度量空间

ZetaWang

November 2, 2024

Abstract

本文旨在通过介绍度量空间及其拓扑性质，为将来拓扑学的学习进行铺垫。

Contents

1 度量空间的介绍

定义 1.1. 给定一个集合 X, 把他的元素称为点 (point), 如果存在一个映射 $d: X \times X \to \mathbb{R}$，对任意 $x, y, z \in X$，满足：

- $d(x, y) \geq 0$，且 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$。

则称 X 为度量空间 (metric space),d 为距离 (distance) .

以下为一些度量空间的例子

例 1.2. 验证欧氏空间及其度量构成一个度量空间。

Proof.

- $d(x, y) = (\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$，且 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;

- 由 Minkowski 不等式，

$$
\begin{aligned}
&= (\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq (\sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= d(x, z)
\end{aligned}
$$

因此，欧氏空间及其度量构成一个度量空间。 □

例 1.3. 设 E 是一个非空集合，对任意的 $x, y \in E$，定义

$$
d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}
$$

证明 d 是 E 上的度量。拥有这种度量的集合 E 称为离散度量空间 (discrete metric space).

Proof.

- $d(x, y) \geq 0$，且 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 在 $x = z$ 时显然成立；若 $x \neq z$，则 $x = y$ 和 $y = z$ 至少一个不成立，命题得证；

因此，d 是 E 上的度量。 □

例 1.4. 设 E 是以 d 为度量的度量空间，对任意 $x, y \in E$, 定义

$$
d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}
$$

证明 d_1 也是 E 上的一个度量。

Proof. 前两个条件显然成立，来看第三个条件:

$$
\begin{aligned}
d_1(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) &\iff \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} \leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} \\
&\iff 1 + \frac{1}{1 + d(x, z)} \geq \frac{1}{1 + d(x, y)} + \frac{1}{1 + d(y, z)} \\
&\impliedby 1 + \frac{1}{1 + d(x, z)} \geq \frac{2 + d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)}
\end{aligned}
$$

最后的不等式显然成立。故 d_1 是 E 上的度量。 □

由此可知，当已知度量空间上的一个度量时，可以构造新的度量。

例 1.5. 设 E 是定义在有界闭区间 $[a,b]$ 上的全体有界函数所成之集，对任意 $f,g\in E$, 定义

$$d(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$$

证明 d 是 E 上的度量。

Proof. 前两个条件显然成立，来看第三个条件：由于

$$|f(x)-h(x)|\le|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|$$

对任意 $x\in[a,b]$ 成立，对右边取上确界，得到

$$|f(x)-h(x)|\le\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|+\sup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|$$

再对左边取上确界，得到

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)|\le\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|+\sup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|$$

因此，d 是 E 上的度量。 □

例 1.6. 设 p 是一个素数，对任一非零整数 a, 定义 $v_p(a)$ 为使得 p^k 整除 a 的最大的 k, 即 $v_p(a)=\max\{k\in\mathbb{N}:p^k\mid a\}$. 进一步，对非零有理数 $x=\frac{a}{b}$（a 和 b 均为整数），定义 $v_p(x)=v_p(a)-v_p(b)$. 现对 $x\in\mathbb{Q}$，定义

$$|x|_p=\begin{cases}p^{-v_p(x)} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

证明 $d(x,y)=|x-y|_p$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的度量。

Proof. 前两个条件显然成立，来看第三个条件：

$$\begin{aligned}&d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)\\ \iff\ &|x-z|_p\le|x-y|_p+|y-z|_p\end{aligned}$$

如果 $x=z$，显然；如果 $x\neq z$，则不妨 $y\neq z$ 且 $x\neq y$，

$$\begin{aligned}&|x-z|_p\le|x-y|_p+|y-z|_p\\ \Longleftarrow\ &p^{-v_p(x-z)}\le p^{-v_p(x-y)}+p^{-v_p(y-z)}\end{aligned}$$

由于

$$v_p(a+b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$$

则

$$-v_p(x-z) \leq \max\{-v_p(x-y), -v_p(y-z)\}$$

即

$$p^{-v_p(x-z)} \leq p^{-v_p(x-y)} \leq p^{-v_p(x-y)} + p^{-v_p(y-z)}$$

故 $d(x,y) = |x-y|_p$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的度量。 □

定义 1.7. 集合 E 上的度量 d 是 non-Archimedean，是指对任意 $x, y, z \in E$，有

$$d(x,z) \leq max\{d(x,y), d(y,z)\}$$

否则，称 d 为 Archimedean .

容易验证，例 1.2、例 1.5 中的度量都 Archimedean ，而例 1.6 中的度量 non-Archimedean .

例 1.8. 设 E 是一个具有 non-Archimedean 度量的度量空间。对任意 $a \in E$ 及 $r > 0$, 称 $B(a,r) = \{x \in E : d(x,a) < r\}$ 为以 a 为圆心，r 为半径的圆。证明：圆内每个点均为该圆的圆心。

2 度量空间的拓扑结构

定义 2.1. 设 X 为度量空间。下面所提及的点或者集合都视为 X 中的点或者 X 的子集。

- 对 $p \in X$, 称 $N_r(p) = \{q \in X : d(p,q) \leq r\}$ 为 p 的邻域（neighbourhood），r 为半径（radius）；
- 如果点 p 的任意邻域都包含 E 中的点 q, 则称 p 为 E 的一个极限点（limit point）；
- 如果 $p \in E$ 且 p 不为极限点，则称 p 为孤立点（isolated point）；
- 如果 E 的每个极限点都在 E 中，则称 E 为闭集（closed set）；
- 如果存在 p 邻域 N 使得 N 包含于 E, 则称 p 为 E 的内点（interior point）；
- 如果 E 的每个内点都在 E 中，则称 E 为开集（open set）；
- E 的补集（complement）E^c 为集合 X 中所有不属于 E 的点所组成的集合;
- 如果集合 E 为闭集，且 E 中每个点均为 E 的极限点，则称 E perfect.

- 如果存在一个实数 M 以及一个点 $p \in E$ 使得 $d(p,q) < M$ 对任意 $q \in E$，则称 E 有界（bounded）；
- 如果 X 中的每一个点都是 E 中的点或者 E 的极限点，则称 E 在 X 中稠密;

以上大部分定义在实数集及其上最常见的度量，都是我们已经熟悉的，现在只是把这些概念推广到了一般的度量空间中。在后续的拓扑学的学习中，我们还可以将其推广到一般的拓扑空间中。限于篇幅，此处不再赘叙。

下面介绍一些最基本的性质。

定理 2.2. 每个邻域均为开集。

定理 2.3. 如果 p 是 E 的极限点，则 p 的任一邻域包含无穷个 E 中的点。

推论 2.4. 有限点集没有极限点。

定理 2.5. 集合 E 是开的当且仅当它的补集是闭的。

推论 2.6. 集合 F 是闭的当且仅当它的补集是开的。

定理 2.7. 开集的任意并仍为开集，开集的有限交仍为开集。

这一条常常被作为定义一般拓扑空间的重要部分，也说明此时其作为性质的重要性。

定义 2.8.X 为一个度量空间，如果 $E \subset X$，E' 表示所有在 X 中的 E 的极限点，则我们称 $\overline{E} = E \cup E'$ 为 E 的闭包（clousure）.

定理 2.9. 如果 X 是一个度量空间，$E \subset X$，则

- $\overline{E}$ 为闭集；
- $E = \overline{E}$ 当且仅当 E 是闭集；
- 对 X 中任意包含 E 的闭集 F，有 $\overline{E} \subset F$；

参考文献