공학 수학
강의 노트

이재호

jaeho.lee@snu.ac.kr

마지막 수정: 2018년 10월 7일

7 Linear Algebra: Matrices, Vectors, Determinants. Linear Systems

2018년 9월 3일 Field는 수학과 물리학에서 지칭하는 대상이 다르다:

- **체體**: 실수체, 복소수체
- **장場**: 전자기장, 벡터장

Definition 1. 체는 $+, -, \times, \div$에 대해 닫혀 있는 수 집합을 말한다.

Example.

- $\mathbb{Q}$는 조밀 (dense) 하다.
- $\mathbb{R}$은 꽉차 (complete) 있다.
- $\mathbb{C}$는 대수적으로 닫혀 (closed) 있다.
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$

Definition 2. 벡터 공간은 (roughly) 덧셈 (+) 과 (어떤 체에 속하는) 상수배가 정의된 집합이다.

Example.

- $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$은 덧셈에 대해 닫혀 있고, $k \in \mathbb{R}$의 곱에 대해 닫혀 있으므로 실수체에 대한 벡터 공간이다.

- $\mathbb{R}^n$과 $\mathbb{C}^n$은 실수체에 대한 벡터 공간이면서 유리수체에 대한 벡터 공간이다. 이를 각각 $\mathbb{Q}$–벡터 공간, $\mathbb{R}$–벡터 공간이라고 한다.
- $\mathcal{C}_I^0 = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f$는 연속 함수, $I \subset \mathbb{R}\}$에서는, $x \mapsto \sin x$가 하나의 벡터이다.
- $\mathcal{C}_I^n = \{f : I \to \mathbb{R} \mid \exists f^{(n)},\ f^{(n)}$는 연속 함수, $I \subset \mathbb{R}\}$이며, $\mathcal{C}_I^0 > \mathcal{C}_I^1 > \cdots > \mathcal{C}_I^\infty$이다.

Definition 2. 체 F에 대한 벡터 공간 V의 원소 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$에 대해서,

1. $c_1, \ldots, c_k \in F$일 때

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k$$

는 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$의 일차 결합, 혹은 선형 결합 (linear combination) 이라고 한다.

2. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$의 선형 생성

$$\mathrm{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$$

은 모든 일차 결합의 집합이다. 예를 들어, 어떤 평면 상의 평행하지 않은 두 벡터는 그 평면을 선형 생성한다.

3. $W \subset V$이면서 W가 벡터 공간이면, W는 V의 부분 공간이라고 하며 $W < V$로 표기한다. 예를 들어, 실수 평면으로 나타내어지는 $\mathbb{R}^2$ 벡터 공간의 부분 집합인 원점을 지나는 직선은 벡터 공간이므로 부분 공간이다. 반면, 원점을 지나지 않는 직선은 부분 집합이지만 벡터 공간은 아니므로 부분 공간이 아니다.

4. $W = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} < V$일 때, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$는 W의 생성자 (generator) 라고 한다.

5. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$가 일차 종속 (linearly dependent) 라는 것은 어느 하나가 다른 벡터들의 일차 결합이라는 것이다. 일차 종속이 아니면 일차 독립 (linearly independent) 이라고 한다. 예를 들어, $\mathbb{R}^3$에서 $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)$는 일차 종속인 반면, $(1,2,3), (4,5,6)$은 일차 독립이다.

2018년 9월 5일 **Theorem 1.** *체 F에 대한 벡터 공간 V의 원소들 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$가 일차 독립이라는 것은, $c_1, \ldots, c_k \in F$ 일 때*

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0} \ \Rightarrow\ c_1 = \cdots = c_k = 0$$

이라는 것과 동치이다.

Proof. ($\Rightarrow$) (재배열 가능하여) $c_k \neq 0$이라고 가정하자. 그렇다면,

$$\boldsymbol{v}_k = -\left(\frac{c_1}{c_k}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \frac{c_{k-1}}{c_k}\boldsymbol{v}_{k-1}\right)$$

이므로 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$가 일차 독립이라는 가정에 모순된다.

($\Leftarrow$) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$가 일차 종속이라고 가정하자. 즉, (재배열 가능하여) 어떤 $a_1, \ldots, a_{k-1} \in F$가 존재해서,

$$\boldsymbol{v}_k = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_{k-1}\boldsymbol{v}_{k-1}$$

이다. 그렇다면

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_{k-1}\boldsymbol{v}_{k-1} + (-1)\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}$$

이므로 모순이다. □

Example.

