는 벡터 공간 \mathbb{R}^2 의 부분 집합(이면서 부분 공간인)인 원점을 지나는 직선을 W_1 이라고 하자. 원점이 아닌 한 점만을 원소로 하는 집합 $W_2 \subset \mathbb{R}^2$ 가 주어졌을 때, $W_1 + W_2$ 는 W_1 의 직선을 W_2 의 (유일한) 원소의 점으로 평행 이동한 직선을 나타낸다.

Theorem 5. 체 F 에 대한 벡터 공간 V 의 부분 공간 W_1 과 W_2 에 대해서, $W_1 + W_2$ 도 V 의 부분 공간이다.

Proof. 임의의 $v_1 \in W_1 + W_2$ 에 대해 어떤 $w_1 \in W_1$ 과 $w_2 \in W_2$ 가 존재하며, 마찬가지로 임의의 $v_2 \in W_1 + W_2$ 에 대해 어떤 $u_1 \in W_1$ 과 $u_2 \in W_2$ 가 존재한다. W_1 과 W_2 는 부분 공간이므로 임의의 $c_1, c_2 \in F$ 에 대해

$$\begin{aligned} c_1 w_1 + c_2 w_2 &\in W_1 \\ c_1 u_1 + c_2 u_2 &\in W_2 \end{aligned}$$

이고,

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = (c_1 w_1 + c_2 w_2) + (c_1 u_1 + c_2 u_2)$$

이므로,

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 \in W_1 + W_2$$

이다. 따라서 $W_1 + W_2 \leq V$ 이다. □

2018년 9월 10일 **Theorem 6** (그라스만 (Grassmann) 공식). 체 F 에 대한 유한 생성 벡터 공간 U 와 W 에 대해, 다음이 성립한다:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Proof. $l = \dim(U \cap W)$, $n = \dim U - l$, $m = \dim W - l$ 이라 하고, $U \cap W$ 의 기저를 $\mathcal{B}_\cap = \{v_1, \dots, v_l\}$ 라고 하자. \mathcal{B}_\cap 을 확장해 U 의 기저 $\mathcal{B}_U = \{v_1, \dots, v_l, u_1, \dots, u_n\}$ 와 W 의 기저 $\mathcal{B}_W = \{v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_m\}$ 을 구성할 수 있다.

이제 $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \{v_1, \dots, v_l, u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m\}$ ¹가 $U + W$ 의 기저임을 보이자. $U + W$ 의 원소 v 를 고르면, $v = u + w$ 가 되는

$$u = a_1 v_1 + \dots + a_l v_l + b_1 u_1 + \dots + b_n u_n$$

¹이를 위해서는 u_1, \dots, u_n 과 w_1, \dots, w_m 에 겹치는 원소가 없어야 한다. 이는 $\mathcal{B}_\cap = \mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$ 와 동치인데, 자명할수도 있겠지만 증명 후에 다루었다.

와

$$\mathbf{w} = a'_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a'_l \mathbf{v}_l + c_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + c_m \mathbf{w}_m$$

가 존재하고, 이러한 $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_n, a'_1, \dots, a'_l, c_1, \dots, c_m \in F$ 는 유일하다. 따라서,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{u} + \mathbf{w} \\ &= \left(\sum_{i=1}^l a_i \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{u}_j \right) + \left(\sum_{i=1}^l a'_i \mathbf{v}_i + \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{w}_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^l (a_i + a'_i) \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{u}_j + \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{w}_k \end{aligned}$$

이므로 \mathbf{v} 는 $\text{Span}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W)$ 의 원소이고, $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ 는 $U + W$ 를 생성한다.

