度量空间

ZetaWang

October 30, 2024

Abstract

本文旨在通过介绍度量空间及其拓扑性质，为将来拓扑学的学习进行铺垫。

Contents

1 度量空间的介绍 **1**

2 度量空间的拓扑结构 **3**

1 度量空间的介绍

定义 1.1. 给定一个集合 X，把他的元素称为点 (point)，如果存在一个映射 $d: X \times X \to \mathbb{R}$，对任意 $x, y, z \in X$，满足：

- $d(x,y) \geq 0$，且 $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
- $d(x,y) = d(y,x)$;
- $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$。

则称 X 为度量空间 (metric space),d 为距离 (distance) .

以下为一些度量空间的例子

例 1.2. 验证欧氏空间及其度量构成一个度量空间。

Proof.

- $d(x,y) = (\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$，且 $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
- $d(x,y) = d(y,x)$;

- 由 Minkowski 不等式，

$$
\begin{aligned}
&= (\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq (\sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= d(x, z)
\end{aligned}
$$

因此，欧氏空间及其度量构成一个度量空间。 □

例 1.3. 设 E 是一个非空集合，对任意的 $x, y \in E$，定义

$$
d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}
$$

证明 d 是 E 上的度量。拥有这种度量的集合 E 称为离散度量空间 (discrete metric space).

例 1.4. 设 E 是以 d 为度量的度量空间，对任意 $x, y \in E$, 定义

$$
d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}
$$

证明 d_1 也是 E 上的一个度量。

例 1.5. 设 E 是定义在有界闭区间 $[a, b]$ 上的全体有界函数所成之集，对任意 $f, g \in E$, 定义

$$
d(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|
$$

. 证明 d 是 E 上的度量。

例 1.6. 设 p 是一个素数，对任一非零整数 a, 定义 $v_p(a)$ 为使得 p^k 整除 a 的最大的 k, 即 $v_p(a) = \max\{k \in \mathbb{N} : p^k \mid a\}$. 进一步，对非零有理数 $x = \frac{a}{b}$（a 和 b 均为整数），定义 $v_p(x) = v_p(a) - v_p(b)$. 现对 $x \in \mathbb{Q}$，定义

$$
|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}
$$

证明 $d(x, y) = |x - y|_p$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的度量。

定义 1.7. 集合 E 上的度量 d 是 non-Archimedean，是指对任意 $x, y, z \in E$, 有

$$
d(x, z) \leq max\{d(x, y), d(y, z)\}
$$

否则，称 d 为 Archimedean .

容易验证，例 1.2、例 1.5 中的度量都 Archimedean ，而例 1.6 中的度量 non-Archimedean .

例 1.8. 设 E 是一个具有 non-Archimedean 度量的度量空间。对任意 $a \in E$ 及 $r > 0$, 称 $B(a,r) = \{x \in E : d(x,a) < r\}$ 为以 a 为圆心，r 为半径的圆。证明：圆内每个点均为该圆的圆心。

2 度量空间的拓扑结构

定义 2.1. 设 X 为度量空间。

- 对 $p \in X$, 称 $N_r(p) = \{q \in X : d(p,q) \le r\}$ 为 p 的邻域（neighbourhood），r 为半径（radius）；
-

参考文献