

# 度量空间

ZetaWang

November 2, 2024

## Abstract

本文旨在通过介绍度量空间及其拓扑性质, 为将来拓扑学的学习进行铺垫.

## Contents

1	度量空间的介绍	2
2	度量空间的拓扑结构	7

# 1 度量空间的介绍

**定义 1.1.** 给定一个集合  $X$ , 把他的元素称为点 (point), 如果存在一个映射  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , 对任意  $x, y, z \in X$ , 满足:

- $d(x, y) \geq 0$ , 且  $d(x, y) = 0$  当且仅当  $x = y$ ;
- $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ .

则称  $X$  为度量空间 (metric space),  $d$  为距离 (distance).

以下为一些度量空间的例子.

**例 1.2.** 验证欧氏空间及其度量构成一个度量空间.

证明.

- $d(x, y) = (\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$ , 且  $d(x, y) = 0$  当且仅当  $x = y$ ;
- $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- 由 Minkowski 不等式,

$$\begin{aligned} &= (\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n (y_k - z_k)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq (\sum_{k=1}^n (x_k - z_k)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= d(x, z) \end{aligned}$$

因此, 欧氏空间及其度量构成一个度量空间.

□

**例 1.3.** 设  $E$  是一个非空集合, 对任意的  $x, y \in E$ , 定义

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

证明  $d$  是  $E$  上的度量. 拥有这种度量的集合  $E$  称为离散度量空间 (discrete metric space).

证明.

- $d(x, y) \geq 0$ , 且  $d(x, y) = 0$  当且仅当  $x = y$ ;
- $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  在  $x = z$  时显然成立; 若  $x \neq z$ , 则  $x = y$  和  $y = z$  至少一个不成立, 命题得证;

因此,  $d$  是  $E$  上的度量.

□

**例 1.4.** 设  $E$  是以  $d$  为度量的度量空间, 对任意  $x, y \in E$ , 定义

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

证明  $d_1$  也是  $E$  上的一个度量.

证明. 前两个条件显然成立, 来看第三个条件:

$$\begin{aligned}
 d_1(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \\
 \iff \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} &\leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} \\
 \iff 1 + \frac{1}{1 + d(x, z)} &\geq \frac{1}{1 + d(x, y)} + \frac{1}{1 + d(y, z)} \\
 \iff 1 + \frac{1}{1 + d(x, z)} &\geq \frac{2 + d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)}
 \end{aligned}$$

最后的不等式显然成立. 故  $d_1$  是  $E$  上的度量.

□

由此可知, 当已知度量空间上的一个度量时, 可以构造新的度量.

**例 1.5.** 设  $E$  是定义在有界闭区间  $[a, b]$  上的全体有界函数所成之集, 对任意  $f, g \in E$ , 定义

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

证明  $d$  是  $E$  上的度量.

证明. 前两个条件显然成立, 来看第三个条件: 由于

$$|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$$

对任意  $x \in [a, b]$  成立, 对右边取上确界, 得到

$$|f(x) - h(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |g(x) - h(x)|$$

再对左边取上确界, 得到

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - h(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |g(x) - h(x)|$$

因此,  $d$  是  $E$  上的度量.

□

**例 1.6.** 设  $p$  是一个素数, 对任一非零整数  $a$ , 定义  $v_p(a)$  为使得  $p^k$  整除  $a$  的最大的  $k$ , 即  $v_p(a) = \max\{k \in \mathbb{N} : p^k \mid a\}$ . 进一步, 对非零有理数  $x = \frac{a}{b}$  ( $a$  和  $b$  均为整数), 定义  $v_p(x) = v_p(a) - v_p(b)$ . 现对  $x \in \mathbb{Q}$ , 定义

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

证明  $d(x, y) = |x - y|_p$  是  $\mathbb{Q}$  上的度量.

证明. 前两个条件显然成立, 来看第三个条件:

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \\ \iff |x - z|_p &\leq |x - y|_p + |y - z|_p \end{aligned}$$

如果  $x = z$ , 显然; 如果  $x \neq z$ , 则不妨  $y \neq z$  且  $x \neq y$ ,

$$\begin{aligned} |x - z|_p &\leq |x - y|_p + |y - z|_p \\ \iff p^{-v_p(x-z)} &\leq p^{-v_p(x-y)} + p^{-v_p(y-z)} \end{aligned}$$

由于

$$v_p(a + b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$$

则

$$-v_p(x - z) \leq \max\{-v_p(x - y), -v_p(y - z)\}$$

即

$$p^{-v_p(x-z)} \leq p^{-v_p(x-y)} \leq p^{-v_p(x-y)} + p^{-v_p(y-z)}$$

故  $d(x, y) = |x - y|_p$  是  $\mathbb{Q}$  上的度量.