이제

$$\sum_{i=1}^l a_i \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{u}_j + \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{w}_k = \mathbf{0}$$

이라고 하자. \mathbf{u}_j 항을 제외하고 모두 우변으로 이항하면

$$\sum_{j=1}^n b_j \mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^l -a_i \mathbf{v}_i + \sum_{k=1}^m -c_k \mathbf{w}_k$$

이 되고, $\mathbf{z} = \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{u}_j$ 라고 두자.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{u}_j &\in \text{Span } \mathcal{B}_U = U \\ \sum_{i=1}^l -a_i \mathbf{v}_i + \sum_{k=1}^m -c_k \mathbf{w}_k &\in \text{Span } \mathcal{B}_W = W \end{aligned}$$

이므로, $\mathbf{z} \in U \cap W = \text{Span } \mathcal{B}_\cap = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \rangle$ 이다. 즉

$$\mathbf{z} = d_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + d_l \mathbf{v}_l$$

이 되는 $d_1, \dots, d_l \in F$ 가 유일하게 존재한다. 그런데 \mathcal{B}_U 와 \mathcal{B}_W 는 일차 독립이므로 $j \in \{1, \dots, l\}$ 에 대해 $b_j = 0$ 이고 $k \in \{1, \dots, m\}$ 에 대해 $c_k = 0$ 이다. 이에 따라 $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ 이 되어 $i \in \{1, \dots, l\}$ 에 대해서도 $a_i = 0$ 이다. 그러므로 $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ 은 일차 독립이다.

$\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ 는 $U + W$ 를 생성하고 일차 독립이므로, $U + W$ 의 기저이다. 결국

$$\begin{aligned}\dim(U + W) &= |\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W| \\ &= l + n + m \\ &= (l + n) + (l + m) - l \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)\end{aligned}\quad \square$$

My remark. 위 증명에서 $\mathcal{B}_\cap = \mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$ 임을 보이자.² 위 증명이 성립하기 위해서는 $\{u_1, \dots, u_n\}$ 와 $\{w_1, \dots, w_m\}$ 의 모든 원소가 달라야하기 때문이다. 먼저 $\mathcal{B}_\cap \subseteq \mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$ 임은 자명하다. $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$ 에 속하는 원소 x 를 고르자. $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W \subseteq U \cap W$ 이므로, $x \in \text{Span } \mathcal{B}_\cap$ 이다. 나아가 \mathcal{B}_U 와 \mathcal{B}_W 의 원소인 x 는 \mathcal{B}_\cap 의 모든 원소들과 일차 독립이므로, $x \in \mathcal{B}_\cap$ 이어야 한다. 따라서 $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W \subseteq \mathcal{B}_\cap$ 이다.

Definition 5. 체 F 에 대한 벡터 공간 V, W 에서, 임의의 $v_1, v_2 \in V$ 와 $c_1, c_2 \in F$ 에 대해

$$L(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1L(v_1) + c_2L(v_2)$$

을 만족하는 함수 $L : V \rightarrow W$ 을 선형 변환(linear transformation) 혹은 선형 사상(linear map)이라고 한다.

Example.

1. $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대해,

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \\ 5x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

은 선형 변환이다.

2. $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대해,

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \\ 5x + 6y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

은 선형 변환이 아니다.

3. 어떤 사상 $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 이 존재한다는 것은 어떤 $m \times n$ 행렬 A 가 존재해서 $L(x) = Ax$ 라는 것이다.

²참고로, $\mathcal{B}_U \setminus \mathcal{B}_W$ 는 $U \setminus W$ 의 기저가 아니다. $0 \in U \cap W$ 임에 따라 $0 \notin U \setminus W$ 이므로, $U \setminus W$ 는 벡터 공간이 아니기 때문이다.

4. $f \mapsto f'$ 의 미분 연산자 $L : C_I^\infty \rightarrow C_I^\infty$ 는 $L(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1f_1' + c_2f_2' = c_1L(f_1) + c_2L(f_2)$ 이므로 선형 변환이다.

5. $f(x) \mapsto \int_0^x f(t) dt$ 의 적분 연산자 $L : C_I^\infty \rightarrow C_I^\infty$ 또한 선형 변환이다.

