度量空间

ZetaWang

November 2, 2024

Abstract

本文旨在通过介绍度量空间及其拓扑性质, 为将来拓扑学的学习进行铺垫.

Contents

1 度量空间的介绍

定义 1.1. 给定一个集合 X, 把他的元素称为点 (point), 如果存在一个映射 $d: X \times X \to \mathbb{R}$, 对任意 $x, y, z \in X$, 满足:

- $d(x,y) \geq 0$, 且 $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
- $d(x,y) = d(y,x)$;
- $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$.

则称 X 为度量空间 (metric space),d 为距离 (distance) .

以下为一些度量空间的例子.

例 1.2. 验证欧氏空间及其度量构成一个度量空间.

证明.

- $d(x,y) = (\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$, 且 $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
- $d(x,y) = d(y,x)$;
- 由 Minkowski 不等式,

$$\begin{aligned}
&= (\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq (\sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= d(x,z)
\end{aligned}$$

因此, 欧氏空间及其度量构成一个度量空间.

□

例 1.3. 设 E 是一个非空集合, 对任意的 $x, y \in E$, 定义

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

证明 d 是 E 上的度量. 拥有这种度量的集合 E 称为离散度量空间 (discrete metric space).

证明.

- $d(x,y)\geq 0$, 且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;
- $d(x,y)=d(y,x)$;
- $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ 在 $x=z$ 时显然成立; 若 $x\neq z$, 则 $x=y$ 和 $y=z$ 至少一个不成立, 命题得证;

因此,d 是 E 上的度量.

$\square$

例 1.4. 设 E 是以 d 为度量的度量空间, 对任意 $x,y\in E$, 定义

$$d_1(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

证明 d_1 也是 E 上的一个度量.

证明. 前两个条件显然成立, 来看第三个条件:

$$\begin{aligned}
d_1(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z) &\Longleftrightarrow \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}\leq\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}+\frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}\\
&\Longleftrightarrow 1+\frac{1}{1+d(x,z)}\geq\frac{1}{1+d(x,y)}+\frac{1}{1+d(y,z)}\\
&\Longleftarrow 1+\frac{1}{1+d(x,z)}\geq\frac{2+d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}
\end{aligned}$$

最后的不等式显然成立. 故 d_1 是 E 上的度量.

$\square$

由此可知, 当已知度量空间上的一个度量时, 可以构造新的度量.

例 1.5. 设 E 是定义在有界闭区间 $[a,b]$ 上的全体有界函数所成之集, 对任意 $f,g\in E$, 定义

$$d(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$$

证明 d 是 E 上的度量.

证明. 前两个条件显然成立, 来看第三个条件：由于

$$|f(x)-h(x)| \leq |f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|$$

对任意 $x \in [a,b]$ 成立, 对右边取上确界, 得到

$$|f(x)-h(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|+\sup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|$$

再对左边取上确界, 得到

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|+\sup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|$$

因此,d 是 E 上的度量.

□

例 1.6. 设 p 是一个素数, 对任一非零整数 a, 定义 $v_p(a)$ 为使得 p^k 整除 a 的最大的 k, 即 $v_p(a)=\max\{k\in\mathbb{N}: p^k \mid a\}$. 进一步, 对非零有理数 $x=\frac{a}{b}$（a 和 b 均为整数）, 定义 $v_p(x)=v_p(a)-v_p(b)$. 现对 $x\in\mathbb{Q}$, 定义

$$|x|_p=\begin{cases} p^{-v_p(x)} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

证明 $d(x,y)=|x-y|_p$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的度量.

证明. 前两个条件显然成立, 来看第三个条件：

$$\begin{aligned} & d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z) \\ \Longleftrightarrow\ & |x-z|_p \leq |x-y|_p+|y-z|_p \end{aligned}$$

如果 $x=z$, 显然; 如果 $x\neq z$, 则不妨 $y\neq z$ 且 $x\neq y$,

$$\begin{aligned} & |x-z|_p \leq |x-y|_p+|y-z|_p \\ \Longleftarrow\ & p^{-v_p(x-z)} \leq p^{-v_p(x-y)}+p^{-v_p(y-z)} \end{aligned}$$

由于
$$v_p(a+b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$$
则
$$-v_p(x-z) \leq \max\{-v_p(x-y), -v_p(y-z)\}$$
即
$$p^{-v_p(x-z)} \leq p^{-v_p(x-y)} \leq p^{-v_p(x-y)} + p^{-v_p(y-z)}$$
故 $d(x,y) = |x-y|_p$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的度量.