- $a, b, c \in \mathbb{R}$에 대해

  $$a(1,2,3) + b(4,5,6) + c(7,8,10) = (0,0,0)$$

  을 만족하는 a, b, c는 0밖에 없으므로 $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,10)$은 일차 독립이다.

- $\mathbf{0}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$는 일차 종속이다.

- $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$가 일차 독립이면 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 또한 일차 독립이다. (왜냐하면 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 가 종속이면 $\boldsymbol{v}_3 = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_4$이기 때문이다.)

Definition 3. 벡터 공간 V의 부분 공간 W가 일차 독립인 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$에 의해 생성될 때, $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$를 W의 기저(basis)라고 한다.

Theorem 2 (차원(dimension) 정리)**.** *W가 유한 생성 (finitely generated) (부분) 공간이면 W의 기저의 원소의 개수는 동일하다. 이 때, 기저의 원소의 개수를 W의 차원(dimension)이라고 하며,* $\dim W$*로 표기한다.*

Example.

- $\mathcal{P}_n = \{n$차 이하 실계수 다항식$\}$일 때, $f \in \mathcal{P}_n$는 항상 $\mathcal{B} = \{1, x, \ldots, x^n\}$의 원소의 상수배의 합으로 나타낼 수 있다. 또한,

  $$c_0 \cdot 1 + c_1x + \cdots + c_nx^n = 0$$

  이면 $c_0 = \ldots c_n = 0$이므로, $\mathcal{B}$는 기저이다.

- $\mathcal{P} = \{\text{모든 다항식}\}$의 기저는 $\{1, x, x^2, \dots\}$이며 $\dim \mathcal{P} = \infty$이다.

Homework.

1. a_1, a_2, a_3는 서로 다른 실수이다. 이 때, $(1, a_1, a_1^2), (1, a_2, a_2^2), (1, a_3, a_3^2)$이 일차 독립임을 보여라.

2. $a_1, \dots, a_n$는 서로 다른 실수이다. 이 때, $(1, a_1, a_1^2), \dots, (1, a_n, a_n^2)$이 일차 독립임을 보여라.

Theorem 3. *체 F에 대한 벡터 공간 V의 일차 독립인 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$에 대해서, $\boldsymbol{w} \in V \setminus \langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \rangle$이면 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}$는 일차 독립이다.*

Proof. $c_1, \dots, c_k, a \in F$일 때,

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k + a\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$$

이라고 가정하자. 만약 $a \neq 0$이라면

$$\boldsymbol{w} = -\left(\frac{c_1}{a}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \frac{c_k}{a}\boldsymbol{v}_k\right) \in \langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \rangle$$

이므로 모순이다. 따라서 $a = 0$이며, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$는 일차 독립이므로 $c_1 = \cdots = c_k = a = 0$이다. 그러므로 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}$는 일차 독립이다. □

Theorem 3에 따르면, 일차 독립인 벡터들의 선형 생성에 포함되지 않는 벡터 또한 이들과 일차 독립이다. 이에 따라 어떤 유한 생성 벡터 공간 V의 일차 독립인 벡터들 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$가 주어졌을 때, 선형 생성에 속하지 않는 벡터 $\boldsymbol{w}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{w}_{\dim V}$를 순차적으로 추가해서 기저를 구성할 수 있다. 이를 기저 확장 (basis extension) 이라고 부른다.

Theorem 4. *체 F에 대한 벡터 공간 V의 부분 공간 W_1, W_2가 주어졌을 때, $W_1 \cap W_2$ 또한 V의 부분 공간이다.*

Proof. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in W_1$이면서 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in W_2$이면, 각각 벡터 공간이므로 임의의 $c_1, c_2 \in F$에 대해서 $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 \in W_1$이면서 $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 \in W_2$이다. 즉,

$$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in W_1 \cap W_2 \;\Rightarrow\; \forall c_1, c_2 \in F \quad c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 \in W_1 \cap W_2$$

