공학 수학
강의 노트

이재호

jaeho.lee@snu.ac.kr

마지막 수정: 2018년 9월 28일

7 Linear Algebra: Matrices, Vectors, Determinants. Linear Systems

2018년 9월 3일 Field는 수학과 물리학에서 지칭하는 대상이 다르다:

- **체體**: 실수체, 복소수체
- **장場**: 전자기장, 벡터장

Definition 1. 체는 $+, -, \times, \div$에 대해 닫혀 있는 수 집합을 말한다.

Example.

- $\mathbb{Q}$는 조밀 (dense) 하다.
- $\mathbb{R}$은 꽉차 (complete) 있다.
- $\mathbb{C}$는 대수적으로 닫혀 (closed) 있다.
- $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{a + b\sqrt{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q}\right\}$
- $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$

Definition 2. 벡터 공간은 (roughly) 덧셈 $(+)$과 (어떤 체에 속하는) 상수배가 정의된 집합이다.

Example.

- $\mathbb{R}^2 = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}\right\}$은 덧셈에 대해 닫혀 있고, $k \in \mathbb{R}$의 곱에 대해 닫혀 있으므로 실수체에 대한 벡터 공간이다.

- $\mathbb{R}^n$과 $\mathbb{C}^n$은 실수체에 대한 벡터 공간이면서 유리수체에 대한 벡터 공간이다. 이를 각각 $\mathbb{Q}$–벡터 공간, $\mathbb{R}$–벡터 공간이라고 한다.
- $\mathcal{C}_I^0 = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f\text{는 연속 함수}, I \subset \mathbb{R}\}$에서는, $x \mapsto \sin x$가 하나의 벡터이다.
- $\mathcal{C}_I^n = \left\{f : I \to \mathbb{R} \,\middle|\, \exists f^{(n)}, f^{(n)}\text{는 연속 함수}, I \subset \mathbb{R}\right\}$이며, $\mathcal{C}_I^0 > \mathcal{C}_I^1 > \cdots > \mathcal{C}_I^\infty$이다.

Definition 2. 체 F에 대한 벡터 공간 V의 원소 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$에 대해서,

1. $c_1, \ldots, c_k \in F$일 때
$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$
는 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$의 일차 결합, 혹은 선형 결합 (linear combination) 이라고 한다.

2. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$의 선형 생성
$$\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$$
은 모든 일차 결합의 집합이다. 예를 들어, 어떤 평면 상의 평행하지 않은 두 벡터는 그 평면을 선형 생성한다.

3. $W \subset V$이면서 W가 벡터 공간이면, W는 V의 부분 공간이라고 하며 $W < V$로 표기한다. 예를 들어, 실수 평면으로 나타내어지는 $\mathbb{R}^2$ 벡터 공간의 부분 집합인 원점을 지나는 직선은 벡터 공간이므로 부분 공간이다. 반면, 원점을 지나지 않는 직선은 부분 집합이지만 벡터 공간은 아니므로 부분 공간이 아니다.

4. $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} < V$일 때, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$는 W의 생성자 (generator) 라고 한다.

5. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$가 일차 종속 (linearly dependent) 라는 것은 어느 하나가 다른 벡터들의 일차 결합이라는 것이다. 일차 종속이 아니면 일차 독립 (linearly independent) 이라고 한다. 예를 들어, $\mathbb{R}^3$에서 $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)$는 일차 종속인 반면, $(1,2,3), (4,5,6)$은 일차 독립이다.

2018년 9월 5일 **Theorem 1.** *체 F에 대한 벡터 공간 V의 원소들 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$가 일차 독립이라는 것은, $c_1, \ldots, c_k \in F$일 때*
$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = \cdots = c_k = 0$$
이라는 것과 동치이다.

Proof. (⇒) (재배열 가능하여) $c_k \neq 0$이라고 가정하자. 그렇다면,

$$\mathbf{v}_k = -\left(\frac{c_1}{c_k}\mathbf{v}_1 + \cdots + \frac{c_{k-1}}{c_k}\mathbf{v}_{k-1}\right)$$

이므로 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$가 일차 독립이라는 가정에 모순된다.

(⇐) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$가 일차 종속이라고 가정하자. 즉, (재배열 가능하여) 어떤 $a_1, \ldots, a_{k-1} \in F$가 존재해서,

$$\mathbf{v}_k = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}$$

이다. 그렇다면

$$a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + (-1)\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

이므로 모순이다. □

Example.

- $a, b, c \in \mathbb{R}$에 대해

  $$a(1,2,3) + b(4,5,6) + c(7,8,10) = (0,0,0)$$

  을 만족하는 a, b, c는 0밖에 없으므로 $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,10)$은 (일차) 독립이다.