□

**定义 1.7.** 集合  $E$  上的度量  $d$  是非阿基米德的, 是指对任意  $x, y, z \in E$ , 有

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$$

否则, 称  $d$  为阿基米德的.

容易验证, 例 1.2、例 1.5 中的度量都是阿基米德的. 而例 1.6 中的度量是非阿基米德的.

**例 1.8.** 设  $E$  是一个具有非阿基米德度量的度量空间. 对任意  $a \in E$  及  $r > 0$ , 称  $B(a, r) = \{x \in E : d(x, a) < r\}$  为以  $a$  为圆心,  $r$  为半径的圆. 证明: 圆内每个点均为该圆的圆心.

证明. 任意取定  $b \in B(a, r)$ , 下面证明  $B(a, r) = B(b, r)$ .

一方面, 对于任意  $x \in B(a, r)$ , 有  $d(x, a) < r$ . 由于

$$d(x, b) \leq \max\{d(x, a), d(a, b)\}$$

且  $d(a, b) < r$ , 则  $d(x, b) < r$ , 即  $x \in B(b, r)$ .

另一方面, 由于对任意  $x \in B(b, r)$ , 有

$$d(x, a) \leq \max\{d(x, b), d(a, b)\}$$

故  $d(x, a) < r$ , 从而  $x \in B(a, r)$ . 综上,  $B(a, r) = B(b, r)$ . 即圆内每个点均为该圆的圆心.

□

## 2 度量空间的拓扑结构

**定义 2.1.** 设  $X$  为度量空间. 下面所提及的点或者集合都视为  $X$  中的点或者  $X$  的子集.

- 对  $p \in X$ , 称  $N_r(p) = \{q \in X : d(p, q) \leq r\}$  为  $p$  的邻域 (neighbourhood),  $r$  为半径 (radius);
- 如果点  $p$  的任意邻域都包含  $E$  中的点  $q$ , 则称  $p$  为  $E$  的一个极限点 (limit point);
- 如果  $p \in E$  且  $p$  不为极限点, 则称  $p$  为孤立点 (isolated point);
- 如果  $E$  的每个极限点都在  $E$  中, 则称  $E$  为闭集 (closed set);
- 如果存在  $p$  邻域  $N$  使得  $N$  包含于  $E$ , 则称  $p$  为  $E$  的内点 (interior point);
- 如果  $E$  的每个内点都在  $E$  中, 则称  $E$  为开集 (open set);
- $E$  的补集 (complement)  $E^c$  为集合  $X$  中所有不属于  $E$  的点所组成的集合;
- 如果集合  $E$  为闭集, 且  $E$  中每个点均为  $E$  的极限点, 则称  $E$  perfect.
- 如果存在一个实数  $M$  以及一个点  $p \in E$  使得  $d(p, q) < M$  对任意  $q \in E$ , 则称  $E$  有界 (bounded);
- 如果  $X$  中的每一个点都是  $E$  中的点或者  $E$  的极限点, 则称  $E$  在  $X$  中稠密;

以上大部分定义在  $\mathbb{R}^1$  中的情况都是我们已经熟悉的, 现在只是把这些概念推广到了一般的度量空间中. 在后续的拓扑学的学习中, 我们还可以将其推广到一般的拓扑空间中. 限于篇幅, 此处不再赘叙.

下面介绍一些最基本的性质.

**定理 2.2.** 每个邻域均为开集.

证明. 考虑一个邻域  $N_r(p)$ , 对任意  $q \in N_r(p)$ , 有  $d(p, q) < r$ , 故存在  $h_p > 0$  使得  $d(p, q) = r - h_p$ . 取  $N = N_{h_p}(q)$ , 则对任意  $s \in N$ , 有  $d(s, p) \leq d(s, q) + d(q, p) < h_p + r - h_p$ , 故  $N \subset N_r(p)$ . 因此,  $N_r(p)$  为开集.

□

**定理 2.3.** 如果  $p$  是  $E$  的极限点, 则  $p$  的任一邻域包含无穷个  $E$  中的点.

证明. 如果存在  $p$  的邻域  $N_r(p)$  使得其中只含有有限个  $E$  中的点, 设为  $q_1, q_2, \dots, q_m$ , 并记  $d(q_i, p) = r_i$ . 设  $r_0 = \min_{1 \leq i \leq m} \{r_i\}$ , 则考虑邻域  $N_{\frac{r_0}{2}}(p)$ , 显然这个邻域中不存在属于  $E$  且不为  $p$  的点. 矛盾.