□

定义 1.7. 集合 E 上的度量 d 是非阿基米德的, 是指对任意 $x, y, z \in E$, 有
$$d(x,z) \leq max\{d(x,y), d(y,z)\}$$
否则, 称 d 为阿基米德的.

容易验证, 例 1.2、例 1.5 中的度量都是阿基米德的. 而例 1.6 中的度量是非阿基米德的.

例 1.8. 设 E 是一个具有非阿基米德度量的度量空间. 对任意 $a \in E$ 及 $r > 0$, 称 $B(a,r) = \{x \in E : d(x,a) < r\}$ 为以 a 为圆心,r 为半径的圆. 证明：圆内每个点均为该圆的圆心.

证明. 任意取定 $b \in B(a,r)$, 下面证明 $B(a,r) = B(b,r)$.
一方面, 对于任意 $x \in B(a,r)$, 有 $d(x,a) < r$. 由于
$$d(x,b) \leq max\{d(x,a), d(a,b)\}$$
且 $d(a,b) < r$, 则 $d(x,b) < r$, 即 $x \in B(b,r)$.
另一方面, 由于对任意 $x \in B(b,r)$, 有
$$d(x,a) \leq max\{d(x,b), d(a,b)\}$$
故 $d(x,a) < r$, 从而 $x \in B(a,r)$. 综上,$B(a,r) = B(b,r)$. 即圆内每个点均为该圆的圆心.

□

2 度量空间的拓扑结构

定义 2.1. 设 X 为度量空间. 下面所提及的点或者集合都视为 X 中的点或者 X 的子集.

- 对 $p \in X$, 称 $N_r(p) = \{q \in X : d(p,q) \leq r\}$ 为 p 的邻域（neighbourhood）,r 为半径（radius）;
- 如果点 p 的任意邻域都包含 E 中的点 q, 则称 p 为 E 的一个极限点（limit point）;
- 如果 $p \in E$ 且 p 不为极限点, 则称 p 为孤立点（isolated point）;
- 如果 E 的每个极限点都在 E 中, 则称 E 为闭集（closed set）;
- 如果存在 p 邻域 N 使得 N 包含于 E, 则称 p 为 E 的内点（interior point）;
- 如果 E 的每个内点都在 E 中, 则称 E 为开集（open set）;
- E 的补集（complement）E^c 为集合 X 中所有不属于 E 的点所组成的集合;
- 如果集合 E 为闭集, 且 E 中每个点均为 E 的极限点, 则称 E perfect.
- 如果存在一个实数 M 以及一个点 $p \in E$ 使得 $d(p,q) < M$ 对任意 $q \in E$, 则称 E 有界（bounded）;
- 如果 X 中的每一个点都是 E 中的点或者 E 的极限点, 则称 E 在 X 中稠密;

以上大部分定义在 $\mathbb{R}^1$ 中的情况都是我们已经熟悉的, 现在只是把这些概念推广到了一般的度量空间中. 在后续的拓扑学的学习中, 我们还可以将其推广到一般的拓扑空间中. 限于篇幅, 此处不再赘叙.

下面介绍一些最基本的性质.

定理 2.2. 每个邻域均为开集.

证明. 考虑一个邻域 $N_r(p)$, 对任意 $q \in N_r(p)$, 有 $d(p,q) < r$, 故存在 $h_p > 0$ 使得 $d(p,q) = r - h_p$. 取 $N = N_{h_p}(q)$, 则对任意 $s \in N$, 有 $d(s,p) \leq d(s,q) + d(q,p) < h_p + r - h_p$, 故 $N \subset N_r(p)$. 因此,$N_r(p)$ 为开集.

□

定理 2.3. 如果 p 是 E 的极限点, 则 p 的任一邻域包含无穷个 E 中的点.

证明. 如果存在 p 的邻域 $N_r(p)$ 使得其中只含有有限个 E 中的点, 设为 $q_1, q_2, \cdots, q_m$, 并记 $d(q_i, p) = r_i$. 设 $r_0 = \min_{1\le i\le m}\{r_i\}$, 则考虑邻域 $N_{\frac{r_0}{2}}(p)$, 显然这个邻域中不存在属于 E 且不为 p 的点. 矛盾.