- $\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$는 (일차) 종속이다.

- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$가 독립이면 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 또한 독립이다. (왜냐하면 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 가 종속이면 $\mathbf{v}_3 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_4$이기 때문이다.)

Definition 3. 벡터 공간 V의 부분 공간 W가 일차 독립인 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$에 의해 생성될 때, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$를 W의 기저(basis)라고 한다.

Theorem 2. *W가 유한 생성 (finitely generated) (부분) 공간이면 W의 기저의 원소의 개수는 동일하다. 이 때, 기저의 원소의 개수를 W의 차원(dimension) 이라고 하며,* $\dim W$*로 표기한다.*

Example.

- $\mathcal{P}_n = \{n$차 이하 실계수 다항식$\}$일 때, $\mathcal{P}_n$의 원소 f는 항상 $\mathcal{B} = \{1, x, \ldots, x^n\}$의 원소의 상수배의 합으로 나타낼 수 있다. 또한,

  $$c_0 \cdot 1 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$$

  이면 $c_0 = \ldots c_n = 0$이므로, $\mathcal{B}$는 기저이다.

- $\mathcal{P} = \{$모든 다항식$\}$의 기저는 $\{1, x, x^2, \dots\}$이며 $\dim \mathcal{P} = \infty$이다.

Homework.

1. a_1, a_2, a_3는 서로 다른 실수이다. 이 때, $(1, a_1, a_1^2), (1, a_2, a_2^2), (1, a_3, a_3^2)$이 독립임을 보여라.

2. $a_1, \dots, a_n$는 서로 다른 실수이다. 이 때, $(1, a_1, a_1^2), \dots, (1, a_n, a_n^2)$이 독립임을 보여라.

Theorem 3. *체 F에 대한 벡터 공간 V의 독립인 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$에 대해서, $\mathbf{w} \in V \setminus \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$이면 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}$는 독립이다.*

Proof. $c_1, \dots, c_k, a \in F$일 때,

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k + a\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

이라고 가정하자. 만약 $a \neq 0$이라면

$$\mathbf{w} = -\left(\frac{c_1}{a}\mathbf{v}_1 + \cdots + \frac{c_k}{a}\mathbf{v}_k\right) \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$$

이므로 모순이다. 따라서 $a = 0$이며, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$는 독립이므로 $c_1 = \cdots = c_k = a = 0$이다. 그러므로 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}$는 독립이다. □

Theorem 3에 따르면, 독립인 벡터들의 선형 생성에 포함되지 않는 벡터 또한 이들과 독립이다. 이에 따라 어떤 유한 생성 벡터 공간 V의 독립인 벡터들 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$가 주어졌을 때, 선형 생성에 속하지 않는 벡터 $\mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_{\dim V}$를 순차적으로 추가해서 기저를 구성할 수 있다. 이를 기저 확장(basis extension)이라고 부른다.

Theorem 4. *체 F에 대한 벡터 공간 V의 부분 공간 W_1, W_2가 주어졌을 때, $W_1 \cap W_2$ 또한 V의 부분 공간이다.*

Proof. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W_1$이면서 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W_2$이면, 각각 벡터 공간이므로 임의의 $c_1, c_2 \in F$에 대해서 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \in W_1$이면서 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \in W_2$이다. 즉,

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow (\forall c_1, c_2 \in F)\ c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \in W_1 \cap W_2$$

이다. 따라서, $W_1 \cap W_2 < V$가 성립한다. □

Definition 4. 벡터 공간 V의 부분 집합 W_1, W_2에 대해서 $W_1 + W_2$를 다음과 같이 정의한다:

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_1 \in W_1, \mathbf{v}_2 \in W_2\}.$$

Example. 좌표 평면으로 나타내어지는 벡터 공간 $\mathbb{R}^2$의 부분 집합(이면서 부분 공간인) 인 원점을 지나는 직선을 W_1이라고 하자. 원점이 아닌 한 점만을 원소로 하는 집합 $W_2 \subset \mathbb{R}^2$가 주어졌을 때, $W_1 + W_2$는 W_1의 직선을 W_2의 (유일한) 원소의 점으로 평행 이동한 직선을 나타낸다.