Definition 6. 두 벡터 공간 V 와 W 간의 선형 변환 $L : V \rightarrow W$ 에 대해 다음이 정의된다:

1. L 의 핵(kernel) 혹은 영 공간(null space)³

$$\ker L = N(L) := \{v \in V \mid L(v) = \mathbf{0}\}.$$

2. L 의 치역(range) 혹은 상(image)⁴

$$R(L) = \text{Im}(L) := \{L(v) \mid v \in V\}.$$

3. L 이 일대일 함수(one-to-one function) 혹은 단사 함수(injective function, injection)라는 것은 다음을 의미한다:

$$\forall v_1, v_2 \in V \quad (L(v_1) = L(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2)$$

4. L 이 위로의(onto) 함수 혹은 단사 함수(surjective function, surjection)라는 것은 다음을 의미한다:

$$\forall w \in W \quad \exists v \in V \quad L(v) = w$$

Example.

1. $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 일 때 $\ker L (= N(L))$ 을 구하시오.

³영 공간이라는 용어는 보통 행렬에 국한되어 사용되고, 핵은 추상적인 선형 변환에 대해 많이 사용된다.

⁴치역은 정의역의 상이다. 상은 정의역의 부분 집합에 대해서도 정의될 수 있다.

Solution.

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\text{Echelon}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\text{Reduce}} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

즉

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

이 되어, $N(L) = \langle (1, -2, 1) \rangle$ 이다. ■

2. $R(L)$ ($= \text{Im}(L)$) 을 구하시오.

Solution. $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 이므로,

$$L(e_1) = (1, 4, 7)$$

$$L(e_2) = (2, 5, 8)$$

$$L(e_3) = (3, 6, 9)$$

가 된다. 따라서

$$\begin{aligned} R(L) &= \{L(x, y, z) \mid (x, y, z) \in V\} \\ &= \{L(xe_1 + ye_2 + ze_3) \mid (x, y, z) \in V\} \\ &= \{xL(e_1) + yL(e_2) + zL(e_3) \mid (x, y, z) \in V\} \\ &= \text{Span}\{L(e_1), L(e_2), L(e_3)\} \\ &= \langle (1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9) \rangle \\ &= \langle (1, 4, 7), (2, 5, 8) \rangle \end{aligned}$$

이다. ■

Theorem 7. 벡터 공간 V 와 W 간의 선형 사상 $L : V \rightarrow W$ 에 대해 $N(L) < V$ 이고 $R(L) < W$ 이다.

Theorem 8 (계수(rank)-퇴화 차수(nullity) 정리). 벡터 공간 V 와 W 간의 선형 사상 $L : V \rightarrow W$ 에 대해 다음이 성립한다:

$$\dim N(L) + \dim R(L) = \dim V.^5$$

Example. 이전 예시에서 $N(L) = \langle (1, -2, 1) \rangle$ 이고 $R(L) = \langle (1, 4, 7), (2, 5, 8) \rangle$ 이므로, $\dim N(L) + \dim R(L) = 1 + 2 = 3$ 이 성립한다.

2018년 9월 12일 **Theorem 9.** 벡터 공간 V 와 W 간의 선형 변환 $L : V \rightarrow W$ 에 대해서 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 이 V 의 기저라면,

$$R(L) = \text{Span}\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$$

이다.

Remark. 위에서 $\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ 이 기저일 필요는 없다.

Theorem 10. 벡터 공간 V 와 W 간의 선형 변환 $L : V \rightarrow W$ 가 일대일이라는 것은 $N(L) = \{0\}$ 라는 것과 동치이다.

Proof. (\Rightarrow) $L(0) = 0$ 이고, L 은 일대일이므로 $L(v) = 0$ 를 만족하는 $v = 0$ 가 유일하다.

(\Leftarrow) $L(v_1) = L(v_2)$ 인 임의의 $v_1, v_2 \in V$ 를 고르자. 그렇다면

$$L(v_1) - L(v_2) = L(v_1 - v_2) = 0$$

인데, $N(L) = \{0\}$ 이므로 $v_1 - v_2 = 0$ 이다. 따라서 $v_1 = v_2$ 이며, L 은 일대일 함수이다. \square

Theorem 11. 벡터 공간 V 와 W 간의 선형 변환 $L : V \rightarrow W$ 가 일대일이라는 것은 $\dim R(L) = \dim V$ 라는 것과 동치이다.