□

推论 2.4. 有限点集没有极限点.

证明. 对于有限点集 E, 如果有极限点 p, 则 p 有（事实上, 任意）一个邻域包含 E 中有限个点, 由 **定理 2.3** 知矛盾.

□

定理 2.5. 集合 E 是开的当且仅当它的补集是闭的.

证明. 一方面, 如果 E^c 为闭集, 则对任意 $x \in E$, 有 $x \notin E^c$, 故 x 不为 E^c 的极限点, 从而存在 x 的邻域 N 使得 $N \cap E^c = \emptyset$, 故 $N \subset E$, 即 x 为 E 的内点, 因此 E 为开集.
另一方面, 如果 E 为开集, 对于任意 E^c 的任一极限点 x, 有 $N/\{x\} \cap E^c \neq \emptyset$, 其中 N 为 x 的邻域, 即 x 的任一邻域都不包含于 E, 从而 x 不为 E 的内点, 又 E 为开集, 这说明 $x \notin E$, 故 $x \in E^c$, 从而 E^c 为闭集.

□

推论 2.6. 集合 F 是闭的当且仅当它的补集是开的.

证明. 由 **定理 2.5** 可直接得到.

□

定理 2.7. 开集的任意并仍为开集, 开集的有限交仍为开集.

证明. 给定度量空间 X 及其度量 d,$U_\alpha(\alpha \in I)$ 为 X 中的一族开集, 对任意 $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$, 存在 $\alpha_0 \in I$, 使得 $x \in U_{\alpha_0}$. 则存在 x 的邻域 $N \subset U_{\alpha_0}$, 故 $N \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$, 即 $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ 中任意一点为内点, 故 $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ 为开集.
另一方面, 对开集 $U_i, 1 \le i \le m$, 对任意 $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} U_i$, 有 $x \in U_i$ 对 $1 \le i \le m$ 成立,

故存在 x 的邻域 N_i 使得 $N_i \subset U_i$, 设 N_i 的半径为 r_i, 则取 $r = \min_{1\le i\le m}\{r_i\}$, 对应的有 x 的邻域 N, 从而 $N \subset N_i$, 进而 $N \subset \bigcap_{i=1}^{m} U_i$, 故 $\bigcap_{i=1}^{m} U_i$ 为开集.

□

这一条常常被作为定义一般拓扑空间的重要部分, 也说明其重要性.

定义 2.8.X 为一个度量空间, 如果 $E \subset X$,E' 表示所有在 X 中的 E 的极限点, 则我们称 $\overline{E} = E \cup E'$ 为 E 的闭包（clousure）.

定理 2.9. 如果 X 是一个度量空间,$E \subset X$, 则

- $\overline{E}$ 为闭集;
- $E = \overline{E}$ 当且仅当 E 是闭集;
- 对 X 中任意包含 E 的闭集 F, 有 $\overline{E} \subset F$;

证明.

- 对于任意 $p \in \overline{E}^c$, p 有一个邻域 N 使得 $N \cap E = \emptyset$, 若 N 中含有 E' 中有限个点, 则可缩小邻域半径使得其为 0 个, 如果 N 中含有 E' 中无穷多个点, 则 N 中将含有 E 中的点, 矛盾. 因此,$N \cap \overline{E} = \emptyset$, 故 $\overline{E}^c$ 为开集, 从而 $\overline{E}$ 为闭集.
- 若 E 为闭集, 则 E 的任意极限点都包含于 E, 即 $E' \subset E$, 从而 $\overline{E} = E$.
  另一方面, 如果 $E = \overline{E}$, 则由于 $\overline{E}$ 为闭集, 则 E 也为闭集.
- 对 X 中任意包含 E 的闭集 F, 则对任意 $x \in E'$,x 的任一邻域 N 与 E 的交集不为空集, 从而 N 与 F 的交集也不为空集, 故 $x \in F' = F$. 从而 $\overline{E} \subset F$.

□

参考文献

[1] Walter.Rudin. 数学分析原理. 北京：机械工业出版社, 2019.

[2] 陆亚明. 数学分析入门. 北京：高等教育出版社, 2023.