Theorem 5. *체 F에 대한 벡터 공간 V의 부분 공간 W_1과 W_2에 대해서, $W_1 + W_2$도 V의 부분 공간이다.*

Proof. 임의의 $\mathbf{v}_1 \in W_1 + W_2$에 대해 어떤 $\mathbf{w}_1 \in W_1$과 $\mathbf{w}_2 \in W_2$가 존재하며, 마찬가지로 임의의 $\mathbf{v}_2 \in W_1 + W_2$에 대해 어떤 $\mathbf{u}_1 \in W_1$과 $\mathbf{u}_2 \in W_2$가 존재한다. W_1과 W_2는 부분 공간이므로 임의의 $c_1, c_2 \in F$에 대해

$$c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 \in W_1$$
$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 \in W_2$$

이고,

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = (c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2) + (c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2)$$

이므로,

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \in W_1 + W_2$$

이다. 따라서 $W_1 + W_2 < V$이다. □

2018년 9월 10일 **Theorem 6.** *유한 생성 벡터 공간 U와 W에 대해, 다음이 성립한다:*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Proof. $l = \dim(U \cap W)$, $n = \dim U - l$, $m = \dim W - l$이라 하고, $U \cap W$의 기저를 $\mathcal{B}_\cap = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l\}$라고 하자. $\mathcal{B}_\cap$을 확장해 U의 기저 $\mathcal{B}_U = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$와 W의 기저 $\mathcal{B}_W = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$을 구성할 수 있다.

이제 $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$가 $U + W$의 기저임을 보이자. $U + W$의 원소 $\mathbf{v}$를 고르면, $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$가 되는 $\mathbf{u} \in U$와 $\mathbf{w} \in W$가 존재한다. 따라서,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \mathbf{u} + \mathbf{w} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{l} a_i\mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\mathbf{u}_j\right) + \left(\sum_{i=1}^{l} a_i'\mathbf{v}_i + \sum_{k=1}^{m} c_k\mathbf{w}_k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{l} \left(a_i + a_i'\right)\mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\mathbf{u}_j + \sum_{k=1}^{m} c_k\mathbf{w}_k
\end{aligned}$$

이므로 $\mathbf{v}$는 $\text{Span}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W)$의 원소이고, $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$는 $U + W$를 생성한다.

이제

$$\sum_{i=1}^{l} a_i \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{u}_j + \sum_{k=1}^{m} c_k \mathbf{w}_k = \mathbf{0}$$

이라고 하자. $\mathbf{u}_j$ 항을 제외하고 모두 우변으로 이항하면

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{l} -a_i \mathbf{v}_i + \sum_{k=1}^{m} -c_k \mathbf{w}_k$$

이 되고, $\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{u}_j$ 라고 두자.

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{u}_j \in \text{Span}\,\mathcal{B}_U = U$$

$$\sum_{i=1}^{l} -a_i \mathbf{v}_i + \sum_{k=1}^{m} -c_k \mathbf{w}_k \in \text{Span}\,\mathcal{B}_W = W$$

이므로, $\mathbf{z} \in U \cap W = \text{Span}\,\mathcal{B}_\cap = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l \rangle$ 이다. 그런데 $\mathcal{B}_U$와 $\mathcal{B}_W$는 일차 독립이므로 $j \in \{1, \ldots, l\}$에 대해 $b_j = 0$이고 $k \in \{1, \ldots, m\}$에 대해 $c_k = 0$이다. 이에 따라 $\mathbf{z} = \mathbf{0}$이 되어 $i \in \{1, \ldots, l\}$에 대해서도 $a_i = 0$이다. 그러므로 $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$은 일차 독립이다.

$\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$는 $U + W$를 생성하고 일차 독립이므로, $U + W$의 기저이다. 결국

$$\begin{aligned}
\dim(U + W) &= |\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W| \\
&= l + n + m \\
&= (l + n) + (l + m) - l \\
&= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)
\end{aligned}$$

□

My remark. 위 증명에서 $\mathcal{B}_\cap = \mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$ 임을 보이자.[1] 위 증명이 성립하기 위해서는 $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$와 $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ 먼저 $\mathcal{B}_\cap \subseteq \mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$ 임은 자명하다. $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$에 속하는 원소 $\mathbf{x}$를 고르자. $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W \subseteq U \cap W$이므로, $\mathbf{x} \in \text{Span}\,\mathcal{B}_\cap$이다. 나아가 $\mathcal{B}_U$와 $\mathcal{B}_W$의 원소인 $\mathbf{x}$는 $\mathcal{B}_\cap$의 모든 원소들과 독립이므로, $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_\cap$ 이어야 한다. 따라서 $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W \subseteq B_\cap$ 이다.

[1] $\mathcal{B}_U \setminus \mathcal{B}_W$는 $U \setminus W$의 기저가 아니다. $\mathbf{0} \in U \cap W$임에 따라 $\mathbf{0} \notin U \setminus W$이므로, $U \setminus W$는 벡터 공간이 아니기 때문이다.