Proof. L 이 일대일이라는 것은 Theorem 10에 따라 $N(L) = \{0\}$, 즉 $\dim N(L) = 0$ 이라는 것과 동치이다.⁶ 그런데 Theorem 8에 따라서 $\dim N(L) + \dim R(L) = \dim V$ 이므로, $\dim R(L) = \dim V$ 가 성립한다. \square

Theorem 12. 벡터 공간 V 와 W 간의 선형 변환 $L : V \rightarrow W$ 가 전단사라는 것은 L 의 역함수 $L^{-1} : W \rightarrow V$ 가 존재한다는 것이다. 이 때, L^{-1} 도 선형이다.

Proof. 전단사 함수는 역함수가 존재하므로, L^{-1} 이 선형임을 보이면 된다.

⁵계수와 퇴화 차수에 대해서는 다음 강좌에 정의한다.

⁶ $\dim N(L) = 0 \Leftrightarrow N(L) = \{0\}$

W 에서 두 원소 w_1 와 w_2 를 고르자. 이 때,

$$\begin{aligned} L^{-1}(w_1) &= v_1 \\ L^{-1}(w_2) &= v_2 \end{aligned}$$

라고 하자. 그렇다면 w_1 과 w_2 의 선형 결합은 다음과 같이 표현된다:

$$\begin{aligned} c_1 w_1 + c_2 w_2 &= c_1 L(v_1) + c_2 L(v_2) \\ &= L(c_1 v_1 + c_2 v_2) \end{aligned}$$

양변에 역함수를 취해주면

$$\begin{aligned} L^{-1}(c_1 w_1 + c_2 w_2) &= c_1 v_1 + c_2 v_2 \\ &= c_1 L^{-1}(w_1) + c_2 L^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

이 되어 L^{-1} 또한 선형 변환임을 알 수 있다. □

Definition 7. 벡터 공간 V 와 W 간의 선형 변환 $L : V \rightarrow W$ 에 대해서, L 의 계수

$$\text{rank } L := \dim R(L)$$

로 정의한다.

Theorem 13. 벡터 공간 U, V, W 에 대해 선형 변환 $L_1 : U \rightarrow V$ 와 $L_2 : V \rightarrow W$ 이 주어졌다고 하자. 만약 L_2 가 일대일 함수라면, 다음이 성립한다:

$$\text{rank}(L_2 \circ L_1) = \text{rank } L_1$$

Proof. 정리 7에 의해 $R(L_1)$ 은 벡터 공간이므로, 선형 변환 $\tilde{L}_2 : R(L_1) \rightarrow W$ 를 정의하자:

$$\forall v \in R(L_1) < V \quad \tilde{L}_2(v) = L_2(v)$$

따라서 \tilde{L}_2 또한 일대일 선형 변환임을 알 수 있다. 정리 11에 따라

$$\dim R(\tilde{L}_2) = \dim R(L_1)$$

이다. 그런데

$$\begin{aligned} R(\tilde{L}_2) &= \{\tilde{L}_2(v) \mid v \in R(L_1)\} \\ &= \{L_2(v) \mid v \in R(L_1)\} \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} R(L_2 \circ L_1) &= \{(L_2 \circ L_1)(u) \mid u \in U\} \\ &= \{L_2(v) \mid v = L_1(u), u \in U\} \\ &= \{L_2(v) \mid v \in R(L_1)\} \end{aligned}$$

이므로 $R(\tilde{L}_2) = R(L_2 \circ L_1)$ 이다. 따라서 $\dim R(\tilde{L}_2) = \dim R(L_2 \circ L_1) = \dim R(L_1)$ 이 성립한다. \square

Remark. 위 증명에서 $R(L_2 \circ L_1)$ 의 기저와 $R(L_1)$ 의 기저의 개수가 같음을 보이면 되므로 $R(L_1)$ 의 기저 각각에 L_2 를 취한 벡터들이 다시 $R(L_2 \circ L_1)$ 의 기저가 됨을 보여도 된다.

Definition 8. $m \times n$ 행렬 (matrix)이란, m 개의 행과 n 개의 열로 이루어진 원소들의 나열이다:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

두 행렬의 곱은 각각의 행렬에 대응되는 선형 변환의 합성에 대응된다. 즉, 어떤 선형 변환 $L_A : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$ 이 $x \mapsto Ax$ 로 대응시키고 $L_B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 이 $Ax \mapsto B(Ax) = BAx$ 로 대응시킨다면, BA 는 $L_B \circ L_A$ 에 대응된다.