이다. 따라서, $W_1 \cap W_2 < V$가 성립한다. □

Definition 4. 벡터 공간 V의 부분 집합 W_1, W_2에 대해서 $W_1 + W_2$를 다음과 같이 정의한다:

$$W_1 + W_2 := \{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \mid \boldsymbol{v}_1 \in W_1, \boldsymbol{v}_2 \in W_2\}.$$

Example. 좌표 평면으로 나타내어지는 벡터 공간 $\mathbb{R}^2$의 부분 집합(이면서 부분 공간인) 인 원점을 지나는 직선을 W_1이라고 하자. 원점이 아닌 한 점만을 원소로 하는 집합 $W_2 \subset \mathbb{R}^2$가 주어졌을 때, $W_1 + W_2$는 W_1의 직선을 W_2의 (유일한) 원소의 점으로 평행 이동한 직선을 나타낸다.

Theorem 5. *체 F에 대한 벡터 공간 V의 부분 공간 W_1과 W_2에 대해서, $W_1 + W_2$도 V의 부분 공간이다.*

Proof. 임의의 $\boldsymbol{v}_1 \in W_1 + W_2$에 대해 어떤 $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$과 $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$가 존재하며, 마찬가지로 임의의 $\boldsymbol{v}_2 \in W_1 + W_2$에 대해 어떤 $\boldsymbol{u}_1 \in W_1$과 $\boldsymbol{u}_2 \in W_2$가 존재한다. W_1과 W_2는 부분 공간이므로 임의의 $c_1, c_2 \in F$에 대해

$$c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 \in W_1$$
$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 \in W_2$$

이고,

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = (c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2) + (c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2)$$

이므로,

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 \in W_1 + W_2$$

이다. 따라서 $W_1 + W_2 < V$이다. □

2018년 9월 10일 **Theorem 6** (그라스만(Graßmann) 공식)**.** *체 F에 대한 유한 생성 벡터 공간 U와 W에 대해, 다음이 성립한다:*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Proof. $l = \dim(U \cap W)$, $n = \dim U - l$, $m = \dim W - l$이라 하고, $U \cap W$의 기저를 $\mathcal{B}_\cap = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l\}$라고 하자. $\mathcal{B}_\cap$을 확장해 U의 기저 $\mathcal{B}_U = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$와 W의 기저 $\mathcal{B}_W = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$을 구성할 수 있다.

이제 $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$[1]가 $U + W$의 기저임을 보이자. $U + W$의 원소 $\boldsymbol{v}$를 고르면, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$가 되는

$$\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_l\boldsymbol{v}_l + b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{u}_n$$

[1]이를 위해서는 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$과 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$에 겹치는 원소가 없어야 한다. 이는 $\mathcal{B}_\cap = \mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$와 동치인데, 자명할수도 있겠지만 증명 후에 다루었다.

와

$$\boldsymbol{w} = a_1'\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_l'\boldsymbol{v}_l + c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{w}_m$$

가 존재하고, 이러한 $a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_n, a_1', \ldots, a_l', c_1, \ldots, c_m \in F$는 유일하다. 따라서,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{l} a_i\boldsymbol{v}_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{u}_j\right) + \left(\sum_{i=1}^{l} a_i'\boldsymbol{v}_i + \sum_{k=1}^{m} c_k\boldsymbol{w}_k\right) \\ &= \sum_{i=1}^{l} \left(a_i + a_i'\right)\boldsymbol{v}_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{u}_j + \sum_{k=1}^{m} c_k\boldsymbol{w}_k\end{aligned}$$

이므로 $\boldsymbol{v}$는 $\operatorname{Span}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W)$의 원소이고, $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$는 $U + W$를 생성한다.

이제

$$\sum_{i=1}^{l} a_i\boldsymbol{v}_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{u}_j + \sum_{k=1}^{m} c_k\boldsymbol{w}_k = \mathbf{0}$$

이라고 하자. $\boldsymbol{u}_j$ 항을 제외하고 모두 우변으로 이항하면

$$\sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{u}_j = \sum_{i=1}^{l} -a_i\boldsymbol{v}_i + \sum_{k=1}^{m} -c_k\boldsymbol{w}_k$$

이 되고, $\boldsymbol{z} = \sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{u}_j$라고 두자.

