

度量空间

ZetaWang

October 30, 2024

Abstract

本文旨在通过介绍度量空间及其拓扑性质，为将来拓扑学的学习进行铺垫。

Contents

1 度量空间的介绍	1
2 度量空间的拓扑结构	2

1 度量空间的介绍

给定一个集合 X , 把他的元素称为点 (point), 如果存在一个映射 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, 对任意 $x, y, z \in X$, 满足:

1. $d(x, y) \geq 0$, 且 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ 。

则称 X 为度量空间 (metric space), d 为距离 (distance)。

以下为一些度量空间的例子:

例 1 验证欧氏空间及其度量构成一个度量空间。(即 $d(x, y) = (\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2)^{\frac{1}{2}}$)

Proof. 1. $d(x, y) = (\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$, 且 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;

2. $d(x, y) = d(y, x)$;

3. 由 Minkowski 不等式,

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^n (y_k - z_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \left(\sum_{k=1}^n (x_k - z_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= d(x, z) \end{aligned}$$

因此, 欧氏空间及其度量构成一个度量空间。

□

例 2 设 E 是一个非空集合, 对任意的 $x, y \in E$, 定义

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

证明 d 是 E 上的度量。拥有这种度量的集合 E 称为离散度量空间 (discrete metric space).

2 度量空间的拓扑结构

参考文献