$n \times n$ 행렬 A, B 에 대해서 $AB = BA = I$ 이라면, $A = B^{-1}$ 이고 $B = A^{-1}$ 이다. 이 때,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

을 말한다.

Definition 9. 선형 변환 L_A 에 대응되는 행렬 A 에 대해서, 열공간(column space)은 A 의 열벡터들의 생성이다. 따라서 열공간은 $R(L_A)$ 와 동일하다. 이 때 열공간의 차원을 열계수(column rank)라고 부르며, L_A 의 계수 $\dim R(L_A) = \text{rank } L_A$ 와 같다.

마찬가지로, 행공간(row space)은 A 의 행벡터들의 생성이다. 이 때 행공간의 차원을 행계수(row rank)라고 부른다.

Example. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 에서 열벡터 $(1, 4, 7)$ 과 $(3, 6, 9)$ 는 일차 독립이고, $(2, 5, 8)$ 은 두 벡터의 합의 절반이므로 일차 종속이다. 따라서 열계수는 2이다. 또한 행벡터 $(1, 2, 3)$ 과 $(7, 8, 9)$ 는 일차 독립이고, $(4, 5, 6)$ 은 두 벡터의 합의 절반이므로 일차 종속이다. 따라서 행계수도 2이다.

Theorem 14. 선형 변환 L_A 에 대응되는 행렬 A 에 대해서, 열계수와 행계수는 동일하다. 즉, 열계수와 행계수 모두 $\text{rank } L_A$ 로 나타내어지며 바로 행렬 A 를 사용해 $\text{rank } A$ 라고 쓸 수 있다.

두 행을 교환하거나, 어떤 행의 상수배를 다른 행에 더하거나, 한 행에 0이 아닌 상수를 곱하는 연산을 행렬의 기본 행 연산이라고 한다. 마찬가지로 열에 대해서도 기본 열 연산을 정의할 수 있다.

Theorem 15. 두 행렬 A 와 B 의 곱을 C 라고 하자. 행렬 A 에 기본 행 연산을 취한 새로운 행렬을 \tilde{A} 라고 하자. 행렬 C 에 동일한 기본 행 연산을 취한 새로운 행렬을 \tilde{C} 라고 하면, 여전히 $\tilde{A}B = \tilde{C}$ 가 성립한다.

Definition 10. 항등행렬 I 에 기본 행/열 연산을 한 번한 것을 기본 행렬이라고 부른다.

Example. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 은 모두 계수가 3인 기본 행렬들이다.

Theorem 16. $n \times n$ 기본 행렬의 계수는 n 이다.

Proof. $n \times n$ 항등행렬 I 에 대해서, 각 열벡터를 e_1, \dots, e_n 이라고 하자. 이 때 열벡터들은 서로 독립이므로 $\text{rank } I = n$ 이다.

I 에 어떤 기본 열 연산을 하여 기본 행렬 A 를 만들었다고 하자. 기본 열 연산이 1. 열의 교환인 경우, 2. 열의 상수배를 하여 다른 열에 더한 경우, 3. 열에 0이 아닌 상수를 곱한 경우에 대해서 생각하자.

1. 열을 교환했을 경우

i 번째 열과 j 번째 열을 교환했다고 하자. 그렇다면 A 의 열벡터들은 $e_1, \dots, e_j(i \text{ 번째}), \dots, e_i(j \text{ 번째}), \dots, e_n$ 이 된다. 그런데 e_1, \dots, e_n 은 순서와 상관없이 일차 독립이므로 A 의 열벡터들도 일차 독립이다.