$$\sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{u}_j \in \operatorname{Span}\mathcal{B}_U = U$$

$$\sum_{i=1}^{l} -a_i\boldsymbol{v}_i + \sum_{k=1}^{m} -c_k\boldsymbol{w}_k \in \operatorname{Span}\mathcal{B}_W = W$$

이므로, $\boldsymbol{z} \in U \cap W = \operatorname{Span}\mathcal{B}_\cap = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l \rangle$이다. 즉

$$\boldsymbol{z} = d_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + d_l\boldsymbol{v}_l$$

이 되는 $d_1, \ldots, \boldsymbol{d}_l \in F$가 유일하게 존재한다. 그런데 $\mathcal{B}_U$와 $\mathcal{B}_W$는 일차 독립이므로 $j \in \{1, \ldots, l\}$에 대해 $b_j = 0$이고 $k \in \{1, \ldots, m\}$에 대해 $c_k = 0$이다. 이에 따라 $\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$이 되어 $i \in \{1, \ldots, l\}$에 대해서도 $a_i = 0$이다. 그러므로 $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$은 일차 독립이다.

$\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$는 $U + W$를 생성하고 일차 독립이므로, $U + W$의 기저이다. 결국

$$\begin{aligned}\dim(U + W) &= |\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W| \\ &= l + n + m \\ &= (l + n) + (l + m) - l \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)\end{aligned}$$

□

My remark. 위 증명에서 $\mathcal{B}_\cap = \mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$ 임을 보이자.[2] 위 증명이 성립하기 위해서는 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$와 $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$의 모든 원소가 달라야하기 때문이다. 먼저 $\mathcal{B}_\cap \subseteq \mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$ 임은 자명하다. $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W$에 속하는 원소 $\boldsymbol{x}$를 고르자. $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W \subseteq U \cap W$이므로, $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Span} \mathcal{B}_\cap$이다. 나아가 $\mathcal{B}_U$와 $\mathcal{B}_W$의 원소인 $\boldsymbol{x}$는 $\mathcal{B}_\cap$의 모든 원소들과 일차 독립이므로, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}_\cap$이어야 한다. 따라서 $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W \subseteq B_\cap$이다.

Definition 5. 체 F에 대한 벡터 공간 V, W에서, 임의의 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$와 $c_1, c_2 \in F$에 대해

$$L(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) = c_1 L(\boldsymbol{v}_1) + c_2 L(\boldsymbol{v}_2)$$

을 만족하는 함수 $L : V \to W$을 선형 변환(linear transformation) 혹은 선형 사상(linear map)이라고 한다.

Example.

1. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$에 대해,

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \\ 5x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   은 선형 변환이다.

2. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$에 대해,

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \\ 5x + 6y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   은 선형 변환이 아니다.

3. 어떤 사상 $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$이 존재한다는 것은 어떤 $m \times n$ 행렬 A가 존재해서 $L(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$라는 것이다.

[2]참고로, $\mathcal{B}_U \setminus \mathcal{B}_W$는 $U \setminus W$의 기저가 아니다. $\mathbf{0} \in U \cap W$임에 따라 $\mathbf{0} \notin U \setminus W$이므로, $U \setminus W$는 벡터 공간이 아니기 때문이다.

4. $f \mapsto f'$의 미분 연산자 $L : \mathcal{C}^\infty_I \to \mathcal{C}^\infty_I$는 $L(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 f_1' + c_2 f_2' = c_1 L(f_1) + c_2 L(f_2)$이므로 선형 변환이다.

5. $f(x) \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$의 적분 연산자 $L : \mathcal{C}^\infty_I \to \mathcal{C}^\infty_I$ 또한 선형 변환이다.

Definition 6. 두 벡터 공간 V와 W 간의 선형 변환 $L : V \to W$에 대해 다음이 정의된다:

1. L의 핵(kernel) 혹은 영 공간(null space)[3]

$$\ker L = \mathrm{N}(L) := \{\boldsymbol{v} \in V \mid L(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}.$$

2. L의 치역(range) 혹은 상(image)[4]

$$\mathrm{R}(L) = \mathrm{Im}(L) := \{L(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in V\}.$$

3. L이 일대일 함수(one-to-one function) 혹은 단사 함수(injective function, injection)라는 것은 다음을 의미한다:

$$\forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V \quad \big(L(\boldsymbol{v}_1) = L(\boldsymbol{v}_2) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2\big)$$

4. L이 위로의(onto) 함수 혹은 단사 함수(surjective function, surjection)라는 것은 다음을 의미한다:

$$\forall \boldsymbol{w} \in W \quad \exists \boldsymbol{v} \in V \quad L(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$$

Example.