□

**推论 2.4.** 有限点集没有极限点.

证明. 对于有限点集  $E$ , 如果有极限点  $p$ , 则  $p$  有 (事实上, 任意) 一个邻域包含  $E$  中有限个点, 由 **定理 2.3** 知矛盾.

□

**定理 2.5.** 集合  $E$  是开的当且仅当它的补集是闭的.

证明. 一方面, 如果  $E^c$  为闭集, 则对任意  $x \in E$ , 有  $x \notin E^c$ , 故  $x$  不为  $E^c$  的极限点, 从而存在  $x$  的邻域  $N$  使得  $N \cap E^c = \emptyset$ , 故  $N \subset E$ , 即  $x$  为  $E$  的内点, 因此  $E$  为开集.

另一方面, 如果  $E$  为开集, 对于任意  $E^c$  的任一极限点  $x$ , 有  $N/\{x\} \cap E^c \neq \emptyset$ , 其中  $N$  为  $x$  的邻域, 即  $x$  的任一邻域都不包含于  $E$ , 从而  $x$  不为  $E$  的内点,



又  $E$  为开集, 这说明  $x \notin E$ , 故  $x \in E^c$ , 从而  $E^c$  为闭集.

□

**推论 2.6.** 集合  $F$  是闭的当且仅当它的补集是开的.

证明. 由 **定理 2.5** 可直接得到.

□

**定理 2.7.** 开集的任意并仍为开集, 开集的有限交仍为开集.

证明. 给定度量空间  $X$  及其度量  $d, U_\alpha (\alpha \in I)$  为  $X$  中的一族开集, 对任意  $x \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ , 存在  $\alpha_0 \in I$ , 使得  $x \in U_{\alpha_0}$ . 则存在  $x$  的邻域  $N \subset U_{\alpha_0}$ , 故  $N \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ , 即  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  中任意一点为内点, 故  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  为开集.

另一方面, 对开集  $U_i, 1 \leq i \leq m$ , 对任意  $x \in \bigcap_{i=1}^m U_i$ , 有  $x \in U_i$  对  $1 \leq i \leq m$  成立, 故存在  $x$  的邻域  $N_i$  使得  $N_i \subset U_i$ , 设  $N_i$  的半径为  $r_i$ , 则取  $r = \min_{1 \leq i \leq m} \{r_i\}$ , 对应的有  $x$  的邻域  $N$ , 从而  $N \subset N_i$ , 进而  $N \subset \bigcap_{i=1}^m U_i$ , 故  $\bigcap_{i=1}^m U_i$  为开集.

□

这一条常常被作为定义一般拓扑空间的重要部分, 也说明其重要性.

**定义 2.8.**  $X$  为一个度量空间, 如果  $E \subset X, E'$  表示所有在  $X$  中的  $E$  的极限点, 则我们称  $\bar{E} = E \cup E'$  为  $E$  的闭包 (closure) .

**定理 2.9.** 如果  $X$  是一个度量空间,  $E \subset X$ , 则

- $\bar{E}$  为闭集;
- $E = \bar{E}$  当且仅当  $E$  是闭集;

- 对  $X$  中任意包含  $E$  的闭集  $F$ , 有  $\bar{E} \subset F$ ;

证明.

- 对于任意  $p \in \bar{E}^c$ ,  $p$  有一个邻域  $N$  使得  $N \cap E = \emptyset$ , 若  $N$  中含有  $E'$  中有限个点, 则可缩小邻域半径使得其为 0 个, 如果  $N$  中含有  $E'$  中无穷多个点, 则  $N$  中将含有  $E$  中的点, 矛盾. 因此,  $N \cap \bar{E} = \emptyset$ , 故  $\bar{E}^c$  为开集, 从而  $\bar{E}$  为闭集.
- 若  $E$  为闭集, 则  $E$  的任意极限点都包含于  $E$ , 即  $E' \subset E$ , 从而  $\bar{E} = E$ . 另一方面, 如果  $E = \bar{E}$ , 则由于  $\bar{E}$  为闭集, 则  $E$  也为闭集.
- 对  $X$  中任意包含  $E$  的闭集  $F$ , 则对任意  $x \in E'$ ,  $x$  的任一邻域  $N$  与  $E$  的交集不为空集, 从而  $N$  与  $F$  的交集也不为空集, 故  $x \in F' = F$ . 从而  $\bar{E} \subset F$ .

□

## 参考文献

- [1] Walter.Rudin. 数学分析原理. 北京: 机械工业出版社, 2019. [M].
- [2] 陆亚明. 数学分析入门. 北京: 高等教育出版社, 2023. [M].