2. 열의 상수배를 하여 다른 열에 더한 경우

i 번째 열에 k 배를 하여 j 열에 더했다고 하자. ($k \neq 0$ 이다.) 그렇다면 A 의

열벡터들은 $e_1, \dots, e_j + ke_i, \dots, e_n$ 이 된다. 다음의 선형 결합을 생각하자:

$$c_1 e_1 + \dots + c_j (e_j + ke_i) + \dots + c_n e_n = \mathbf{0}$$

만약 c_j 가 0이 아니라면, 다음과 같이 식을 재작성할 수 있다:

$$e_j = -\frac{1}{c_j} (c_1 e_1 + \dots + c_{j-1} e_{j-1} + c_{j+1} e_{j+1} + \dots + c_n e_n) + \frac{k}{c_j} e_i$$

이 때 $\frac{k}{c_j} \neq 0$ 이므로 e_1, \dots, e_n 이 독립이라는 것에 모순이다. 따라서 $c_j = 0$ 이다. 결국,

$$c_1 e_1 + \dots + c_{j-1} e_{j-1} + c_{j+1} e_{j+1} + \dots + c_n e_n = \mathbf{0}$$

가 되어, $c_1 = \dots = c_{j-1} = c_{j+1} = \dots = c_n = 0$ 이다. 그런데 $c_j = 0$ 이므로 $c_1 = \dots = c_n = 0$ 이어서, A 의 열벡터들도 일차 독립이다.

3. 열에 0이 아닌 상수를 곱한 경우

i 번째 열에 $k \neq 0$ 을 곱했다고 하자. 그렇다면 A 의 열벡터들은 e_1, \dots, ke_i, e_n 이 된다. 다음의 선형 결합을 생각하자:

$$c_1 e_1 + \dots + c_i (ke_i) + \dots + c_n e_n = \mathbf{0}$$

e_1, \dots, e_n 의 독립성에 의해 $c_1 = \dots = c_i k = \dots = c_n = 0$ 이 된다. 그런데 $k \neq 0$ 이므로 $c_1 = \dots = c_n = 0$ 이다. 따라서 A 의 열벡터들도 일차 독립이다.

따라서, A 의 열공간의 차원은 n 이고 정리 14 의해 $\text{rank } A = n$ 이다. 마찬가지로 기본 행 연산의 경우에도 모든 과정을 행벡터에 대입하여 진행하면 동일하게 계수가 n 임을 알 수 있다. \square

Theorem 17. 어떤 벡터 공간 V 와 부분 공간 W 가 주어졌다고 하자. 그렇다면, 다음이 성립한다:

$$\dim W = \dim V \Rightarrow W = V$$

Proof. $\dim W = \dim V = n$ 일 때, 벡터 공간 W 의 기저 $\mathcal{B} = w_1, \dots, w_n$ 를 구성하자. w_1, \dots, w_n 은 일차 독립이고 V 의 원소이기도 하므로, 기저 확장을 통해 V 의 기저를 구성할 수 있다. 그런데 이미 $|\mathcal{B}| = \dim V$ 이므로, \mathcal{B} 는 V 의 기저이다. 따라서 $\text{Span } \mathcal{B} = W = V$ 이다. \square

Theorem 18. 선형 변환 $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 에 대해서, 다음의 명제는 동치이다:

1. L_A 는 일대일 함수이다.
2. L_A 는 위로의 함수이다.
3. $\text{rank } L_A = n$ 이다.

Proof. 정리 11에 의해 L_A 가 일대일 함수라는 것은 $\dim \mathbf{R}(L_A) = \dim \mathbb{R}^n$, 즉 $\text{rank } L_A = n$ 이라는 것과 동치이다. 따라서 1과 3은 동치이다.

이제 2와 3이 동치임을 보이자. 만약 L_A 가 위로의 함수이면, 공역과 치역이 동일하다. 즉, $\mathbf{R}(L_A) = \mathbb{R}^n$ 이다. 따라서 $\text{rank } L_A = \dim \mathbf{R}(L_A) = \dim \mathbb{R}^n = n$ 이 성립한다.

역으로, $\text{rank } L_A = n$ 이라고 하자. $\dim \mathbf{R}(L_A) = \dim \mathbb{R}^n$ 이므로, 정리 17에 따라 $\mathbf{R}(L_A) = \mathbb{R}^n$ 이다. 그러므로 L_A 는 위로의 함수이다.

따라서, 1, 2, 3은 모두 동치이다. □