1. $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$일 때 $\ker L\ \big(= \mathrm{N}(L)\big)$을 구하시오.

[3] 영 공간이라는 용어는 보통 행렬에 국한되어 사용되고, 핵은 추상적인 선형 변환에 대해 많이 사용된다.

[4] 치역은 정의역의 상이다. 상은 정의역의 부분 집합에 대해서도 정의될 수 있다.

Solution.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{Echelon}} \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Reduce}} \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

즉

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}z$$

이 되어, $\mathrm{N}(L) = \langle(1,-2,1)\rangle$ 이다. ■

2. $\mathrm{R}(L)$ $\big(= \mathrm{Im}(L)\big)$ 을 구하시오.

Solution. $L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ 이므로,

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{e}_1) &= (1,4,7)\\ L(\boldsymbol{e}_2) &= (2,5,8)\\ L(\boldsymbol{e}_3) &= (3,6,9) \end{aligned}$$

가 된다. 따라서

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(L) &= \{L(x,y,z) \mid (x,y,z) \in V\}\\ &= \{L(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3) \mid (x,y,z) \in V\}\\ &= \{xL(\boldsymbol{e}_1) + yL(\boldsymbol{e}_2) + zL(\boldsymbol{e}_3) \mid (x,y,z) \in V\}\\ &= \mathrm{Span}\{L(\boldsymbol{e}_1), L(\boldsymbol{e}_2), L(\boldsymbol{e}_3)\}\\ &= \langle(1,4,7),(2,5,8),(3,6,9)\rangle\\ &= \langle(1,4,7),(2,5,8)\rangle \end{aligned}$$

이다. ■

Theorem 7. *벡터 공간 V 와 W 간의 선형 사상 $L : V \to W$ 에 대해 $\mathrm{N}(L) < V$ 이고 $\mathrm{R}(L) < W$ 이다.*

Theorem 8 (계수 (rank)–퇴화 차수 (nullity) 정리)**.** *벡터 공간 V 와 W 간의 선형 사상 $L : V \to W$ 에 대해 다음이 성립한다:*

$$\dim \mathrm{N}(L) + \dim \mathrm{R}(L) = \dim V.$$ [5]

Example. 이전 예시에서 $\mathrm{N}(L) = \langle(1,-2,1)\rangle$ 이고 $\mathrm{R}(L) = \langle(1,4,7),(2,5,8)\rangle$ 이므로, $\dim \mathrm{N}(L) + \dim \mathrm{R}(L) = 1 + 2 = 3$ 이 성립한다.

2018년 9월 12일 **Theorem 9.** *벡터 공간 V 와 W 간의 선형 변환 $L : V \to W$ 에 대해서 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ 이 V 의 기저라면,*

$$\mathrm{R}(L) = \mathrm{Span}\{L(\boldsymbol{v}_1), \dots, L(\boldsymbol{v}_n)\}$$

이다.

Remark. 위에서 $\{L(\boldsymbol{v}_1), \dots, L(\boldsymbol{v}_n)\}$ 이 기저일 필요는 없다.

Theorem 10. *벡터 공간 V 와 W 간의 선형 변환 $L : V \to W$ 가 일대일이라는 것은 $\mathrm{N}(L) = \{\mathbf{0}\}$ 라는 것과 동치이다.*

Proof. $(\Rightarrow)$ $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 이고, L 은 일대일이므로 $L(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ 를 만족하는 $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ 가 유일하다.

