度量空间

ZetaWang

October 30, 2024

Abstract

本文旨在通过介绍度量空间及其拓扑性质，为将来拓扑学的学习进行铺垫。

Contents

1 度量空间的介绍

给定一个集合 X, 把他的元素称为点 (point), 如果存在一个映射 $d: X\times X \to \mathbb{R}$, 对任意 $x,y,z\in X$，满足：

1. $d(x,y)\geq 0$，且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;
2. $d(x,y)=d(y,x)$;
3. $d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$。

则称 X 为度量空间 (metric space),d 为距离 (distance) .

以下为一些度量空间的例子：

例 1 验证欧氏空间及其度量构成一个度量空间。(即 $d(x,y)=(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2)^{\frac{1}{2}}$)

Proof. 1. $d(x,y)=(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2)^{\frac{1}{2}}\geq 0$，且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

2. $d(x,y)=d(y,x)$;

3. 由 Minkowski 不等式，

$$
\begin{aligned}
d(x,y)+d(y,z) &= (\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^{n}(y_k-z_k)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq (\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= d(x,z)
\end{aligned}
$$

因此，欧氏空间及其度量构成一个度量空间。 □

例 2 设 E 是一个非空集合，对任意的 $x,y\in E$，定义

$$
d(x,y)=\begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x\neq y \end{cases}
$$

证明 d 是 E 上的度量。拥有这种度量的集合 E 称为离散度量空间 (discrete metric space).

2 度量空间的拓扑结构

参考文献