$(\Leftarrow)$ $L(\boldsymbol{v}_1) = L(\boldsymbol{v}_2)$ 인 임의의 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ 를 고르자. 그렇다면

$$L(\boldsymbol{v}_1) - L(\boldsymbol{v}_2) = L(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0}$$

인데, $\mathrm{N}(L) = \{\mathbf{0}\}$ 이므로 $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$ 이다. 따라서 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ 이며, L 은 일대일 함수이다. □

Theorem 11. *벡터 공간 V 와 W 간의 선형 변환 $L : V \to W$ 가 일대일이라는 것은 $\dim \mathrm{R}(L) = \dim V$ 라는 것과 동치이다.*

Proof. L 이 일대일이라는 것은 Theorem 10에 따라 $\mathrm{N}(L) = \{\mathbf{0}\}$, 즉 $\dim \mathrm{N}(L) = 0$ 이라는 것과 동치이다.[6] 그런데 Theorem 8에 따라서 $\dim \mathrm{N}(L) + \dim \mathrm{R}(L) = \dim V$ 이므로, $\dim \mathrm{R}(L) = \dim V$ 가 성립한다. □

Theorem 12. *벡터 공간 V 와 W 간의 선형 변환 $L : V \to W$ 가 전단사라는 것은 L 의 역함수 $L^{-1} : W \to V$ 가 존재한다는 것이다. 이 때, L^{-1} 도 선형이다.*

Proof. 전단사 함수는 역함수가 존재하므로, L^{-1} 이 선형임을 보이면 된다.

---

[5] 계수와 퇴화 차수에 대해서는 다음 강좌에 정의한다.

[6] $\dim \mathrm{N}(L) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{N}(L) = \{\mathbf{0}\}$

W에서 두 원소 $\boldsymbol{w}_1$와 $\boldsymbol{w}_2$를 고르자. 이 때,

$$\begin{aligned} L^{-1}(\boldsymbol{w}_1) &= \boldsymbol{v}_1 \\ L^{-1}(\boldsymbol{w}_2) &= \boldsymbol{v}_2 \end{aligned}$$

라고 하자. 그렇다면 $\boldsymbol{w}_1$과 $\boldsymbol{w}_2$의 선형 결합은 다음과 같이 표현된다:

$$\begin{aligned} c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 &= c_1L(\boldsymbol{v}_1) + c_2L(\boldsymbol{v}_2) \\ &= L(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) \end{aligned}$$

양변에 역함수를 취해주면

$$\begin{aligned} L^{-1}(c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2) &= c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 \\ &= c_1L^{-1}(\boldsymbol{w}_1) + c_2L^{-1}(\boldsymbol{w}_2) \end{aligned}$$

이 되어 L^{-1} 또한 선형 변환임을 알 수 있다. □

Definition 7. 벡터 공간 V와 W간의 선형 변환 $L : V \to W$에 대해서, L의 계수

$$\operatorname{rank} L := \dim \mathrm{R}(L)$$

로 정의한다.

Theorem 13. *벡터 공간 U, V, W에 대해 선형 변환 $L_1 : U \to V$와 $L_2 : V \to W$이 주어졌다고 하자. 만약 L_2가 일대일 함수라면, 다음이 성립한다:*

$$\operatorname{rank}(L_2 \circ L_1) = \operatorname{rank} L_1$$

Proof. 정리 7에 의해 $\mathrm{R}(L_1)$은 벡터 공간이므로, 선형 변환 $\tilde{L}_2 : \mathrm{R}(L_1) \to W$를 정의하자:

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{R}(L_1) < V \qquad \tilde{L}_2(\boldsymbol{v}) = L_2(\boldsymbol{v})$$

따라서 $\tilde{L}_2$ 또한 일대일 선형 변환임을 알 수 있다. 정리 11에 따라

$$\dim \mathrm{R}(\tilde{L}_2) = \dim \mathrm{R}(L_1)$$

이다. 그런데

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(\tilde{L}_2) &= \{\tilde{L}_2(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in \mathrm{R}(L_1)\} \\ &= \{L_2(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in \mathrm{R}(L_1)\} \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}\mathrm{R}(L_2 \circ L_2) &= \{(L_2 \circ L_1)(\boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{u} \in U\} \\ &= \{L_2(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} = L_1(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{u} \in U\} \\ &= \{L_2(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in \mathrm{R}(L_1)\}\end{aligned}$$

이므로 $\mathrm{R}(\tilde{L}_2) = \mathrm{R}(L_2 \circ L_1)$ 이다. 따라서 $\dim \mathrm{R}(\tilde{L}_2) = \dim \mathrm{R}(L_2 \circ L_1) = \dim \mathrm{R}(L_1)$ 이 성립한다. $\square$

Remark. 위 증명에서 $\mathrm{R}(L_2 \circ L_1)$ 의 기저와 $\mathrm{R}(L_1)$ 의 기저의 개수가 같음을 보이면 되므로 $\mathrm{R}(L_1)$ 의 기저 각각에 L_2 를 취한 벡터들이 다시 $\mathrm{R}(L_2 \circ L_1)$ 의 기저가 됨을 보여도 된다.

Definition 8. $m \times n$ 행렬 (matrix) 이란, m 개의 행과 n 개의 열로 이루어진 원소들의 나열이다:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

두 행렬의 곱은 각각의 행렬에 대응되는 선형 변환의 합성에 대응된다. 즉, 어떤 선형 변환 $L_A : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ 이 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ 로 대응시키고 $L_B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 이 $A\boldsymbol{x} \mapsto B(A\boldsymbol{x}) = BA\boldsymbol{x}$ 로 대응시킨다면, BA 는 $L_B \circ L_A$ 에 대응된다.

$n \times n$ 행렬 A, B 에 대해서 $AB = BA = I$ 이라면, $A = B^{-1}$ 이고 $B = A^{-1}$ 이다. 이 때,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

을 말한다.

Definition 9. 선형 변환 L_A 에 대응되는 행렬 A 에 대해서, 열공간 (column space) 은 A 의 열벡터들의 생성이다. 따라서 열공간은 $\mathrm{R}(L_A)$ 와 동일하다. 이 때 열공간의 차원을 열계수 (column rank) 라고 부르며, L_A 의 계수 $\dim \mathrm{R}(L_A) = \operatorname{rank} L_A$ 와 같다.

마찬가지로, 행공간 (row space) 은 A 의 행벡터들의 생성이다. 이 때 행공간의 차원을 행계수 (row rank) 라고 부른다.

Example. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 에서 열벡터 $(1,4,7)$과 $(3,6,9)$는 일차 독립이고, $(2,5,8)$은 두 벡터의 합의 절반이므로 일차 종속이다. 따라서 열계수는 2이다. 또한 행벡터 $(1,2,3)$과 $(7,8,9)$는 일차 독립이고, $(4,5,6)$은 두 벡터의 합의 절반이므로 일차 종속이다. 따라서 행계수도 2이다.

Theorem 14. *선형 변환 L_A에 대응되는 행렬 A에 대해서, 열계수와 행계수는 동일하다. 즉, 열계수와 행계수 모두 $\operatorname{rank} L_A$로 나타내어지며 바로 행렬 A를 사용해 $\operatorname{rank} A$라고 쓸 수 있다.*

두 행을 교환하거나, 어떤 행의 상수배를 다른 행에 더하거나, 한 행에 0이 아닌 상수를 곱하는 연산을 행렬의 기본 행 연산이라고 한다. 마찬가지로 열에 대해서도 기본 열 연산을 정의할 수 있다.

Theorem 15. *두 행렬 A와 B의 곱을 C라고 하자. 행렬 A에 기본 행 연산을 취한 새로운 행렬을 $\tilde{A}$라고 하자. 행렬 C에 동일한 기본 행 연산을 취한 새로운 행렬을 $\tilde{C}$라고 하면, 여전히 $\tilde{A}B = \tilde{C}$가 성립한다.*

Definition 10. 항등행렬 I에 기본 행/열 연산을 한 번한 것을 기본 행렬이라고 부른다.

Example. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 은 모두 계수가 3인 기본 행렬들이다.

Theorem 16. *$n \times n$ 기본 행렬의 계수는 n이다.*

Proof. $n \times n$ 항등행렬 I에 대해서, 각 열벡터를 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$이라고 하자. 이 때 열벡터들은 서로 독립이므로 $\operatorname{rank} I = n$이다.

I에 어떤 기본 열 연산을 하여 기본 행렬 A를 만들었다고 하자. 기본 열 연산이 1. 열의 교환인 경우, 2. 열의 상수배를 하여 다른 열에 더한 경우, 3. 열에 0이 아닌 상수를 곱한 경우에 대해서 생각하자.

1. 열을 교환했을 경우
   i 번째 열과 j 번째 열을 교환했다고 하자. 그렇다면 A의 열벡터들은 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_j(i \text{ 번째}), \ldots, \boldsymbol{e}_i(j \text{ 번째}), \ldots, \boldsymbol{e}_n$이 된다. 그런데 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$은 순서와 상관없이 일차 독립이므로 A의 열벡터들도 일차 독립이다.

2. 열의 상수배를 하여 다른 열에 더한 경우
   i 번째 열에 k배를 하여 j 열에 더했다고 하자. ($k \neq 0$이다.) 그렇다면 A의

열벡터들은 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_j + k\boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 이 된다. 다음의 선형 결합을 생각하자:

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_j(\boldsymbol{e}_j + k\boldsymbol{e}_1) + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}$$

만약 c_j가 0이 아니라면, 다음과 같이 식을 재작성할 수 있다:

$$\boldsymbol{e}_j = -\frac{1}{c_j}\left(c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_{j-1}\boldsymbol{e}_{j-1} + c_{j+1}\boldsymbol{e}_{j+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n\right) + \frac{k}{c_j}\boldsymbol{e}_1$$

이 때 $\frac{k}{c_j} \neq 0$이므로 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 이 독립이라는 것에 모순이다. 따라서 $c_j = 0$ 이다. 결국,

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_{j-1}\boldsymbol{e}_{j-1} + c_{j+1}\boldsymbol{e}_{j+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}$$

가 되어, $c_1 = \cdots = c_{j-1} = c_{j+1} = \cdots = c_n = 0$이다. 그런데 $c_j = 0$이므로 $c_1 = \cdots = c_n = 0$이어서, A의 열벡터들도 일차 독립이다.

3. 열에 0이 아닌 상수를 곱한 경우
   i 번째 열에 $k \neq 0$을 곱했다고 하자. 그렇다면 A의 열벡터들은 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, k\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_n$ 이 된다. 다음의 선형 결합을 생각하자:

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_i(k\boldsymbol{e}_i) + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}$$

   $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 의 독립성에 의해 $c_1 = \cdots = c_i k = \cdots = c_n = 0$이 된다. 그런데 $k \neq 0$이므로 $c_1 = \cdots = c_n = 0$이다. 따라서 A의 열벡터들도 일차 독립이다.

따라서, A의 열공간의 차원은 n이고 정리 14 의해 $\operatorname{rank} A = n$이다. 마찬가지로 기본 행 연산의 경우에도 모든 과정을 행벡터에 대입하여 진행하면 동일하게 계수가 n임을 알 수 있다. □

Theorem 17. *어떤 유한 생성 벡터 공간 V와 부분 공간 W가 주어졌다고 하자. 그렇다면, 다음이 성립한다:*

$$\dim W = \dim V \Rightarrow W = V$$

Proof. $\dim W = \dim V = n$일 때, 벡터 공간 W의 기저 $\mathcal{B} = \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$를 구성하자. $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$은 일차 독립이고 V의 원소이기도 하므로, 기저 확장을 통해 V의 기저를 구성할 수 있다. 그런데 이미 $|\mathcal{B}| = \dim V$이므로, $\mathcal{B}$는 V의 기저이다. 따라서 $\operatorname{Span}\mathcal{B} = W = V$이다. □

Theorem 18. *선형 변환 $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$에 대해서, 다음의 명제는 동치이다:*

1. *L_A는 일대일 함수이다.*

2. *L_A는 위로의 함수이다.*

3. $\operatorname{rank} L_A = n$ *이다.*

Proof. 정리 11에 의해 L_A가 일대일 함수라는 것은 $\dim \mathrm{R}(L_A) = \dim \mathbb{R}^n$, 즉 $\operatorname{rank} L_A = n$이라는 것과 동치이다. 따라서 1과 3은 동치이다.

이제 2와 3이 동치임을 보이자. 만약 L_A가 위로의 함수이면, 공역과 치역이 동일하다. 즉, $\mathrm{R}(L_A) = \mathbb{R}^n$이다. 따라서 $\operatorname{rank} L_A = \dim \mathrm{R}(L_A) = \dim \mathbb{R}^n = n$이 성립한다.

역으로, $\operatorname{rank} L_A = n$이라고 하자. $\dim \mathrm{R}(L_A) = \dim \mathbb{R}^n$이므로, 정리 17에 따라 $\mathrm{R}(L_A) = \mathbb{R}^n$이다. 그러므로 L_A는 위로의 함수이다.

따라서, 1, 2, 3은 모두 동치이다. $\square$